ФОРМУЛЫ · ЧЕРТЕЖИ · ВЫБОР МЕТОДА

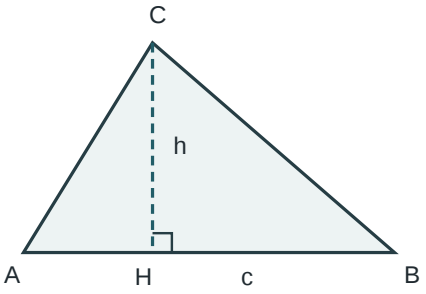
Площадь треугольника

Основные формулы, частные случаи и дополнительные приёмы — от высоты к стороне до координат и клетчатой бумаги.

Обозначения во всей памятке

S — площадь; $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ — стороны; h_a, h_b, h_c — высоты к этим сторонам; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр. Угол A лежит напротив стороны a; аналогично для B и C.

01 Сторона и высота к ней



Высота перпендикулярна выбранной стороне или её продолжению.

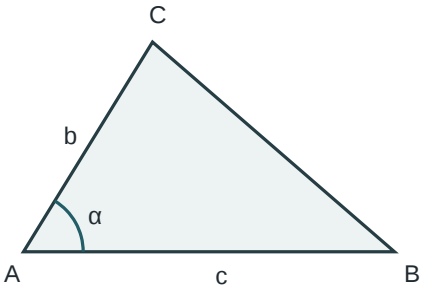
$$S = \frac{1}{2} c h_c$$

Подходит для **любого треугольника**. В качестве основания можно выбрать любую сторону.

На чертеже $h = CH = h_c$.

> У тупоугольного треугольника основание высоты может лежать вне стороны. Формула не меняется.

02 Две стороны и угол между ними



Выделенный угол заключён между известными сторонами.

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

На рисунке $\alpha = \angle A$.

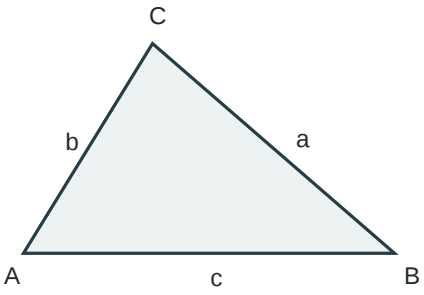
Равноправные записи:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C;$$

$$S = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

> Важно брать угол **между** выбранными сторонами, а не любой известный угол.

03 Три стороны: формула Герона



Высота и углы не нужны: достаточно длин сторон.

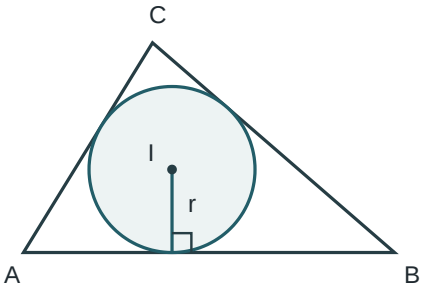
Сначала найдите полупериметр:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

> Проверьте существование треугольника: сумма любых двух сторон должна быть больше третьей.

04 Вписанная окружность и полупериметр



Радиус к точке касания перпендикулярен стороне.

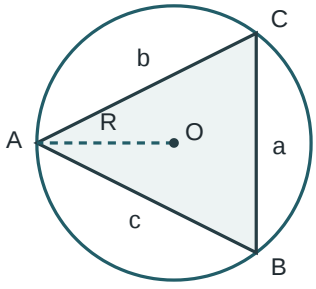
$$S = pr$$

r — радиус **вписанной** окружности, I — её центр.

Если соединить I с вершинами, получатся три треугольника с общей высотой r к сторонам исходного треугольника.

Дополнительно: для радиуса вневписанной окружности r_a, касающейся стороны a, верно $S = (p - a)r_a$.

05 Описанная окружность и три стороны



Все три вершины лежат на окружности.

$$S = \frac{abc}{4R}$$

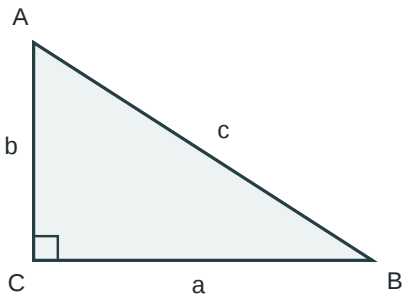
R — радиус **описанной** окружности, O — её центр.

Если известны радиус и два угла, сначала найдите третий угол. Затем можно применить:

$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

> Не путайте R описанной окружности и r вписанной.

06 Прямоугольный треугольник



Катеты уже перпендикулярны друг другу.

$$S = \frac{1}{2}ab$$

Здесь a и b — катеты, c — гипотенуза.

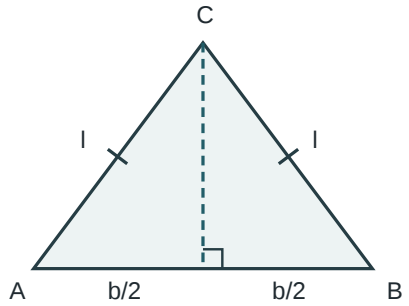
Если известны гипотенуза и высота к ней:

$$S = \frac{1}{2}ch_c.$$

Если известны гипотенуза и катет:

$$S = \frac{a}{2}\sqrt{c^2 - a^2}.$$

07 Равнобедренный и равносторонний



Высота к основанию делит основание пополам.

Равнобедренный: боковая сторона l, основание b.

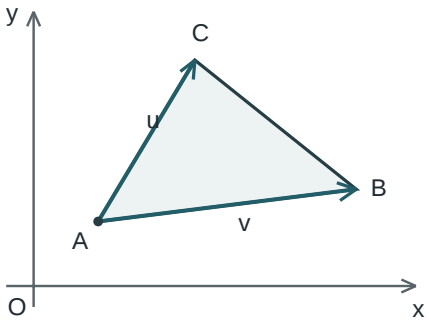
$$S = \frac{b}{4}\sqrt{4l^2 - b^2}$$

Равносторонний: все стороны равны a.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Для него также $S = 3\sqrt{3}\,r^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

08 Координаты и векторы



Два вектора должны выходить из одной вершины.

Для вершин $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$:

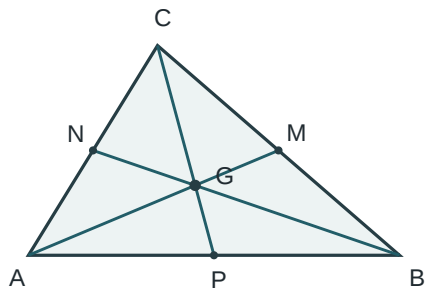
$$S = \frac{1}{2}\Big|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\Big|.$$

Если $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, то

$$S = \frac{1}{2}|u_x v_y - u_y v_x|.$$

В пространстве: $S = \dfrac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$. Модуль обеспечивает неотрицательный результат.

09 Если известны три медианы



Медиана соединяет вершину с серединой противоположной стороны.

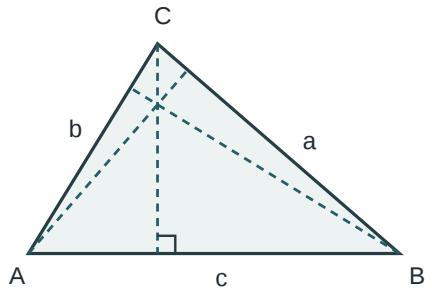
Пусть m_a, m_b, m_c — длины медиан.

$$q = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$$

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{q(q-m_a)}\cdot \sqrt{(q-m_b)(q-m_c)}$$

То есть площадь равна $\frac{4}{3}$ площади вспомогательного треугольника со сторонами, равными медианам.

10 Если известны три высоты



Каждая высота относится к своей стороне: $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$.

Введите обратные величины:

$$u = \frac{1}{h_a},\ v = \frac{1}{h_b},\ w = \frac{1}{h_c},$$
$$q = \frac{u+v+w}{2}.$$

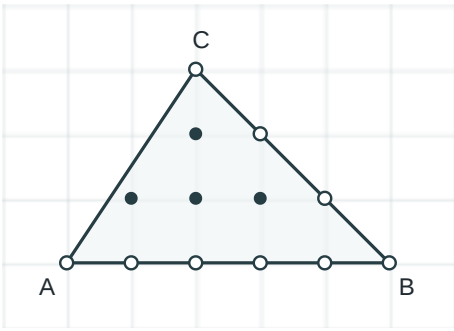
Найдите вспомогательную величину:

$$D = \sqrt{q(q-u)(q-v)(q-w)}.$$

$$S = \frac{1}{4D}$$

Обратные высоты пропорциональны сторонам. Это дополнительный способ, когда другие данные отсутствуют.

11 На клетчатой бумаге: формула Пика



Внутренние узлы — закрашенные точки; граничные — незакрашенные.

Работает, если **все вершины находятся в узлах квадратной сетки**.

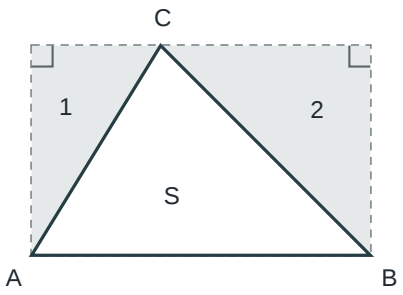
$$S = \left(I + \frac{B}{2} - 1\right) d^2$$

I — число узлов строго внутри;
B — число узлов на границе;
d — сторона клетки.

На рисунке $I = 4$, $B = 9$, поэтому $S = 7{,}5d^2$.

> Вершины тоже входят в B. Каждый граничный узел считайте один раз.

12 Разбиение и дополнение



Искомый треугольник дополнен до прямоугольника.

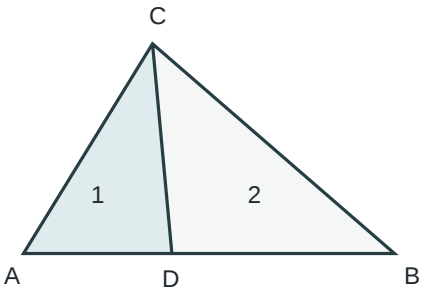
Вычитание: заключите треугольник в фигуру, площадь которой легко найти.

$$S = S_{\text{прям.}} - S_1 - S_2$$

Сложение: разделите исходный треугольник на удобные части и сложите их площади.

> Части не должны перекрываться или оставлять незаполненные промежутки.

13 Отношения площадей



У треугольников с вершиной C и основаниями на AB общая высота.

Общая высота:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{DB}$$

Медиана делит площадь пополам. Биссектриса из C делит её в отношении $AC : BC$.

Подобные треугольники: если отношение соответствующих сторон равно k, то

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Как быстро выбрать способ

Не вычисляйте лишнее: сначала сопоставьте известные данные с формулой.

Что известно или видно в условии	Что использовать
Сторона и перпендикуляр к ней	$S = \frac{1}{2}ah_a$
Две стороны и угол между ними	$S = \frac{1}{2}bc\sin A$
Три стороны	Формулу Герона, способ 03
Вписанная окружность и стороны	$S = pr$
Описанная окружность и стороны	$S = \frac{abc}{4R}$

Что известно или видно в условии	Что использовать
Прямой угол, равные стороны	Частные формулы, способы 06–07
Координаты вершин или векторы	Определитель, способ 08
Три медианы или три высоты	Способы 09–10
Вершины в узлах квадратной сетки	Основание и высоту, дополнение или формулу Пика
Известны площади частей, отношения отрезков	Сложение, вычитание и отношения площадей

Проверка результата. Площадь невырожденного треугольника положительна. Все длины перед подстановкой приводите к одной единице измерения; ответ записывайте в квадратных единицах. Для двух фиксированных сторон b и c всегда $S \leqslant \frac{1}{2}bc$.