

# Тренировочная работа ЕГЭ по математике

## Профильный уровень, вариант 1

### Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

### Часть 1

**1** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  к основанию  $AC$  проведена высота  $BH$ , равная 16, а косинус угла  $A$  равен 0,6. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**2** В параллелограмме  $ABCD$  угол  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $AD = 6$ . Найдите скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{BC}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**3** Ребро основания правильной четырехугольной пирамиды равно  $\sqrt{6}$ , а все боковые ребра пирамиды наклонены под углом  $60^\circ$  к плоскости основания. Найдите объем пирамиды.

Ответ: \_\_\_\_\_

**4** При регистрации на сайте система случайным образом высылает пользователю трехзначный код подтверждения. С какой вероятностью код будет содержать ровно две цифры 4. (Код может начинаться с нуля).

Ответ: \_\_\_\_\_

**5** Вероятность того, что масса детали  $A$  на производстве больше 75 г равна 0,89, а вероятность того, что её масса меньше 100 г равна 0,97. Найдите вероятность, что масса детали  $A$  будет от 75 до 100 граммов.

Ответ: \_\_\_\_\_

6 Решите уравнение:

$$\sqrt{6-x} = -x.$$

Если корней несколько, то в ответ укажите наибольший из них.

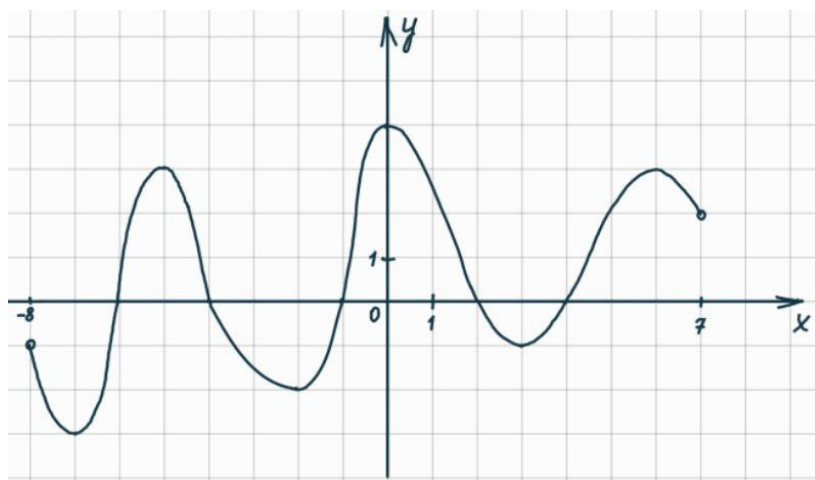
Ответ: \_\_\_\_\_

7 Найдите значение выражения:

$$(0,8)^{\frac{1}{9}} \cdot 25^{\frac{1}{18}} \cdot 4^{\frac{8}{9}}$$

Ответ: \_\_\_\_\_

8 На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 7)$ . Найдите сумму точек минимума функции  $y = f(x)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

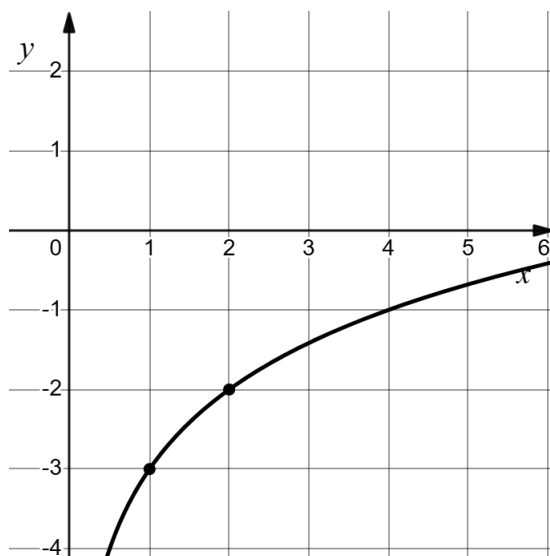
9 Камнемётательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой  $y = ax^2 + bx$ , где  $a = -\frac{1}{30}$ ,  $b = \frac{5}{6}$  — постоянные параметры,  $x$  (м) — смещение камня по горизонтали,  $y$  (м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 4 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Ответ: \_\_\_\_\_

10 Лодка проходит расстояние в 38 км по течению реки за 3 ч 10 мин, а против течения расстояние в 22 км она проходит за 2 ч 45 мин. Найдите скорость течения реки. Ответ выразите в километрах в час.

Ответ: \_\_\_\_\_

- 11** На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_a x + b$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = 1$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

- 12** Найдите точку минимума функции  $y = -98 \ln x + x^2 - 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

## Часть 2

- 13** а) Решите уравнение:

$$\operatorname{ctg} x \cdot (\cos 2x - \sqrt{3} \sin(3\pi + x) - 1) = 0;$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ .

- 14** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , сторона основания которой равна 5, а боковое ребро равно 6. На ребре  $AA_1$  отметили точки  $K$  и  $P$  так, что  $AK = 1$ ,  $A_1 P = 2$ , на ребре  $EE_1$  отметили точку  $T$ , так что  $TE = 1$ , а на ребре  $CC_1$  отметили точку  $M$  так, что  $CM = 3$ .

- а) Докажите, что плоскость  $C_1 P T$  параллельна прямой  $K M$ .  
б) Найдите расстояние между прямыми  $K M$  и  $P T$ .

- 15** Решите неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}}(3 - 4^x) + x + 1 \geq 0.$$

**16** Планируется открыть вклад на три года. Первоначальный вклад составляет 5 млн рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 20% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале второго года вкладчик пополняет вклад на некоторую сумму, а в начале третьего года он пополняет вклад на сумму в два раза большую, чем в начале второго года. Найдите общую сумму дополнительных вложений, которую нужно сделать, чтобы в конце третьего года на счету вкладчика было 14,4 млн рублей.

**17** В параллелограмме  $ABCD$  косинус угла  $BAD$  равен  $\frac{1}{3}$ . В треугольник  $ABD$  вписана окружность с центром в точке  $O$ . Прямая  $AO$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$  так, что  $BK : KC = 2 : 1$ .

а) Докажите, что треугольник  $ABD$  равнобедренный

б) Пусть  $M$  – точка касания окружности и диагонали  $BD$ . Найдите радиус данной окружности, если  $MD = 20$ .

**18** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$(\log_{\sqrt{5-a}}(x^2 - 2ax - 2x + 6a) - 2 \log_{5-a}(3a^2)) \cdot \sqrt{4x - x^2} = 0$$

имеет ровно три различных решения.

**19** По кругу записаны более трех натуральных чисел, не кратных 4. Известно, что сумма любых трех подряд идущих чисел делится на 4.

а) Может ли сумма всех чисел, расставленных по кругу, равняться 36?

б) Могут ли быть записаны и число 9, и число 15?

в) Известно, что записано 15 чисел и одно из них равно 7. Найдите наименьшую возможную сумму всех записанных чисел, если известно, что все они различны.

# Тренировочная работа ЕГЭ по математике

## Профильный уровень, вариант 2

11 класс, Лицей НИУ ВШЭ

### Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

### Часть 1

**1** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC = 48$ , синус угла  $A$  равен  $0,8$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**2** В параллелограмме  $ABCD$  угол  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $AD = 8$ . Найдите скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{DA}$  и  $\overrightarrow{DC}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

**3** Ребро основания правильной четырехугольной пирамиды равно  $3\sqrt{2}$ , а все боковые ребра пирамиды наклонены под углом  $45^\circ$  к плоскости основания. Найдите объем пирамиды.

Ответ: \_\_\_\_\_

**4** При регистрации на сайте система случайным образом высылает пользователю трехзначный код подтверждения. С какой вероятностью код будет содержать ровно две цифры 5. (Код может начинаться с нуля).

Ответ: \_\_\_\_\_

**5** Вероятность того, что масса детали  $A$  на производстве больше  $75$  г равна  $0,81$ , а вероятность того, что её масса меньше  $100$  г равна  $0,92$ . Найдите вероятность, что масса детали  $A$  будет от  $75$  до  $100$  граммов.

Ответ: \_\_\_\_\_

6 Решите уравнение:

$$\sqrt{2-x} = -x.$$

Если корней несколько, то в ответ укажите наибольший из них.

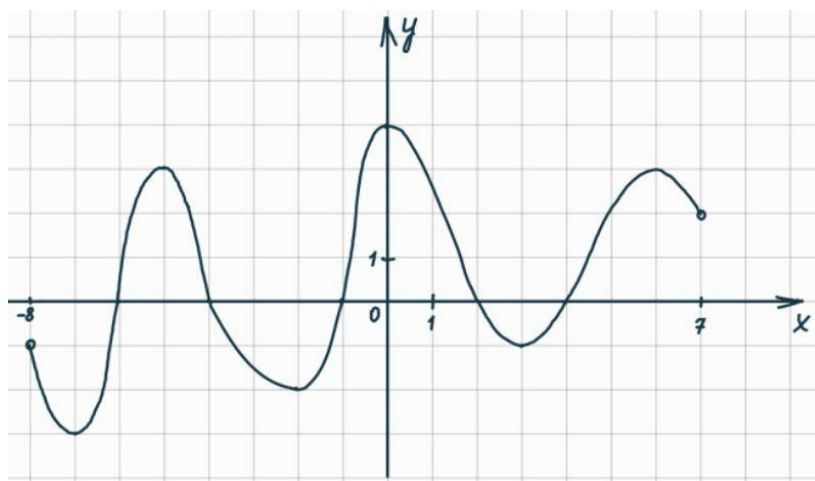
Ответ: \_\_\_\_\_

7 Найдите значение выражения:

$$(0,6)^{\frac{1}{7}} \cdot 25^{\frac{1}{14}} \cdot 3^{\frac{6}{7}}$$

Ответ: \_\_\_\_\_

8 На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  — производной функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 7)$ . Найдите сумму точек максимума функции  $y = f(x)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

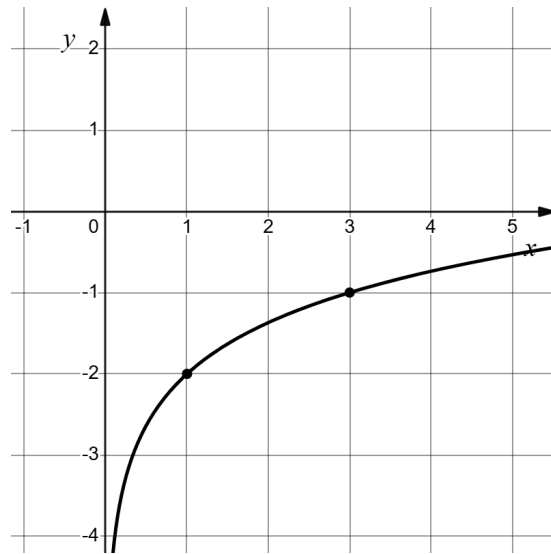
9 Камнемётательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой  $y = ax^2 + bx$ , где  $a = -\frac{1}{30}$ ,  $b = \frac{4}{3}$  — постоянные параметры,  $x$  (м) — смещение камня по горизонтали,  $y$  (м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Ответ: \_\_\_\_\_

10 Лодка проходит расстояние в 14 км против течения реки за 1 ч 10 мин, а по течению реки расстояние в 24 км она проходит за 1 ч 20 мин. Найдите собственную скорость лодки. Ответ выразите в километрах в час.

Ответ: \_\_\_\_\_

- 11** На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_a x + b$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = 2$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

- 12** Найдите точку минимума функции  $y = -32 \ln x + x^2 - 6$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

## Часть 2

- 13** а) Решите уравнение:

$$\operatorname{tg} x \cdot (\cos 2x + \sqrt{3} \cos (3\pi + x) + 1) = 0;$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

- 14** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , сторона основания которой равна 5, а боковое ребро равно 6. На ребре  $FF_1$  отметили точки  $K$  и  $P$  так, что  $KF = 2$ ,  $F_1 P = 1$ , на ребре  $BB_1$  отметили точку  $T$ , так что  $BT = 5$ , а на ребре  $DD_1$  отметили точку  $M$  так, что  $DM = 3$ .

- а) Докажите, что плоскость  $DKT$  параллельна прямой  $PM$ .  
б) Найдите расстояние между прямыми  $PM$  и  $KT$ .

- 15** Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} (4 - 9^x) + x + 1 \geq 0.$$

**16** Планируется открыть вклад на три года. Первоначальный вклад составляет 10 млн рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 20% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале второго года вкладчик пополняет вклад на некоторую сумму, а в начале третьего года он пополняет вклад на сумму в два раза большую, чем в начале второго года. Найдите общую сумму дополнительных вложений, которую нужно сделать, чтобы в конце третьего года на счету вкладчика было 19,2 млн рублей.

**17** В параллелограмме  $ABCD$  косинус угла  $BAD$  равен 0,4. В треугольник  $ABD$  вписана окружность с центром в точке  $O$ . Прямая  $AO$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$  так, что  $BM : MC = 4 : 1$ .

а) Докажите, что треугольник  $ABD$  равнобедренный.

б) Пусть  $K$  – точка касания окружности и диагонали  $BD$ . Найдите радиус данной окружности, если  $BK = 14$ .

**18** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$(2 \log_{a+5} (x^2 - 4ax - x + 5a) - \log_{\sqrt{a+5}} (5a^2)) \cdot \sqrt{6x - x^2} = 0$$

имеет ровно три различных решения.

**19** По кругу записаны более трех натуральных чисел, не кратных 4. Известно, что сумма любых трех подряд идущих чисел делится на 4.

а) Может ли сумма всех чисел, расставленных по кругу, равняться 48?

б) Могут ли быть записаны и число 13, и число 19?

в) Известно, что записано 15 чисел и одно из них равно 5. Найдите наименьшую возможную сумму всех записанных чисел, если известно, что все они различны.



**Ответы:**  
**1 вариант**

1. 12,5
2. -9
3. 6
4. 0,027
5. 0,86
6. -3
7. 4
8. -3
9. 15
10. 2
11. 16
12. 7
13. а)  $\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k$ ; б)  $\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; \frac{13\pi}{3}$ .
14. б)  $\frac{45}{\sqrt{301}}$ .
15.  $[0; \log_4 3)$ .
16. 4,5
17. б)  $5\sqrt{2}$ .
18.  $a \in \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup \left[ \frac{4}{3}; 2 \right)$ .  $x = 3a, x = 2 - a$ .
19. а) да, например: 1, 5, 6, 9, 13, 2 б) нет; в) 260.

**Ответы:**  
**2 вариант**

1. 25
2.  $-20$
3. 18
4. 0,027
5. 0,73
6.  $-2$
7. 3
8.  $-2$
9. 30
10. 15
11. 81
12. 4
13. а)  $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \pi k$  б)  $\frac{23\pi}{6}; 3\pi; 4\pi$ .
14. б)  $\frac{45}{\sqrt{301}}$ .
15.  $[0; \log_3 2)$ .
16. 1,5
17. б)  $2\sqrt{21}$ .
18.  $a \in \left\{ \frac{1}{6} \right\} \cup \left[ 1; \frac{6}{5} \right)$ .  $x = 5a, x = 1 - a$ .
19. а) да, например: 1, 5, 6, 9, 17, 10 б) нет; в) 240.