1 Векторы. Основные понятия

Теоретическая справка

Вектор – это направленный отрезок, одна из граничных точек которого является его началом, а другая - концом.

Если точка A – начало вектора, а точка B – его конец, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Вектор также можно обозначать одной буквой, например, $\vec{a}$. Направление вектора на рисунке указывается стрелкой (рис. 2, рис. 3).

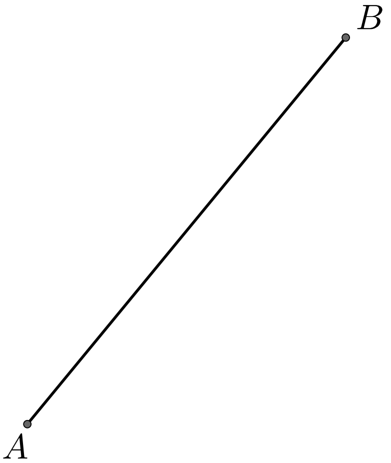


Рис. 1: Это отрезок. Его можно читать как AB так и BA.

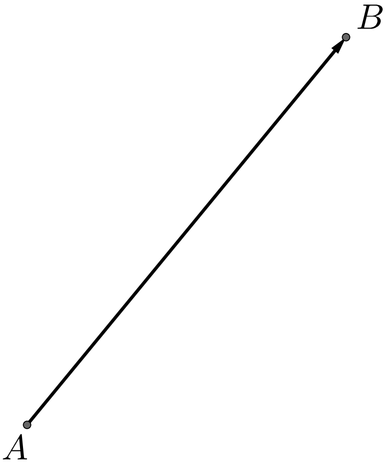


Рис. 2: Это вектор $\overrightarrow{AB}$. Его начало точка A, а конец точка B.

Вектор с началом в точке B и с концом в точке A, т.е. вектор $\overrightarrow{BA}$ (рис. 3), называется **противоположным** вектору $\overrightarrow{AB}$ (рис. 2).

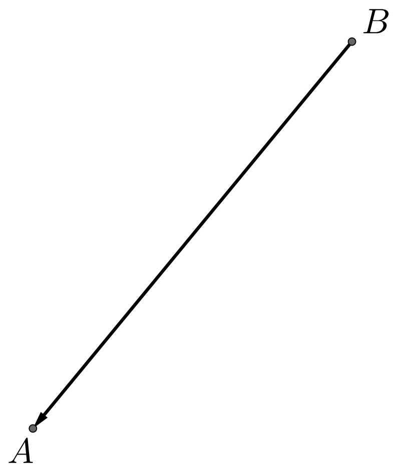
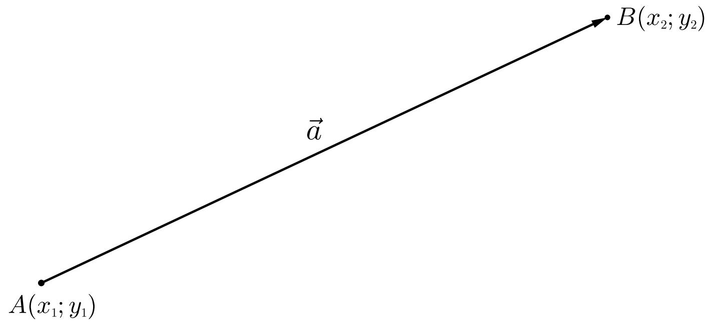


Рис. 3: Это вектор $\overrightarrow{BA}$. Его начало точка B, а конец точка A.

За **длину вектора** $\overrightarrow{AB}$ (или **модуль вектора** $\overrightarrow{AB}$) принимается отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$.



Пусть на координатной плоскости xOy заданы две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, тогда длину вектора $\overrightarrow{AB}$ можно найти по формуле:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

▶ **Пример 1**

Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1; -2)$ и $B(4; 2)$.

Решение:

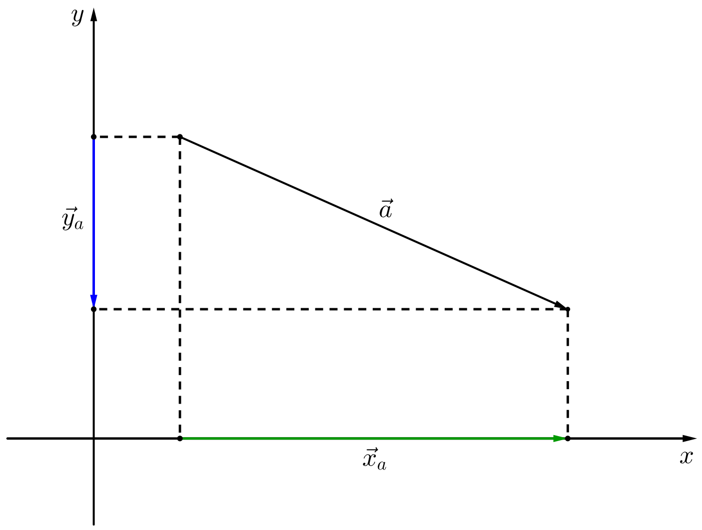
Воспользуемся формулой:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Ответ: 5.

В отличии от отрезка вектор имеет координаты.
Для того, чтобы найти **координаты вектора**, необходимо из координат конца этого вектора вычесть координаты его начала. Так у вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, координатами являются значения выражений $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$, т.е. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Геометрически координаты вектора – это проекции вектора на соответствующие оси координат, при этом, если направление проекции совпадает с направлением оси, то координата положительна, а если они направлены в противоположные стороны, то отрицательна.



Пусть дан вектор $\vec{a}$ с координатами $\vec{a}(x_a; y_a)$, тогда длину вектора $\vec{a}$ можно вычислить по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}.$$

▶ **Пример 2**

Найдите длину вектора $\vec{a}(-6; 8)$.

Решение:

Воспользуемся формулой:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Ответ: 10.

▶ **Пример 3**

Найдите координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(8; -4)$ и $B(3; 8)$.

Решение:

Для того, чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, необходимо из координат конца этого вектора вычесть координаты его начала, т.е. из координат точки $B(3; 8)$ вычесть координаты точки $A(8; -4)$. Получим координаты вектора

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 8; 8 - (-4)) = (-5; 12),$$

то есть абсцисса вектора $x_{AB} = -5$, а ордината $y_{AB} = 12$.

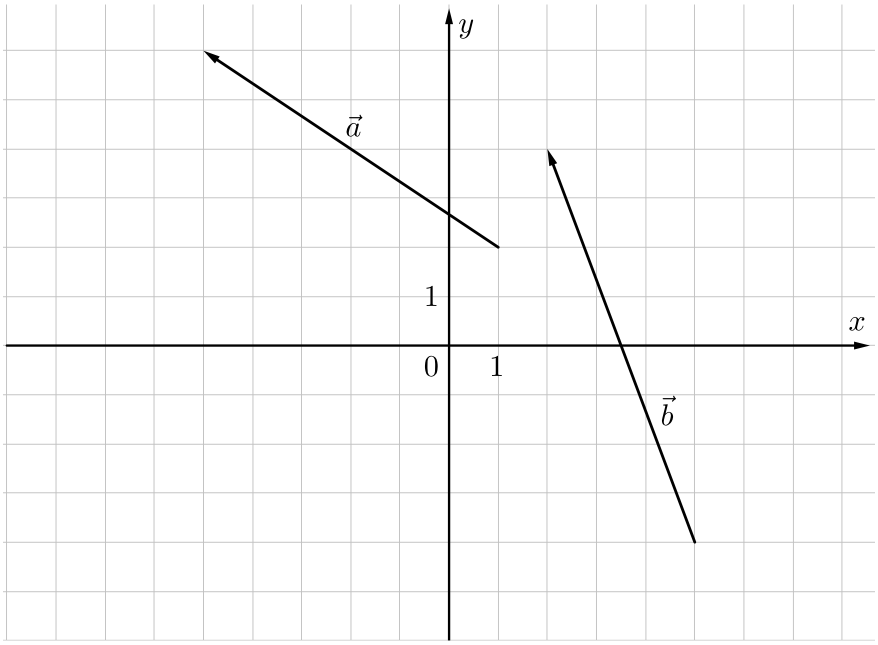
Для нахождения длины вектора $\overrightarrow{AB}$ воспользуемся формулой:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_{AB})^2 + (y_{AB})^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

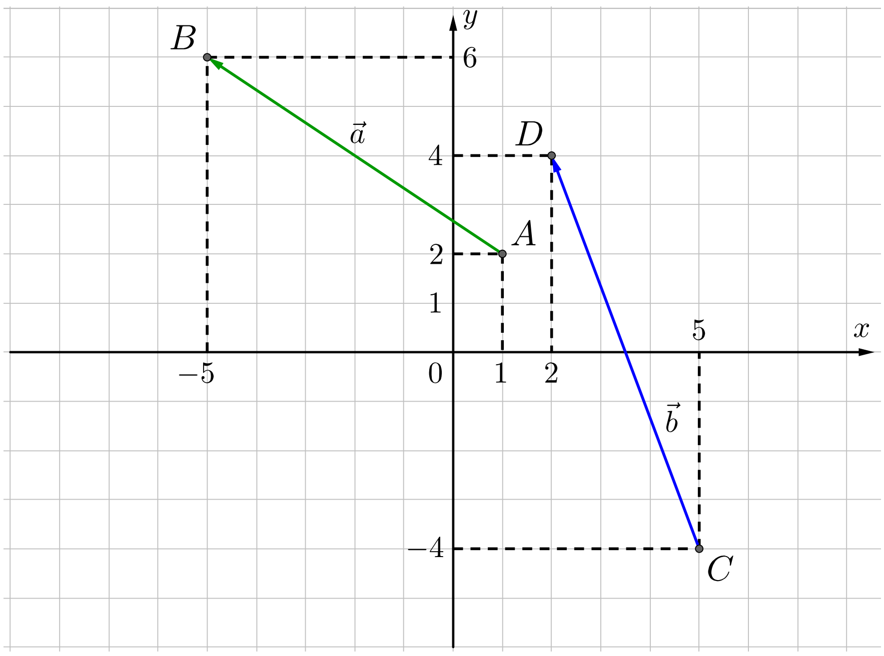
Ответ: $\overrightarrow{AB} = (-5; 12), |\overrightarrow{AB}| = 13$.

▶ **Пример 4**

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите их координаты.



Решение:
Обозначим начало вектора $\vec{a}$ буквой A, а его конец буквой B, начало вектора $\vec{b}$ буквой C, а его конец буквой D, то есть у нас $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.



Определим по рисунку координаты всех введённых точек:
точка A имеет координаты $A(1;2)$, точка B координаты $B(-5;6)$,
точка C координаты $C(5;-4)$, точка D координаты $D(2;4)$.
Тогда координаты векторов

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (-5-1; 6-2) = (-6;4),$$

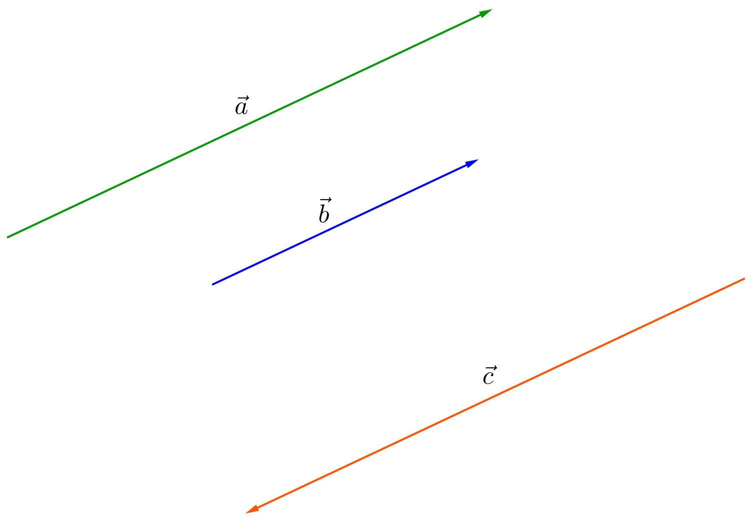
$$\vec{b} = \overrightarrow{CD} = (x_D - x_C; y_D - y_C) = (2-5; 4-(-4)) = (-3;8).$$

Примечание: Также определить координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно непосредственно по рисунку. Для этого узнаем на сколько изменились координаты x и y при движении вдоль вектора $\vec{a}$ от начала вектора к концу: x уменьшился на 6, а y увеличился на 4. Поэтому координата x вектора $\vec{a}$ равна 6, а координата y равна 4. Следовательно, $\vec{a} = (-6; 4)$.

Рисунок и рисунок

Координаты вектора $\vec{b}$ находим аналогично, при движении вдоль вектора $\vec{b}$ от начала вектора к концу: x уменьшился на 3, а y увеличился на 8. Поэтому координата x вектора $\vec{b}$ равна 3, а координата y равна 8, т.е. $\vec{b} = (-3; 8)$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными** (записывается $\vec{a} \parallel \vec{b}$). Коллинеарные векторы бывают **сонаправленными** (совпадают по направлению) и **противоположно направленными** (направлены в противоположные стороны). Так на рисунке векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленые, а векторы в парах $\vec{a}$ и $\vec{c}$, а также $\vec{b}$ и $\vec{c}$ противоположно направленные.



Задачи для самостоятельного решения

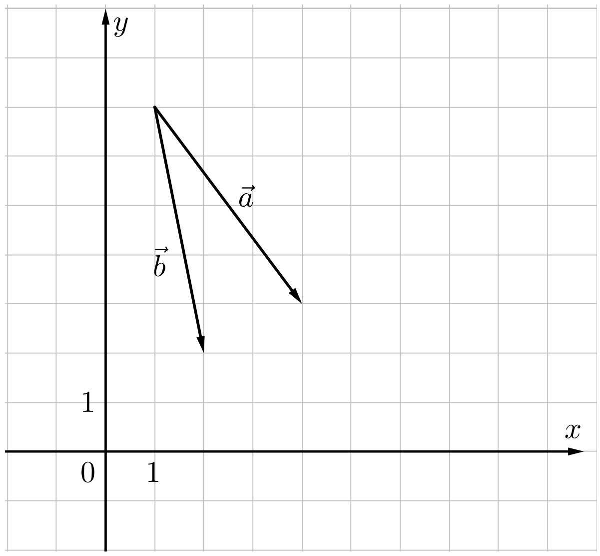
Задача 1. Найдите длину вектора $\vec{a}(-10; 24)$.

Задача 2. Найдите длину вектора $\vec{a}(-7; 0)$.

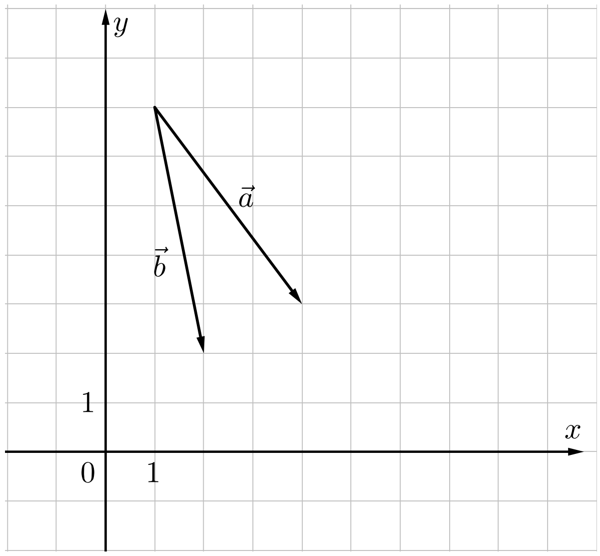
Задача 3. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(8; 0)$ и $B(0; -6)$.

Задача 4. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(1; 3)$ и $B(-3; 5)$.

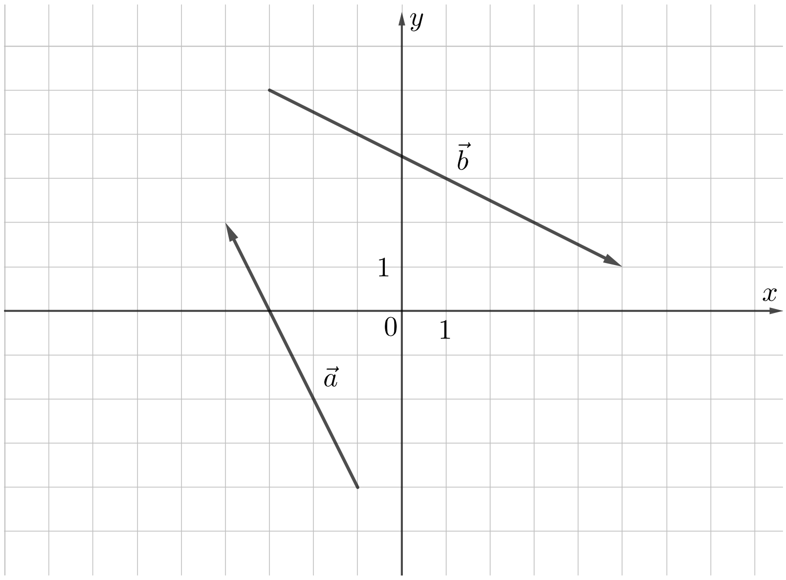
Задача 5. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (здесь и далее считаем, что изображенные векторы имеют целочисленные координаты). Найдите: а) координаты вектора $\vec{a}$, б) координаты вектора $\vec{b}$.



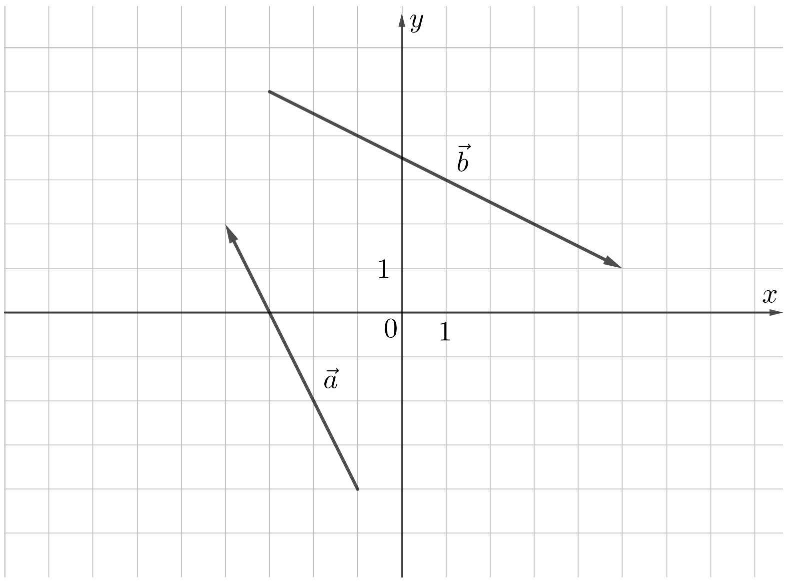
Задача 6. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите: а) длину вектора $\vec{a}$, б) длину вектора $\vec{b}$.



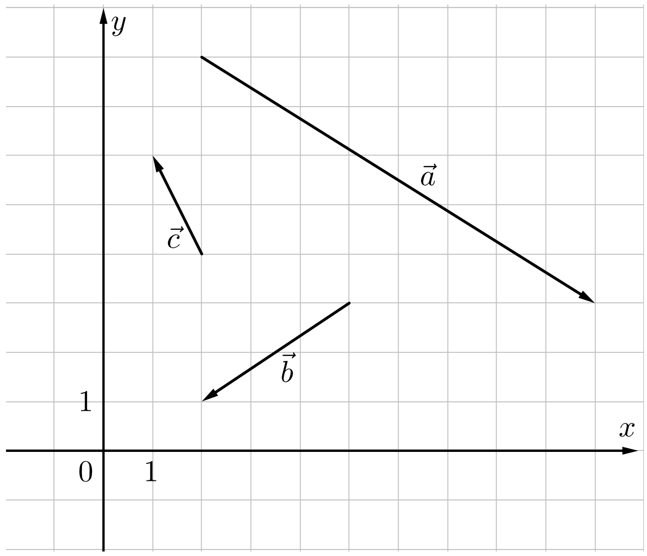
Задача 7. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Найдите: а) координаты вектора $\vec{a}$, б) координаты вектора $\vec{b}$.



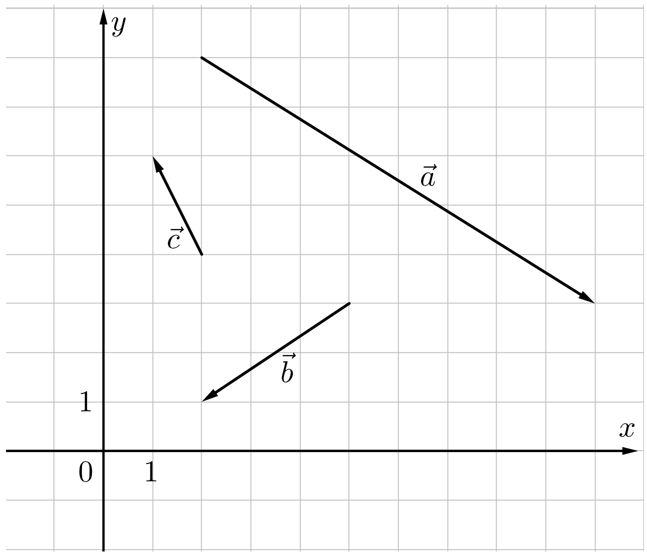
Задача 8. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите: а) длину вектора $\vec{a}$, б) длину вектора $\vec{b}$.



Задача 9. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите их координаты.



Задача 10. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите их длины.



Задача 11. На координатной плоскости xOy заданы точки: $A(1;1)$, $B(6;2)$, $C(5;-1)$ и $D(0;-2)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ и их длины.

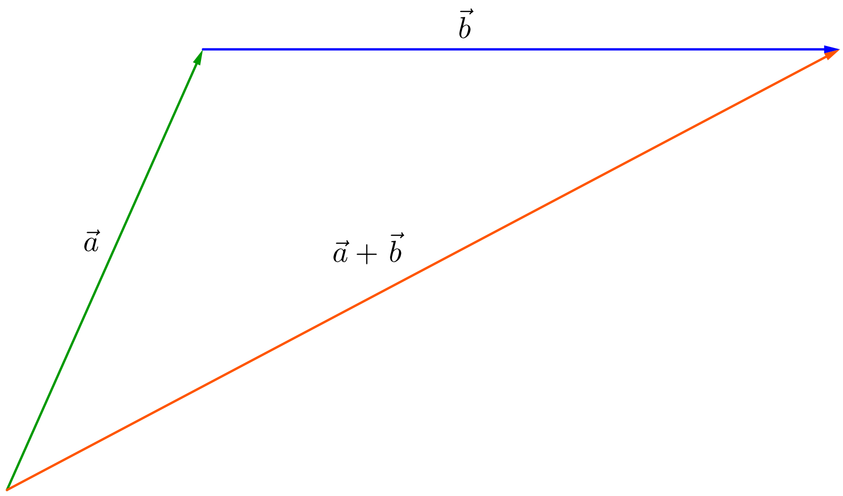
Задача 12. На координатной плоскости xOy заданы точки: $A(-2;-3)$, $B(2;0)$, $C(1;1)$, $D(-5;1)$ и $E(-2;2)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ и их длины.

Задача 13. Даны векторы $\vec{a}\,(4;-1)$ и $\vec{b}\,(b_0;8)$. Найдите b_0, если $|\vec{b}| = 2{,}5|\vec{a}|$. Если таких значений несколько, в ответ запишите большее из них.

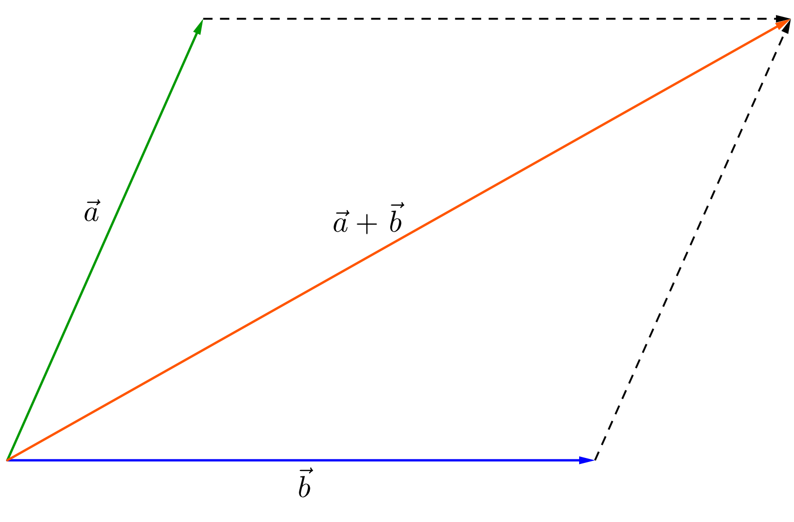
Теоретическая справка

К линейным операциям над векторами относятся операции сложения, вычитания векторов и умножение вектора на число.

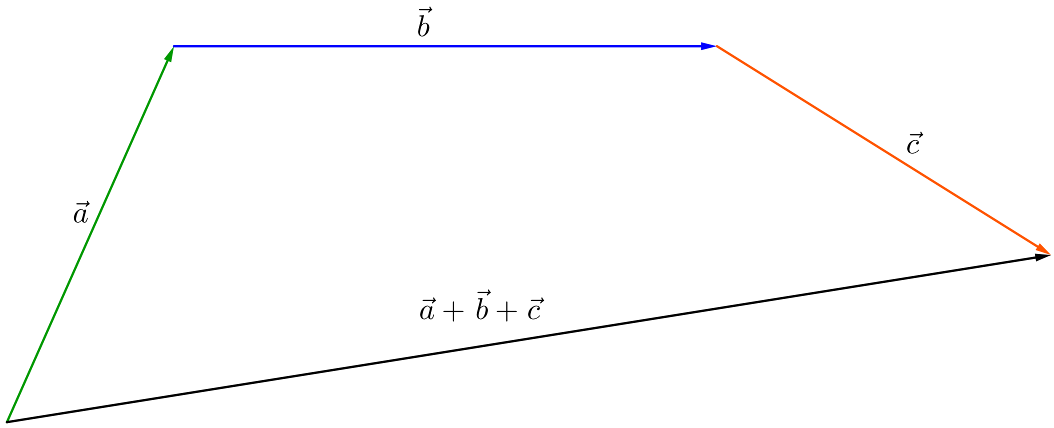
Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора. Параллельно перенесем вектор $\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется **суммой** этих векторов и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$. Это правило сложения векторов называют **правилом треугольника**.



Ту же сумму векторов можно получить другим способом – по **правилу параллелограмма**. Параллельно перенесем вектор $\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с началом вектора $\vec{a}$. Достроим полученную фигуру до параллелограмма со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор, служащий диагональю параллелограмма, выходящей из общей начальной точки векторов, является суммой векторов $\vec{a}+\vec{b}$.



Аналогично правилу треугольника существует **правило многоугольника**. Согласно этому правилу можно складывать несколько векторов. Для сложения векторов мы с помощью параллельного переноса будем совмещать начало каждого следующего вектора с концом предыдущего. Тогда вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, называется **суммой** этих векторов.



Для того, чтобы найти **разность векторов**, например, $\vec{a}-\vec{b}$, нужно сложить векторы $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, получив предварительно вектор $-\vec{b}$ из вектора $\vec{b}$ сменой его направления на противоположное, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Для **сложения векторов с известными координатами**, необходимо сложить их соответствующие координаты, то есть если $\vec{a}(x_a;y_a)$, $\vec{b}(x_b;y_b)$, то

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_a+x_b;y_a+y_b).$$

Аналогично с разностью векторов:

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_a-x_b;y_a-y_b).$$

Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число k называется вектор $k\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|k\vec{a}|$. При этом:

- если $k>0$, то векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ сонаправлены;
- если $k<0$, то векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ имеют противоположное направление;
- если $k=0$, то получаем нулевой вектор $(0;0)$.

Таким образом, если умножить некоторый произвольный вектор на 2, его длина увеличится в 2 раза, а направление не изменится; если умножить на 0,5, его длина уменьшится в 2 раза, а направление не изменится; если умножить на -3, его длина увеличится в 3 раза, а направление поменяется на противоположное.

Если известны координаты вектора, то для умножения вектора на действительное число k, необходимо умножить на это число все его координаты, то есть если $\vec{a}(x_a;y_a)$, то

$$k\cdot\vec{a}=(k\cdot x_a;k\cdot y_a).$$

Для того, чтобы выполнить несколько линейных операций с векторами, сначала умножаем векторы на коэффициенты, а затем складываем и вычитаем.

▶ **Пример 1**

Даны векторы $\vec{a}\,(3;7)$, $\vec{b}\,(8;9)$. Найдите длину вектора $1{,}2\vec{a}-0{,}7\vec{b}$.

Решение:

Для начала умножим каждый из заданных векторов на коэффициенты, стоящие перед ними.

$$\vec{a}=(3;7)\Rightarrow 1{,}2\vec{a}=1{,}2\cdot(3;7)=(1{,}2\cdot 3;1{,}2\cdot 7)=(3{,}6;8{,}4),$$

$$\vec{b}=(8;9)\Rightarrow 0{,}7\vec{b}=0{,}7\cdot(8;9)=(0{,}7\cdot 8;0{,}7\cdot 9)=(5{,}6;6{,}3).$$

Вычтем из первого полученного результата второй, получим

$$1{,}2\vec{a}-0{,}7\vec{b}=(3{,}6;8{,}4)-(5{,}6;6{,}3)=(3{,}6-5{,}6;8{,}4-6{,}3)=(-2;2{,}1).$$

Длина вектора $1{,}2\vec{a}-0{,}7\vec{b}$ равна

$$|1{,}2\vec{a}-0{,}7\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+(2{,}1)^2}=\sqrt{8{,}41}=2{,}9.$$

Ответ: 2,9.

▶ **Пример 2**

Даны векторы $\vec{a}\,(6;-1)$, $\vec{b}\,(-5;-2)$ и $\vec{c}\,(-3;5)$. Найдите длину вектора $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Решение:

Для того, чтобы решить задачу, выполним сначала действия с координатами заданных векторов и найдем координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$:

$$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=(6;-1)-(-5;-2)+(-3;5)=(6-(-5)+(-3);-1-(-2)+5)=(8;6).$$

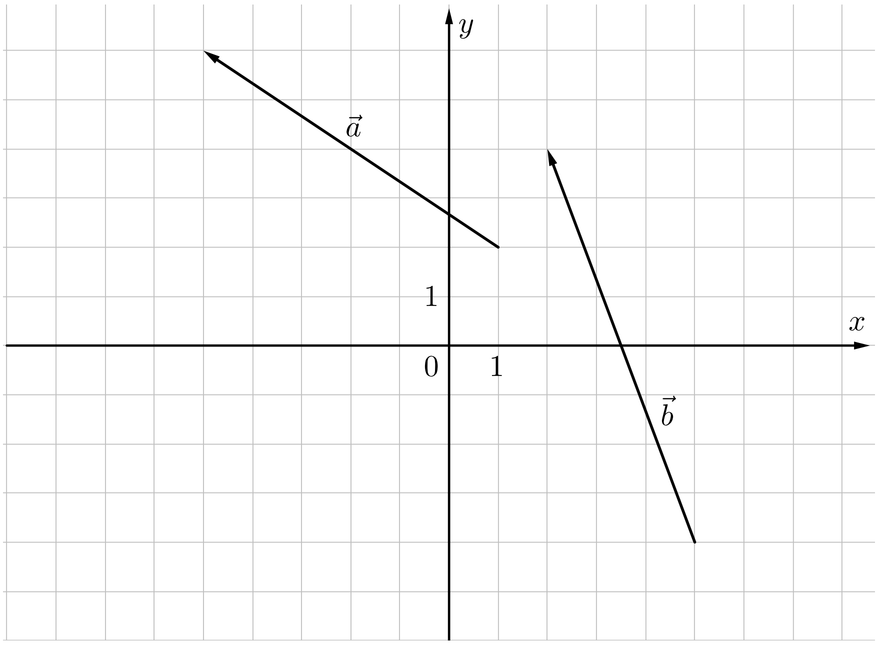
Длина полученного вектора равна

$$|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=|(8;6)|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10.$$

Ответ: 10.

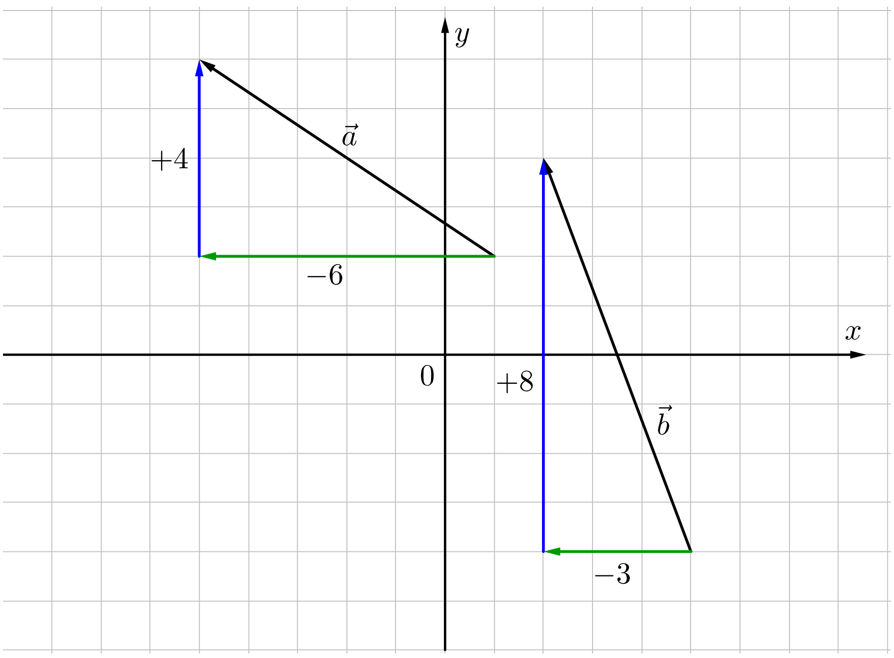
▶ **Пример 3**

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c}=0{,}5\vec{b}-\vec{a}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{c}$.



Решение:

1 способ. Определим по рисунку координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Узнаем на сколько изменились координаты x и y при движении вдоль вектора $\vec{a}$ от начала вектора к концу: x уменьшился на 6, а y увеличился на 4. Поэтому координата x вектора $\vec{a}$ равна 6, а координата y равна 4. Следовательно, $\vec{a} = (-6; 4)$.



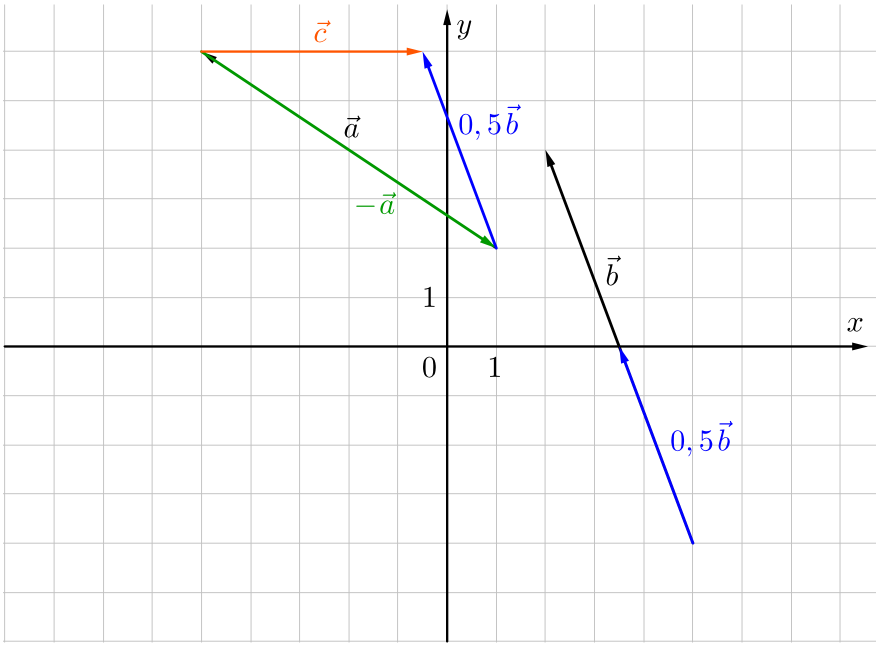
Координаты вектора $\vec{b}$ находим аналогично, при движении вдоль вектора $\vec{b}$ от начала вектора к концу: x уменьшился на 3, а y увеличился на 8. Поэтому координата x вектора $\vec{b}$ равна 3, а координата y равна 8. Значит, $\vec{b} = (-3; 8)$.

$$\vec{c} = 0{,}5\vec{b} - \vec{a} = 0{,}5 \cdot (-3; 8) - (-6; 4) = (-1{,}5; 4) - (-6; 4) = (4{,}5; 0).$$

Сумма координат полученного вектора равна

$$x_c + y_c = 4{,}5 + 0 = 4{,}5.$$

2 способ. Решим эту задачу используя для сложения векторов правило треугольника. Запишем искомый вектор в виде суммы двух векторов: $\vec{c} = 0{,}5\vec{b} - \vec{a} = 0{,}5\vec{b} + (-\vec{a})$.



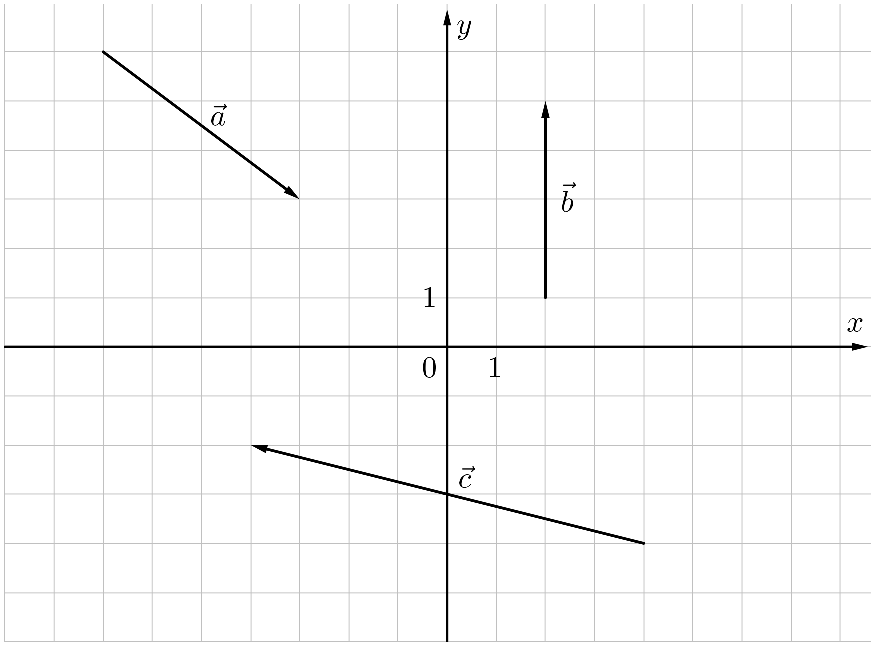
Вектор $(-\vec{a})$ (выделен зеленым) получим из вектора $\vec{a}$, сменив его направление на противоположное, а уменьшив в 2 раза вектор $\vec{b}$, получим вектор $0{,}5\vec{b}$ (выделен синим). Заметим, что конец вектора $0{,}5\vec{b}$ попадает ровно на середину стороны клетки.
Теперь параллельно перенесём вектор $0{,}5\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $(-\vec{a})$.
Искомый вектор суммы этих векторов (отмечен жёлтым) начинается в начале вектора $(-\vec{a})$, а заканчивается в конечной точке вектора $0{,}5\vec{b}$. Он проходит параллельно горизонтали, направлен вдоль оси абсцисс и занимает 4,5 клетки, значит, его координаты $(4{,}5; 0)$. Сумма координат полученного вектора равна

$$x_c + y_c = 4{,}5 + 0 = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

▶ **Пример 4**

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.



Решение:

1 способ. Определим по рисунку координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
Если вектор $\vec{a}$ спроецировать на горизонтальную ось, то длина проекции равна 4, при этом проекция вектора и ось направлены в одну сторону, поэтому первая координата равна 4, далее спроецируем вектор $\vec{a}$ на вертикальную ось и найдём вторую координату -3 (со знаком минус, так как проекция и ось направлены в противоположные стороны). Следовательно, $\vec{a} = (4; -3)$. Координаты векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ находим аналогично, $\vec{b} = (0; 4)$, $\vec{c} = (-8; 2)$.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (4; -3) + (0; 4) + (-8; 2) = (4 + 0 - 8; -3 + 4 + 2) = (-4; 3).$$

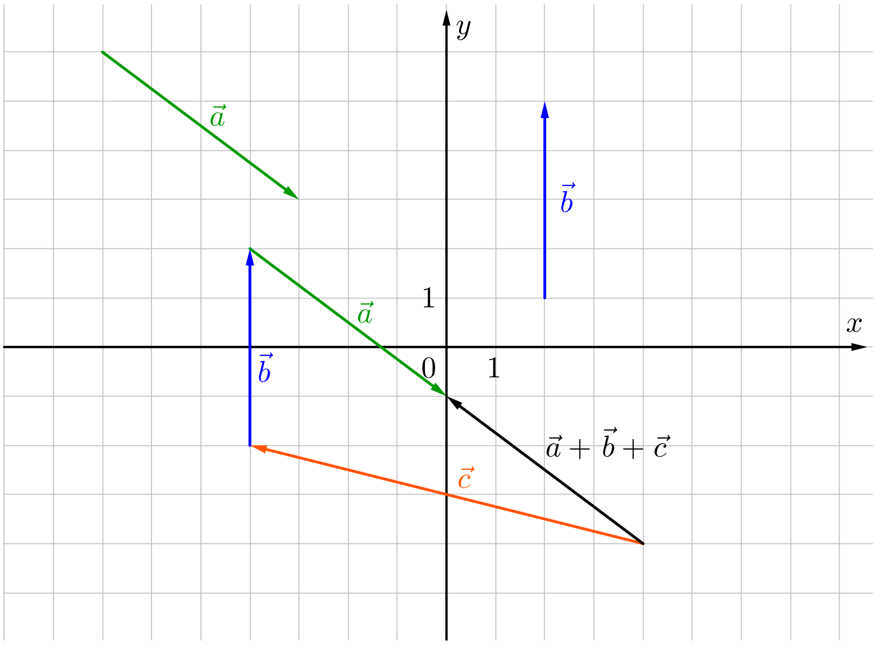
Длина полученного вектора равна

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

2 способ. Решим эту задачу используя для сложения векторов правило многоугольника. Искомый вектор является суммой трёх векторов: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Изменим последовательность векторов в сумме $\vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$. Перенесём параллельным переносом вектор $\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{c}$. Затем перенесём параллельным переносом вектор $\vec{a}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{b}$. По правилу многоугольника вектор, равный сумме этих трёх векторов, соединяет начало первого вектора и конец последнего. Искомый вектор суммы $\vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$ имеет координаты $(-4; 3)$, а его длина равна

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Ответ: 5.


y
$\vec{a}$
$\vec{b}$
$\vec{a}$
1
x
$\vec{b}$
0
1
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
$\vec{c}$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Даны векторы $\vec{f}(9; -21)$ и $\vec{e}(-2; 15)$. Найдите координаты вектора $\vec{g}$, если $\vec{g} = \dfrac{1}{3}\vec{f} - 0{,}2\vec{e}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$.

Задача 2. Даны векторы $\vec{f}(-5; 7)$ и $\vec{e}\left(\dfrac{1}{3}; 2\right)$. Найдите координаты вектора $\vec{g}$, если $\vec{g} = -5\vec{f} + 6\vec{e}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{f}(-2{,}5; 0{,}5)$ и $\vec{e}(14; -12)$. Найдите координаты вектора $\vec{g}$, если $\vec{g} = 6\vec{f} + 2{,}5\vec{e}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$.

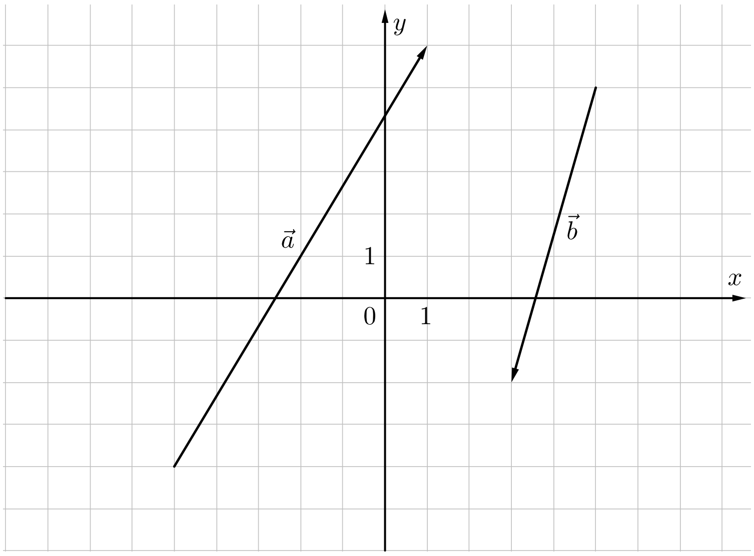
Задача 4. Даны векторы $\vec{a}\,(13; 10)$, $\vec{b}\,(3; 4)$. Найдите длину вектора $0{,}8\vec{a} - 2{,}3\vec{b}$.

Задача 5. Даны векторы $\vec{a}\,(2; -5)$, $\vec{b}\,(6; 3)$ и $\vec{c}\,(4; 7)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

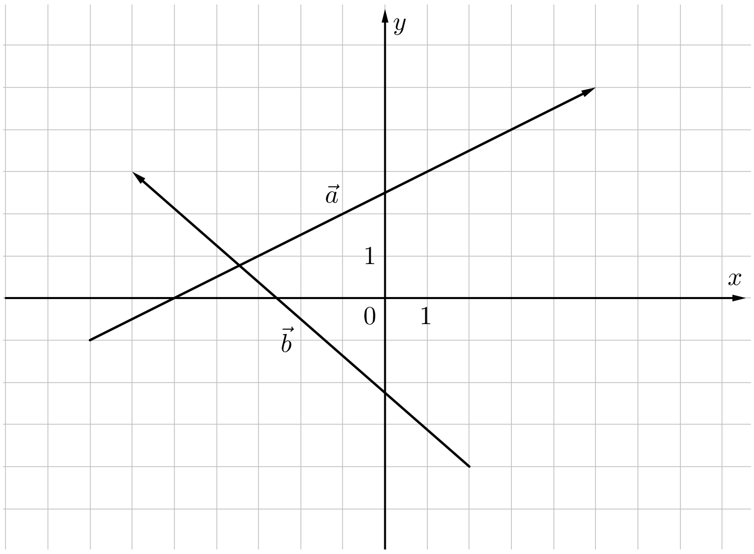
Задача 6. Даны векторы $\vec{a}\,(0; 3)$, $\vec{b}\,(-2; 4)$ и $\vec{c}\,(4; -1)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$.

Задача 7. Даны векторы $\vec{a}\,(0; 3)$, $\vec{b}\,(-2; 4)$ и $\vec{c}\,(4; -1)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

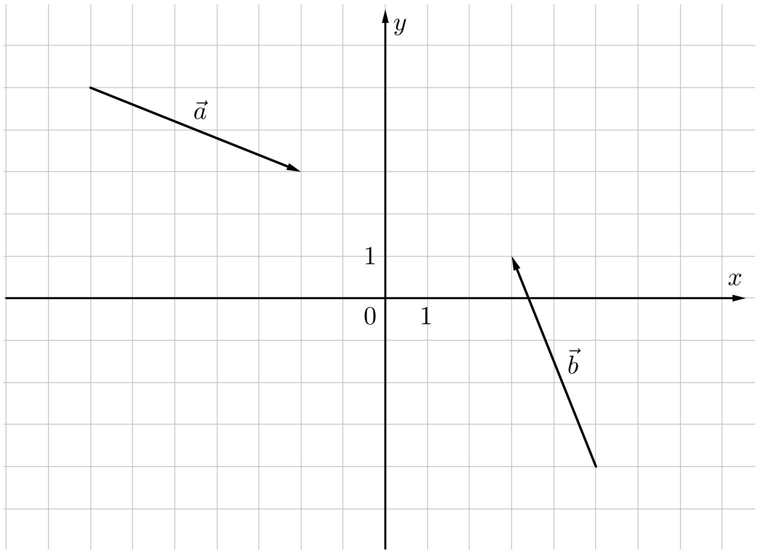
Задача 8. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите длину вектора $2\vec{b} - \vec{a}$.



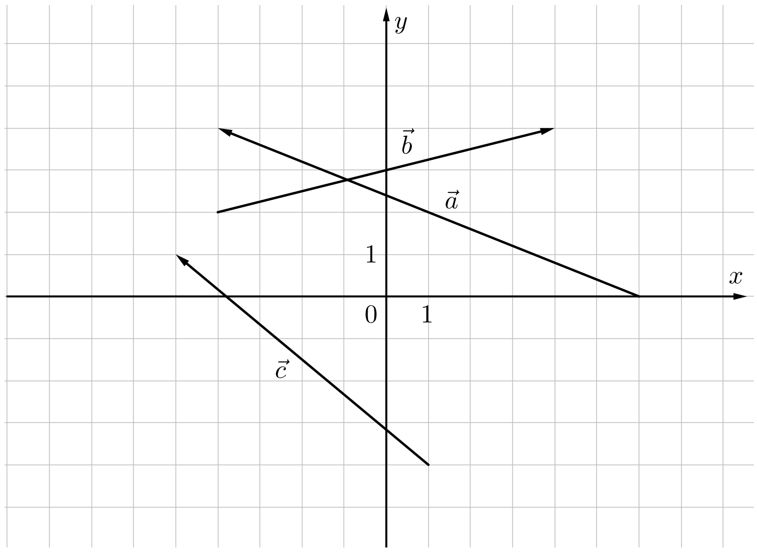
Задача 9. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите координаты вектора $\vec{c}(x_c; y_c)$, если $\vec{c} = \vec{a} - 1{,}5\vec{b}$. В ответ запишите произведение $x_c \cdot y_c$.



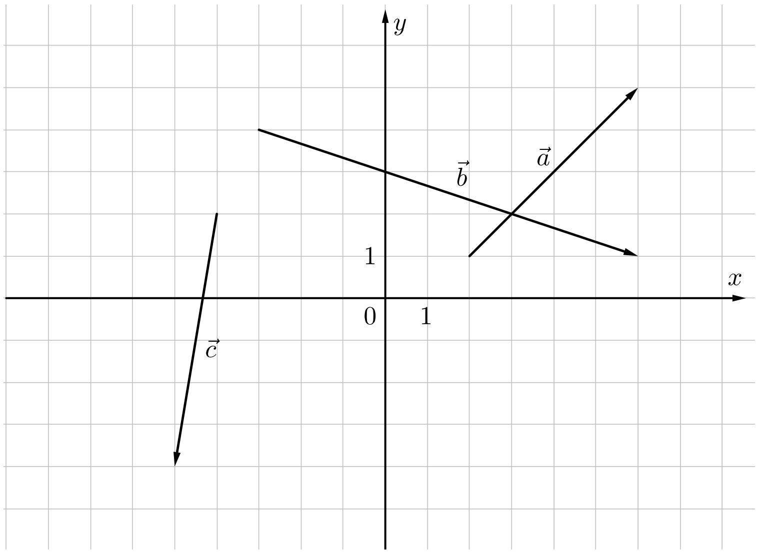
Задача 10. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите длину вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$.



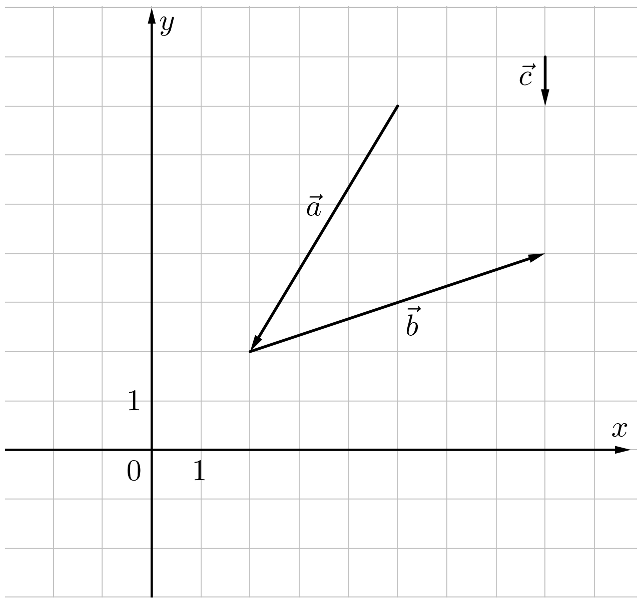
Задача 11. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.



Задача 12. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.



Задача 13. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.



3 Скалярное произведение векторов

Теоретическая справка

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

По определению:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Замечание: Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ – нулевой вектор, то скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения:

1) от перестановки множителей скалярное произведение не меняется: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату его длины: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;

3) распределительный закон: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;

4) $(k\vec{a}) \cdot (m\vec{b}) = (k \cdot m) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$;

5) Если ненулевые векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. Справедливо и обратное.

Если известны координаты векторов $\vec{a}(x_a; y_a)$, $\vec{b}(x_b; y_b)$, то вычислить скалярное произведение можно по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b.$$

Используя обе формулы скалярного произведения, можно получить формулу для нахождения **косинуса угла между векторами**

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

▶ **Пример 1**

Даны векторы $\vec{a}(-13; 4)$ и $\vec{b}(-6; 1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Решение:

Используем формулу для нахождения скалярного произведения через координаты:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = -13 \cdot (-6) + 4 \cdot 1 = 78 + 4 = 82.$$

Ответ: 82.

▶ **Пример 2**

Даны векторы $\vec{a}\,(2; -5)$ и $\vec{b}\,(5; 7)$. Найдите скалярное произведение векторов $0{,}6\,\vec{a}$ и $1{,}4\,\vec{b}$.

Решение:

1 способ. Воспользуемся одним из свойств скалярного произведения:

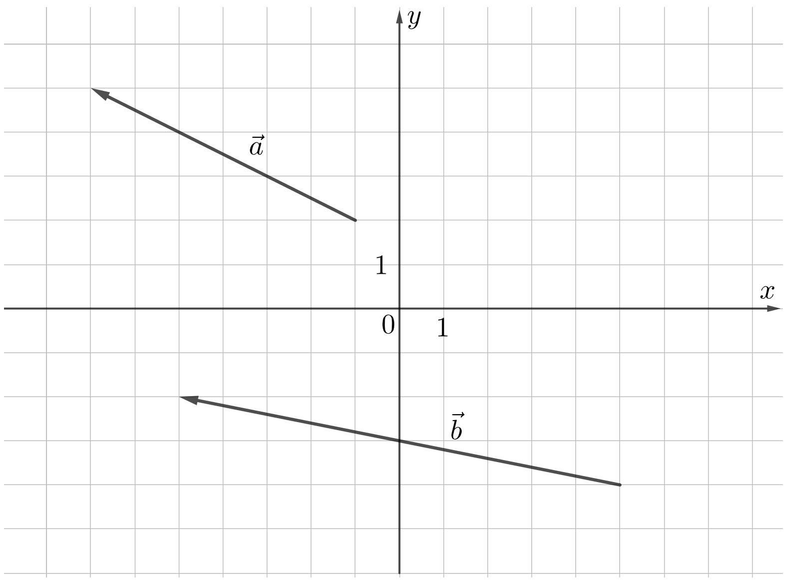
$$(k\vec{a}) \cdot (m\vec{b}) = (k \cdot m) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Получим
$$(0{,}6\,\vec{a})\cdot(1{,}4\,\vec{b}) = (0{,}6\cdot 1{,}4)\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$
Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ запишем через координаты:
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b = 2\cdot 5 - 5\cdot 7 = 10 - 35 = -25.$$
Следовательно,
$$(0{,}6\,\vec{a})\cdot(1{,}4\,\vec{b}) = (0{,}6\cdot 1{,}4)\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{6}{10}\cdot\frac{14}{10}\cdot(-25) = \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot(-25) = -21.$$
2 способ. Найдём сначала координаты векторов: $0{,}6\,\vec{a}$ и $1{,}4\,\vec{b}$.
$$0{,}6\,\vec{a} = 0{,}6\cdot(2;-5) = (1{,}2;-3),$$
$$1{,}4\,\vec{b} = 1{,}4\cdot(5;7) = (7;9{,}8).$$
Перемножим скалярно полученные векторы:
$$0{,}6\,\vec{a}\cdot 1{,}4\,\vec{b} = 1{,}2\cdot 7 - 3\cdot 9{,}8 = 8{,}4 - 29{,}4 = -21.$$

Ответ: -21.

▶ Пример 3

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



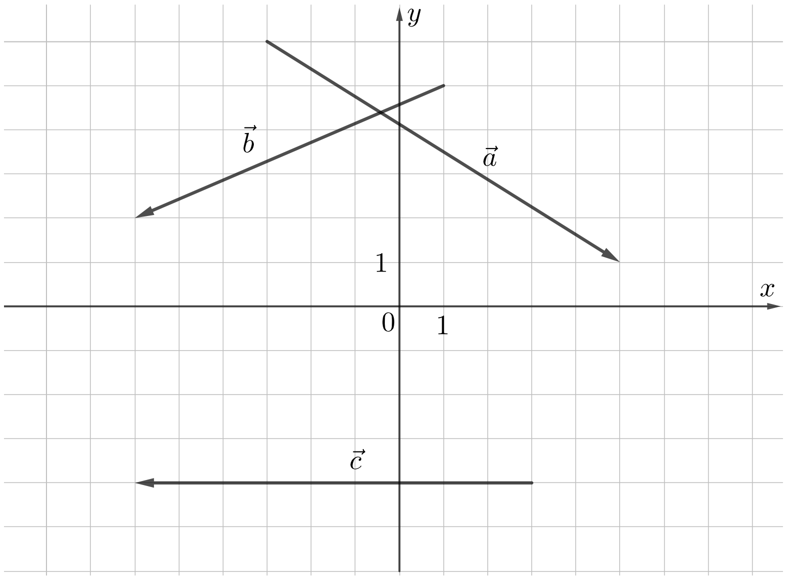
Решение:
Определим по рисунку координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. $\vec{a} = (-6; 3)$ и $\vec{b} = (-10; 2)$. Используем формулу для нахождения скалярного произведения через координаты:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = -6 \cdot (-10) + 3 \cdot 2 = 60 + 6 = 66.$$

Ответ: 66.

▶ **Пример 4**

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$.



Решение:
Определим по рисунку координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. $\vec{a} = (8; -5)$, $\vec{b} = (-7; -3)$, $\vec{c} = (-9; 0)$. Тогда $\vec{b} - \vec{c} = (-7; -3) - (-9; 0) = (2; -3)$. А теперь используем формулу для нахождения скалярного произведения через координаты:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 8 \cdot 2 + (-5) \cdot (-3) = 16 + 15 = 31.$$

Ответ: 31.

▶ **Пример 5**

Даны векторы $\vec{a}\,(-4;-1)$, $\vec{b}\,(0;-2)$ и $\vec{c}\,(c_0;-5)$. Найдите c_0, если $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$.

Решение:

Найдём координаты вектора $\vec{b}-\vec{c}=(0;-2)-(c_0;-5)=(-c_0;3)$. Используем формулу для нахождения скалярного произведения через координаты:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=-4\cdot(-c_0)+(-1)\cdot 3=4c_0-3.$$

По условию скалярное произведение $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})$ равно нулю, следовательно, $4c_0-3=0$, а, значит, $c_0=0{,}75$.

Ответ: 0,75.

▶ **Пример 6**

Даны векторы $\vec{m}(2;-11)$, $\vec{n}(7;8)$, $\vec{k}(-5;1)$ и $\vec{p}(-11;3)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m}-\vec{n})\cdot(\vec{k}-\vec{p})$.

Решение:

Найдём координаты векторов $\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{k}-\vec{p}$:

$$\vec{m}-\vec{n}=(2;-11)-(7;8)=(-5;-19),$$

$$\vec{k}-\vec{p}=(-5;1)-(-11;3)=(6;-2).$$

Используем формулу для нахождения скалярного произведения через координаты:

$$(\vec{m}-\vec{n})\cdot(\vec{k}-\vec{p})=(-5;-19)\cdot(6;-2)=-5\cdot 6+(-19)\cdot(-2)=-30+38=8.$$

Ответ: 8.

▶ **Пример 7**

Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 3 и 5, а угол между ними равен 60°. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Решение:

По определению скалярного произведения получаем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$$

По условию задачи $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, \alpha=60^\circ$, следовательно

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 5\cdot\cos 60^\circ=15\cdot 0{,}5=7{,}5.$$

Ответ: 7,5.

▶ Пример 8

Даны векторы $\vec{a}\,(14;-2)$ и $\vec{b}\,(-7;-1)$. Найдите $\cos\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение:

Запишем формулу для нахождения косинуса угла α между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Вычислим длины векторов: $\vec{a}\,(14;-2)$ и $\vec{b}\,(-7;-1)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2+(y_a)^2} = \sqrt{14^2+(-2)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(x_b)^2+(y_b)^2} = \sqrt{(-7)^2+(-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

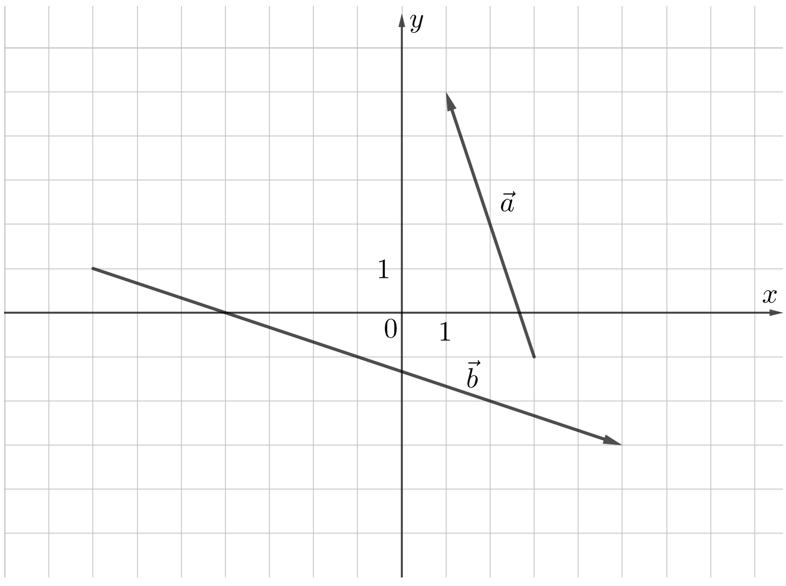
Подставим все известные величины в формулу, записанную выше, получим

$$\cos\alpha = \frac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{14\cdot(-7)+(-2)\cdot(-1)}{10\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}} = -\frac{96}{100} = -0{,}96.$$

Ответ: $-0{,}96$.

▶ Пример 9

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Решение:
Запишем формулу для нахождения косинуса угла α между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Определим координаты векторов по рисунку: $\vec{a}\,(-2; 6)$ и $\vec{b}\,(12; -4)$. Вычислим длины векторов

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(x_b)^2 + (y_b)^2} = \sqrt{12^2 + (-4)^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}.$$

Подставим все известные величины в формулу, записанную выше, получим

$$\cos\alpha = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2 \cdot 12 + 6 \cdot (-4)}{2\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{10}} = -\frac{48}{80} = -0{,}6.$$

Ответ: $-0{,}6$.

▶ Пример 10

Даны векторы $\vec{a}\,(x_a; -2)$ и $\vec{b}\,(0; y_b)$, косинус угла между которыми равен $-\sqrt{0{,}2}$. Найдите x_a. Если таких значений несколько, в ответ запишите меньшее из них.

Решение:
Вычислим скалярное произведение заданных векторов двумя способами и приравняем, для этого нам потребуется найти длины векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} = \sqrt{(x_a)^2 + (-2)^2} = \sqrt{{x_a}^2 + 4},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(x_b)^2 + (y_b)^2} = \sqrt{0^2 + (y_b)^2} = \sqrt{(y_b)^2} = |y_b|.$$

Скалярное произведение по определению равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = \sqrt{{x_a}^2 + 4} \cdot |y_b| \cdot (-\sqrt{0{,}2}) = -\sqrt{({x_a}^2 + 4) \cdot 0{,}2} \cdot |y_b|.$$

Скалярное произведение через координаты равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = x_a \cdot 0 + (-2) \cdot y_b = -2y_b.$$

Приравняв эти выражения, получим:

$$-\sqrt{({x_a}^2 + 4) \cdot 0{,}2} \cdot |y_b| = -2y_b.$$

Левая часть полученного равенства неположительна, значит, y_b – положительное число (нулем оно быть не может, так как в этом случае $\vec{b}\,(0; 0)$ - нулевой вектор и косинус угла между векторами будет не определён, что противоречит условию). То есть, $y_b < 0$, следовательно, $|y_b| = y_b$, получим:

$$-\sqrt{({x_a}^2 + 4) \cdot 0{,}2} \cdot y_b = -2y_b.$$

Сократим уравнение на $-y_b$ и возведём в квадрат:

$$({x_a}^2 + 4) \cdot 0{,}2 = 4 \Longrightarrow {x_a}^2 = 16 \Longrightarrow x_a = \pm 4.$$

В ответ запишем меньшее из чисел, то есть -4.

Ответ: -4.

▶ **Пример 11**

Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 4 и 30, а их скалярное произведение равно 120. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \vec{a} + \dfrac{1}{6}\vec{b}$.

Решение:

По 2 свойству скалярного произведения $\vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2$.
Запишем квадрат длины вектора $\vec{c}$ и раскроем скобки в полученном выражении:

$$|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \frac{1}{6}\vec{b} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \frac{1}{6} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{6} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{36}\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \frac{2}{6} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{36}\vec{b} \cdot \vec{b}.$$

При этом по условию задачи $\vec{a} \cdot \vec{b} = 120$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 30$, следовательно,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4^2 = 16,$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 30^2 = 900.$$

Подставим все величины в формулу выше, получим:

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + \frac{1}{3} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{36}|\vec{b}|^2 = 16 + \frac{120}{3} + \frac{900}{36} = 16 + 40 + 25 = 81.$$

Следовательно, искомая длина вектора равна 9.

Ответ: 9.

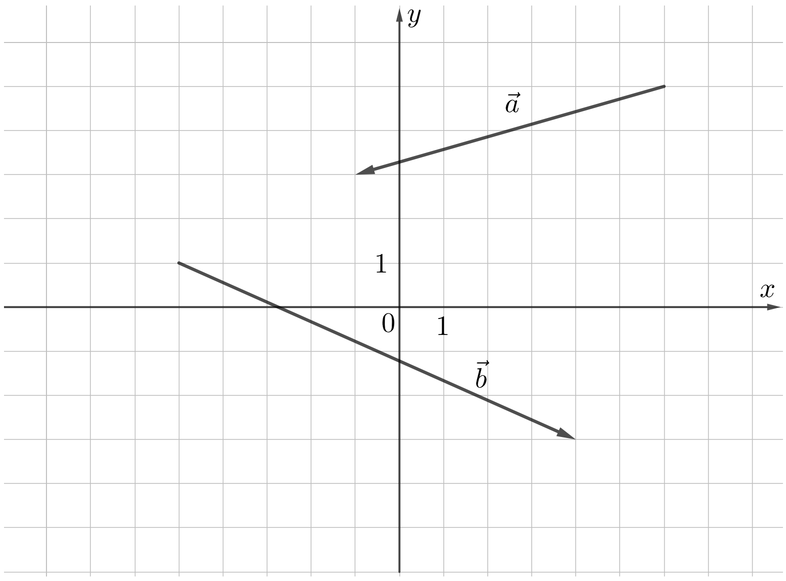
Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}(14; -2)$ и $\vec{b}(5; -8)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

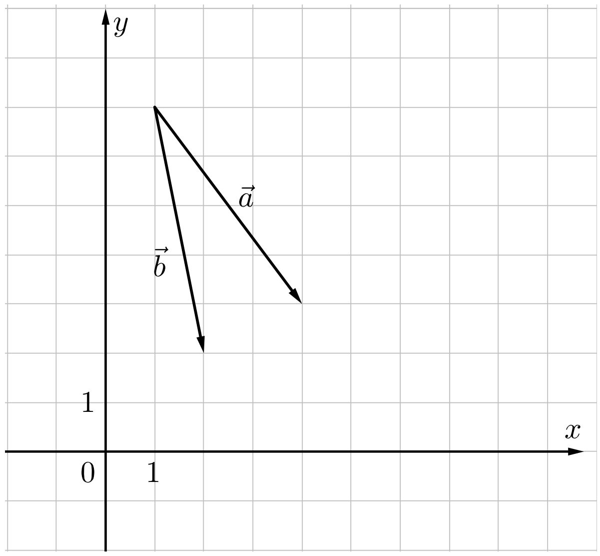
Задача 2. Даны векторы $\vec{a}(-3; 5)$ и $\vec{b}(1; 13)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}(5; -7)$ и $\vec{b}(14; 1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

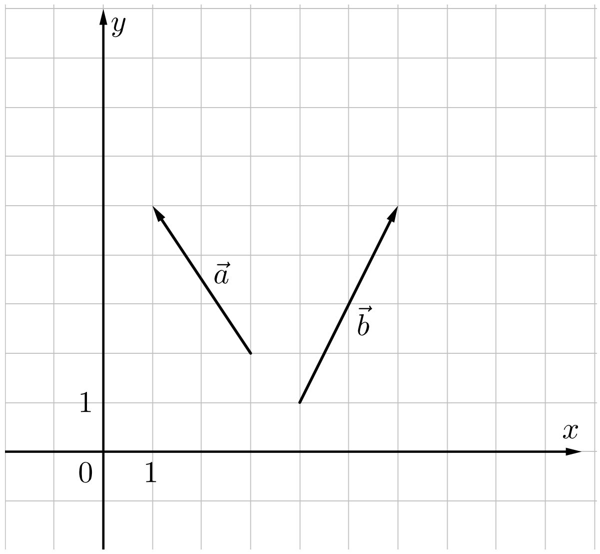
Задача 4. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



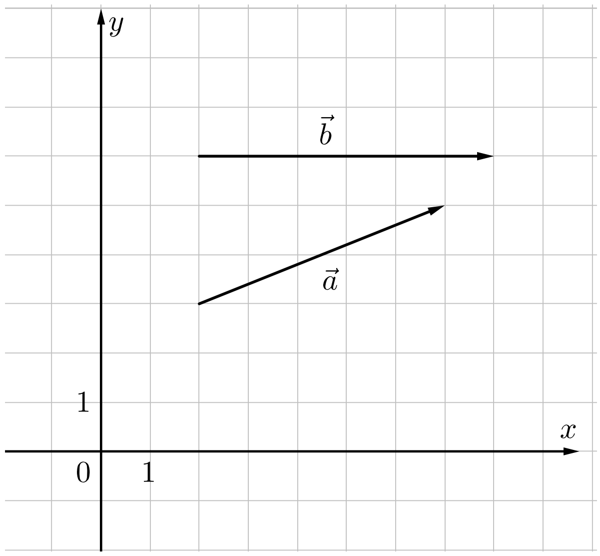
Задача 5. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



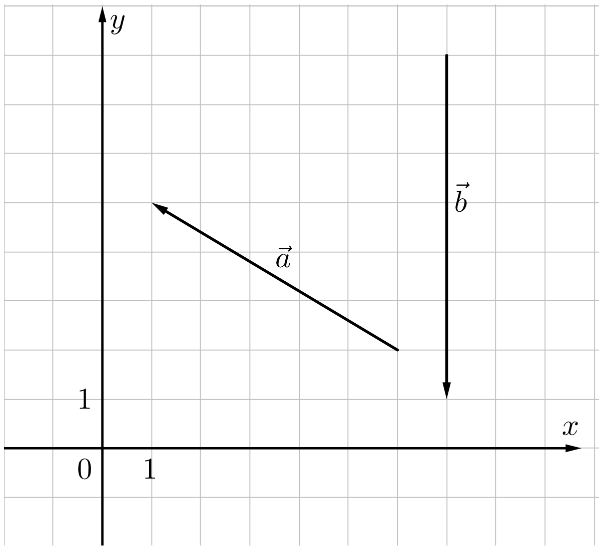
Задача 6. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Задача 7. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

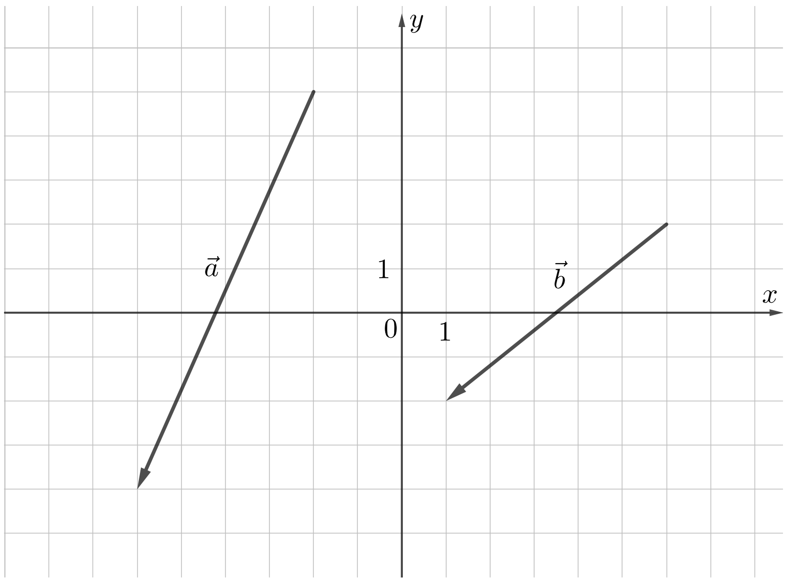


Задача 8. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

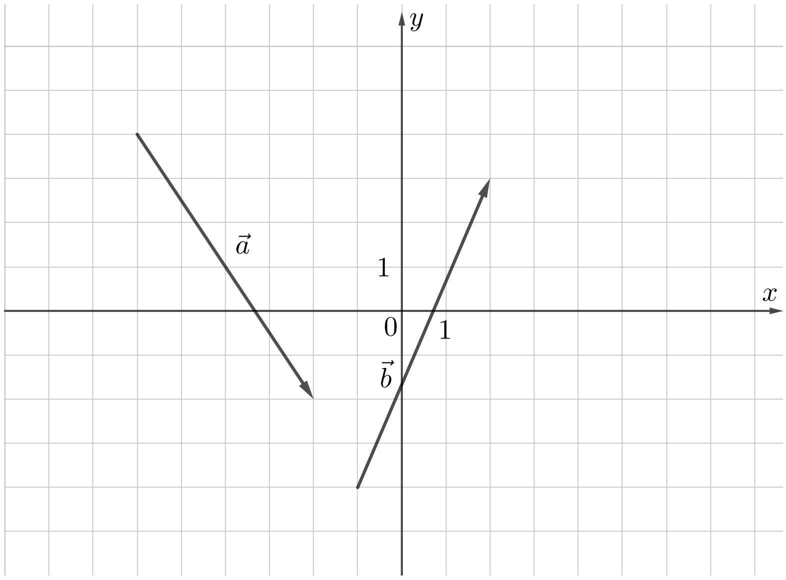


Задача 9. Даны векторы $\vec{a}\,(2{,}2; -4)$ и $\vec{b}\,(-1{,}25; -1)$. Найдите скалярное произведение векторов $3\,\vec{a}$ и $4\,\vec{b}$.

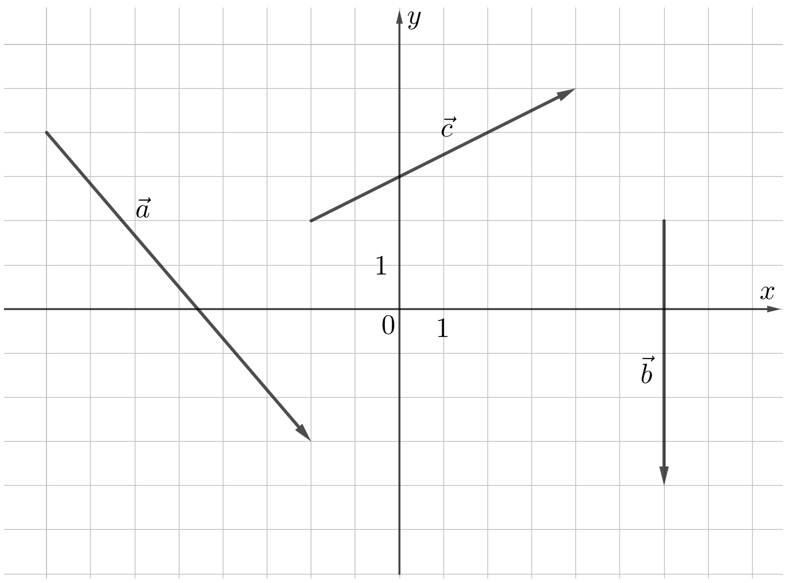
Задача 10. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a}$ и $2\vec{b}$.



Задача 11. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $2\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Задача 12. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите скалярное произведение $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



Задача 13. Даны векторы $\vec{a}\,(3;-1)$, $\vec{b}\,(2;0)$ и $\vec{c}\,(4;c_0)$. Найдите c_0, если $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

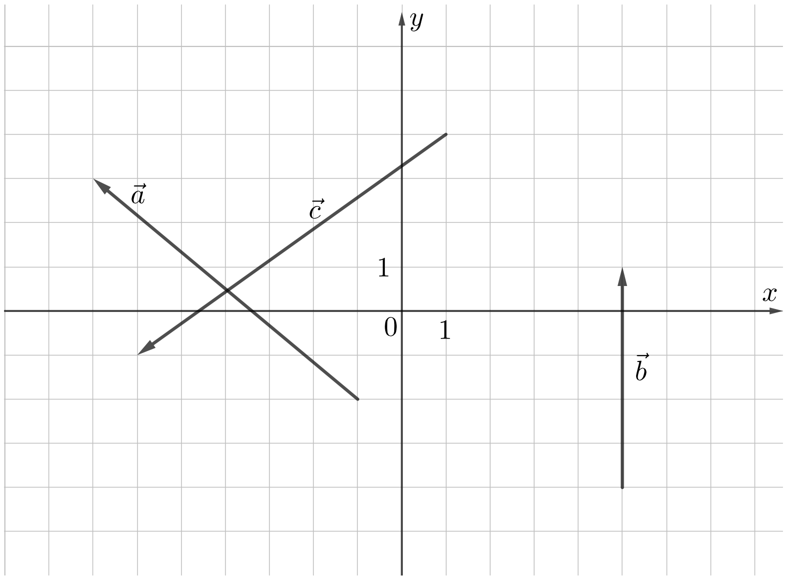
Задача 14. Даны векторы $\vec{m}(6;-2)$, $\vec{n}(-1;4)$ и $\vec{k}(x;-2)$. Найдите x, если $(\vec{m}+\vec{n})\cdot\vec{k}=0$.

Задача 15. Даны векторы $\vec{m}(-4;-3)$, $\vec{n}(-2;2)$ и $\vec{k}(x;3)$. Найдите x, если $(\vec{m}+\vec{n})\cdot\vec{k}=0$.

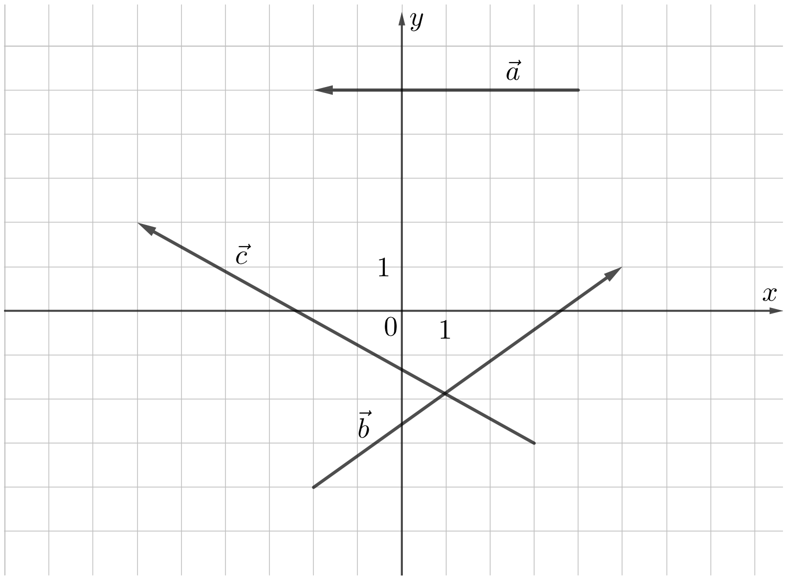
Задача 16. Даны векторы $\vec{m}(-7;3)$, $\vec{n}(-3;5)$ и $\vec{k}(-2;y)$. Найдите y, если $(\vec{m}-\vec{n})\cdot\vec{k}=0$.

Задача 17. Даны векторы $\vec{m}(-2;4)$, $\vec{n}(-7;5)$ и $\vec{k}(x;-3)$. Найдите x, если $\vec{k}\cdot(\vec{n}-\vec{m})=0$.

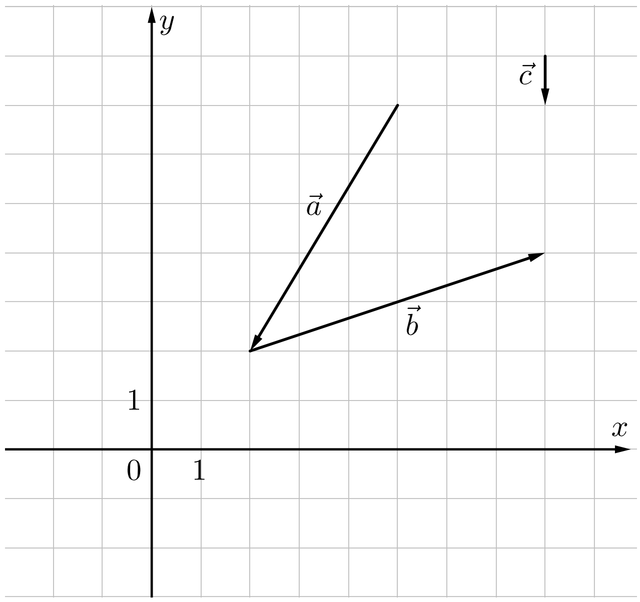
Задача 18. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.



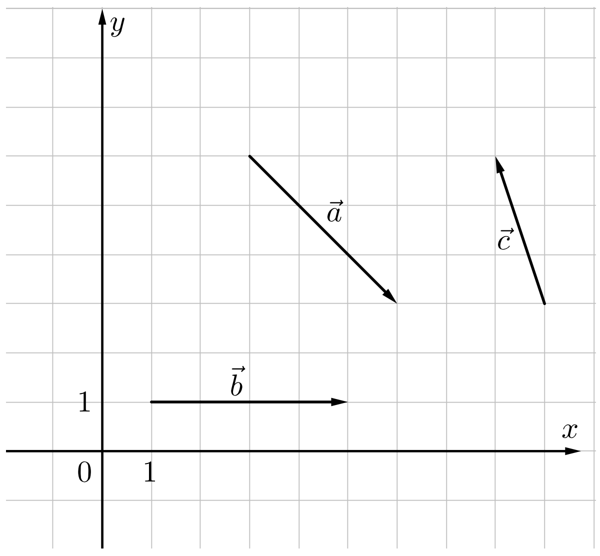
Задача 19. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



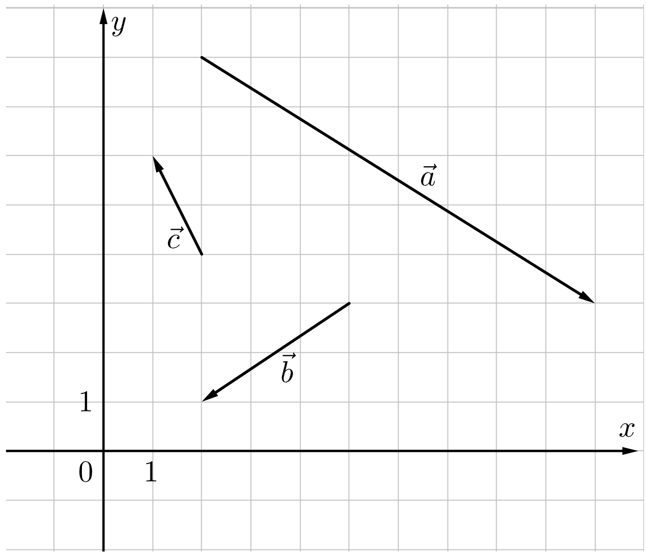
Задача 20. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.



Задача 21. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



Задача 22. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{c}$.



Задача 23. Даны векторы $\vec{m}(8; 5)$, $\vec{n}(-4; -7)$, $\vec{k}(-2; 3)$ и $\vec{p}(-1; -1)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{k} + \vec{p})$.

Задача 24. Даны векторы $\vec{m}(-9; 2)$, $\vec{n}(-4; 4)$, $\vec{k}(11; -8)$ и $\vec{p}(-5; -4)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{k} + \vec{p})$.

Задача 25. Даны векторы $\vec{m}(-8; 7)$, $\vec{n}(-5; 1)$, $\vec{k}(-7; -2)$ и $\vec{p}(9; 5)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{k} + \vec{p})$.

Задача 26. Даны векторы $\vec{m}(6;-2)$, $\vec{n}(-1;4)$, $\vec{k}(-2;8)$ и $\vec{p}(1;4)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m}+\vec{n})\cdot(\vec{k}+\vec{p})$.

Задача 27. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 3 и 7, а угол между ними равен 60°. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Задача 28. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $2\sqrt{3}$ и 5, а угол между ними равен 150°. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Задача 29. Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°, а скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равно 12. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

Задача 30. Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(6;-8)$ и $\vec{q}(0;2)$.

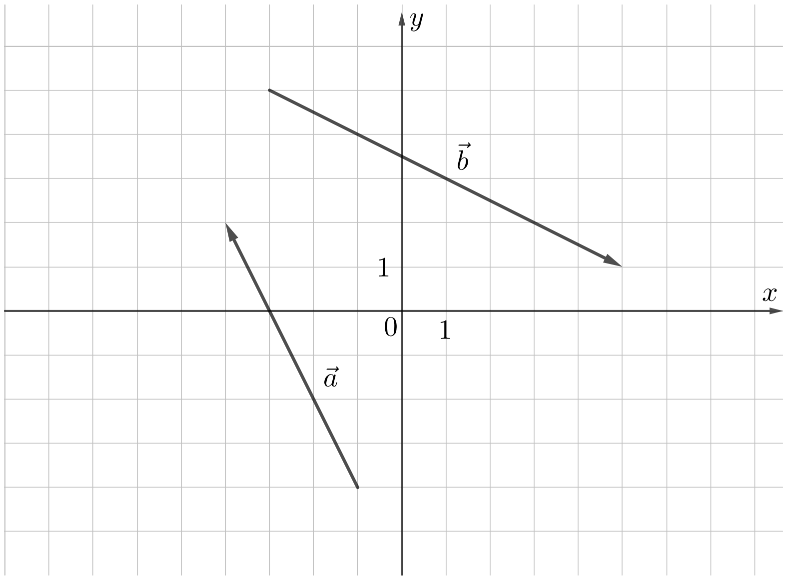
Задача 31. Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(-3;4)$ и $\vec{q}(-9;-12)$.

Задача 32. Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(-5;-12)$ и $\vec{q}(56;33)$.

Задача 33. Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(0;-4)$ и $\vec{q}(12;9)$.

Задача 34. Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(33; -56)$ и $\vec{q}(-10; -24)$.

Задача 35. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите $\cos\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Задача 36. Даны векторы $\vec{a}\,(4; y_a)$ и $\vec{b}\,(x_b; 0)$, косинус угла между которыми равен $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Найдите y_a. Если таких значений несколько, в ответ запишите большее из них.

Задача 37. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 9 и 60, а их скалярное произведение равно 429. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = 2\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}$.

Задача 38. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 11 и 7, а их скалярное произведение равно 53. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

Задача 39. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 5 и 8, а их скалярное произведение равно 12. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$.

Задача 40. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 16 и 6, а их скалярное произведение равно 24. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$.

4 Векторы в геометрических задачах

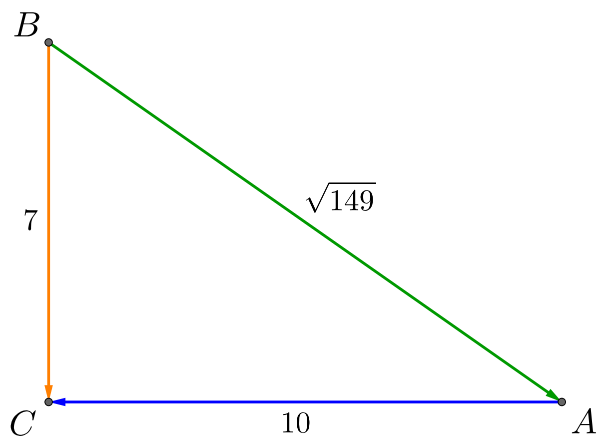
Теоретическая справка

▶ Пример 1

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AB = \sqrt{149}$, $AC = 10$. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение:

По правилу треугольника сумма векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$ равна вектору $\overrightarrow{BC}$.



Длина вектора $\overrightarrow{BC}$ совпадает с длиной катета BC, найдём его по теореме Пифагора:

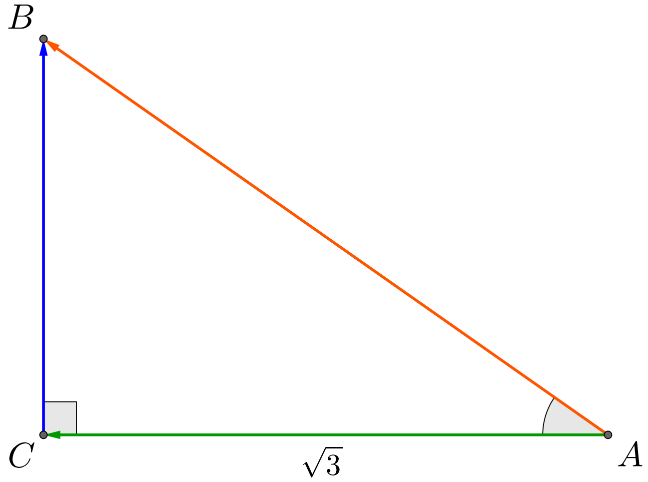
$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Longrightarrow BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{\left(\sqrt{149}\right)^2 - 10^2} = 7.$$

Ответ: 7.

▶ Пример 2

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C катет AC равен $\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Решение:



Рассмотрим 2 способа решения этой задачи.

Способ 1.

Запишем скалярное произведение векторов через их длины и косинус угла между ними:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\angle BAC.$$

Из треугольника ABC по определению косинуса угла $\cos\angle BAC = \dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = |\overrightarrow{AC}|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3.$$

Способ 2.

По правилу треугольника вектор $\overrightarrow{AB}$ равен сумме векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Следовательно,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

По свойствам скалярного произведения

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3,$$

а

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

так как данные векторы перпендикулярны. Таким образом,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 + 0 = 3.$$

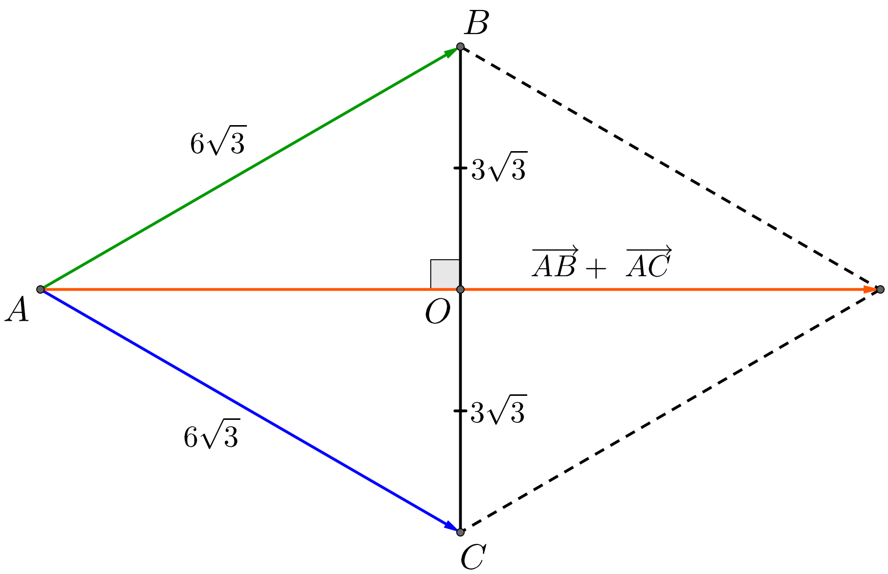
Ответ: 3.

► Пример 3

Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение:

Достроим заданный треугольник до параллелограмма (ромба) со сторонами AB и AC и диагональю BC.



По правилу параллелограмма сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ будет равна вектору-диагонали параллелограмма (ромба), исходящей из вершины A. Найдём длину этой диагонали. Пусть O – точка пересечения диагоналей ромба, диагонали ромба перпендикулярны, при этом $BO = 0{,}5 \cdot BC = 0{,}5 \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$AO^2+BO^2 = AB^2 \Longrightarrow AO^2 = AB^2-BO^2 = (6\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3})^2 = 36{\cdot}3-9{\cdot}3 = 81 \Longrightarrow AO = 9.$$

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|AO| = 2 \cdot 9 = 18.$$

Ответ: 18.

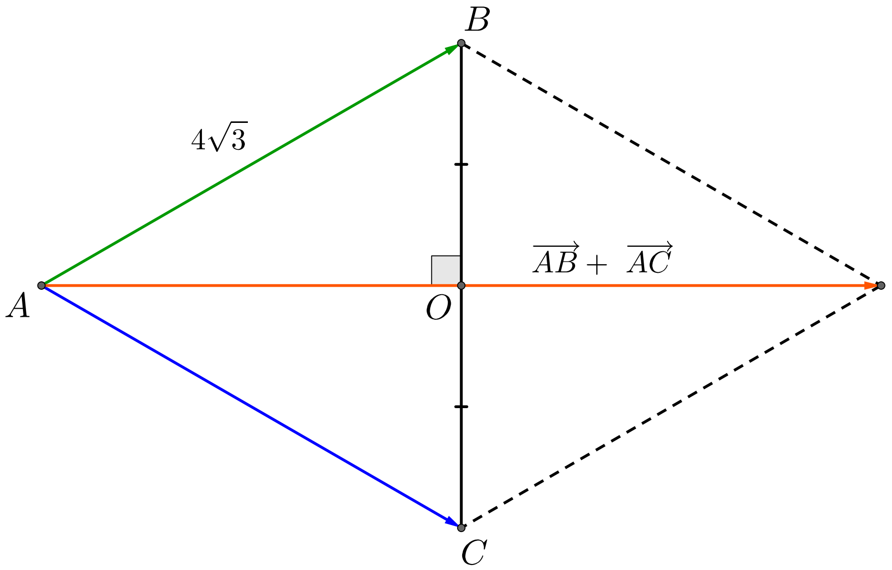
▶ Пример 4

Сторона равностороннего треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Решение:

Векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AC}$ противоположно направлены, значит, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$. С учётом этого получаем, что $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Достроим заданный треугольник до параллелограмма (ромба) со сторонами AB и AC и диагональю BC.



По правилу параллелограмма сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ будет равна вектору-диагонали параллелограмма (ромба), исходящей из вершины A. Найдём длину этой диагонали. Пусть – точка пересечения диагоналей ромба, диагонали ромба перпендикулярны, при этом $BO = 0{,}5 \cdot BC = 0{,}5 \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$AO^2+BO^2 = AB^2 \Longrightarrow AO^2 = AB^2-BO^2 = (4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2 = 16{\cdot}3-4{\cdot}3 = 36 \Longrightarrow AO = 6,$$

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2 \cdot 6 = 12.$$

Ответ: 12.

► **Пример 5**

Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Решение:
Векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AC}$ противоположно направлены, значит, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$. С учётом этого получим, что $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
По определению

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\alpha,$$

где α – угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, то есть $\alpha = 60^\circ$. Получим:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = -108 \cdot 0{,}5 = -54.$$

Ответ: -54.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AC = \sqrt{133}$, $CB = 6$. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Задача 2. В треугольнике ABC известно, что стороны AB и BC равны 11, а угол BAC равен $30°$. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Задача 3. Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Задача 4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AB = 8\sqrt{2}$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Задача 5. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AB = 8\sqrt{2}$. Найти скалярное произведение векторов$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Задача 6. Даны точки $A(5;4)$ и $B(6;3)$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$, если $BC = 9, \angle CBA = 135°$.

5 Ответы

5.1 Векторы. Основные понятия

1. 26;
2. 7;
3. 10.
4. $(-4;2)$;

5 а). $(3;-4)$;

5 б). $(1;-5)$;

6 а). 5;

6 б). $\sqrt{26}$;

7 а). $(-3;6)$;

7 б). $(8;-4)$;

8 а). $3\sqrt{5}$;

8 б). $4\sqrt{5}$;

9. $\vec{a}=(8;-5)$, $\vec{b}=(-3;-2)$, $\vec{c}=(-1;2)$;
10. $|\vec{a}|=\sqrt{89}$, $|\vec{b}|=\sqrt{13}$, $|\vec{c}|=\sqrt{5}$;
11. $\overrightarrow{AB}=(5;1)$, $\overrightarrow{AD}=(-1;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(-1;-3)$, $\overrightarrow{DC}=(5;1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-2)$, $\overrightarrow{DB}=(6;4)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{26}$, $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{10}$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{10}$, $|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{26}$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{DB}|=2\sqrt{13}$;
12. $\overrightarrow{AB}=(4;3)$, $\overrightarrow{AC}=(3;4)$, $\overrightarrow{AD}=(-3;4)$, $\overrightarrow{AE}=(0;5)$, $|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{AC}|=5$, $|\overrightarrow{AD}|=5$, $|\overrightarrow{AE}|=5$;
13. 6,5.

5.2 Линейные операции над векторами

1. $-6{,}6$;
2. 4;
3. -7;
4. 3,7;
5. 17;
6. 10;
7. 10;
8. 26;
9. -108;
10. 15;
11. 25;
12. 13;
13. 5.

5.3 Скалярное произведение векторов

1. 86;
2. 62;
3. 63;
4. -55;
5. 23;
6. 8;
7. 30;
8. -21;
9. 15;
10. 112;
11. -60;
12. 33;
13. 4;
14. 0,8;
15. $-0{,}5$;
16. 4;
17. $-0{,}6$;
18. 42;
19. 16;
20. -23;
21. -8;
22. 17;
23. -16;
24. -6;
25. -2;
26. 19;
27. 10,5;
28. -15;
29. 6;
30. $-0{,}8$;
31. $-0{,}28$;
32. $-0{,}8$;
33. $-0{,}6$;
34. 0,6;
35. $-0{,}8$;
36. 2;
37. 36;
38. 23;
39. 19;
40. 8.

5.4 Векторы в геометрических задачах

1. 13;
2. 11;
3. 54;
4. 64;
5. -64;
6. -9.