

Содержание

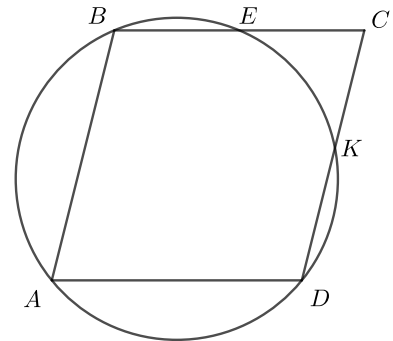
Теоретическая справка	3
Полезная конструкция №1	3
Полезная конструкция №2	5
Полезная конструкция №3	7
Полезная конструкция №4	9
Полезная конструкция №5	10
Полезная конструкция №6	13
Полезная конструкция №7	14
Полезная конструкция №8	15

Теоретическая справка

Полезная конструкция №1

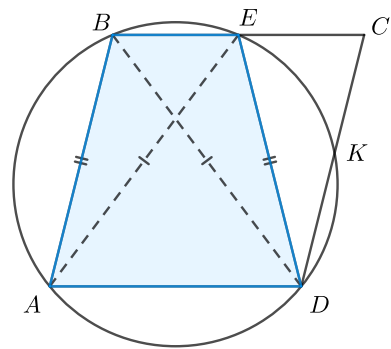
«Параллелограмм, пересекающий окружность».

1. Дано: w – окружность, $ABCD$ – параллелограмм, $A, B, D \in w$, $BC \cap w = E$, $CD \cap w = K$.



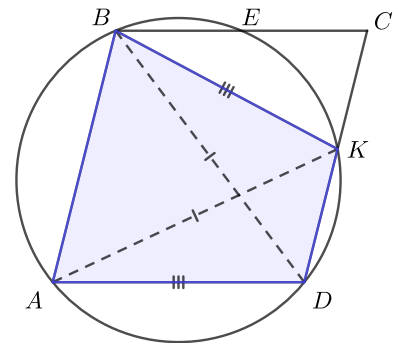
2. Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная. Диагонали равнобедренной трапеции равны.

Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $AD \parallel BC$. Тогда $ABED$ – трапеция, вписанная в окружность, следовательно, она равнобедренная. То есть, $AB = ED$. Получается, что $AE = BD$ как диагонали.

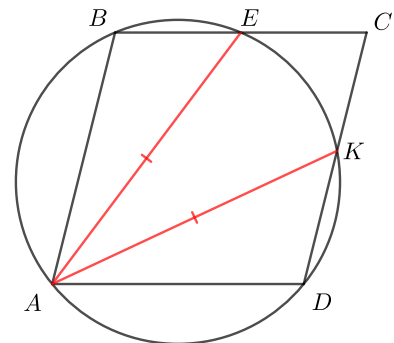


3. Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная.

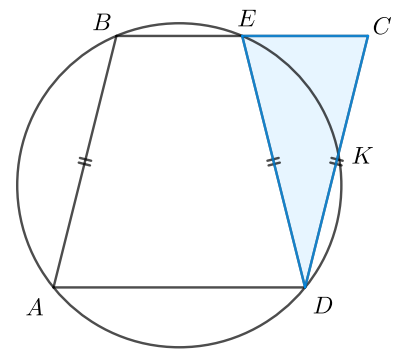
Диагонали равнобедренной трапеции равны.



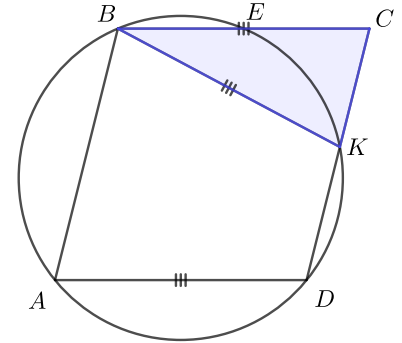
4. Получаем, что $AE = BD$ и $AK = BD$, откуда $AE = AK$.



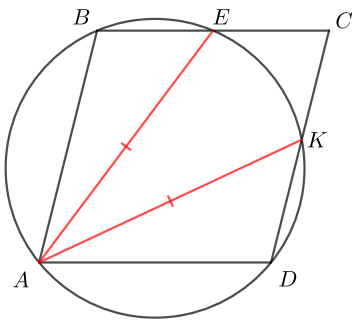
5. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $AB = CD$, а $AB = ED$ как стороны равнобедренной трапеции. Отсюда получаем, что $ED = CD$. Тогда $\triangle CDE$ – равнобедренный.



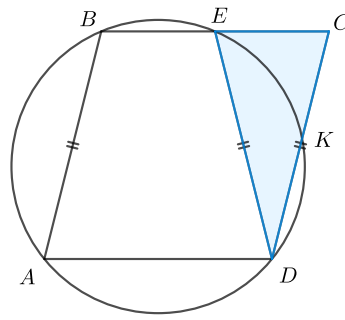
6. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $AD = BC$, а $AD = BK$ как стороны равнобедренной трапеции. Отсюда получаем, что $BK = BC$. Тогда $\triangle BKC$ – равнобедренный.



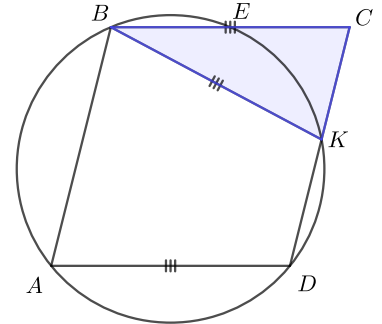
Выводы:



$$AE = AK$$



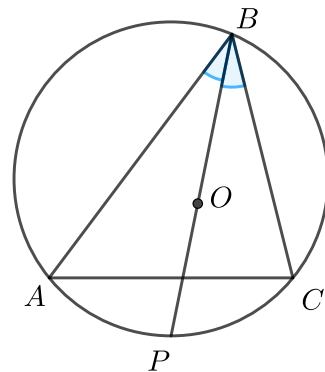
$\triangle CDE$ – равнобедренный



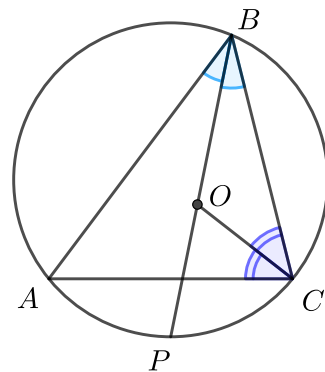
$\triangle BCK$ – равнобедренный

«Трилистник».

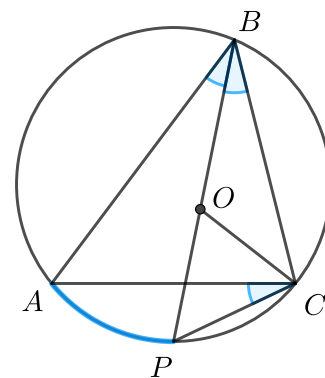
1. Дано: $\triangle ABC$, w – описанная окружность, O – центр вписанной окружности, BO – биссектриса, $BO \cap w = P$.



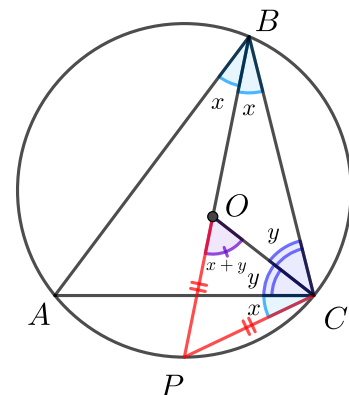
2. Так как BO и CO – биссектрисы, то $\angle ABP = \angle PBC$ и $\angle BCO = \angle OCA$.



3. $\angle ABP = \angle ACP$ как вписанные и опирающиеся на общую дугу AP .



4. Обозначим $\angle ABP = x$, тогда $\angle ABP = \angle PBC = \angle ACP = x$, а $\angle BCO = y$, тогда $\angle BCO = \angle OCA = y$.

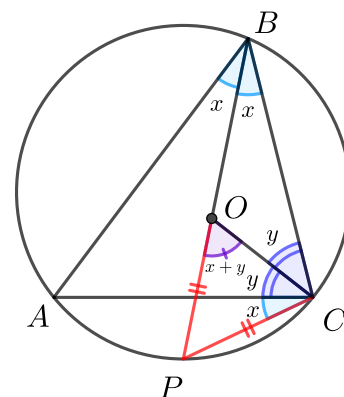


5. $\angle POC = \angle PBC + \angle BCO = x + y$ как внешний угол $\triangle BOC$.

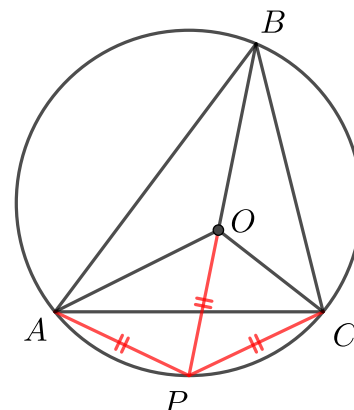
$\angle OCP = \angle OCA + \angle ACP = x + y$.

Получается, что $\angle POC = \angle OCP = x + y$,

следовательно, $\triangle CPO$ – равнобедренный и $OP = PC$.



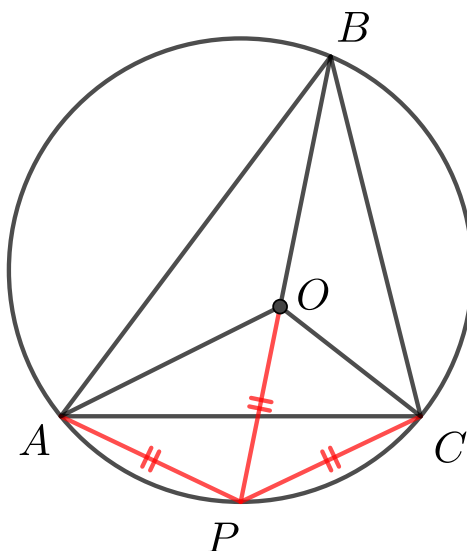
6. Рассуждая аналогично, получаем, что $\triangle APO$ – равнобедренный и $AP = OP$. Тогда $AP = OP = PC$.



*Равенство отрезков $AP = PC$ можно также доказать, пользуясь тем, что $\smile AP = \smile PC$ (так как BO – биссектриса), а равные дуги стягиваются равными хордами.

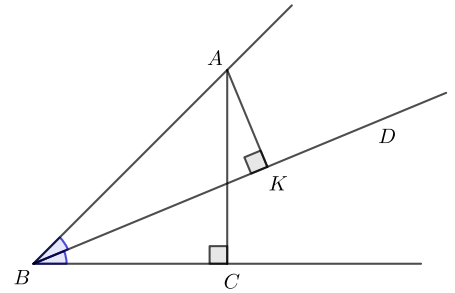
Вывод:

Если биссектриса BO пересекает описанную около $\triangle ABC$ окружность в точке P , то образуются равные отрезки: $AP = PO = PC$.

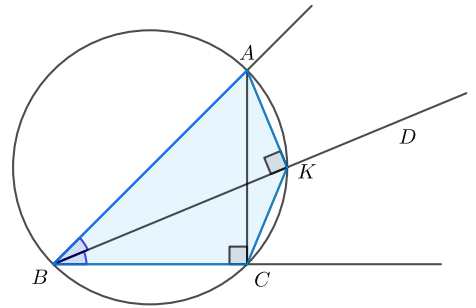


«Перпендикуляры в угле».

1. Дано: $\angle ABC$, BD – биссектриса, $AK \perp BD$, $AC \perp BC$.



2. $AK \perp BD$, $AC \perp BC$, поэтому $\angle AKB = \angle ACB = 90^\circ$.
Получаем, что сторона AB четырёхугольника $ABCK$ видна из вершин C и K под прямыми углами, следовательно, около $ABCK$ можно описать окружность.

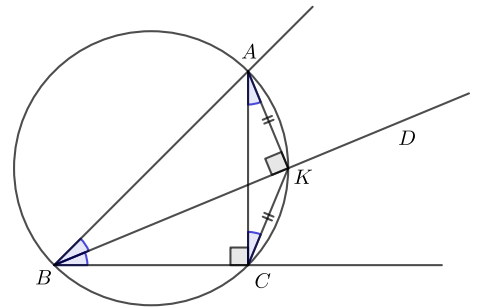


3. Так как BD – биссектриса, то $\angle ABK = \angle KBC$.

$\angle ABK = \angle ACK$ как вписанные и опирающиеся на общую дугу AK .

$\angle KBC = \angle KAC$ как вписанные и опирающиеся на общую дугу CK .

Следовательно, $\angle ACK = \angle ABK = \angle KBC = \angle KAC$,
откуда $\triangle ACK$ – равнобедренный и $AK = KC$.

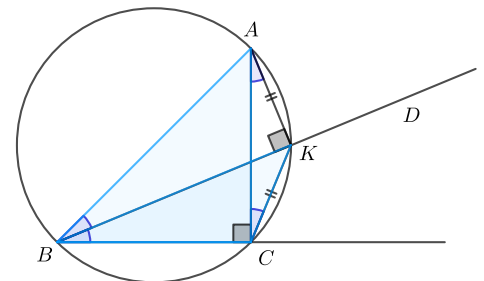


4. Запишем теорему Пифагора для $\triangle ABC$:

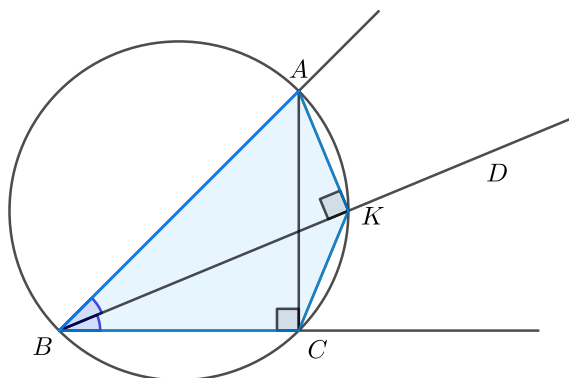
$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

Аналогично для $\triangle ABK$: $BK^2 + AK^2 = BK^2 + KC^2 = AB^2$.

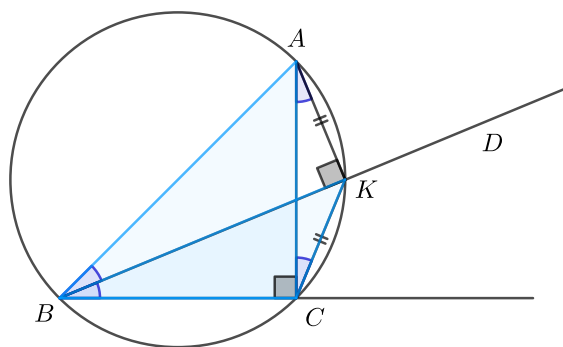
Откуда получаем равенство: $BC^2 + AC^2 = BK^2 + KC^2$.



Выводы:



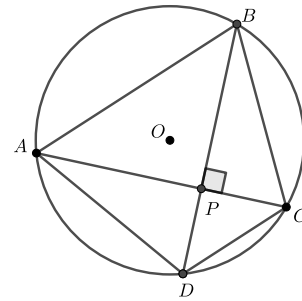
Точки A, B, C, K лежат на одной окружности.



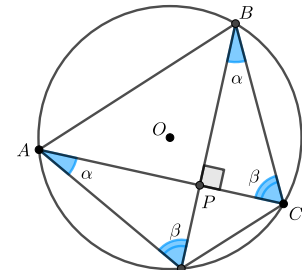
Справедливо равенство:
 $BC^2 + AC^2 = BK^2 + KC^2$.

«Бабочка».

1. Дано: $\angle ABC$, BD – биссектриса, $AK \perp BD$, $AC \perp BC$.

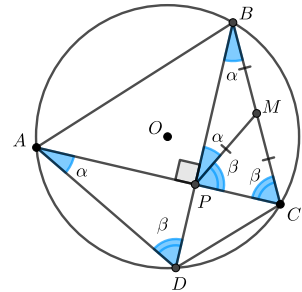


2. $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$, $\angle ADB = \angle ACB = \beta$.

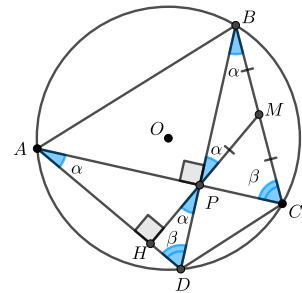


3. Пусть PM – медиана прямоугольного $\triangle CPB$, тогда $PM = CM = MB$.

$\triangle CPM, \triangle BPM$ – равнобедренные, тогда $\angle DBC = \angle BPM = \alpha$; $\angle ACB = \angle CPM = \beta$.



4. Продолжим PM за точку P , $\angle DPM = \angle HPD$ (вертикальные).
 $\angle HPD = \alpha$, $\angle HDP = \beta$; $\alpha + \beta = 90^\circ$. Значит $\angle PHD = 90^\circ$.



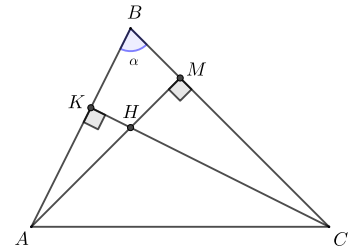
Выводы:

В конструкции "Бабочка" при пересечении перпендикулярных диагоналей вписанного четырехугольника образуются две пары прямоугольных треугольников с вертикальными прямыми углами. В каждой такой паре если в одном из треугольников провести медиану, то в противоположном треугольнике её продолжение станет высотой.

Конструкция «Треугольник и две высоты».

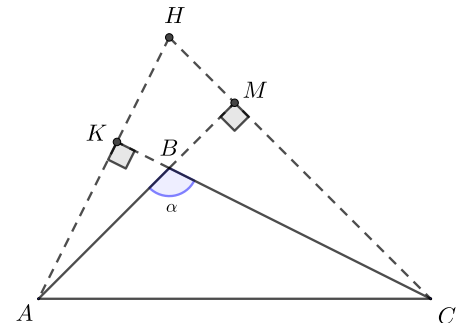
1. Случай 1. $\triangle ABC$ – остроугольный.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC$ – острый, AM , CK – высоты, $AM \cap CK = H$.

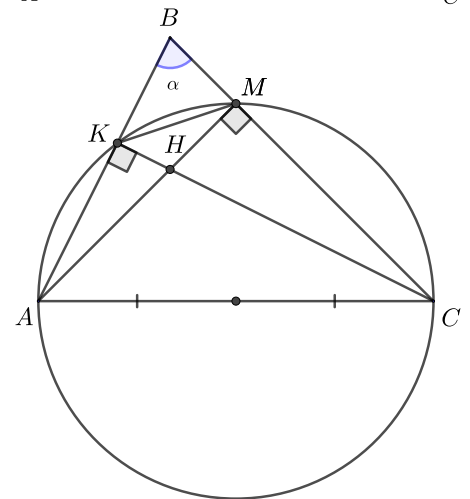


2. Случай 2. $\triangle ABC$ – тупоугольный.

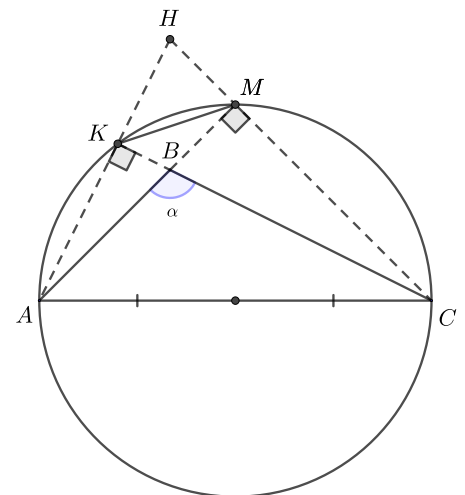
Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC$ – тупой, AK , CM – высоты, $AK \cap CM = H$.



3. $\angle AKC = \angle CMA = 90^\circ$, тогда четырёхугольник $AKMC$ – вписанный.



4. $\angle AKC = \angle CMA = 90^\circ$, тогда четырёхугольник $AKMC$ – вписанный.



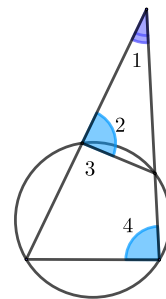
5. Лемма: Если четырёхугольник вписан в окружность, то каждый его угол равен углу, который является смежным противоположному.

Доказательство:

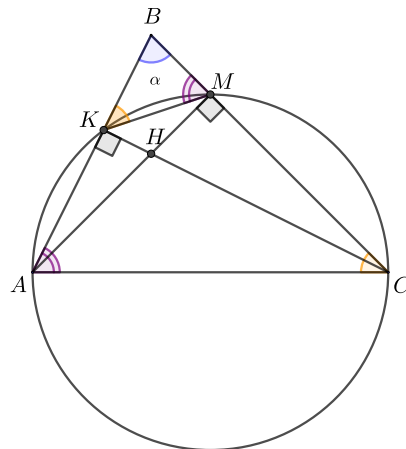
$\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$ (по свойству смежных углов),

$\angle 4 = 180^\circ - \angle 3$ (по свойству вписанного четырёхугольника),

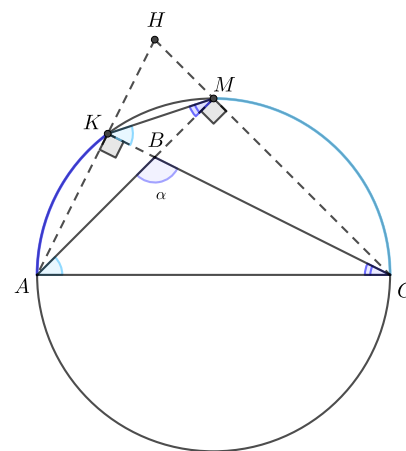
значит $\angle 2 = \angle 4$.



6. $\angle BSA$ и $\angle AKM$ – противоположные углы четырёхугольника. Поскольку $\angle BSA$ равен смежному углу с $\angle AKM$, $\angle B$ – общий, тогда $\triangle KMB \sim \triangle CAB$ по двум углам.

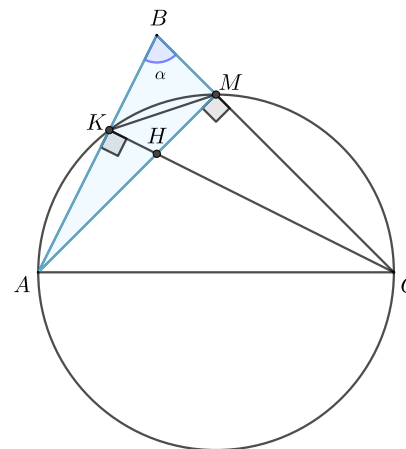


7. $\angle CKM = \angle CAM$, $\angle KMA = \angle KCA$, так как опираются на одну и ту же дугу, значит $\triangle KMB \sim \triangle ACB$ по двум углам.



8. $\triangle AMB$ – прямоугольный, тогда $\cos \alpha = \frac{BM}{AB}$, поэтому

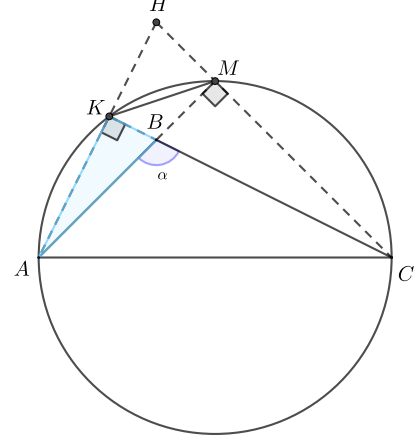
$k = \cos \alpha$ – коэффициент подобия $\triangle KMB$ и $\triangle CAB$.



9. $\angle KBA = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$.

$\triangle AKB$ – прямоугольный, тогда

$\cos \angle ABK = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{KB}{AB}$, поэтому
 $k = -\cos \alpha$ – коэффициент подобия $\triangle KMB$ и $\triangle ACB$.

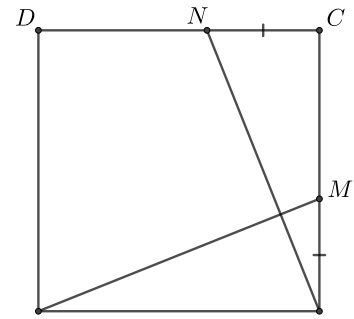


Выводы:

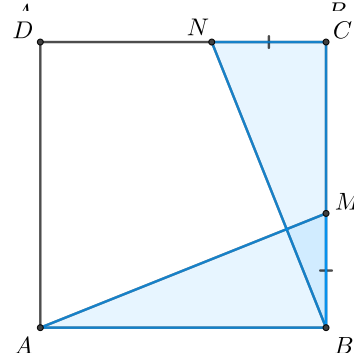
В конструкции "Треугольник и две высоты" образуется пара подобных треугольников, у которых $k = |\cos \alpha|$ (коэффициент подобия равен модулю косинуса угла при вершине, из которой не была проведена высота).

Конструкция «Перпендикулярные отрезки внутри квадрата».

1. Дано: $ABCD$ – квадрат, $N \in CD$, $M \in BC$, $CN = BM$.
Доказать: $AM \perp BN$.

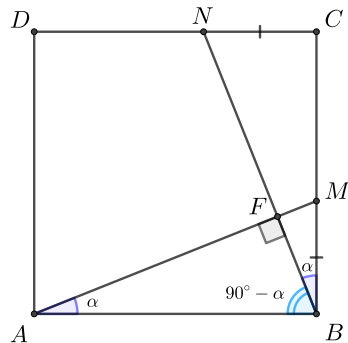


2. $CN = BM$, $AB = BC$, тогда $\triangle ABM = \triangle BCN$.



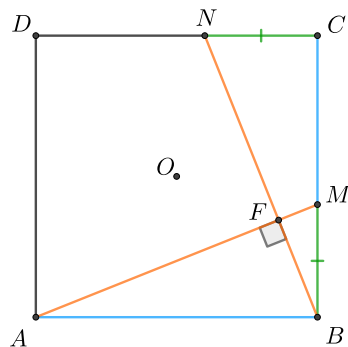
3. Докажем, что $AM \perp BN$. Способ №1.

Из равенства треугольников получаем, что $\angle BAM = \angle CBN = \alpha$, тогда $\angle ABN = 90^\circ - \angle CBN = 90^\circ - \alpha$.
В $\triangle ABF$ $\angle AFB = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$, значит, $AM \perp BN$.



4. Докажем, что $AM \perp BN$. Способ №2.

Выполним поворот квадрата $ABCD$ на 90° вокруг точки O (точки пересечения диагоналей квадрата). Тогда катет AB перейдет в катет BC , а катет BM – в катет CN . Гипотенуза AM перейдет в гипотенузу BN , $\triangle ABM$ перейдет в $\triangle BCN$. Тогда по свойству поворота $\angle AFB = 90^\circ$, значит $AM \perp BN$.

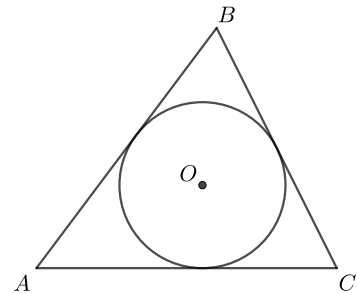


Выводы:

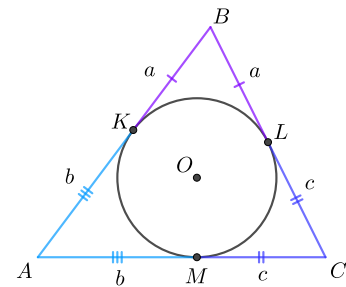
В квадрате $ABCD$, в котором на смежных сторонах DC и CB отмечены точки M и N так, что $CN = BM$, отрезки AM и BN перпендикулярны.

Конструкция «Окружность, вписанная в треугольник».

1. Дано: $\triangle ABC$, w – вписанная окружность, O – центр вписанной окружности.



2. Пусть точки K , L , M – точки касания окружности сторон треугольника. Тогда по свойству касательных из одной точки будут равны следующие отрезки: $BK = BL = a$, $AK = AM = b$, $CL = CM = c$.



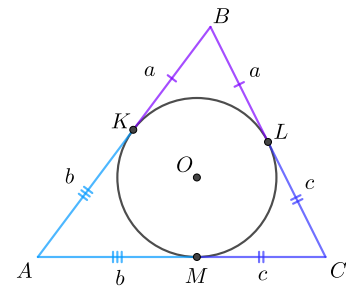
3. Сумма всех длин отрезков касательных будет равна периметру данного треугольника.

То есть, $P_{\triangle ABC} = 2(a + b + c)$. Откуда $p = a + b + c$.

Тогда из этого равенства легко получить выражения, связывающие отрезки касательных с величиной полупериметра.

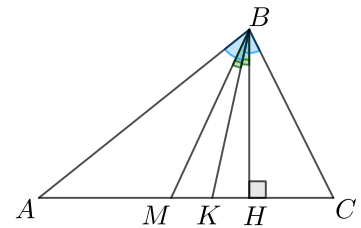
А именно:

$$\begin{aligned} a &= BK = BL = p - AC \\ b &= AK = AM = p - BC \\ c &= CL = CM = p - AB \end{aligned}$$

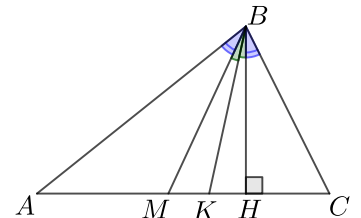


Конструкция «Биссектриса, медиана и высота треугольника».

1. Дано: $\triangle ABC$, BH – высота, BK – биссектриса, BM – медиана, $\angle MBK = \angle KBH$.



2. Так как BK – биссектриса, то $\angle ABK = \angle KBC$.
По условию $\angle MBK = \angle KBH$, тогда $\angle ABM = \angle HBC$.

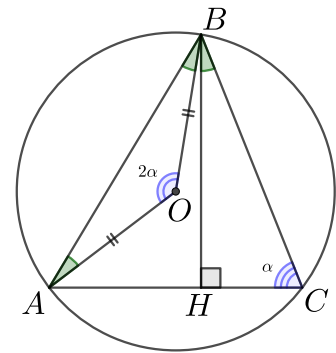


3. 1. Рассмотрим $\triangle ABC$, вписанный в окружность с центром в точке O и радиусом R .

2. Проведем высоту BH . Пусть $\angle BCA = \alpha$.
Тогда $\angle BOA = 2\angle BCA = 2\alpha$ как центральный и вписанный углы, опирающиеся на дугу AB .

3. $\triangle ABO$ – равнобедренный, так как $AO = OB = R$.
Тогда $\angle ABO = \angle BAO = (180^\circ - 2\alpha) : 2 = 90^\circ - \alpha$.

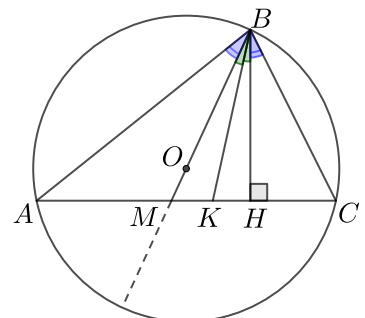
4. В прямоугольном $\triangle BCH$ $\angle CBH = 90^\circ - \alpha$.
Получается, что $\angle BAO = \angle ABO = \angle CBH = 90^\circ - \alpha$.



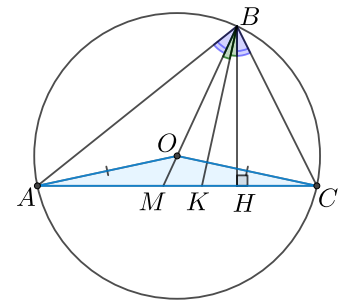
Вывод:

Если треугольник вписан в окружность, то радиус и высота проведенные из одной вершины, образуют равные углы с его сторонами.

4. Опишем около $\triangle ABC$ окружность.
Так как $\angle ABM = \angle CBH$, то центр окружности O будет лежать на отрезке BM или его продолжении (в случае тупоугольного треугольника).

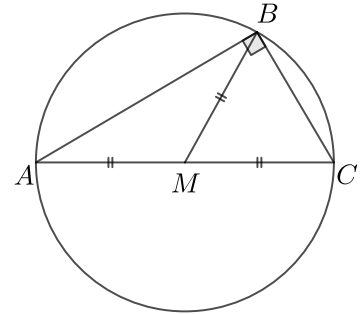


5. Проведём радиусы OA и OC . Тогда $\triangle AOC$ – равнобедренный. По условию BM – медиана, то есть, M – середина стороны AC . Тогда OM – медиана в $\triangle AOC$. Но по свойству равнобедренного треугольника OM будет и высотой. В таком случае отрезки BM и BH должны совпадать, а это **ПРОТИВОРЕЧИЕ!**



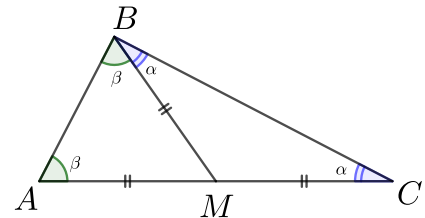
Исключение: такая ситуация возможна только в случае совпадения точек O и M .

6. Получается, что теперь точка M – центр описанной окружности и $AM = MB = MC = R$. Тогда $\triangle ABC$ – прямоугольный.



7. Пусть в $\triangle ABC$ $AM = MB = MC$. Тогда $\triangle AMB$ и $\triangle BMC$ – равнобедренные. Откуда $\angle MAB = \angle ABM = \alpha$, а $\angle MBC = \angle BCM = \beta$.

По теореме о сумме углов $\triangle ABC$: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, откуда $\alpha + \beta = 90^\circ$. То есть, $\angle ABC = \alpha + \beta = 90^\circ$.



Выводы:

В конструкции «Биссектриса, медиана и высота треугольника»: если биссектриса треугольника делит угол между медианой и высотой, проведённых из одной вершины, пополам, то такой треугольник является прямоугольным.