

# Тренировочная работа ЕГЭ по математике Профильный уровень, вариант 1

## Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

## Часть 1

- 1** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  к основанию  $AC$  проведена высота  $BH$ , равная 16, а косинус угла  $A$  равен 0,6. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

- 2** В параллелограмме  $ABCD$  угол  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $AD = 6$ . Найдите скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{BC}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

- 3** Ребро основания правильной четырехугольной пирамиды равно  $\sqrt{6}$ , а все боковые ребра пирамиды наклонены под углом  $60^\circ$  к плоскости основания. Найдите объем пирамиды.

Ответ: \_\_\_\_\_

- 4** При регистрации на сайте система случайным образом высылает пользователю трехзначный код подтверждения. С какой вероятностью код будет содержать ровно две цифры 4. (Код может начинаться с нуля).

Ответ: \_\_\_\_\_

- 5** Вероятность того, что масса детали  $A$  на производстве больше 75 г равна 0,89, а вероятность того, что её масса меньше 100 г равна 0,97. Найдите вероятность, что масса детали  $A$  будет от 75 до 100 граммов.

Ответ: \_\_\_\_\_

**6** Решите уравнение:

$$\sqrt{6-x} = -x.$$

Если корней несколько, то в ответ укажите наибольший из них.

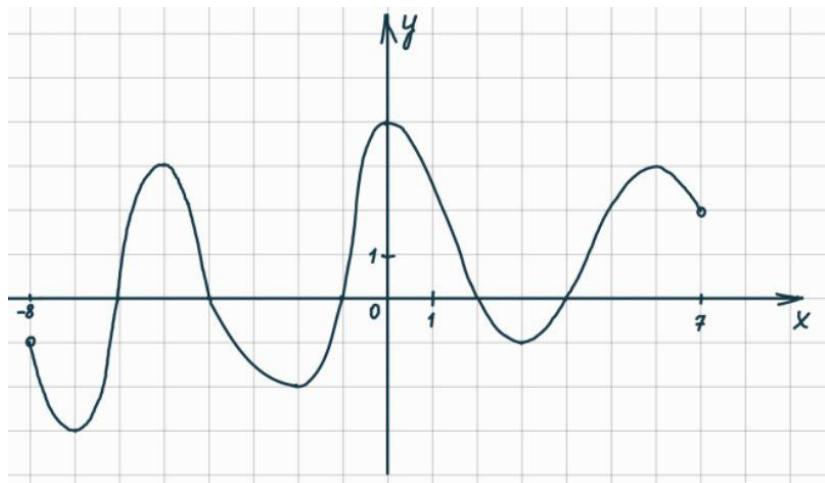
Ответ: \_\_\_\_\_

**7** Найдите значение выражения:

$$(0,8)^{\frac{1}{9}} \cdot 25^{\frac{1}{18}} \cdot 4^{\frac{8}{9}}$$

Ответ: \_\_\_\_\_

**8** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$ — производной функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 7)$ . Найдите сумму точек минимума функции  $y = f(x)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

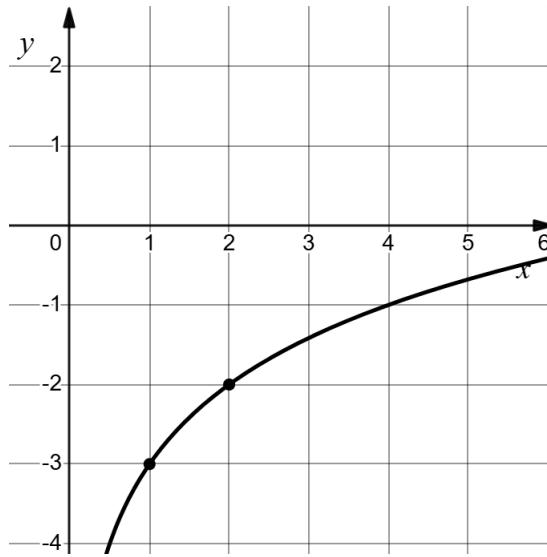
**9** Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой  $y = ax^2 + bx$ , где  $a = -\frac{1}{30}$ ,  $b = \frac{5}{6}$  — постоянные параметры,  $x$  (м) — смещение камня по горизонтали,  $y$  (м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 4 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Ответ: \_\_\_\_\_

**10** Лодка проходит расстояние в 38 км по течению реки за 3 ч 10 мин, а против течения расстояние в 22 км она проходит за 2 ч 45 мин. Найдите скорость течения реки. Ответ выразите в километрах в час.

Ответ: \_\_\_\_\_

- 11** На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_a x + b$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = 1$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

- 12** Найдите точку минимума функции  $y = -98 \ln x + x^2 - 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

## Часть 2

- 13** а) Решите уравнение:

$$\operatorname{ctg} x \cdot \left( \cos 2x - \sqrt{3} \sin (3\pi + x) - 1 \right) = 0;$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ .

- 14** Данна правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , сторона основания которой равна 5, а боковое ребро равно 6. На ребре  $AA_1$  отметили точки  $K$  и  $P$  так, что  $AK = 1$ ,  $A_1P = 2$ , на ребре  $EE_1$  отметили точку  $T$ , так что  $TE = 1$ , а на ребре  $CC_1$  отметили точку  $M$  так, что  $CM = 3$ .

- а) Докажите, что плоскость  $C_1PT$  параллельна прямой  $KM$ .

- б) Найдите расстояние между прямыми  $KM$  и  $PT$ .

- 15** Решите неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}} (3 - 4^x) + x + 1 \geq 0.$$

**16** Планируется открыть вклад на три года. Первоначальный вклад составляет 5 млн рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 20% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале второго года вкладчик пополняет вклад на некоторую сумму, а в начале третьего года он пополняет вклад на сумму в два раза большую, чем в начале второго года. Найдите общую сумму дополнительных вложений, которую нужно сделать, чтобы в конце третьего года на счету вкладчика было 14,4 млн рублей.

**17** В параллелограмме  $ABCD$  косинус угла  $BAD$  равен  $\frac{1}{3}$ . В треугольник  $ABD$  вписана окружность с центром в точке  $O$ . Прямая  $AO$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$  так, что  $BK : KC = 2 : 1$ .

- а)** Докажите, что треугольник  $ABD$  равнобедренный
- б)** Пусть  $M$  – точка касания окружности и диагонали  $BD$ . Найдите радиус данной окружности, если  $MD = 20$ .

**18** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\left(\log_{\sqrt{5-a}}(x^2 - 2ax - 2x + 6a) - 2\log_{5-a}(3a^2)\right) \cdot \sqrt{4x - x^2} = 0$$

имеет ровно три различных решения.

**19** По кругу записаны более трех натуральных чисел, не кратных 4. Известно, что сумма любых трех подряд идущих чисел делится на 4.

- а)** Может ли сумма всех чисел, расставленных по кругу, равняться 36?
- б)** Могут ли быть записаны и число 9, и число 15?
- в)** Известно, что записано 15 чисел и одно из них равно 7. Найдите наименьшую возможную сумму всех записанных чисел, если известно, что все они различны.

# Тренировочная работа ЕГЭ по математике Профильный уровень, вариант 2

11 класс, Лицей НИУ ВШЭ

## Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

## Часть 1

- 1** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC = 48$ , синус угла  $A$  равен  $0,8$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .  
Ответ: \_\_\_\_\_

- 2** В параллелограмме  $ABCD$  угол  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $AD = 8$ . Найдите скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{DA}$  и  $\overrightarrow{DC}$ .  
Ответ: \_\_\_\_\_

- 3** Ребро основания правильной четырехугольной пирамиды равно  $3\sqrt{2}$ , а все боковые ребра пирамиды наклонены под углом  $45^\circ$  к плоскости основания. Найдите объем пирамиды.  
Ответ: \_\_\_\_\_

- 4** При регистрации на сайте система случайным образом высыпает пользователю трехзначный код подтверждения. С какой вероятностью код будет содержать ровно две цифры 5. (Код может начинаться с нуля).  
Ответ: \_\_\_\_\_

- 5** Вероятность того, что масса детали  $A$  на производстве больше 75 г равна 0,81, а вероятность того, что её масса меньше 100 г равна 0,92. Найдите вероятность, что масса детали  $A$  будет от 75 до 100 граммов.  
Ответ: \_\_\_\_\_

6 Решите уравнение:

$$\sqrt{2-x} = -x.$$

Если корней несколько, то в ответ укажите наибольший из них.

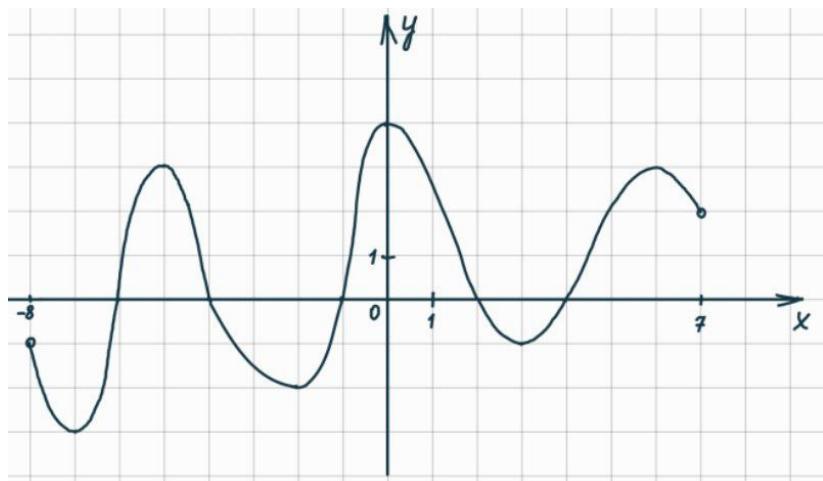
Ответ: \_\_\_\_\_

7 Найдите значение выражения:

$$(0,6)^{\frac{1}{7}} \cdot 25^{\frac{1}{14}} \cdot 3^{\frac{6}{7}}$$

Ответ: \_\_\_\_\_

8 На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$ — производной функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 7)$ . Найдите сумму точек максимума функции  $y = f(x)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

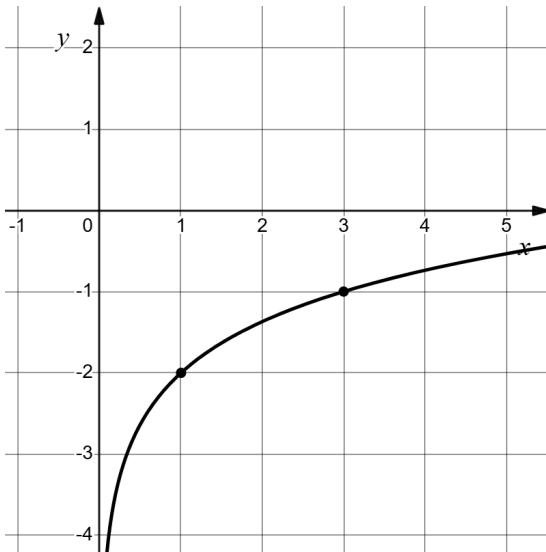
9 Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой  $y = ax^2 + bx$ , где  $a = -\frac{1}{30}$ ,  $b = \frac{4}{3}$  — постоянные параметры,  $x$  (м) — смещение камня по горизонтали,  $y$  (м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Ответ: \_\_\_\_\_

10 Лодка проходит расстояние в 14 км против течения реки за 1 ч 10 мин, а по течению реки расстояние в 24 км она проходит за 1 ч 20 мин. Найдите собственную скорость лодки. Ответ выразите в километрах в час.

Ответ: \_\_\_\_\_

- 11** На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_a x + b$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = 2$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

- 12** Найдите точку минимума функции  $y = -32 \ln x + x^2 - 6$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

## Часть 2

- 13** а) Решите уравнение:

$$\operatorname{tg} x \cdot \left( \cos 2x + \sqrt{3} \cos (3\pi + x) + 1 \right) = 0;$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$ .

- 14** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , сторона основания которой равна 5, а боковое ребро равно 6. На ребре  $FF_1$  отметили точки  $K$  и  $P$  так, что  $KF = 2$ ,  $F_1P = 1$ , на ребре  $BB_1$  отметили точку  $T$ , так что  $BT = 5$ , а на ребре  $DD_1$  отметили точку  $M$  так, что  $DM = 3$ .

- а) Докажите, что плоскость  $DKT$  параллельна прямой  $PM$ .  
б) Найдите расстояние между прямыми  $PM$  и  $KT$ .

- 15** Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} (4 - 9^x) + x + 1 \geq 0.$$

**16** Планируется открыть вклад на три года. Первоначальный вклад составляет 10 млн рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 20% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале второго года вкладчик пополняет вклад на некоторую сумму, а в начале третьего года он пополняет вклад на сумму в два раза большую, чем в начале второго года. Найдите общую сумму дополнительных вложений, которую нужно сделать, чтобы в конце третьего года на счету вкладчика было 19,2 млн рублей.

**17** В параллелограмме  $ABCD$  косинус угла  $BAD$  равен 0,4. В треугольник  $ABD$  вписана окружность с центром в точке  $O$ . Прямая  $AO$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$  так, что  $BM : MC = 4 : 1$ .

- а)** Докажите, что треугольник  $ABD$  равнобедренный.
- б)** Пусть  $K$  – точка касания окружности и диагонали  $BD$ . Найдите радиус данной окружности, если  $BK = 14$ .

**18** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$(2 \log_{a+5} (x^2 - 4ax - x + 5a) - \log_{\sqrt{a+5}} (5a^2)) \cdot \sqrt{6x - x^2} = 0$$

имеет ровно три различных решения.

**19** По кругу записаны более трех натуральных чисел, не кратных 4. Известно, что сумма любых трех подряд идущих чисел делится на 4.

- а)** Может ли сумма всех чисел, расставленных по кругу, равняться 48?
- б)** Могут ли быть записаны и число 13, и число 19?
- в)** Известно, что записано 15 чисел и одно из них равно 5. Найдите наименьшую возможную сумму всех записанных чисел, если известно, что все они различны.

**Ответы:  
1 вариант**

1. 12, 5
2. -9
3. 6
4. 0,027
5. 0,86
6. -3
7. 4
8. -3
9. 15
10. 2
11. 16
12. 7
13. а)  $\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k$ ; б)  $\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; \frac{13\pi}{3}$ .
14. б)  $\frac{45}{\sqrt{301}}$ .
15.  $[0; \log_4 3)$ .
16. 4, 5
17. б)  $5\sqrt{2}$ .
18.  $a \in \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup \left[ \frac{4}{3}; 2 \right)$ .  $x = 3a, x = 2 - a$ .
19. а) да, например: 1, 5, 6, 9, 13, 2 б) нет; в) 260.

**Ответы:  
2 вариант**

1. 25
2. -20
3. 18
4. 0,027
5. 0,73
6. -2
7. 3
8. -2
9. 30
10. 15
11. 81
12. 4
13. а)  $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ;  $\pi k$  б)  $\frac{23\pi}{6}; 3\pi; 4\pi$ .
14. б)  $\frac{45}{\sqrt{301}}$ .
15.  $[0; \log_3 2)$ .
16. 1,5
17. б)  $2\sqrt{21}$ .
18.  $a \in \left\{ \frac{1}{6} \right\} \cup \left[ 1; \frac{6}{5} \right) . x = 5a, x = 1 - a$ .
19. а) да, например: 1, 5, 6, 9, 17, 10 б) нет; в) 240.