

Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 30»

Учебное пособие
для учеников 9 класса
по подготовке к №22 ОГЭ по математике

«ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА»

Коньшева София Александровна

Вологда
2024

СОДЕРЖАНИЕ

<u>Введение</u>	3
.....	
<u>Глава 1. Кусочные функции</u>	4
.....	
<u>Раздел 1. Свойства кусочных функций</u>	4
<u>Подраздел 1. Линейная функция</u>	4
.....	
<u>Пример 1. Построение линейной функции</u>	5
<u>Подраздел 2. Квадратичная функция</u>	6
.....	
<u>Пример 2. Построение квадратичной функции</u>	9
.....	
<u>Подраздел 3. Функция обратной пропорциональности</u>	10
.....	
<u>Пример 3. Построение функции обратной пропорциональности</u>	11
.....	
<u>Раздел 2. Образцы решения заданий №22 с кусочными функциями</u>	12
<u>Раздел 3. Задания для самостоятельного решения</u>	16
<u>Глава 2. Дробно-рациональные функции</u>	17
.....	
<u>Раздел 4. Свойства дробно-рациональных функций</u>	17
.....	
<u>Раздел 5. Образцы решения заданий №22 с дробно-рациональными функциями</u>	17
<u>Раздел 6. Задания для самостоятельного решения</u>	20
<u>Глава 3. Функции, содержащие модули</u>	20
.....	
<u>Раздел 7. Свойства функций, содержащих модули</u>	20

.....	
<u>Раздел 8. Образцы решения заданий №22 с функциями, содержащими модули</u>	21
.....	
<u>Подраздел 4. Функции, содержащие модули, сводящиеся к квадратичным функциям</u>	21
<u>Подраздел 5. Функции вида $y = f(x)$</u>	24
<u>Подраздел 6. Дробно-рациональные функции, содержащие модули</u>	26
.....	
<u>Раздел 9. Задания для самостоятельного решения</u>	30
.....	
<u>Частые ошибки при оформлении № 22</u>	31
<u>Ответы для самоконтроля</u>	32
.....	

Введение

Дорогие девятиклассники!

Вы смотрите учебное пособие "Функции и их свойства", которое поможет Вам успешно подготовиться к ОГЭ по математике. Функции – это важная тема, которую нужно хорошо знать, чтобы справиться с 22 номером ОГЭ. В этом пособии Вы узнаете, что такое функции, какие они бывают, какими свойствами обладают, и как выглядят их графики. Вы увидите образцы решения 22-ого задания, его типы.

Чтобы закрепить полученные знания, к каждой теме есть примеры для самостоятельного решения с ответами для самоконтроля.

Мы надеемся, что это пособие позволит Вам легко овладеть новыми умениями, а также успешно подготовиться к экзамену.

Желаем Вам интересного изучения математики и в дальнейшем удачной сдачи экзамена!

Глава 1. Кусочные функции

Раздел 1. Свойства кусочной функции

Кусочная функция - это функция, части которой заданы на разных промежутках разными функциями. Другими словами, кусочная функция состоит из нескольких других функций, следовательно, ведёт себя по-разному, в зависимости от промежутка.

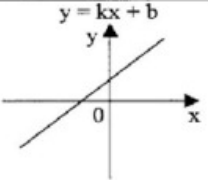
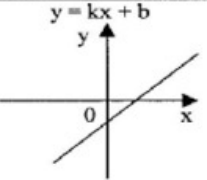
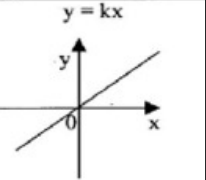
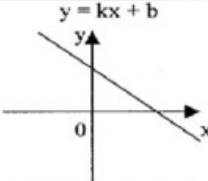
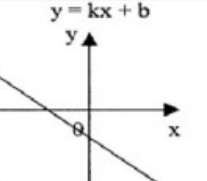
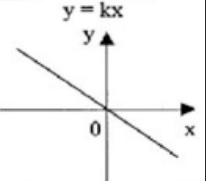
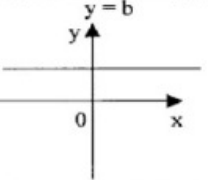
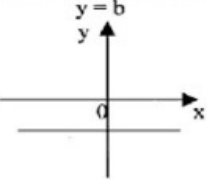
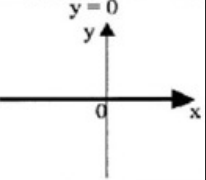
На ОГЭ в №22 встречаются кусочные функции, включающие в себя линейные, квадратичные и функции обратной пропорциональности. На экзамене может попасться кусочная функция из двух или трёх функций. Поэтому стоит изучить все вышеперечисленные функции.

Подраздел 1. Линейная функция

Линейная функция – функция вида $y=kx+b$, где k и b – некоторые числа, x – независимая переменная (аргумент функции), y – зависимая переменная.

Область определения, то есть все значения, которые может принимать x , - все действительные числа $\mathbb{R}$. Область значений, то есть значения, которые может принять y – при $k \neq 0$ – все действительные числа $\mathbb{R}$, при $k=0$ – значение числа b . Функция непрерывна, её график выглядит как одна прямая линия. В таблице 1 показано, как может выглядеть функция в зависимости от значений k и b . Коэффициент k отвечает за наклон функции: если k – отрицательное число, то функция убывающая, если k – положительное, то функция возрастающая, если $k=0$, то функция – горизонтальная прямая. Чем k больше по модулю, тем круче наклонена функция, то есть при $k=0,5$ функция наклонена не так сильно, как при $k=3$. Коэффициент b отвечает за «подъём» функции. Если b – положительное, то функция «поднимется» на b единиц вверх и пересечёт ось OY в точке с координатой b по игреку. Если b – отрицательное, то функция «опустится» на b единиц вниз и пересечёт ось OY в точке с координатой b по игреку. Если $b=0$, то прямая пройдёт ровно через начало координат, через точку $(0;0)$.

Таблица 1

$\begin{matrix} b \\ \swarrow \\ k \end{matrix}$	$b > 0$	$b < 0$	$b = 0$
$k > 0$			
$k < 0$			
$k = 0$			

Пример 1. Построение линейной функции

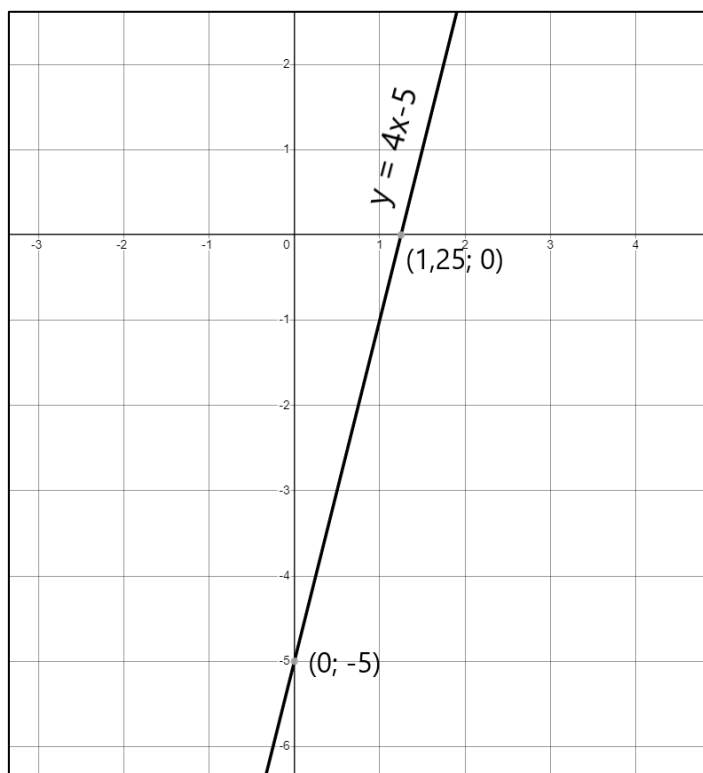
Построим функцию $y = 4x - 5$. Коэффициент $k = 4$, так как он положительный, то функция возрастающая. Коэффициент $b = -5$, так как он отрицательный, функцию «опустили» вниз на 5 единиц. Чтобы построить линейную функцию, нужны координаты лишь двух точек, потому что прямая проходит именно через две любые точки. Пусть одной точкой будет нуль функции. Найдём нуль функции, то есть значение x , при котором $y = 0$. Чтобы его найти, нужно решить линейное уравнение $4x - 5 = 0$. Получим, что $x = 1,25$. Вторую точку возьмем, например, при $x = 0$, получим, что $y = -5$.

x	1,25	0
y	0	-5

Теперь через две точки проведём прямую. Подпишем эти точки на рисунке.

И последним шагом, подпишем сам график $y = 4x - 5$ (См. рис. 1)

Рисунок 1.



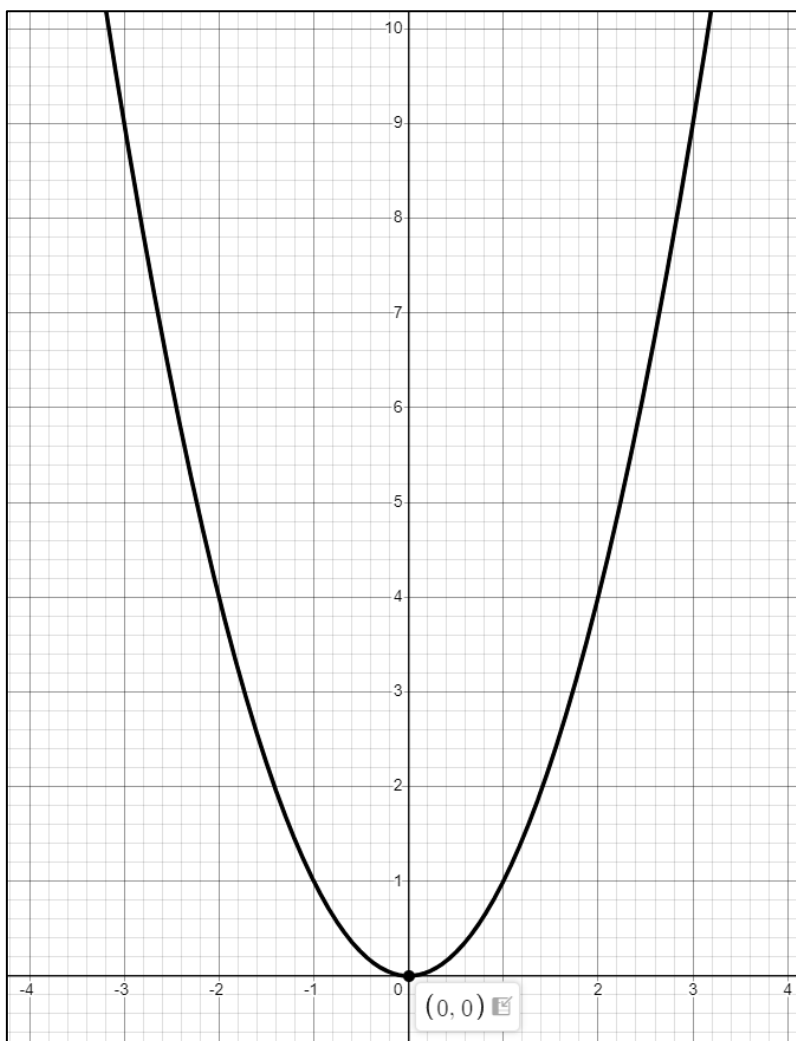
Подраздел 2. Квадратичная функция

Квадратичная функция – функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – некоторые числа, при чём $a \neq 0$ (в ином случае получим линейную функцию). Её график – парабола. Парабола имеет свою ось симметрии, которая параллельна оси ОУ и проходит через вершину параболы. Вершина параболы – это либо минимальное значение функции, либо максимальное; это точка, где сменяется возрастание функции на убывание, либо наоборот. Формула вершины параболы, которая будет у Вас в справочных материалах на ОГЭ, $x_0 = \frac{-b}{2a}$. С помощью этой формулы мы сможем получить абсциссу (координату по иксу) вершины параболы. Чтобы узнать вторую координату (по игреку), нужно подставить найденное x_0 в уравнение квадратичной функции, которое дано в задании. Область определения функции – все числа. Область значения – тот промежуток, где расположена парабола (в зависимости от коэффициентов он разный). Большинство других свойств зависят от коэффициентов a, b, c .

Рассмотрим частную квадратичную функцию, с коэффициентами b, c , равными нулю, и a , равным единице. Это функция $y = x^2$. По точкам построим её график (См. Рис. 2):

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	0	1	4	9	1	4	9

Рис. 2



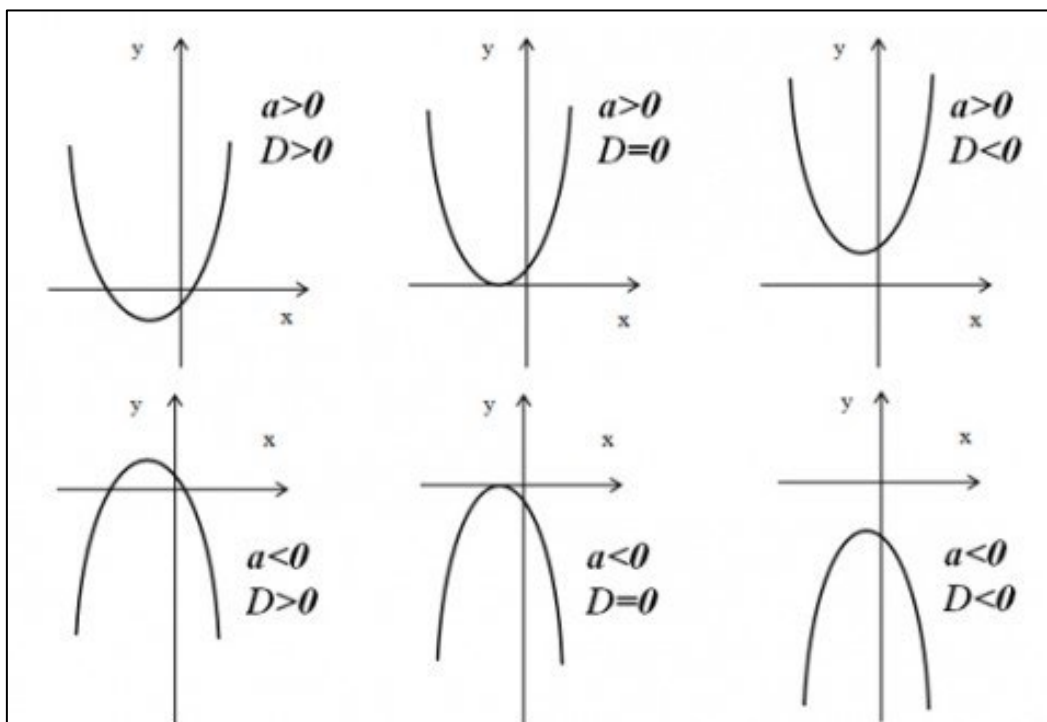
Ось симметрии этой параболы – прямая $x = 0$. Вершина параболы – точка с координатами $(0; 0)$, это можно вывести через вышеупомянутую формулу. При чём вершина одновременно является ещё и нулём функции, так как в ней значение функции (значение по игреку) равно нулю. Другими словами, у уравнения $x^2 = 0$ лишь один корень, и это $x = 0$. То, что корень один, можно было бы доказать алгебраически, через дискриминант.

Коэффициент a отвечает за направление ветвей параболы, сжатие или растяжение. При $a = 1$, как, например, в примере выше, ветви параболы направлены вверх. Если же $a = -1$, то ветви параболы будут направлены вниз, тогда вершина параболы будет не минимумом, а максимумом функции. Если коэффициент $a > 1$, или $a < -1$, то ветви параболы начнут «прижиматься» к оси OY . Поэтому иногда можно слышать, что такой коэффициент называют коэффициентом «сжатия». Если $-1 < a < 0$ или $0 < a < 1$, то ветви параболы

начнут растягиваться в стороны. Это будет коэффициентом растяжения. Коэффициенты b , c отвечают за перемещение параболы по координатной плоскости.

То есть, при определенных коэффициентах парабола может «опуститься», «подняться», сместиться влево или вправо, что повлияет на количество нулей функции (точек пересечения параболы и оси OX). Это связано с тем, что при разных коэффициентах квадратичного уравнения дискриминант будет разным, следовательно, будет разное количество корней: 0, 1 или 2. На рисунке 3 показана эта связь.

Рис. 3

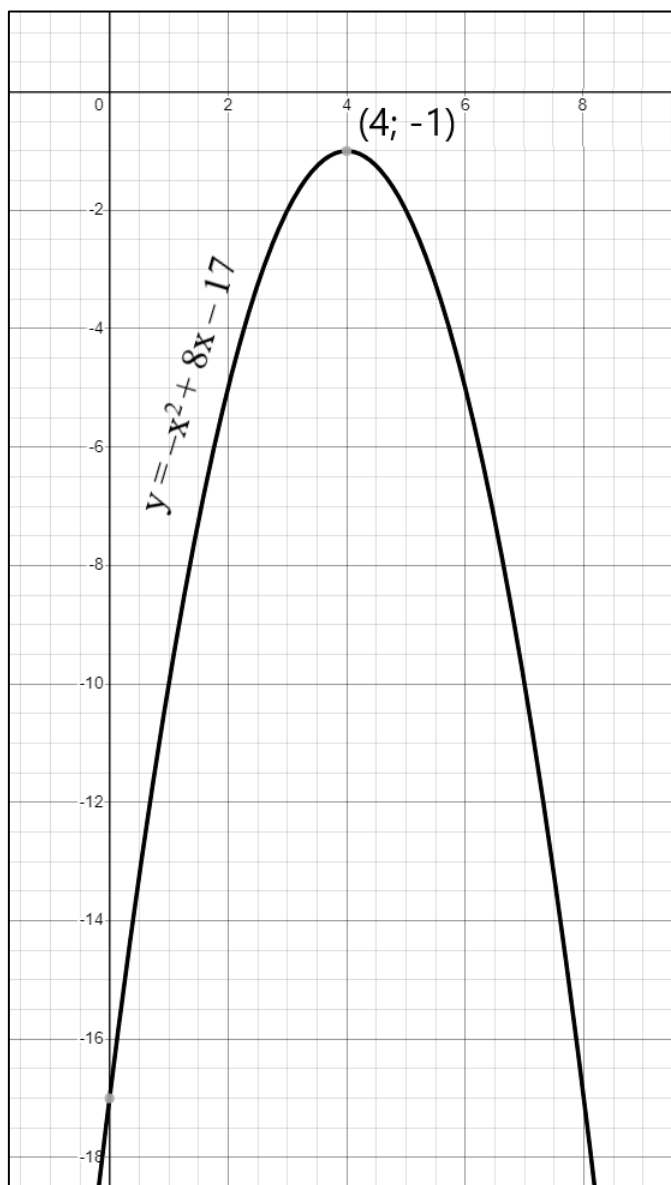


Пример 2. Построение квадратичной функции

Попробуем построить квадратичную функцию $y = -x^2 + 8x - 17$. По формуле $x_0 = \frac{-b}{2a}$ найдем абсциссу вершины параболы: $x_0 = \frac{-8}{-2} = 4$. Подставим x_0 в данную функцию. Получим $y = -16 + 32 - 17 = -1$. Вершина параболы имеет координату (4; -1). Ось симметрии этой параболы – прямая $x = 4$. Найдем координаты еще нескольких точек, построим график, и подпишем на нем функцию (См. рис. 4):

x	4	3	2	5	6	0
y	-1	-2	-5	-2	-5	-17

Рис. 4



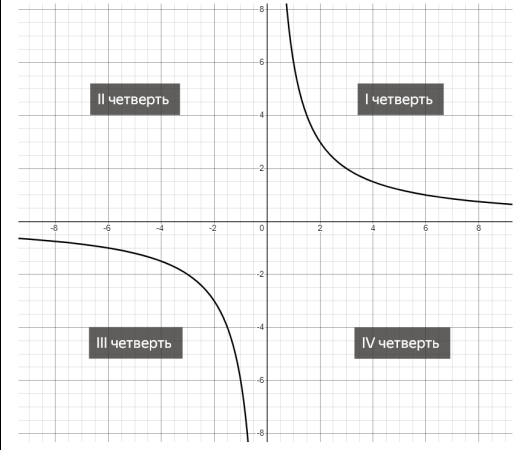
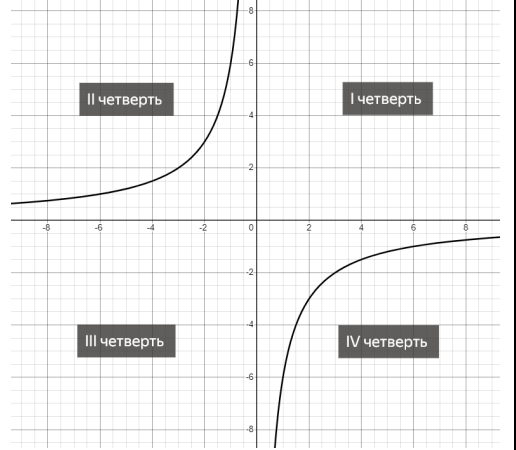
У данной функции нет нулей функции, что можно проверить через дискриминант (он отрицательный), коэффициент $a = -1$, ветви направлены вниз. Следовательно, вся функция находится под осью ОХ (область значения $[-1; -\infty)$).

Подраздел 3. Функция обратной пропорциональности

Функция обратной пропорциональности имеет вид $y = \frac{k}{x}$, где k – любое число, не равное нулю, и $x \neq 0$ (так как x в знаменателе). Её график – гипербола, состоящая из двух частей, которые в зависимости от

коэффициента k расположены в разных четвертях координатной плоскости. При $k > 0$ в первой и третьей, при $k < 0$ во второй и четвертой четвертях. (См. Таблица 2.)

Таблица 2

	При $k > 0$	При $k < 0$
Пример	$y = \frac{6}{x}$	$y = \frac{-6}{x}$
График		

Функция обратной пропорциональности нечётная, то есть симметрична относительно начала координат, точки $(0; 0)$. Область определения – все числа, кроме нуля. На графике это показано тем, что гипербола никогда не пересечёт ось OY , но будет всё ближе и ближе к ней. Область значения – тоже все числа, кроме нуля. Гипербола никогда не пересечёт и ось OX , но будет приближаться к ней. Это означает ещё то, что нулей функции не существует. Эта функция, в отличие от линейной и квадратичной, не непрерывна, так как при $x = 0$ терпит разрыв.

Следует отметить, что в задании ОГЭ может понадобиться построить функцию обратной пропорциональности, к которой прибавили константу, т.е. какое-либо число. Например, это может быть функция $y = \frac{1}{x} + 3$. Так же, как и в других функциях, свободный коэффициент отвечает за «подъём» или «спуск» функции. В нашем случае, коэффициент $+3$ означает, что всю функцию $\frac{1}{x}$, всю гиперболу стоит «поднять» вверх на 3 клетки. Тогда

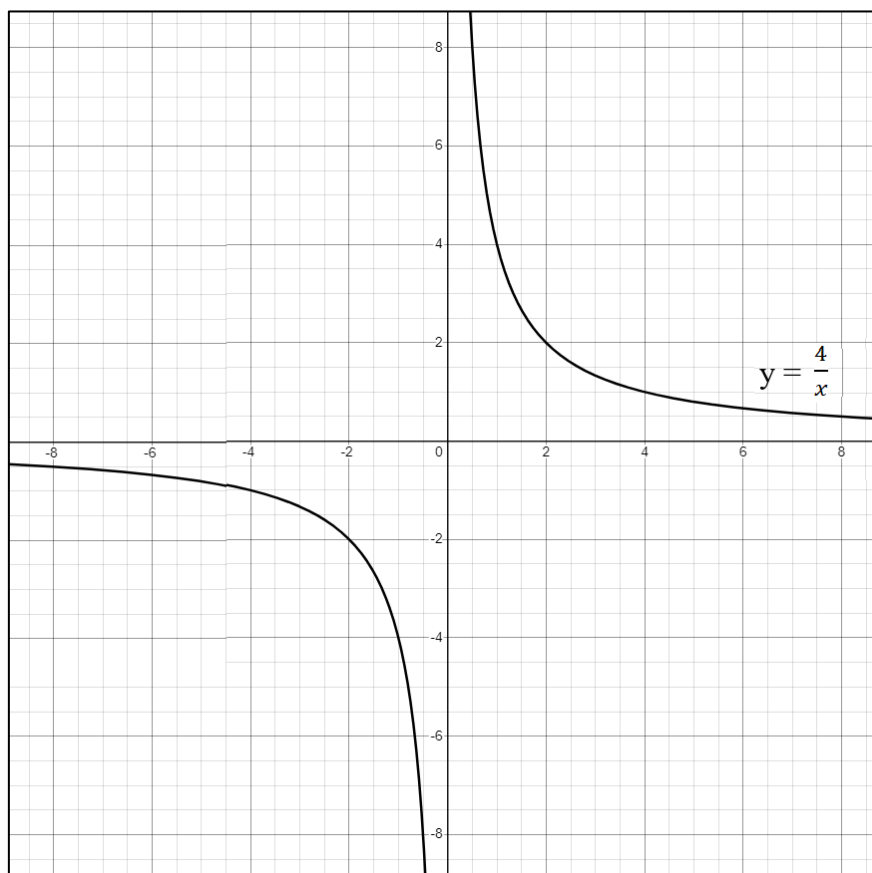
сместится на 3 клетки вверх и асимптота, которая раньше совпадала с осью ОХ, и к которой стремилась гипербола.

Пример 3. Построение функции обратной пропорциональности

Построим график функции $y = \frac{4}{x}$ по точкам, подпишем на графике функцию (См. рис. 5):

x	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
y	4	2	1	0,5	-4	2	-1	-0,5

Рис. 5



Раздел 2. Образцы решения заданий №22 с кусочными функциями

Теперь, когда мы разобрали все типы функций, которые могут попасться на ОГЭ в кусочной функции, разберёмся, как решать задания с ними.

Пример задания:

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x^2 - 4x + 1 & \text{при } x \geq -3 \\ -x - 2 & \text{при } x < -3 \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Сначала дадим характеристику обеим функциям.

1) $y = -x^2 - 4x + 1$ – Квадратичная функция. График – парабола с ветвями вниз, т.к. $a < 0$. Найдём координаты вершины параболы: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{-2} = -2$; $y_0 = -(-2)^2 - 4(-2) + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$. Вершина имеет координаты $(-2; 5)$. Найдём точки для построения графика:

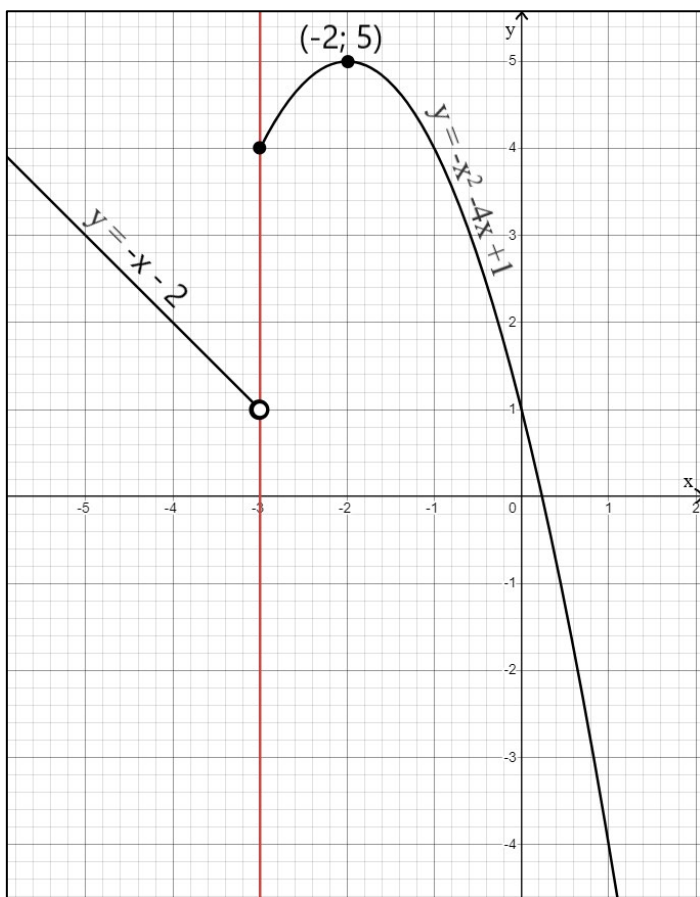
x	-2	-3	-1	0	1
y	5	4	4	1	-4

2) $y = -x - 2$ – линейная убывающая функция. График – прямая. Найдём точки для построения графика:

x	-3	-4
y	1	2

Теперь можем построить кусочную функцию (См. рис. 6). Проведём асимптоту $x = -3$ (линию, которая разделяет две части данной кусочной функции). Её обычно рисуют пунктирной линией. Нужно отметить, к какой части графика принадлежит точка с координатой по x -3. В задании нестрогий знак стоит у первой функции, квадратичной, то есть точка с абсциссой -3 принадлежит параболе. Закрасим точку у параболы, чтобы показать, что она относится к ней. А у $y = -x - 2$ точку «выколем» (не закрасим), так как она не принадлежит этой прямой. И обязательно подпишем вершину параболы и функции рядом с их частями графика.

Рис. 6



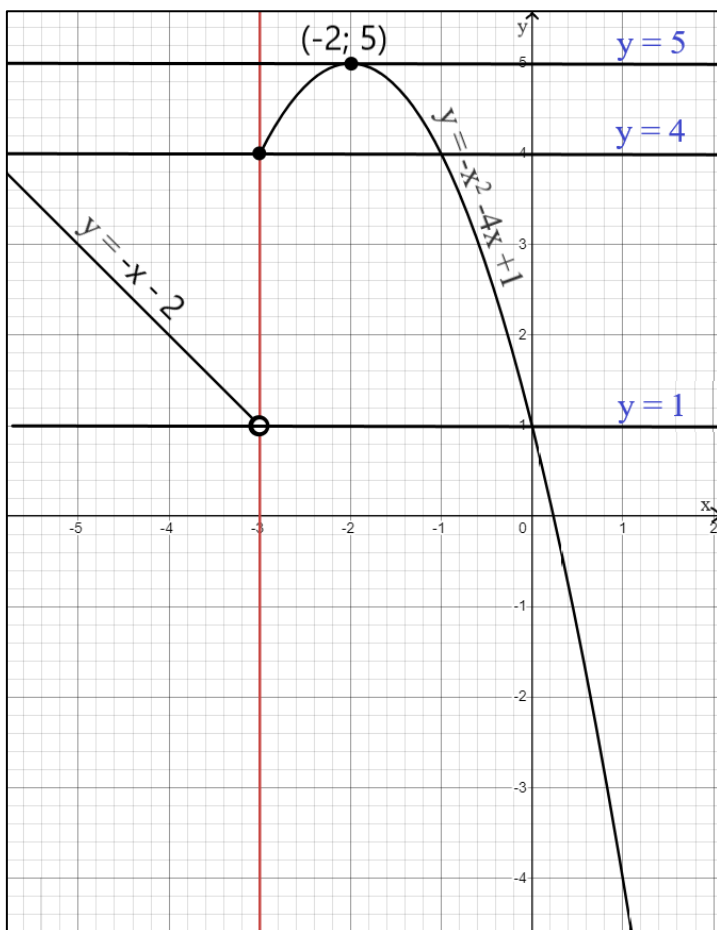
За правильное описание функций, их построения и верный график получим 1 балл из 2 возможных за это задание.

Во второй части этого задания нужно найти параметр, при котором будет выполняться данное условие. В нашем случае, найти «при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки».

Чтобы это определить, можно вести, например, ручку, расположенную горизонтально, снизу вверх или наоборот, и смотреть, в скольких точках ручка пересекает график.

При $m = -4$ прямая $y = m$ имеет с графиком лишь одну общую точку, что видно на графике. «Ведём» ручку выше – При $m = 1$ прямая $y = m$ имеет с графиком тоже только одну общую точку, так как точка $(-3; 1)$ выколота. А вот дальше будет две общих точки до того момента, как дойдём до $m = 4$. При $m = 4$ прямая $y = m$ будет пересекать график 3 раза, т.к. точка закрашена. 3 Общих точки будет до $m = 5$, в таком случае, график будет пересечён прямой 2 раза (в вершине параболы и в точке прямой $y = -x - 2$) (См. Рис. 7).

Рис. 7



В ответ запишем «При $m = 5$ и $m \in (1; 4)$ ». За правильное этой части задания получаем второй балл.

В задании с кусочной функции может попасться также функция обратной пропорциональности, могут попасться 3 функции, а не 2, тогда будет 3 части графика. Может быть такое, что у функции не будет разрыва, как в рассмотренном примере. Вторая часть с параметром тоже бывает разной. В большинстве случаев как в этом примере: «При каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ... общих точек?». Но может встретиться «При каком значении k прямая $y = kx$ имеет с графиком ... общих точек?». Ещё реже встречается вопрос «Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?».

Алгоритм решения этого типа задания (с кусочной функцией) мог бы выглядеть так:

- 1) Дать характеристику каждой функции. Найти её точки для графика;
- 2) Провести асимптоту, построить кусочную функцию. Подписать функции рядом с их частями графика. Выколоть или закрасить, если нужно, точку (точки);
- 3) Найти значения параметра;
- 4) Записать ответ.

Решим с помощью этого алгоритма ещё один пример:

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 9 & \text{при } x \geq -5 \\ -\frac{20}{x} & \text{при } x < -5 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

1) $y = x^2 + 6x + 9$ – квадратичная функция вида. График – парабола с ветвями вверх, т.к. $a > 0$. Найдём координату вершины параболы: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$; $y_0 = (-3)^2 + 6(-3) + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$. Вершина параболы имеет координату $(-3; 0)$.

Найдём точки параболы:

x	-3	-5	-4	2	4	0
y	0	4	1	1	4	9

2) $y = -\frac{20}{x}$ – функция обратной пропорциональности вида $\frac{k}{x}$. График – гипербола, расположенная во II и IV четвертях, т.к. $k < 0$. Найдём точки гиперболы:

x	-5	-10	-20	5	10	20
y	4	2	1	-4	-2	-1

3) Построим кусочную функцию (См. рис. 8).

4) На графике видно, что:

при $m \in (-\infty; 0)$ прямая $y = m$ не имеет общих точек с графиком;

при $m = 0$ прямая $y = m$ имеет 1 общую точку;

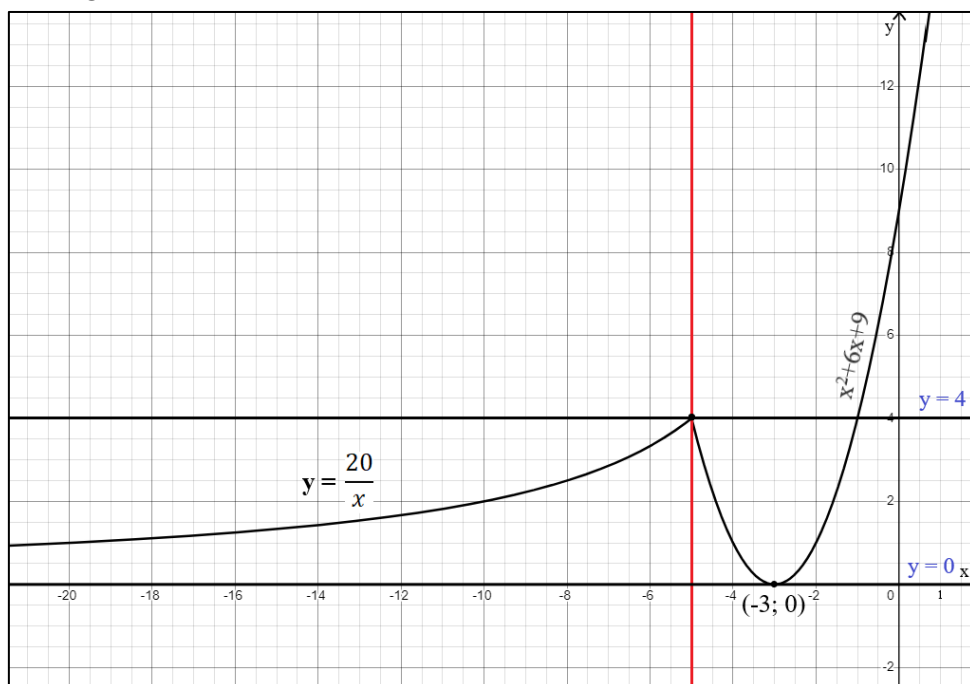
при $m \in (0; 4)$ прямая $y = m$ имеет 3 общих точки;

при $m = 4$ прямая $y = m$ имеет 2 общих точки;

при $m \in (4; +\infty)$ прямая $y = m$ имеет 1 общую точку.

5) Ответ: При $m = 0$, $m = 4$ и $m \in (4; +\infty)$.

Рис. 8



Раздел 3. Задания для самостоятельного решения

№1) Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 10x + 27 & \text{при } x \geq 4 \\ x & \text{при } x < 4 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

№2) Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{при } x \geq -4 \\ -\frac{16}{x} & \text{при } x < -4 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

№3) Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{при } x \geq 2 \\ x + 3 & \text{при } x < 2 \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

№4) Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{6}{x} & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

№5) Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{при } x \geq -5 \\ -\frac{45}{x} & \text{при } x < -5 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Глава 2. Дробно-рациональные функции

Раздел 4. Свойства дробно-рациональных функций

Дробно-рациональные функции – это функции вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – некоторые функции с переменной x . На ОГЭ такие функции часто могут содержать модули, их мы рассмотрим в следующей главе. Свойства и графики этих функций всегда разные, в зависимости от того, чем являются $P(x)$ и $Q(x)$. Но всегда в решении стоит прописывать ОДЗ, учитывать, что знаменатель не может быть равен нулю. Это отразится на графике в виде выколотой точки.

Раздел 5. Образцы решения заданий №22 с дробно-рациональными функциями

Алгоритм решения данного типа задания:

- 1) Прописать в ОДЗ все ограничения из знаменателя;
- 2) Преобразовать (упростить) данную функцию; Написать, к чему свёлся график функции;
- 3) Построить график функции, учитывая ОДЗ;
- 4) Решить задание с параметром;
- 5) Записать ответ.

Рассмотрим пример решения такого задания:

Постройте график функции

$$y = \frac{4x-5}{4x^2-5x}$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

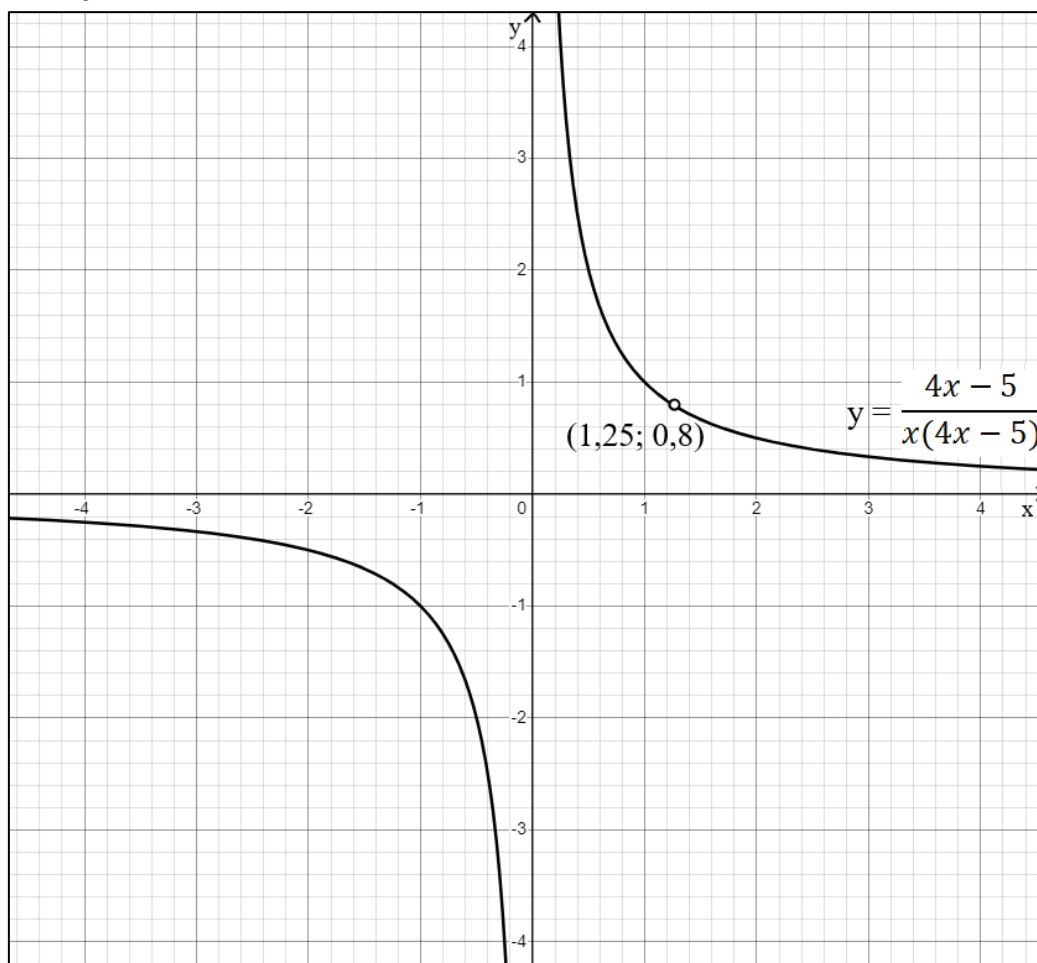
1) В знаменателе вынесем x за скобку как общий множитель, получим:
 $y = \frac{4x-5}{x(4x-5)}$. Пропишем в ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 4x - 5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1,25 \end{cases}$

2) Теперь можем сократить числитель и знаменатель на $4x-5$, получим $y = \frac{1}{x}$. График свёлся к графику гиперболы, расположенной в I и III четвертях, с выколотой точкой при $x=1,25$. Координата по игреку выколотой точки равна $\frac{1}{1,25} = 0,8$. Выколотая точка имеет координату $(1,25; 0,8)$

3) Построим график функции (См. рис. 9)

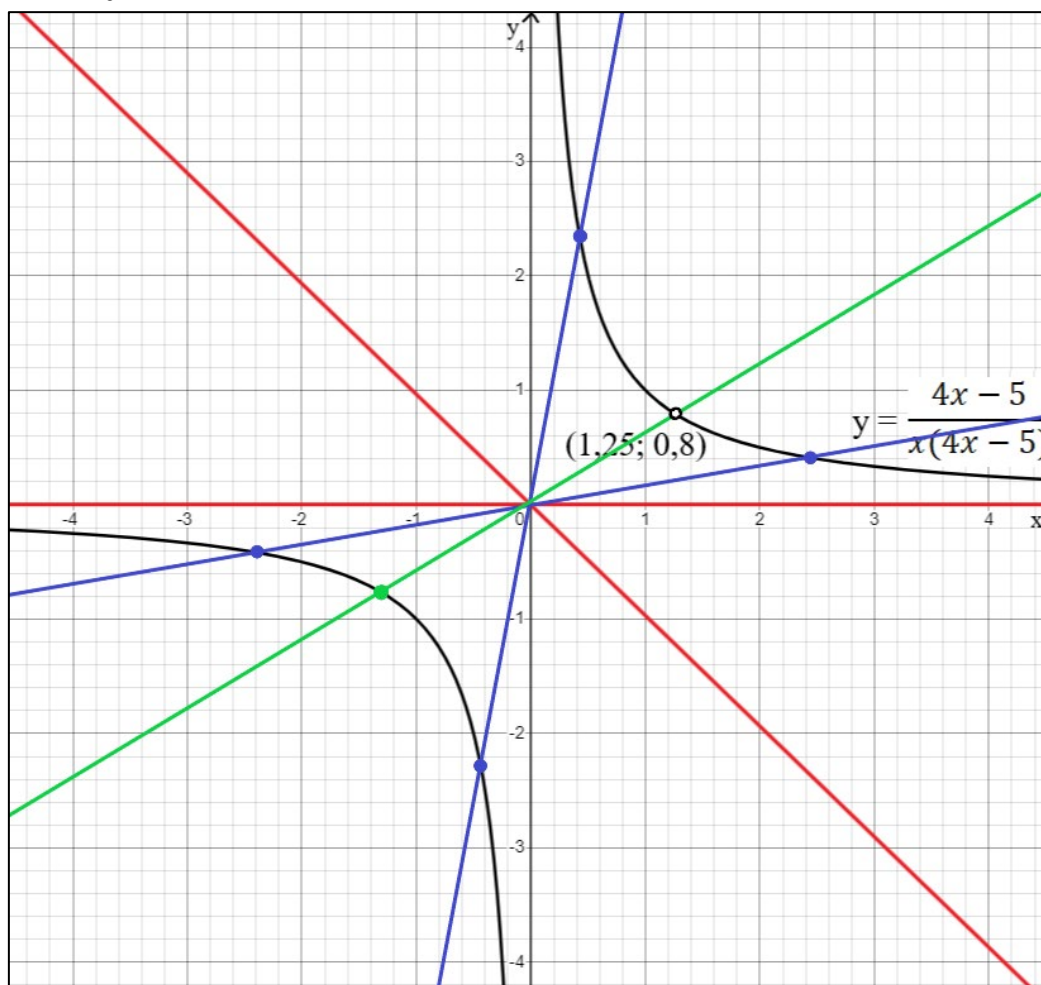
x	1	0,5	2	-0,5	-2
y	1	2	0,5	-2	-0,5

Рис. 9



4) Ранее мы рассматривали только задания с прямой $y = m$, где m – параметр. Функция $y = kx$ – линейная (ещё её иногда называют функцией прямой пропорциональности), проходящая через начало координат, т.е. точку $(0; 0)$, так как нет коэффициента b . Изменяя параметр k , наклон прямой $y=kx$ будет меняться. При $k = 0$, прямая «сольётся» с осью OX и не будет иметь общих точек с гиперболой. Увеличивая k , прямая пересечёт график в двух точках (в 1 и 3 четверти). Но если она пройдёт через выколотую точку, не принадлежащую графику, то пересечёт гиперболу лишь 1 раз, в третьей четверти. При отрицательных значениях k прямая не будет иметь общих точек с графиком, так как пройдёт как бы между двух частей гиперболы. На рисунке 10 синими линиями показаны некоторые из тех, которые пересекают гиперболу в двух точках (они также отмечены на пересечении с графиком), красными линиями – некоторые из тех, которые не пересекают гиперболу вообще. И только одна прямая, зелёная, проходящая через выколотую точку, по условию нам п

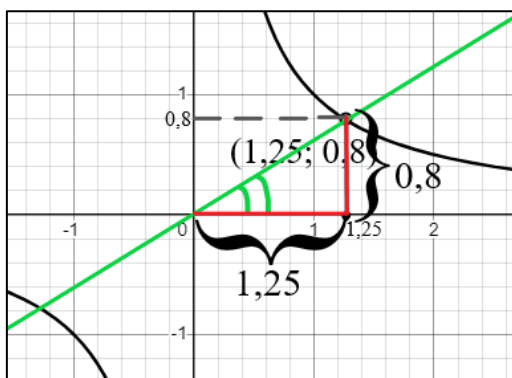
Рис. 10



Важно помнить, что коэффициент k у прямой $y = kx$ равен тангенсу угла, под которым прямая пересекает ось OX . Тангенс – это отношение противолежащего катета, к прилежащему. Поэтому мысленно построим треугольник (См. рис. 11). Противолежащий катет начинается на оси OX , а заканчивается в выколотой точке. Т.е. можно сказать, что его длина – это координата по игреку y этой точки. Поэтому противолежащий катет равен 0,8. Прилежащий катет лежит на оси OX и «достаёт» до 1,25. Поэтому длина прилежащего катета равна 1,25. Теперь можем найти тангенс, поделив 0,8 на 1,25. Получим 0,64. Это и есть коэффициент k , при котором зелёная прямая пройдёт через выколотую точку. Больше таких значений k нет.

5) Поэтому в ответ следует написать «При $k = 0,64$ ».

Рис. 11



Раздел 6. Задания для самостоятельного решения

№6) Постройте график функции

$$y = \frac{(x^2 + 4)(x + 1)}{-1 - x}$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

№7) Постройте график функции

$$y = \frac{(x^2 + 6,25)(x - 1)}{1 - x}$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

№8) Постройте график функции

$$y = \frac{7x - 5}{7x^2 - 5x}$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

№9) Постройте график функции

$$y = 3 - \frac{x + 2}{x^2 + 2x}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком общих точек.

№10) Постройте график функции

$$y = 5 - \frac{x + 5}{x^2 + 5x}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком общих точек.

Глава 3. Функции, содержащие модули

Раздел 7. Свойства функций, содержащих модули

В №22 ОГЭ функции, содержащие модули достаточно разнообразные. Их можно разделить на 3 группы:

- 1 – функции, которые при раскрытии модуля сведутся к квадратичным;
- 2 – функции вида $y = |f(x)|$;
- 3 – дробно-рациональные функции с модулями (их существует 2 вида).

Свойства всех этих функций разные, одни функции легче построить, другие сложнее. В следующих трёх подразделах мы разберём, как решать задания с каждой возможной функцией.

Раздел 8. Образцы решения заданий №22 с функциями, содержащими модули

Подраздел 4. Функции, содержащие модули, сводящиеся к квадратичным функциям

Для примера рассмотрим пример задания с такой функцией:

Постройте график функции

$$y = |x| \cdot (x+2) - 3x$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

По определению *модуль* – расстояние на координатной прямой от нуля до определенной точки. Расстояние не может быть отрицательным, поэтому модуль всегда положительный. Расстояние от 0 до, например, 5 равно 5, но и расстояние от 0 до -5 тоже равно 5. То есть $|5| = 5$ и $|-5| = 5$. Из чего можем сделать вывод, что если внутри модуля число положительное (или равное нулю), то модуль раскроется без изменения знака. В нашем примере, как было 5, так 5 и осталось. Но если внутри модуля число отрицательное, то модуль раскроется со знаком минус. В нашем примере, чтобы из -5 получить 5, нужно -5 умножить на -1, получая $-(-5) = 5$.

Но в этом задании внутри модуля переменная, которая может быть как отрицательной, так и положительной. Поэтому рассмотрим 2 случая: когда x больше или равен 0 и когда x отрицательный. В первом случае, модуль раскроется без изменения знака, а во втором случае с умножением на минус.

Получаем кусочную функцию: $y = \begin{cases} x \cdot (x+2) - 3x & \text{при } x \geq 0 \\ -x(x+2) - 3x & \text{при } x < 0 \end{cases}$. А кусочные функции мы уже научились строить.

Раскроем скобки: $y = \begin{cases} x^2 + 2x - 3x & \text{при } x \geq 0 \\ -x^2 - 2x - 3x & \text{при } x < 0 \end{cases}$

Приведём подобные слагаемые: $y = \begin{cases} x^2 - x & \text{при } x \geq 0 \\ -x^2 - 5x & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

$y = x^2 - x$ – квадратичная функция, график – парабола с ветвями вверх, т.к. $a > 0$. Найдём координаты вершины параболы: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2} = 0,5$.

$y_0 = (0,5)^2 - 0,5 = -0,25$. Вершина параболы имеет координаты $(0,5; -0,25)$.
Найдём точки параболы:

x	0,5	0	1	2	3
y	-0,25	0	0	2	6

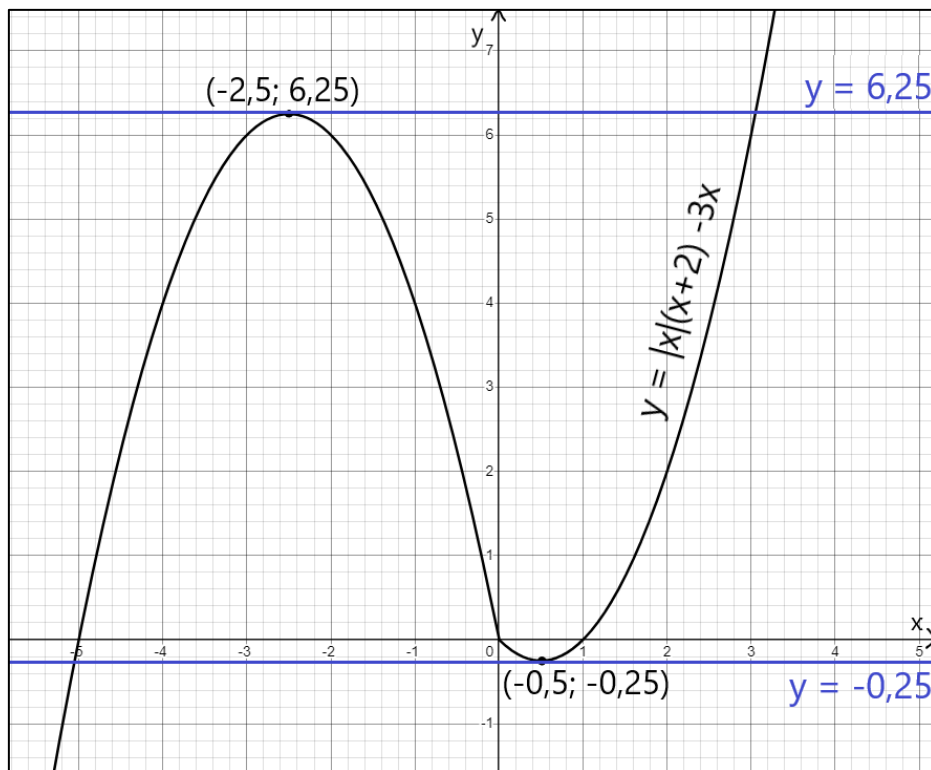
$y = -x^2 - 5x$ – квадратичная функция, график – парабола с ветвями вниз, т.к. $a < 0$. Найдём координаты вершины параболы: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{-2} = -2,5$.

$y_0 = -(-2,5)^2 - 5(-2,5) = -6,25 + 12,5 = 6,25$. Вершина параболы имеет координаты $(-2,5; 6,25)$. Найдём точки параболы:

x	-2,5	0	-1	-4	-5
y	6,25	0	4	4	0

По точкам построим график (См. рис. 12)

Рис. 12



Во второй части задания нужно найти такие m , чтобы прямая $y = m$ пересеклась с графиком только в 2 точках.

Из рисунка видно:

при $m < -0,25$ будет лишь одна точка пересечения,

при $m = 0,25$ – 2 точки пересечения,

при $m \in (0,25; 6,25)$ – 3 точки пересечения,

при $m = 6,25$ – 2 точки пересечения,

при $m > 6,25$ – 1 точка пересечения.

Следовательно, 2 точки пересечения только в случаях, когда одна из точек – вершина параболы.

Ответ: при $m = 0,25$ и $m = 6,25$.

Такие задания с модулями не самые сложные, алгоритм решения подобных заданий может выглядеть следующим образом:

- 1) Раскрыть модуль, сведя функцию к кусочной;
(Если модуль не $|x|$, то решить неравенство, получаемое при раскрытии модуля)
- 2) Дать характеристику каждой функции в кусочной функции;
- 3) Построить график, подписать важные точки, функцию;
- 4) Решить задание с параметром.
- 5) Записать ответ.

Решим ещё одно подобное задание:

Постройте график функции

$$y = 5|x-2| - x^2 + 5x - 6$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Разница, по сути, лишь в том, что под модулем не $|x|$, что скажется при раскрытии модуля.

1) Раскроем модуль: $y = \begin{cases} 5(x-2) - x^2 + 5x - 6 & \text{при } x-2 \geq 0 \\ -5(x-2) - x^2 + 5x - 6 & \text{при } x-2 < 0 \end{cases}$. Здесь в условии всё зависит от значения $x-2$, а не просто x , т.к. внутри модуля находилось именно $x-2$. В функциях раскроем скобки, приведём подобные, а в условии решим неравенство, «перенеся» -2 в правую сторону со сменой знака на $+2$, получим:

$$y = \begin{cases} -x^2 + 10x - 16 & \text{при } x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & \text{при } x < 2 \end{cases}.$$

2) $y = -x^2 + 10x - 16$ – квадратичная функция, график – парабола с ветвями вниз, т.к. $a < 0$. Найдём координаты вершины параболы: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-2} = 5$; $y_0 = -(5)^2 + 50 - 16 = 9$. Вершина параболы имеет координату $(5; 9)$. Найдём точки параболы:

x	5	4	6	7	3	2	8
y	9	8	8	5	5	0	0

$y = -x^2 + 4$ – квадратичная функция, график – парабола с ветвями вниз, т.к. $a < 0$. Найдём координаты вершины параболы: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$ (Помним, что $+4$ – это коэффициент c , а не b); $y_0 = -(0)^2 + 4 = 4$. Вершина параболы имеет координату $(0; 4)$. Найдём точки параболы:

x	0	1	-1	-2	2
y	4	3	3	0	0

3) Построим график (См. рис. 13)

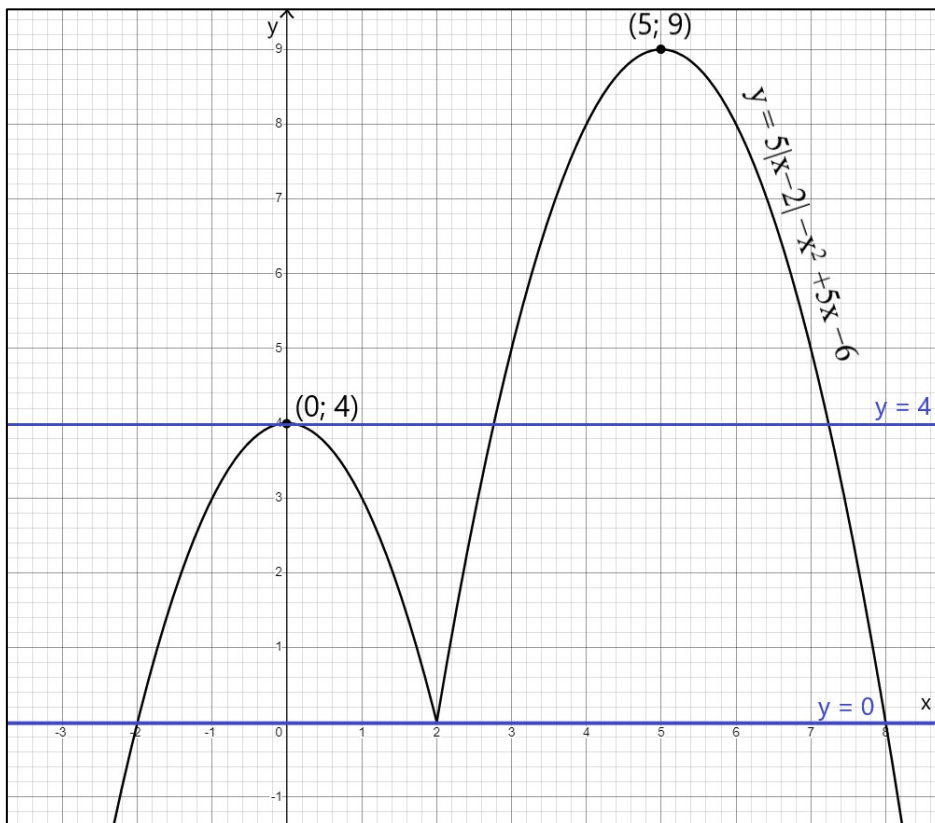
4) По графику видно:

при $m < 0$ прямая $y = m$ имеет с графиком 2 общие точки;

при $m = 0$ прямая $y = m$ имеет с графиком 3 общие точки;

при $m \in (0; 4)$ прямая $y = m$ имеет с графиком 4 общие точки;
 при $m = 4$ прямая $y = m$ имеет с графиком 3 общие точки;
 при $m \in (4; 9)$ прямая $y = m$ имеет с графиком 2 общие точки;
 при $m = 9$ прямая $y = m$ имеет с графиком 1 общую точку;
 при $m > 9$ прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.
 Ответ: при $m = 0$ и $m = 4$.

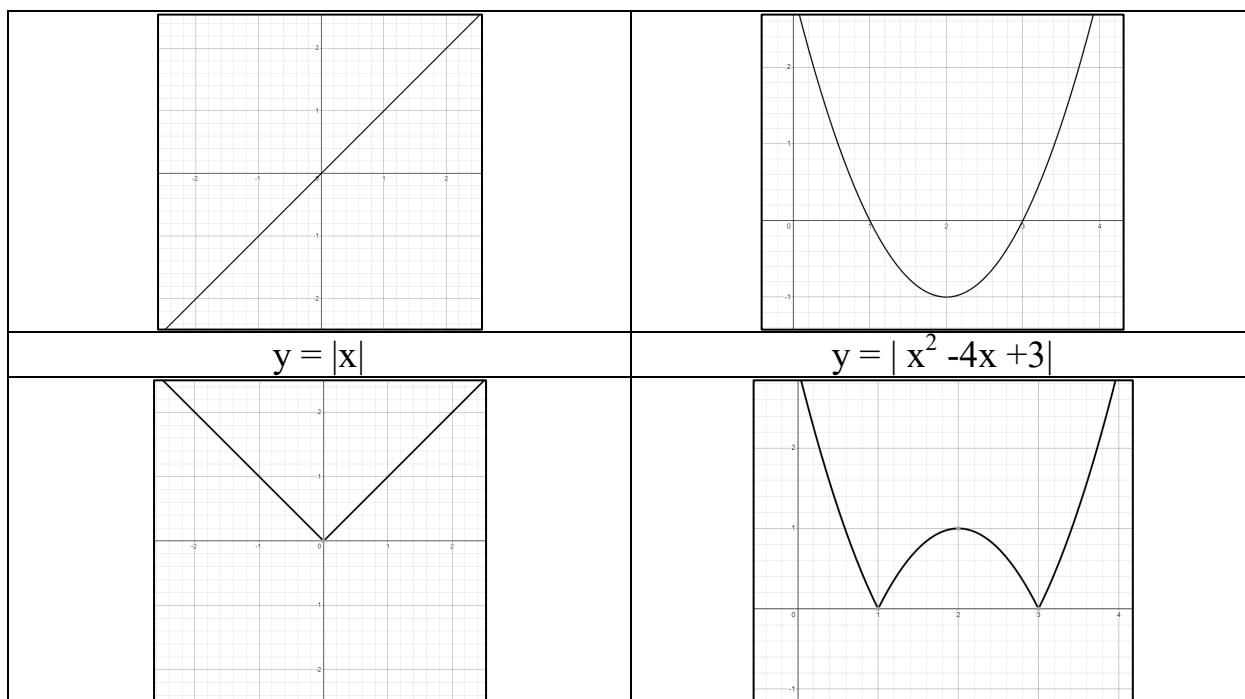
Рис. 13



Подраздел 5. Функции вида $y = |f(x)|$

У такого вида функций есть весьма интересное свойство, которое мы не затрагивали ранее. Иногда можно услышать, что функция $f(x)$ как бы «отзеркаливается» от оси OX . Это напрямую связано с тем, что модуль – всегда положительное число. Поэтому все отрицательные значения функции $f(x)$ он «перекинет» за ось OX . В таблице показано, как это работает:

$y = x$	$y = x^2 - 4x + 3$
---------	--------------------



В примере с $f(x) = x$, под осью ОХ находится часть прямой, левее оси ОУ. Модуль «отзеркалил» эту часть симметрично вверх. В примере с $f(x) = x^2 - 4x + 3$ под осью ОХ находится только часть параболы. Модуль «развернул» её вверх.

Поэтому в таком случае, когда внутри модуля – вся функция полностью, можно не сводить её к кусочной, а написать в решении, например, так: «Оставим без изменения части графика, лежащие на оси ОХ или выше, а части графика, лежащие ниже оси ОХ, отразим относительно нее».

Решим пример с такой функцией:

Постройте график функции

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

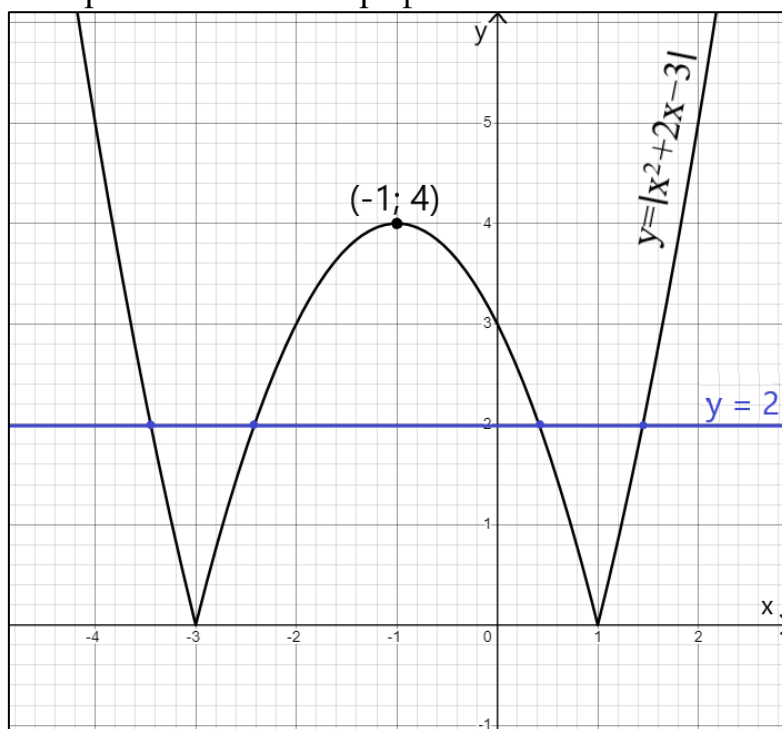
$y = x^2 + 2x - 3$ – квадратичная функция, график – парабола с ветвями вверх, т.к. $a > 0$. Найдём координаты вершины параболы: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$;
 $y_0 = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$. Вершина параболы имеет координаты $(-1; -4)$. Найдём точки параболы:

x	-1	0	-2	1	3	2	-4
y	-4	-3	-3	0	0	5	5

Оставим без изменения части графика, лежащие на оси ОХ или выше, а части графика, лежащие ниже оси ОХ, отразим относительно нее. Получим точки графика функции $y = |x^2 + 2x - 3|$:

x	-1	0	-2	1	3	2	-4
y	4	3	3	0	0	5	5

Построим по точкам график:



Во второй части здесь встретилась изменённый вариант задания с параметром m и прямой $y = m$. Эта прямая и есть прямая, параллельная оси абсцисс (т.е. оси OX).

По рисунку видно, что больше 4 общих точек с графиком прямая иметь не может. Например, прямая $y = 2$ имеет 4 общие точки с графиком.

Ответ: 4 точки.

Подраздел 6. Дробно-рациональные функции, содержащие модули

В этом подразделе разберём, как решать 2 типа функций:

- 1) Подобные $y = \frac{3,5|x| - 1}{|x| - 3,5x^2}$;
- 2) Подобные $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{1,5} - \frac{1,5}{x} \right| + \frac{x}{1,5} + \frac{1,5}{x} \right)$.

Первые, хоть и содержат два модуля, строить легче, так как вторые содержат достаточно трудно раскрываемый модуль. Скорее всего, будет получаться неравенство, которое придётся решать методом интервалов.

В современном варианте ОГЭ, на момент 2025 года, нет заданий, где были бы разные функции внутри нескольких модулей. Если есть 2 модуля с разными функциями внутри него, то нужно рассматривать не 2 случая, как мы делали ранее, а 4, что усложняет задачу. Сейчас можно встретить задания только с одинаковыми модулями, которые можно решить, рассматривая только 2 случая.

Стоит также отметить, что в заданиях, подобных первому типу функций, может быть 1 модуль. Такие задания решаются, в целом, аналогично.

1) Рассмотрим задание с первой функцией:

Постройте график функции

$$y = \frac{3,5|x| - 1}{|x| - 3,5x^2}$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

Алгоритм решения таких заданий:

- 1) Раскрыть модуль, сведя функцию к кусочной;
- 2) Упростить функции. Если нужно – решить неравенство в условии;
- 3) Дать характеристику каждой функции;
- 4) Построить график. Отметить важные точки, подписать функцию;
- 5) Решить задание с параметром;
- 6) Записать ответ.

1) Раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} \frac{3,5x-1}{x-3,5x^2} & \text{при } x \geq 0 \\ \frac{-3,5x-1}{-x-3,5x^2} & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

2) Упростим функции, но рядом в ОДЗ пропишем все ограничения из знаменателя:

$$y = \begin{cases} \frac{3,5x-1}{-x(3,5x-1)} & \text{при } x \geq 0 \\ \frac{-3,5x-1}{x(-3,5x-1)} & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{при } x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ:} \begin{cases} x \neq 0 \\ -x \neq 0 \\ 3,5x - 1 \neq 0 \\ -3,5x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{2}{7} \\ x \neq -\frac{2}{7} \end{cases}$$

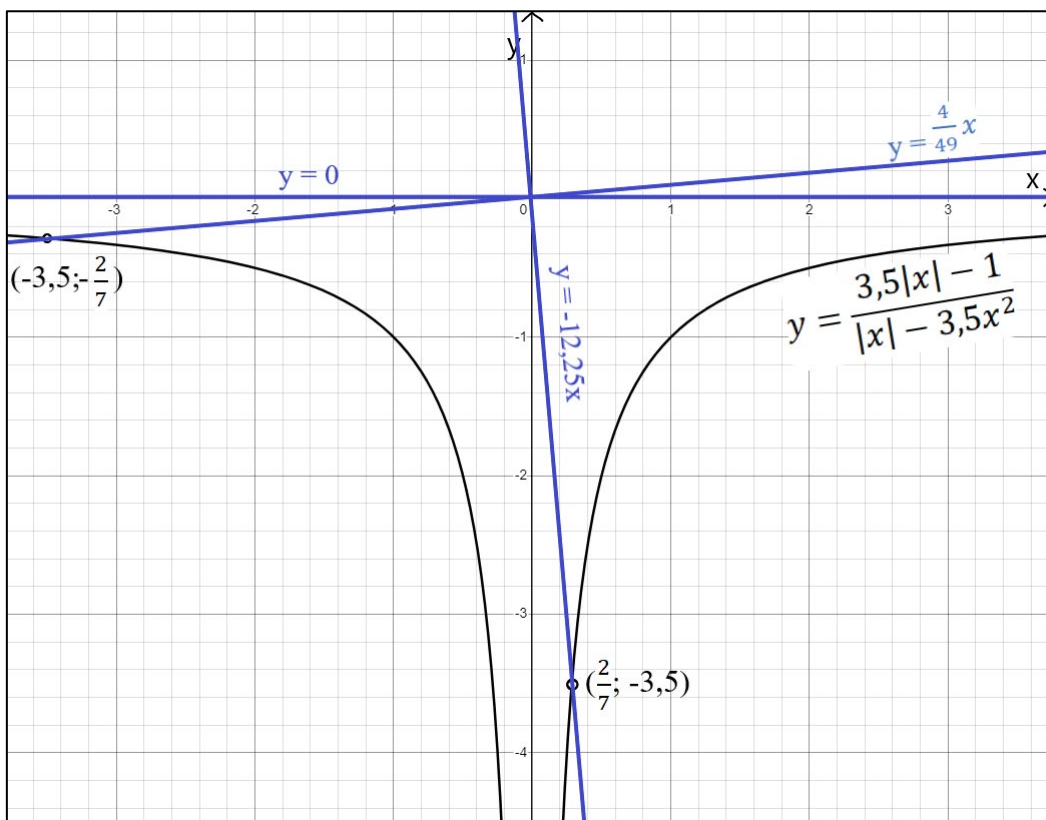
3) $y = -\frac{1}{x}$ – функция обратной пропорциональности, график – гипербола, расположенная во II и IV четвертях, т.к. $k < 0$. Найдём точки гиперболы:

x	1	0,5	2	-1	-0,5	-2	$\frac{2}{7}$
y	-1	-2	-0,5	1	2	0,5	-3,5

$y = \frac{1}{x}$ – функция обратной пропорциональности, график – гипербола, расположенная во I и III четвертях, т.к. $k > 0$.

x	1	0,5	2	-1	-0,5	-2	-3,5
y	1	2	0,5	-1	-2	-0,5	$-\frac{2}{7}$

4) Построим по точкам график, с учетом ОДЗ выколем точки с координатами $(\frac{2}{7}; -3,5)$ и $(-3,5; \frac{2}{7})$:



5) По заданию нужно найти такие k , чтобы прямая $y=kx$ не пересекала гиперболу. Т.е. прямая должна пройти через выколотую точку или должна совпасть с осью OX . Во втором случае получаем прямую $y = 0$, т.е. $k=0$. В первом случае находим k как угловой коэффициент прямой через тангенс ([см. стр. 19](#)). Прямая, проходящая через выколотую точку $(\frac{2}{7}; -3,5)$ – $y = -12,25x$ (коэффициент k нашли через отношение координаты по игреку к координате по иксу, получив $\frac{-49}{4} = -12,25$). Прямая, проходящая через точку $(-3,5; -\frac{2}{7})$ –

$y = \frac{4}{49}x$. Таким образом, в ответ запишем 3 числа.

6) Ответ: при $k=0$, при $k=-12,25$, и при $k=\frac{4}{49}$.

II) Рассмотрим задание со второй функцией:

Постройте график функции

$$y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{1.5} - \frac{1.5}{x} \right| + \frac{x}{1.5} + \frac{1.5}{x} \right)$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Этот тип заданий разбираем в самую последнюю очередь, так как для него нужно обладать пониманием, как решать примеры попроще, хорошо строить кусочные функции, уметь решать неравенства.

Решим по тому же алгоритму:

1) Рядом пропишем в ОДЗ, что $x \neq 0$, (так как он в знаменателе) чтобы не забыть выколоть точку на графике. Внутри модуля разность двух дробей, в неравенство (условие) пишем полностью обе две дроби:

ОДЗ: $x \neq 0$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1,5} - \frac{1,5}{x} + \frac{x}{1,5} + \frac{1,5}{x} \right) & \text{при } \frac{x}{1,5} - \frac{1,5}{x} \geq 0 \\ \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{x}{1,5} - \frac{1,5}{x} \right) + \frac{x}{1,5} + \frac{1,5}{x} \right) & \text{при } \frac{x}{1,5} - \frac{1,5}{x} < 0 \end{cases}$$

2) Можем упростить сами функции, приведя подобные и раскрыв скобки. Чуть сложнее будет решить неравенства в условиях. Решим первое методом интервалов:

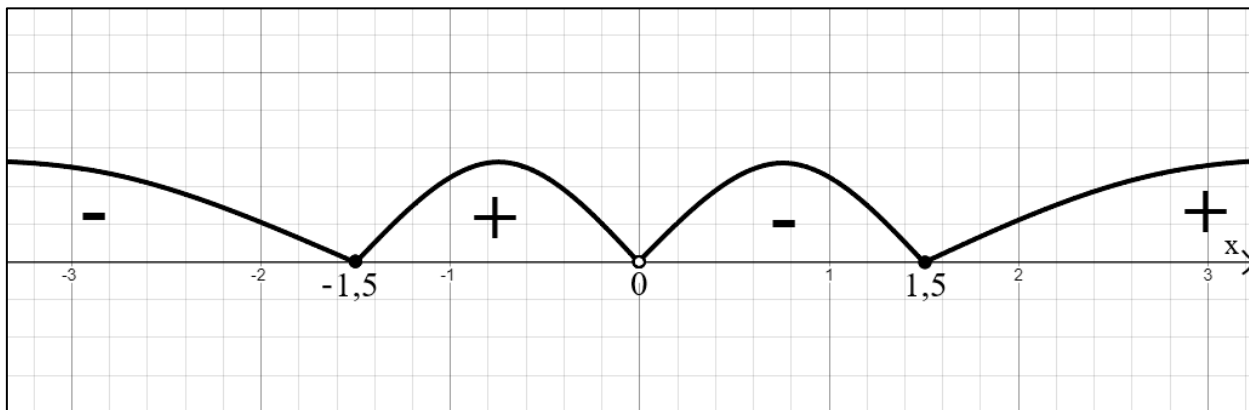
$\frac{x}{1,5} - \frac{1,5}{x} \geq 0$ Дроби с разными знаменателями, приведём их к общему, умножив первую дробь на x , а вторую на $1,5$. Получим:

$\frac{x^2 - 1,5^2}{1,5x} \geq 0$ Числитель по формуле «разность квадратов» разложим на 2 скобки:

$$\frac{(x-1,5)(x+1,5)}{1,5x} \geq 0$$

Теперь нужно найти нули левой части и из числителя, и из знаменателя. Получаем $-1,5$; 0 ; $1,5$. Далее выносим полученные нули на координатную прямую. Но x в знаменателе, он нулю не может быть равен, поэтому точка будет выколота. Получили 4 интервала (обозначены дугами на рис. 14), нужно определить знаки на каждом. В нашем случае нет какой-либо скобки в чётной степени, поэтому знаки чередуются. Даже если Вы забудете это на экзамене, всегда можно подставлять в неравенство различные числа с интервала и смотреть на получившийся знак. Подставив очень большое число вместо x (т.е. с самого правого промежутка), например, несколько сотен тысяч, получим везде положительные числа. Значит, знак $+$. И так на каждом промежутке. В рассматриваемом неравенстве нужно найти те интервалы, значения на которых больше либо равны 0 . Это интервалы $[-1,5; 0)$ и $[1,5; +\infty)$. Соответственно, для второго условия (неравенства), где нужно найти значения строго меньше нуля – интервалы $(-\infty; -1,5)$ и $(0; 1,5)$.

Рис. 14



Упростив функции и решив оба неравенства в условиях, получим:

$$y = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{при } x \in [1,5; 0) \cup [1,5; +\infty) \\ \frac{1,5}{x} & \text{при } x \in [-\infty; -1,5) \cup (0; 1,5) \end{cases}$$

3) $y = \frac{2}{3}x$ – линейная функция, прямой пропорциональности, график – восходящая прямая, т.к. $k > 0$, проходящая через начало координат, т.к. $b = 0$.
Найдём точки прямой:

x	0	3
y	0	2

$y = \frac{1,5}{x}$ – функция обратной пропорциональности, график – гипербола, расположенная в I и III четвертях, т.к. $k > 0$. Найдём точки гиперболы:

x	1,5	-1,5	1	-1	3	-3	0,5	-0,5
y	1	-1	1,5	-1,5	0,5	-0,5	3	-3

4) Теперь нужно построить график, разбитый на 4 части (см. рис. 14), не забыв про $x \neq 0$ в ОДЗ.

5) По графику (см. рис. 15) видно:

при $m > 1$ прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком;

при $m = 1$ прямая $y = m$ имеет 1 точку пересечения с графиком;

при $m \in [0; 1)$ прямая $y = m$ не имеет общих точек с графиком;

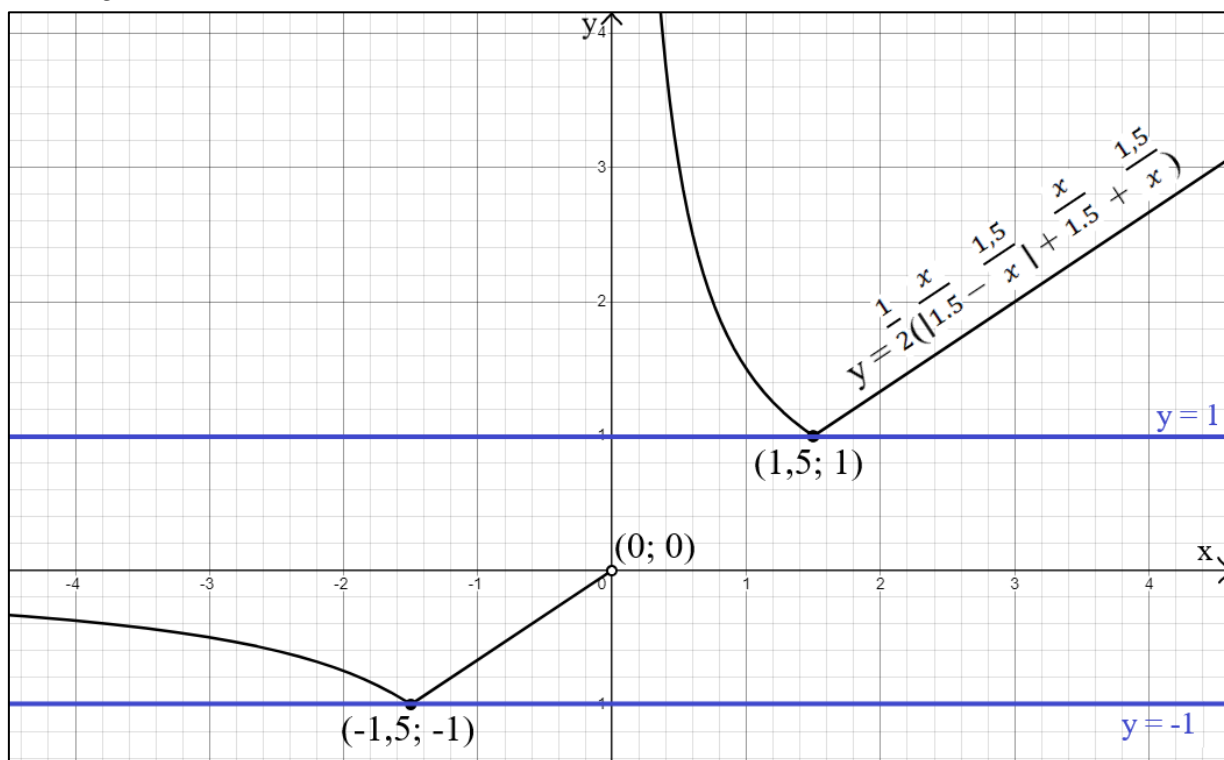
при $m \in (-1; 0)$ прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком;

при $m = -1$ прямая $y = m$ имеет 1 точку пересечения с графиком;

при $m < -1$ прямая $y = m$ не имеет точек пересечения с графиком.

6) Ответ: при $m = -1$ и $m = 1$.

Рис. 15



Раздел 9. Задания для самостоятельного решения

№11) Постройте график функции

$$y = |x| \cdot (x-1) - 5x$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

№12) Постройте график функции

$$y = x^2 + 14x - 3|x+8| + 48$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

№13) Постройте график функции

$$y = |x^2 + 5x + 6|$$

Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

№14) Постройте график функции

$$y = |x^2 + 5x + 4|$$

Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

№15) Постройте график функции

$$y = \frac{(0,5x^2 + x) \cdot |x|}{x + 2}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

№16) Постройте график функции

$$y = \frac{2,5|x| - 1}{|x| - 2,5x^2}$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

№17) Постройте график функции

$$y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{5,5} - \frac{5,5}{x} \right| + \frac{x}{5,5} + \frac{5,5}{x} \right)$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

№18)

Постройте график функции

$$y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{6} - \frac{6}{x} \right| + \frac{x}{6} + \frac{6}{x} \right)$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Частые ошибки при оформлении №22

- При построении параболы или гиперболы недостаточно указать две точки в таблице. Две точки можно указать у линейной функции (и функции прямой пропорциональности). Для иных функций нужно хотя бы 3 точки, а лучше 4-7.
- Если график не ограничен слева или справа, то он не должен заканчиваться на какой-то точке. «Оборвав» его в точке, Вы показываете, будто дальше графика нет. Поэтому рисуйте график в таких случаях как простую линию, на конце которой нет какой-либо точки.
- Функция вида $y = \frac{k}{x}$ с графиком гиперболы (без коэффициента b) не должна пересекать оси OX или OY . Она должна к ним приближаться, но не пересекать.
- Не забывайте про ОДЗ и выколотые точки. От них сильно зависит решение, построение графика и нахождение параметра. А за неправильное указание выколотой точки (или не указание её вообще) – ноль баллов за задание.
- Решение в целом должно быть математически грамотным. Слишком подробные пояснения не требуются, но желательно дать какую-то лаконичную характеристику, например, функций, чьи графики Вы строите.
- Конечно, график не может быть абсолютно точным и правильным. Но если он построен криво, то балла Вам не дадут. Поэтому стоит стараться рисовать график аккуратно, чтобы он реалистично выглядел. В том числе стоит подписывать «важные» точки ещё и для этого. Если вдруг кажется, что, например, вершина параболы смещена на половину клетки куда-то не туда, но Вы подпишите её координату, балл не снимут.
- На координатных осях важно указать единичный отрезок и направление осей.
- В качестве практики можно брать примеры с сайта ФИПИ (<https://oge.fipi.ru/bank/index.php?proj=DE0E276E497AB3784C3FC4CC20248DC0>), указав в «подборе заданий» раздел КЭС – функции и поставив галочку около «развёрнутый ответ». Задания с этого сайта максимально приближены к тому, что попадётся Вам на экзамене в этом году, т.е. нет устаревших заданий, заданий не типа №22 ОГЭ. Но на этом сайте Вы найдёте только задания, без ответов и решений. На других сайтах ответы могут быть, даже с решением (может, иногда не совсем полным), но задания устаревшие, прошлых лет.

Ответы для самоконтроля

№1) $m \in \{2\} \cup (3; 4)$

№2) $m \in \{0\} \cup [4; +\infty)$

№3) $m \in \{2\} \cup (3; 5)$

№4) $m \in (0; 2) \cup (6; +\infty)$

№5) $m \in \{0\} \cup [9; +\infty)$

№6) $k = -4; k = 4; k = 5$

№7) $k = -7,25; k = -5; k = 5$

№8) $k = 1,96$

№9) $m = 3; m = 3,5$

№10) $m = 5; m = 1,96$

№11) $m = -9; m = 4$

№12) $m = -0,25; m = 0$

№13) 4 точки

№14) 4 точки

№15) $m = -2$

№16) $k = -6,25; k = 0; k = 6,25$

№17) $m = -1; m = 1$

№18) $m = -1; m = 1$