

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Тренировочный вариант

Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 10 - 0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

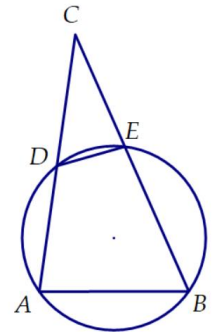
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CDE, если $AB=14$, $DE=7$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 24.

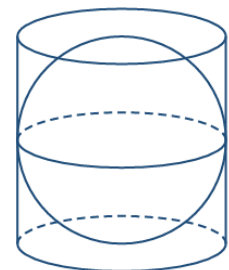


Ответ: _____.

2. Даны три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , сумма которых равна нулевому вектору: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Длины этих векторов равны $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 6$. Найдите значение суммы их попарных скалярных произведений $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

Ответ: _____.

3. Сфера вписана в цилиндр. Объем шара равен 42. Найдите объем части цилиндра, находящейся вне вписанной в него сферы (то есть объем пустого пространства между сферой и стенками цилиндра).



Ответ: _____.

4. За круглый стол на 21 стул в случайном порядке рассаживаются 19 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть ровно один мальчик.

Ответ: _____.

5. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Известно, что вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним стрелком, равна 0,96. Вероятность того, что оба стрелка попадут в мишень одновременно, равна 0,4. Найдите вероятность того, что в мишень попадет ровно один стрелок.

Ответ: _____.

6. Найдите корень уравнения $4^{x^2-12x+36} = \cos(\pi x)$.

Ответ: _____.

7. Найдите значение выражения $\log_2 \left(\frac{16 \sin 106^\circ}{\cos 37^\circ \cdot \cos 53^\circ} \right)$.

Ответ: _____.

8. Прямая $y = -2x - 5$ является касательной к графику функции $y = 3x^3 - 6x^2 + ax - 5$. Найдите значение параметра a . Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее значение a .

Ответ: _____.

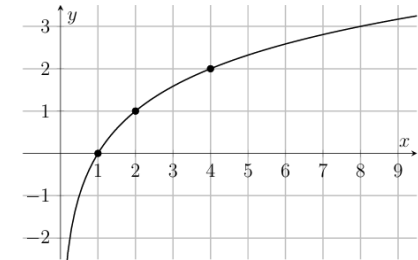
9. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой $f_0 = 749$ МГц. Скорость спуска батискафа вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде, а f – частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала f , если скорость погружения батискафа равна 2 м/с.

Ответ: _____.

10. Человек спускается по идущему вниз эскалатору за 24 секунды. Если он будет идти по эскалатору в два раза быстрее, то спустится за 16 секунд. За сколько секунд человек спустится, если будет просто неподвижно стоять на эскалаторе?

Ответ: _____.

11. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(64)$.



Ответ: _____.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{-x^2 + 14x - 13} + 5$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. А) Решите уравнение $8(\sin^6 x + \cos^6 x) = \sqrt{3} \sin 4x + 5$.

Б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В пирамиде SABCD основанием является прямоугольник ABCD ($AB < AD$), а все боковые рёбра пирамиды равны. Из точки В опущен перпендикуляр ВН на плоскость SAD.

А) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.

Б) Найдите объем пирамиды, если $HA = 3\sqrt{2}$, $HC = \sqrt{82}$, а площадь основания пирамиды равна 48.

15. Решите неравенство:
$$\frac{\log_x(2x-1) \cdot \log_x(3-x) + 1 - \log_x(-2x^2 + 7x - 3)}{3^{x^2-x} - 9} \leq 0$$

16. IT-компания закупает кластер серверов за 212 млн рублей для обучения нейросети, генерирующей идеальные отговорки для невыполненных домашних. Затраты на обработку x петабайт данных равны $0,5x^2 + 2x + 10$ млн рублей в год. Прибыль с продажи обработанных данных по цене p млн руб. за петабайт составит $px - (0,5x^2 + 2x + 10)$. Важное ограничение: из-за слабой системы охлаждения (сисадмин поставил комнатный вентилятор), серверы физически не могут обрабатывать более 8 петабайт данных в год ($x \leq 8$). Компания настраивает нагрузку так, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p серверы окупятся не более чем за 2 года?

17. В равнобедренную трапецию ABCD с основаниями AD и BC ($AD > BC$) вписана окружность с центром O. Из вершины C опущена высота CH.

А) Докажите, что прямая AO является серединным перпендикуляром к отрезку BH.

Б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если радиус вписанной в неё окружности равен 4, а длина отрезка, соединяющего точки касания вписанной окружности с боковыми сторонами, равна $\frac{64}{15}$.

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{25^x - (a^2 - 2a + 6) \cdot 5^x + 5a^2 - 10a + 5}{\sqrt{x - \log_5(3 - a)}} = 0$$

имеет ровно 1 корень.

19. Изобретатель-самоучка Акакий Шестеренкин взял у сурового ростовщика Порфирия Кровопийцева кредит на S рублей на срок n месяцев. Условия Порфирия безжалостны:

– каждый месяц долг Акакия возрастает на 50% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– после этого Акакий приносит платеж (строго в целых рублях, сдачи Порфирий не дает);

– долг должен погашаться дифференцированно: каждый месяц после платежа остаток долга должен быть на одну и ту же величину $\frac{S}{n}$ меньше долга на конец предыдущего месяца.

Известно, что ни в один из месяцев Акакию не пришлось делить рубли на копейки (все ежемесячные платежи — целые числа). Пусть M — общая сумма рублей, выплаченная за n месяцев.

А) Могло ли оказаться так, что общая сумма выплат M ровно в 2 раза превысила размер займа S ?

Б) Акакий подсчитал, что число M является простым. Возможно ли это при $n > 1$?

В) Найдите все возможные значения суммы займа S , если известно, что срок кредита $n > 2$, разность между первым и вторым платежом составила ровно 1 рубль, а общая сумма выплат M в точности равна квадрату некоторого простого числа.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.