

**Задача 1.** Деревянный шар заморожен внутри ледяного куба и прикреплен верёвкой ко дну сосуда с водой. Куб полностью погружён в воду. После полного таяния льда сила натяжения верёвки изменилась на  $|\Delta T| = 0,4$  Н. Определите плотность льда, если длина ребра ледяного куба составляет  $a = 7$  см, плотность воды равна  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Возможное решение*

1. На систему действуют сила тяжести:  $F_{\text{тяж}}$ , сила натяжения верёвки:  $T_1$ , выталкивающая сила Архимеда:  $F_{\text{Арх}}$ . Из условия равновесия:

$$T_1 + m_{\text{лед}}g + m_{\text{шар}}g = \rho_{\text{вода}}V_{\text{лед}}g.$$

2. Условие равновесия после таяния льда.

$$T_2 + m_{\text{шар}}g = \rho_{\text{вода}}V_{\text{шар}}g.$$

3. Разность сил натяжения.

$$T_1 - T_2 = \Delta T.$$

Подставляем выражения:

$$\Delta T + m_{\text{лед}}g = \rho_{\text{вода}}V_{\text{лед}}g - \rho_{\text{вода}}V_{\text{шар}}g.$$

4. Пренебрегаем объемом шара. Выражаем плотность льда.

$$m_{\text{лед}} = \rho_{\text{лед}}V_{\text{лед}}.$$

$$\rho_{\text{лед}} = \rho_{\text{вода}} - \frac{\Delta T}{a^3g} = 883,4 \text{ кг/м}^3.$$

**Ответ:**

$$\rho_{\text{лед}} = 883,4 \text{ кг/м}^3.$$

*Критерии*

1. Верно записано условие равновесия системы шар и лед (+3 балла)
2. Верно записано условие равновесия после таяния льда (+3 балла)
3. Верно учтена разность сил натяжения (+2 балла)
4. Получено верное конечное выражение, с учётом или с пренебрежением объёмом шара (+2 балла)

**Задача 2.** Эскалатор метро движется со скоростью  $v = 1$  м/с. Пассажир заходит на эскалатор по ходу движения и начинает двигаться следующим образом: он делает два шага вперёд и три шага назад. При этом он достигает другого конца эскалатора за время  $t_1 = 40$  с. За какое время он бы добрался до конца эскалатора, если бы двигался обычным шагом? Скорость пассажира относительно эскалатора одинакова при движении вперёд и назад и равна  $u = 0,4$  м/с. Считайте, что размеры ступенек много меньше длины эскалатора.

*Возможное решение*

Обозначим время одного шага как  $\tau$ .

При описанном в условии варианте движения за время  $5\tau$  пассажир смещается относительно земли на расстояние

$$S_1 = 2\tau v - 3\tau u + 3\tau v + 2\tau u = 5\tau v - \tau u.$$

Средняя скорость движения пассажира равна

$$v_{\text{ср1}} = \frac{S_1}{5\tau} = \frac{5v - u}{5}.$$

Обозначим длину эскалатора как  $L$ , тогда

$$L = v_{\text{ср1}} t_1 = \frac{5v - u}{5} t_1.$$

Теперь рассмотрим случай, когда пассажир двигается обычным шагом. За  $\tau$  он смещается относительно земли на расстояние

$$S_2 = \tau v + \tau u.$$

Средняя скорость во втором случае равна

$$v_{\text{ср2}} = \frac{S_2}{\tau} = v + u.$$

Для времени движения  $t_2$  во втором случае получаем:

$$L = v_{\text{ср2}} t_2.$$

Подставляя выражение для  $L$ , получаем:

$$t_2 = \frac{(5v - u)}{5} \cdot \frac{1}{v + u} t_1.$$

$$t_2 = \frac{5v - u}{5(v + u)} t_1 \approx 26,3 \text{ с}$$

**Ответ:**

$$t_2 = 26,3 \text{ с}$$

*Критерии*

1. Верно получена средняя скорость пассажира в обычном режиме движения (+ 2 балла).
2. Верно получена средняя скорость пассажира в режиме движения "два шага вперед, три шага назад" (+ 4 балла).
3. Получены правильные буквенные и числовые ответы для искомого времени движения пассажира (+ 4 балла).

**Задача 3.** Юный экспериментатор Александр получает припой из сплава олова и свинца. Плотности олова и свинца равны  $\rho_1 = 7,3 \text{ г/см}^3$  и  $\rho_2 = 11,3 \text{ г/см}^3$ . Смешав в некоторой пропорции компоненты припоя, Александр получил припой с плотностью  $\rho = 8,4 \text{ г/см}^3$ . Сверившись со своими расчетами для средней плотности смеси, Александр заметил, что получившееся в эксперименте значение на 5% выше расчетного. Осознав, что объем сплава может быть не равен сумме объемов сплавляемых компонент, Александр с легкостью вычислил массовые доли олова и свинца в своем сплаве. Сделайте это и вы.

*Возможное решение*

Пусть  $x$  — расчетная доля олова по объему. Для расчета плотности простой смеси предполагается:

$$\frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V} = \rho_{\text{ср}},$$

Где  $V$  - сумма исходных объемов сплавляемых компонентов  $V = V_1 + V_2$ .

$$x \cdot 7,3 + (1 - x) \cdot 11,3 = \rho_{\text{ср}},$$

где  $\rho_{\text{ср}}$  — расчётная плотность. Поскольку практическая плотность на 5% выше расчетной,  $\rho_{\text{ср}} = \frac{8,4 \text{ г/см}^3}{1,05} = 8 \text{ г/см}^3$ .

Подставляя это значение в уравнение:

$$7,3x + 11,3(1 - x) = 8.$$

Раскрыв скобки, получаем:

$$7,3x + 11,3 - 11,3x = 8,$$

$$-4x + 11,3 = 8 \quad \longrightarrow \quad -4x = -3,3 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{3,3}{4} = 0,825.$$

Для перехода к массовой доле олова  $\frac{m_1}{m}$  заметим, что искомая массовая доля связана с объёмной соотношением:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{V_1 \rho_1}{V \rho_{\text{ср}}}$$

$$\frac{m_1}{m} = 0,825 \frac{7,3}{8} \approx 0,75$$

Аналогично для свинца:

$$\frac{m_2}{m} = (1 - 0,825) \frac{11,3}{8} \approx 0,25$$

Следовательно, массовая доля олова  $x \approx 75\%$ , а свинца — около 25%. Плотность  $8,4 \text{ г/см}^3$  получается выше расчётной  $8,0 \text{ г/см}^3$ , что указывает на изменение объёмов при сплавлении.

**Ответ:**

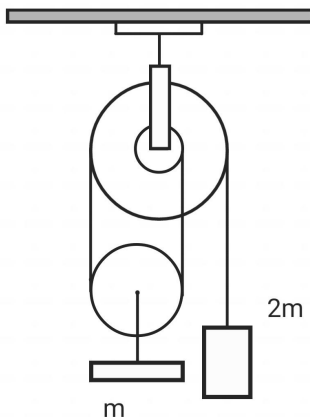
олова — 75%, свинца — 25%

*Критерии*

1. Верно записана плотность простой смеси через объемные доли компонентов (+ 4 балла).
2. Найдена связь между объемными долями компонентов (+ 2 балла).
3. Найдено верное значение ожидаемой плотности припоя (+ 2 балла).
4. Верно решено уравнение на массовые доли компонентов (+ 2 балла).

**Задача 4.** На горизонтальной неподвижной оси закреплен составной блок, состоящий из двух жестко соединенных дисков радиусами  $R$  и  $3R$ . Один конец нити намотан на малый диск, далее нить проходит через систему блоков и образует петлю, удерживающую груз массой  $m = 150$  г. Второй конец нити свисает с большого диска составного блока и поддерживает груз массой  $2m$ .

Определите, какую дополнительную массу  $M$  нужно положить на груз  $m$ , чтобы система оставалась в равновесии. Считайте, что нить и блоки невесомые, а трение отсутствует.



*Возможное решение*

1. Запишем правило моментов для неподвижного составного блока. Отсюда получим связь между силами натяжения по разные стороны от большого диска:

$$T_1 R + T_2 3R = T_1 3R$$

$$T_2 = \frac{2}{3}T_1$$

2. Запишем для каждого груза условие равновесия. Обозначим массу дополнительного груза как  $M$ :

$$T_2 = 2mg$$

$$2T_1 = mg + Mg$$

Отсюда,

$$M = 5m = 750 \text{ г.}$$

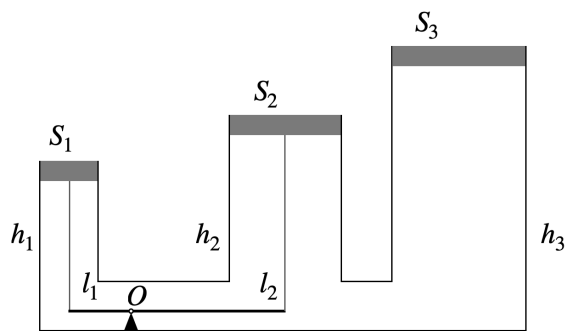
**Ответ:**

$$M = 750 \text{ г.}$$

*Критерии*

1. Правильно записано правило моментов (+4 балла)
2. Верно записано уравнение сил для каждого груза (+4 балла)
3. Получен верный конечный ответ (+2 балла)

**Задача 5.** На дне общего участка сообщающихся сосудов закреплён рычаг, как показано на рисунке. Рычаг находится в равновесии. Сосуд заполнен водой, причём каждое из колен сосуда плотно закрыто сверху подвижным поршнем. Плечи рычага  $l_1$  и  $l_2$  соединены тонкими прочными нерастяжимыми нитями с поршнями первых двух колен сосуда. Найдите соотношение  $\frac{l_2}{l_1}$ , если известно, что  $h_3 = 2h_1$ ,  $h_2 = 1,8h_1$ , а площади поршней связаны соотношением  $S_2 = 3S_1$ .



*Возможное решение*

Пусть на первое (левое) плечо рычага действует сила  $F_1$ , а на второе (правое) плечо — сила  $F_2$ . Эти же силы через тонкие нити передаются к поршням в соответствующих коленах. Следовательно, дополнительное давление, оказываемое поршнями на жидкость в каждом колене, равно:

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1}, \quad P_2 = \frac{F_2}{S_2}.$$

Из условия равновесия рычага (равенство моментов) следует:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2.$$

Эквивалентно можно записать это в терминах давлений и площадей:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \implies P_1 S_1 l_1 = P_2 S_2 l_2 \implies P_1 = \frac{S_2 l_2}{S_1 l_1} P_2. \quad (1)$$

Гидростатическое давление в нижней (общей) части сосуда одинаково для всех колен. Значит, для колен 1 и 2:

$$\rho g h_1 + P_1 = \rho g h_2 + P_2 \implies P_2 - P_1 = \rho g (h_1 - h_2). \quad (2)$$

Используя прошлое выражение для связи давлений

$$P_2 - \frac{S_2 l_2}{S_1 l_1} P_2 = \rho g (h_1 - h_2) \implies \left(1 - \frac{S_2 l_2}{S_1 l_1}\right) P_2 = \rho g (h_1 - h_2). \quad (3)$$

Аналогично, для колен 2 и 3 имеем:

$$\rho g h_2 + P_2 = \rho g h_3 \implies P_2 = \rho g (h_3 - h_2). \quad (4)$$

Таким образом

$$\left(1 - \frac{S_2 l_2}{S_1 l_1}\right) \rho g (h_3 - h_2) = \rho g (h_1 - h_2).$$

Сокращая на  $\rho g$ , делим все на  $h_1$  и переходим к относительным высотам:

$$\left(1 - \frac{S_2 l_2}{S_1 l_1}\right) \left(\frac{h_3}{h_1} - \frac{h_2}{h_1}\right) = 1 - \frac{h_2}{h_1}. \quad (5)$$

По условию:

$$h_3 = 2h_1, \quad h_2 = 1,8h_1, \quad S_2 = 3S_1.$$

Следовательно,

$$\frac{h_3}{h_1} - \frac{h_2}{h_1} = 2 - 1,8 = 0,2, \quad 1 - \frac{h_2}{h_1} = 1 - 1,8 = -0,8.$$

Также  $S_2 = 3S_1$ .

$$\left(1 - 3 \frac{l_2}{l_1}\right) 0,2 = -0,8.$$

Упростим:

$$0,2 - 0,6 \frac{l_2}{l_1} = -0,8 \implies -0,6 \frac{l_2}{l_1} = -1,0 \implies \frac{l_2}{l_1} = \frac{5}{3}.$$

**Ответ:**

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{5}{3}$$

*Критерии*

1. Верно записано условие равновесия рычага через силы (+ 1 балла).
2. Верно найдена связь сил, действующих на плечи рычага с давлением на соответствующие поршни (+ 1 балла).
3. Из равенства моментов сил, действующих на плечи рычага, найдена связь давлений на поршни (+ 1 балла).
4. Записаны условия равенства давлений на дне 1-ого, 2-ого и 3-его колен сосуда. (+ 2 балла).
5. Из условий равенства давлений получено уравнение, связывающее высоты колен сосуда (+ 2 балла).
6. Получено уравнение на отоншение длин плеч рычага (+ 2 балла).
7. Верно найдено численное значение отношений длин рычага (+ 1 балла).