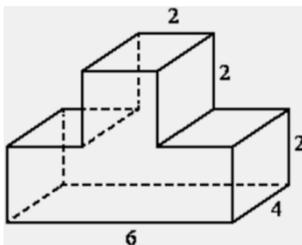


- 3 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы – прямые).



Ответ: _____.

- 4 Дима, Марат, Петя, Надя и Света бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

Ответ: _____.

- 5 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения

$$(x + 4)^3 = -125.$$

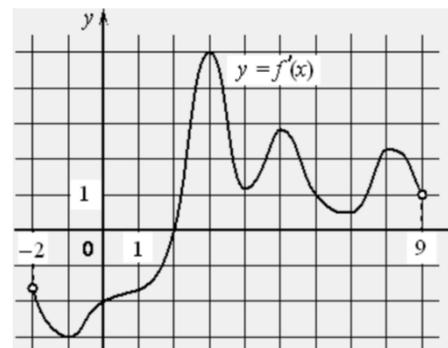
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения

$$6 \log_7 \sqrt[3]{7}.$$

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: _____.

- 9 Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика H (в м) вычисляется по формуле $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos \alpha)$, где $v_0 = 26$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α мячик пролетит над стеной высотой 7,45 м на расстоянии 1 м? Ответ дайте в градусах.

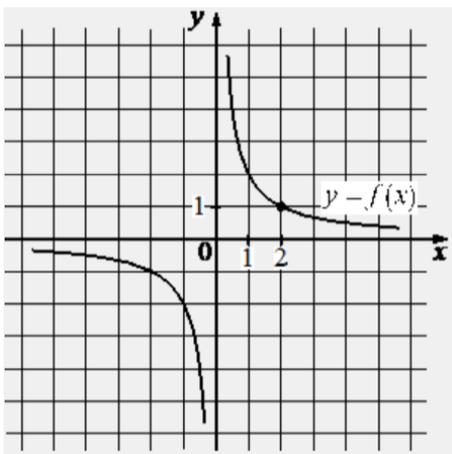
Ответ: _____.

- 10 Смешав 45-процентный и 97-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: _____.



- 11** На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: _____.

- 12** Найдите точку минимума функции $y = 1,5x^2 - 30x + 48 \cdot \ln x + 4$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$.
 б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.
- 14** На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .
 а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
 б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .
- 15** Решите неравенство $2(50^x + 8^x) > 20^x + 3 \cdot 125^x$.
- 16** В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:
 – в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
 – с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.
 Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 78 030 рублей больше суммы взятого кредита.



17 Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(ax^2 - 2x)^2 + (a^2 - a + 2)(ax^2 - 2x) - a^2(a - 2) = 0$$

имеет ровно два решения.

19 Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

- а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ
1	46
2	29
3	112
4	0,6
5	0,83
6	-9
7	2
8	2
9	60
10	15
11	0,2
12	8
13	а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + \pi n; n \in Z$ б) $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{4}; \frac{11\pi}{3}; \frac{15\pi}{4}$
14	$\frac{12\sqrt{26}}{13}$
15	$(-\infty; 0)$
16	119700
17	$\sqrt{65}$
18	$\{-2\} \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$
19	а) да б) нет в) 30

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



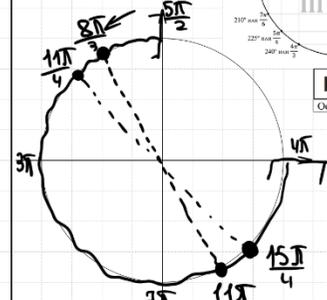
13 а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x + \sqrt{3} &= 0 \\ \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x + 1) + \sqrt{3} \cdot (\operatorname{tg} x + 1) &= 0 \\ (\operatorname{tg} x + 1) (\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) &= 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 & \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} & \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

б) Ответим корни с помощью окружности



Получим

$$\begin{aligned} x = \frac{8\pi}{4} &= \frac{2\pi}{1} \\ x = \frac{11\pi}{4} &= \frac{2\pi + 3\pi}{4} \\ x = \frac{15\pi}{4} &= \frac{2\pi + 7\pi}{4} \\ x = \frac{7\pi}{2} &= \frac{2\pi + 3\pi}{2} \end{aligned}$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $\frac{8\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}$



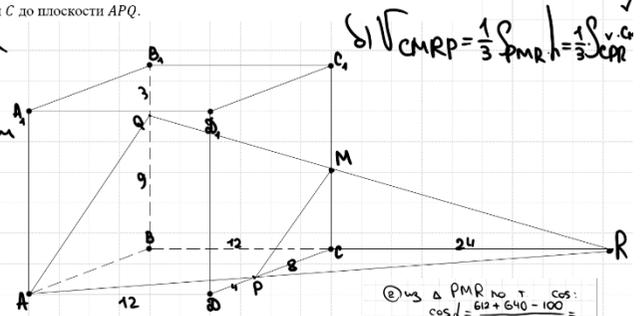
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
 б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .

а) Пусть $AP \cap BC = R$
 $\triangle ADP \sim \triangle CPR$ по 2 углам
 $CR = 24$
 $\triangle QBR \sim \triangle CMR$ по 2 углам
 $\frac{CM}{9} = \frac{24}{36}$
 $CM = 6$
 M - середина CC_1 .



② $\triangle PMR$ по Т
 $\cos \angle = \frac{612 + 640 - 100}{2 \cdot 8 \sqrt{6} \cdot 6 \sqrt{7}} = \frac{1152}{2 \cdot 48 \sqrt{42}} = \frac{12}{\sqrt{42}}$
 $S_{PMR} = \frac{1}{2} \cdot 8 \sqrt{6} \cdot 6 \sqrt{7} \cdot \frac{12}{\sqrt{42}} = 24 \sqrt{6}$
 ③ $\frac{1}{3} \cdot 24 \sqrt{6} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 48 \sqrt{6} \cdot 6$
 $h = \frac{24 \sqrt{6}}{12} = \frac{2 \sqrt{6}}{13}$

Ответ: $\frac{12\sqrt{26}}{13}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

ИСТОЧНИКИ
 Сиргеев 2018
 Основная волна (Резерв) 2016



15 Решите неравенство $2(50^x + 8^x) > 20^x + 3 \cdot 125^x$.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2024

$$3 \cdot 125^x - 2 \cdot 50^x + 20^x - 2 \cdot 8^x < 0 \quad | : 8^x$$

$$3 \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{50}{8}\right)^x + \left(\frac{20}{8}\right)^x - 2 < 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2} + \left(\frac{5}{2}\right)^x - 2 < 0$$

Пусть $\left(\frac{5}{2}\right)^x = t$

$$3 \cdot t^3 - 2t^2 + t - 2 < 0$$

Заметим, что при $t=1$

Возвращение др. в ном

$$\frac{-3t^3 - 2t^2 + t - 2}{3t^3 - 3t^2} \cdot \frac{t-1}{3t^2 + t + 2}$$

Получаем

$$(t-1) \cdot (3t^2 + t + 2) < 0$$

Заметим, что $3t^2 + t + 2 > 0$ при любых t



$$t - 1 < 0$$

$$t < 1$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x < 1$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x < \left(\frac{5}{2}\right)^0$$

$$x < 0$$

Ответ: $(-\infty, 0)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16 В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был вышущен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 78 030 рублей больше суммы взятого кредита.

ИСТОЧНИКИ
ГРП (старый банк)
ГРП (новый банк)
Основная волна 2024
Досрочная волна 2023
Основная волна 2020
Досрочная волна 2018
Основная волна 2017

Пусть S - сумма долга
март - месяц выплаты
 x - ежемесячный платеж

$$\textcircled{2} \begin{cases} 3x = S + 78030 \\ x = 26010 + \frac{1}{3}S \end{cases} \quad | : 3$$

Дата	Сумма долга
и 20	S
я 21	$1,3 \cdot S$
м 21	$1,3 \cdot S - x$
я 22	$1,3^2 \cdot S - 1,3x$
м 22	$1,3^2 \cdot S - 1,3x - x$
я 23	$1,3^3 \cdot S - 1,3^2 x - 1,3x$
м 23	$1,3^3 \cdot S - 1,3^2 x - 1,3x - x = 0$

$$\textcircled{1} \frac{1,3^3 S}{10^3} = \frac{1,3^2}{10^2} x + \frac{1,3^{(10)}}{10} x + \frac{x}{1}^{(100)}$$

$$\frac{1,3^3 S}{10^3} = \frac{169x + 130x + 100x}{10^2}$$

$$\frac{1,3^3 S}{10^3} = \frac{399 \cdot x}{10^2} \quad | \cdot 10^3$$

$$1,3^3 S = 399 \cdot 10 \cdot x$$

$$1,3^3 S = 399 \cdot 10 \cdot \left(26010 + \frac{1}{3}S\right)$$

$$1,3^3 S = 399 \cdot 26010 \cdot 100 + 133 \cdot 10 \cdot S$$

$$2197 \cdot S - 1330 \cdot S = 399 \cdot 26010 \cdot 100$$

$$867 \cdot S = 399 \cdot 26010 \cdot 100$$

$$S = \frac{399 \cdot 26010 \cdot 100}{867} = 119700 \text{ р.}$$

Ответ: 119700

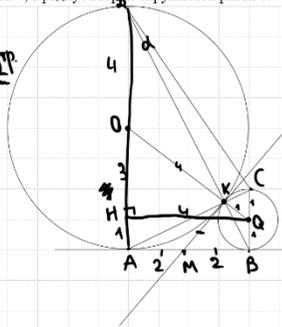
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



17 Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

а) Пусть MK – общая внешн. кас. д. дв. окр-тей.
 $MK = AM = BM$
 по св-ву ср. кас. , уч. из одной т.)



б) по т. Син:
 $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$
 $\frac{2}{\sin \alpha} = 2R$

① Пусть OK – перпен. к AD
 $OK = 3$
 $AK = 1$
 $KQ = 4 = AB$
 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 4\sqrt{5}$
 $CD = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$

② $\triangle ABK$:
 MK – медиана
 $\angle MK = \frac{1}{2} AB$
 значит $\angle AKB = 90^\circ$
 $\angle SKB = 90^\circ$ BC – диаметр
 $\angle AKD = 90^\circ$ AD – диаметр
 $AO \perp AB$
 $BA \perp AB$ (по св-ву кас.)

② $\triangle BCD$:
 по т. кос:
 $\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{65}}$
 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{65}}$
 $\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{65}}} = 2R$ $R = \sqrt{65}$

значит $AD \perp AB$
 $BC \perp AB$
 значит $AD \parallel BC$
 Ответ: $\sqrt{65}$

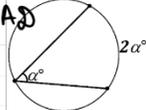
ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2019
 СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА



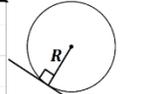
В трапеции сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180°

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ



Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ



Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания

СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ



Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

МЕДИАНА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	3
Максимальный балл	

18 Найдите все значения a , при которых уравнение $(ax^2 - 2x)^2 + (a^2 - a + 2)(ax^2 - 2x) - a^2(a - 2) = 0$ имеет ровно два решения.

ИСТОЧНИКИ

ГПР (полный банк)
 Янтарко 2016 (36 вар)

Пусть $ax^2 - 2x = t$
 Тогда $t^2 + (a^2 - a + 2)t - a^2(a - 2) = 0$
 $t = -a^2$ $t = a - 2$
 $[ax^2 - 2x = -a^2]$ $[ax^2 - 2x + a^2 = 0]$
 $[ax^2 - 2x = a - 2]$ $[ax^2 - 2x - a + 2 = 0]$

1 случай
 $a = 0$
 $-2x = 0$
 $-2x = -2$
 $x = 0$
 $x = 1$
 значит при $a = 0$ 2 реш

2 случай
 Если $-a^2 = a - 2$
 $a^2 + a - 2 = 0$
 $a = -2$
 Если $a = -2$, то
 $-2x^2 - 2x = -2 - 2$
 $-2x^2 - 2x + 4 = 0$
 $x^2 + x - 2 = 0$
 $x = -2$
 $x = 1$
 значит при $a = -2$ 2 реш

3 случай
 $\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 < 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} 4 - 4a^2 > 0 \\ 4 - 4a \cdot (2 - a) < 0 \end{cases}$
 ① $4 > 4a^2$
 $a^2 < 1$
 $a < 1$
 ② $4a^2 - 8a + 4 < 0$
 $a^2 - 2a + 1 < 0$
 $(a - 1)^2 < 0$
 нет реш.
 $\begin{cases} a < 1 \\ \emptyset \end{cases}$
 нет реш

4 случай
 $\begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} a > 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$
 при $a > 1$ 2 реш

5 случай
 $\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} a = 1 \\ a = 1 \end{cases}$
 при $a = 1$ будет 1 реш

Если $a = 1$, то
 $x^2 - 2x = -1$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0$
 $x = 1$
 при $a = 1$ 1 реш

Ответ: $\{-2\} \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,	1



