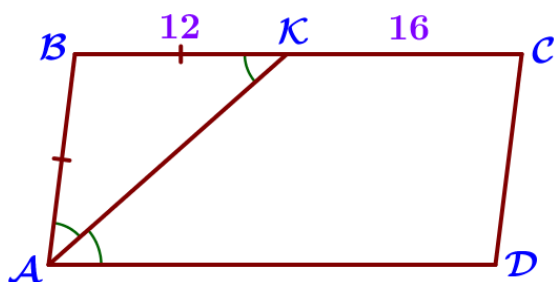


23. Геометрическая задача на вычисление

Блок 1. ФИПИ

Примеры решений

1. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр параллелограмма, если $BK=12$, $CK=16$.



Дано:

$ABCD$ – параллелограмм,
 AK – биссектриса, $AK \cap BC = K$,
 $BK=12$, $CK=16$.

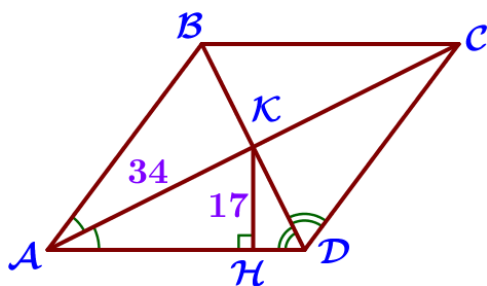
Найти: P_{ABCD} .

Решение:

1. Так как AK – биссектриса, то $\angle BAK = \angle DAK$.
2. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $AD \parallel BC$.
3. $AD \parallel BC$, AK – секущая, тогда $\angle BKA = \angle DAK$ по свойству накрест лежащих углов.
4. $\angle BAK = \angle DAK$ (п. 1), $\angle BKA = \angle DAK$ (п. 3), следовательно, $\angle BAK = \angle BKA$. Значит, $\triangle ABK$ – равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника, AK – основание, а $AB = BK = 12$.
5. $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(AB + BK + KC) = 2(12 + 12 + 16) = 80$.

Ответ: $P_{ABCD} = 80$.

2.1. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.



Дано:

$ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = K$, $AC = 68$,
 KH – расстояние от точки K до AD ,
 $KH = 17$.

Найти: углы ромба.

Решение:

1. Так как $ABCD$ – ромб и, следовательно, параллелограмм, то по свойствам параллелограмма: $AK = KC = AC : 2 = 68 : 2 = 34$ ($AC \cap BD = K$), $\angle C = \angle A$ и $\angle D = \angle B$.
2. Так как KH – расстояние от точки K до AD , то $KH \perp AD$, а $\angle ANK = 90^\circ$.
3. Рассмотрим $\triangle AKH$:
 $\angle ANK = 90^\circ$ (п. 2), тогда $\triangle AKH$ – прямоугольный; $KH = 17$ (по условию), $AK = 34$ (п.1), следовательно, $\sin \angle KAH = \frac{KH}{AK} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$, то есть $\angle KAH = 30^\circ$.

4. Так как $ABCD$ – ромб, то $AC \perp BD$, следовательно, $\angle AKD = 90^\circ$.

5. Рассмотрим $\triangle AKD$:

$\angle AKD = 90^\circ$ (п.4), $\angle KAD = 30^\circ$ (п.3), тогда по теореме о сумме углов треугольника найдем $\angle ADK$:

$$\angle AKD + \angle ADK + \angle KAD = 180^\circ,$$

$$\angle ADK = 180^\circ - \angle AKD - \angle KAD,$$

$$\angle ADK = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ,$$

$$\angle ADK = 60^\circ.$$

6. $ABCD$ – ромб, AC и BD – диагонали, тогда по свойству диагоналей ромба:

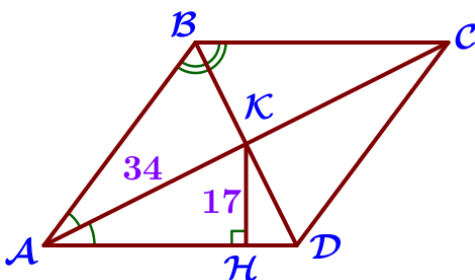
AC – биссектриса угла $\angle BAD$, следовательно, $\angle BAD = 2\angle KAH = 60^\circ$; а

BD – биссектриса угла $\angle ADC$, следовательно, $\angle ADC = 2\angle ADK = 120^\circ$.

7. $\angle C = \angle A = 60^\circ$, $\angle D = \angle B = 120^\circ$.

Ответ: 60° ; 120° ; 60° ; 120° .

2.2. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.



Дано:

$ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = K$, $AC = 68$,
 $KH \perp AD$, $H \in AD$, $KH = 17$.

Найти: углы ромба.

Решение:

1. Так как $ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = K$, то по свойствам ромба:
 $AK = KC = AC : 2 = 68 : 2 = 34$, $AD \parallel BC$, $\angle C = \angle A$ и $\angle D = \angle B$.

2. Рассмотрим $\triangle AKH$:

$\angle H = 90^\circ$ (т.к. $KH \perp AD$), тогда $\triangle AKH$ – прямоугольный; катет $KH = 17$ (по условию), гипотенуза $AK = 34$ (п.1), $KH = \frac{1}{2}AK$, следовательно, $\angle KAH = 30^\circ$.

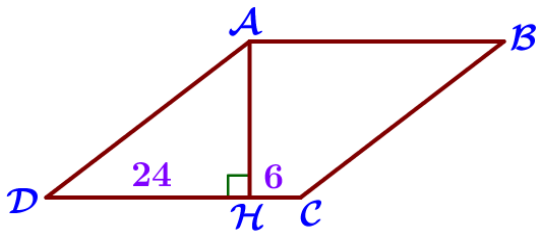
3. Так как $ABCD$ – ромб и AC – диагональ, то $\angle BAD = 2\angle KAH = 60^\circ$ по свойству диагоналей ромба.

4. Так как $AD \parallel BC$, AB – секущая, то $\angle BAD$ и $\angle ABC$ – односторонние и по свойству односторонних углов $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, тогда
 $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

5. $\angle C = \angle A = 60^\circ$, $\angle D = \angle B = 120^\circ$.

Ответ: 60° ; 120° ; 60° ; 120° .

3. Высота АН ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=24 и CH=6. Найдите высоту ромба.



Дано:
 ABCD – ромб, АН – высота,
 DH=24, CH=6.

Найти: АН.

Решение:

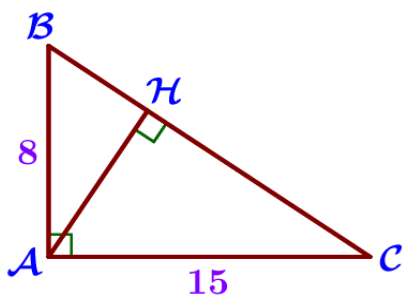
1. Так как ABCD – ромб, то все его стороны равны, тогда $AD=DC=DH+HC=24+6=30$.

2. Рассмотрим $\triangle ADH$: $\angle H=90^\circ$ (т.к. АН – высота), следовательно, $\triangle ADH$ – прямоугольный; $DH=24$ (по условию), $AD=30$ (п.1), АН найдем по т. Пифагора:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AH^2 + DH^2, & AH^2 &= 30^2 - 24^2, \\ AH^2 &= AD^2 - DH^2, & AH^2 &= 324, \\ & & AH &= 18. \end{aligned}$$

Ответ: АН=18.

4.1. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.



Дано:
 $\triangle ABC$, $\angle A=90^\circ$, $AC=15$, $AB=8$,
 АН – высота.

Найти: АН.

Решение:

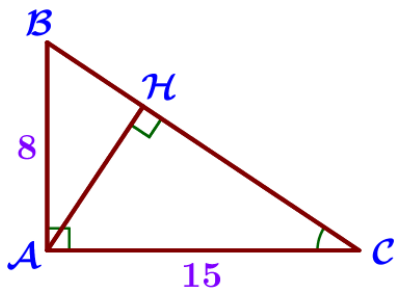
1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle A=90^\circ$, $AC=15$, $AB=8$, тогда по теореме Пифагора найдем гипотенузу BC:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2, \\ BC^2 &= 8^2 + 15^2, \\ BC^2 &= 289, \\ BC &= 17. \end{aligned}$$

2. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC$ и $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC$, тогда $\frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}AH \cdot BC$, то есть $AB \cdot AC = AH \cdot BC$, а $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17} = 7 \frac{1}{17}$.

Ответ: АН = $7 \frac{1}{17}$.

4.2. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle A = 90^\circ$, $AC = 15$,
 $AB = 8$, AH – высота.

Найти: AH .

Решение:

1. По условию $\triangle ABC$ – прямоугольный, $AC = 15$, $AB = 8$, тогда по теореме Пифагора найдем гипотенузу BC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

$$BC^2 = 8^2 + 15^2,$$

$$BC^2 = 289,$$

$$BC = 17.$$

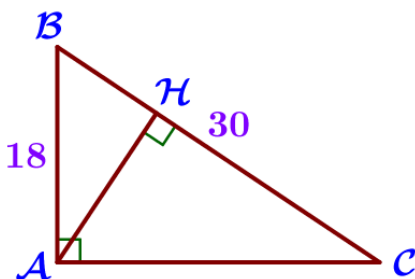
2. $\angle AHC = 90^\circ$ (т. к. AH – высота), $\angle BAC = 90^\circ$ (по условию), то есть $\angle AHC = \angle BAC$.

3. Рассмотрим треугольники ABC и HAC :

$\angle AHC = \angle BAC$ (п. 2), $\angle C$ – общий, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle HAC$ по двум углам, тогда $\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC}$, откуда $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17} = 7 \frac{1}{17}$.

Ответ: $AH = 7 \frac{1}{17}$.

5.1. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 18 и 30. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 18$, $BC = 30$, AH – высота.

Найти: AH .

Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle A = 90^\circ$, $AB = 18$, $BC = 30$, тогда по теореме Пифагора найдем катет AC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

$$AC^2 = 30^2 - 18^2,$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2,$$

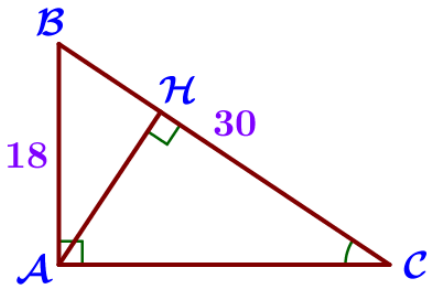
$$AC^2 = 576,$$

$$AC = 24.$$

2. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$, следовательно, $AB \cdot AC = AH \cdot BC$, откуда $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{18 \cdot 24}{30} = 14,4$.

Ответ: $AH = 14,4$.

5.2. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 18 и 30. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 18$, $BC = 30$, AH – высота.

Найти: AH .

Решение:

1. По условию $\triangle ABC$ – прямоугольный, $AB = 18$, $BC = 30$, тогда по теореме Пифагора найдем катет AC :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2, & AC^2 &= 30^2 - 18^2, \\ AC^2 &= BC^2 - AB^2, & AC^2 &= 576, \\ & & AC &= 24. \end{aligned}$$

2. Рассмотрим $\triangle AHC$: $\angle AHC = 90^\circ$ (т. к. AH – высота), тогда $\sin \angle C = \frac{AH}{AC}$.

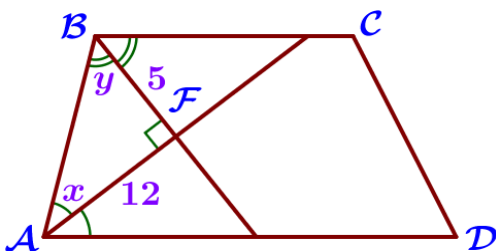
3. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle A = 90^\circ$ (по условию), тогда $\sin \angle C = \frac{AB}{BC}$.

4. $\sin \angle C = \frac{AH}{AC}$ и $\sin \angle C = \frac{AB}{BC}$, следовательно $\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC}$, то есть

$$AH = \frac{AC \cdot AB}{BC} = \frac{24 \cdot 18}{30} = 14,4.$$

Ответ: $AH = 14,4$.

6.1. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 12$, $BF = 5$.



Дано:

$ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$, AF – биссектриса $\angle A$, BF – биссектриса $\angle B$, $AF = 12$, $BF = 5$.

Найти: AB .

Решение:

1. Пусть $x = \angle BAF$, $y = \angle ABF$.

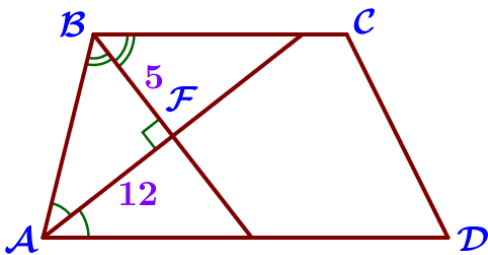
2. Так как AF – биссектриса $\angle A$ и $x = \angle BAF$, то $\angle BAD = 2x$.

3. Так как BF – биссектриса $\angle B$ и $y = \angle ABF$, то $\angle ABC = 2y$.
4. $AD \parallel BC$, AB – секущая, тогда $\angle BAD$ и $\angle ABC$ – односторонние и $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, то есть $2x + 2y = 180^\circ$, а $x + y = 90^\circ$.
5. Рассмотрим $\triangle ABF$: по теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle F = 180^\circ$, то есть $\angle F = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (x + y) = 90^\circ$, следовательно, $\triangle ABF$ – прямоугольный, AB можно найти по т. Пифагора:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AF^2 + BF^2, & AB^2 &= 169, \\ AB^2 &= 12^2 + 5^2, & AB &= 13. \end{aligned}$$

Ответ: $AB = 13$.

6.2. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 12$, $BF = 5$.



Дано:

$ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$, AF – биссектриса $\angle A$, BF – биссектриса $\angle B$, $AF = 12$, $BF = 5$.

Найти: AB .

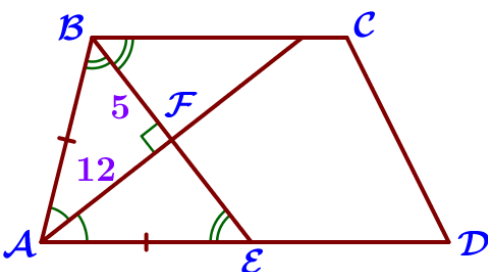
Решение:

1. Так как AF – биссектриса $\angle A$, то $\angle BAD = 2\angle BAF$.
2. Так как BF – биссектриса $\angle B$, то $\angle ABC = 2\angle ABF$.
3. $AD \parallel BC$, AB – секущая, тогда $\angle BAD$ и $\angle ABC$ – односторонние и $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, следовательно $2\angle BAF + 2\angle ABF = 180^\circ$, а $\angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$.
4. Рассмотрим $\triangle ABF$: $\angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$, следовательно, $\triangle ABF$ – прямоугольный по признаку прямоугольного треугольника, тогда AB можно найти по т. Пифагора:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AF^2 + BF^2, & AB^2 &= 169, \\ AB^2 &= 12^2 + 5^2, & AB &= 13. \end{aligned}$$

Ответ: $AB = 13$.

6.3. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 12$, $BF = 5$.



Дано:

$ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$, AF – биссектриса $\angle A$, BF – биссектриса $\angle B$, $AF = 12$, $BF = 5$.

Найти: AB .

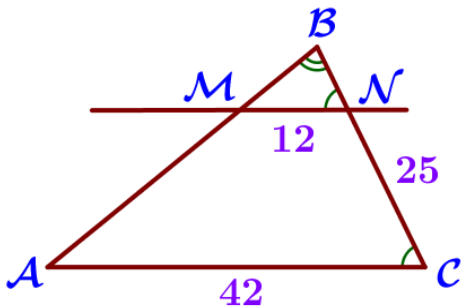
Решение:

1. Пусть $BF \cap AD = E$.
2. $AD \parallel BC$, BE – секущая, тогда $\angle AEB = \angle CBE$ по свойству накрест лежащих углов.
3. Так как BF – биссектриса $\angle B$, то $\angle AEB = \angle CBE$.
4. $\angle AEB = \angle CBE$, $\angle ABE = \angle CBE$, следовательно, $\angle AEB = \angle ABE$, а $\triangle ABE$ – равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника, то есть $AB = AE$, BE – основание.
5. $\triangle ABE$ – равнобедренный AF – биссектриса $\angle A$, проведенная к основанию BE , следовательно, AF – высота и $AF \perp BE$.
6. Рассмотрим $\triangle ABF$:
 $\angle F = 90^\circ$ ($AF \perp BE$), следовательно, $\triangle ABF$ – прямоугольный и AB можно найти по т. Пифагора:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AF^2 + BF^2, & AB^2 &= 169, \\ AB^2 &= 12^2 + 5^2, & AB &= 13. \end{aligned}$$

Ответ: $AB = 13$.

7.1. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$.



Дано:

$\triangle ABC$, $MN \parallel AC$, $MN \cap AB = M$, $MN \cap BC = N$,
 $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$.

Найти: BN .

Решение:

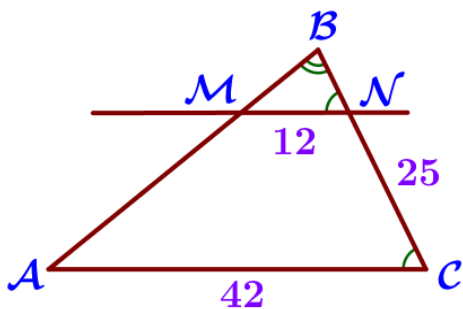
1. По условию $MN \parallel AC$, BC – секущая, тогда $\angle BCA = \angle BNM$ по свойству соответственных углов.
2. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$: $\angle BNM = \angle BCA$ (п. 1), $\angle B$ – общий, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ по двум углам, тогда $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$.
3. Пусть $BN = x$, по условию: $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$, тогда равенство $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$ принимает вид $\frac{12}{42} = \frac{x}{x+25}$, найдем x :

$$\begin{aligned} 42x &= 12(x+25), & | :6 & & 7x - 2x &= 50, \\ 7x &= 2(x+25), & & & 5x &= 50, \\ 7x &= 2x+50, & & & x &= 10. \end{aligned}$$

4. $BN = x = 10$.

Ответ: $BN = 10$.

7.2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=12, AC=42, NC=25.



Дано:

$\triangle ABC$, $MN \parallel AC$, $MN \cap AB = M$, $MN \cap BC = N$,
 $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$.

Найти: BN.

Решение:

1. По условию $MN \parallel AC$, BC – секущая, тогда $\angle BCA = \angle BNM$ по свойству соответственных углов.

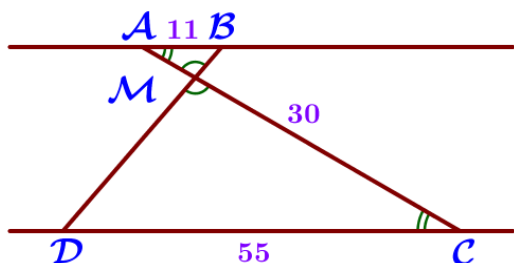
2. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$: $\angle BNM = \angle BCA$ (п. 1), $\angle B$ – общий, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ по двум углам, тогда $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$.

3. $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$, $BC = BN + NC = BN + 25$, тогда равенство $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$ принимает вид $\frac{12}{42} = \frac{BN}{BN + 25}$, найдем BN:

$$\begin{aligned} 42BN &= 12(BN + 25), & \quad | :6 & & 7BN - 2BN &= 50, \\ 7BN &= 2(BN + 25), & & & 5BN &= 50, \\ 7BN &= 2BN + 50, & & & BN &= 10. \end{aligned}$$

Ответ: BN = 10.

8.1. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=11, CD=55, AC=30.



Дано:

$AB \parallel DC$, $AC \cap BD = M$,
 $AB = 11$, $CD = 55$, $AC = 30$.

Найти: MC.

Решение:

1. По условию $AB \parallel DC$, AC – секущая, тогда $\angle BAC = \angle DCA$ по свойству накрест лежащих углов.

2. Рассмотрим треугольники ABM и CDM:

$\angle BAC = \angle DCA$ (п. 1), $\angle AMB = \angle CMD$ (свойство вертикальных углов), следовательно, $\triangle ABM \sim \triangle CDM$ по двум углам, тогда $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{DC} = \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$.

3. Пусть $AM = x$, тогда $MC = 5x$, так как $AM:MC = 1:5$.

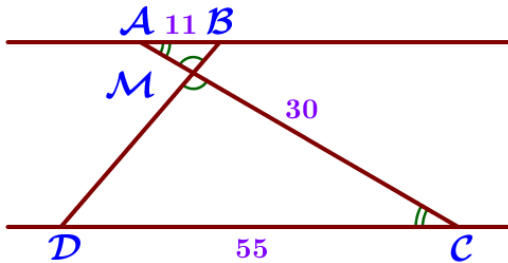
4. $AM + MC = AC = 30$, составим и решим уравнение:

$$x + 5x = 30, \quad 6x = 30, \quad x = 5.$$

5. $MC = 5x = 5 \cdot 5 = 25$.

Ответ: $MC = 25$.

8.2. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 11$, $CD = 55$, $AC = 30$.



Дано:

$AB \parallel DC$, $AC \cap BD = M$,
 $AB = 11$, $CD = 55$, $AC = 30$.

Найти: MC .

Решение:

1. Рассмотрим треугольники ABM и CDM :

$\angle BAC = \angle DCA$ (накрест лежащие углы при $AB \parallel DC$ и секущей AC),

$\angle AMB = \angle CMD$ (вертикальные углы), следовательно, $\triangle ABM \sim \triangle CDM$ по

двум углам, тогда $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{DC}$.

2. Пусть $MC = x$, тогда $AM = AC - MC = 30 - x$, следовательно, равенство

$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{DC}$ принимает вид $\frac{30 - x}{x} = \frac{11}{55}$, найдем x :

$$11x = 55(30 - x), \quad |:11 \quad x + 5x = 150,$$

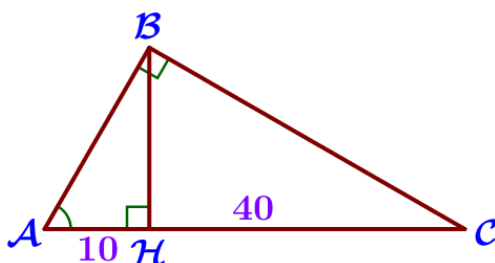
$$x = 5(30 - x), \quad 6x = 150,$$

$$x = 150 - 5x, \quad x = 25.$$

3. $MC = x = 25$.

Ответ: $MC = 25$.

9.1. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH = 10$, $AC = 40$.



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, BH – высота, $AH = 10$,
 $AC = 40$.

Найти: AB .

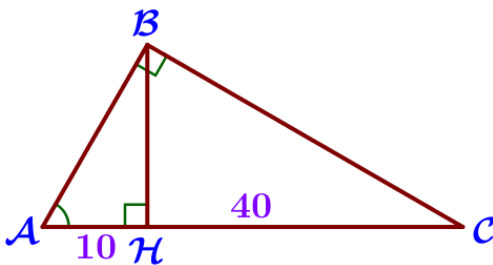
Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle B = 90^\circ$ (по условию), тогда $\cos \angle A = \frac{AB}{AC}$.
2. Рассмотрим $\triangle AHB$: $\angle AHB = 90^\circ$ (т. к. BH – высота), тогда $\cos \angle A = \frac{AH}{AB}$.
3. $\cos \angle A = \frac{AB}{AC}$ (п. 1), $\cos \angle A = \frac{AH}{AB}$ (п. 2), следовательно,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}, \quad AB^2 = 40 \cdot 10,$$
$$AB^2 = AC \cdot AH, \quad AB = 20.$$

Ответ: $AB = 20$.

9.2. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH = 10$, $AC = 40$.



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, BH – высота, $AH = 10$,
 $AC = 40$.

Найти: AB .

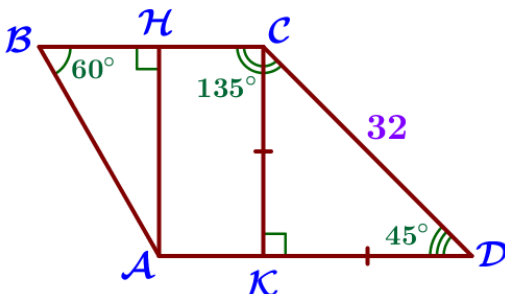
Решение:

1. Так как BH – высота, то $\angle AHB = 90^\circ$.
2. Рассмотрим треугольники ABH и ACB :
 $\angle AHB = \angle ABC$ ($\angle AHB = 90^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$), $\angle A$ – общий, следовательно,
 $\triangle ABH \sim \triangle ACB$ по двум углам, тогда $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$, следовательно,

$$AB^2 = AC \cdot AH, \quad AB^2 = 400,$$
$$AB^2 = 40 \cdot 10, \quad AB = 20.$$

Ответ: $AB = 20$.

10.1. Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135° , а $CD = 32$.



Дано:

$ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 60^\circ$,
 $\angle BCD = 135^\circ$, $CD = 32$.

Найти: AB .

Решение:

1. Проведем высоты АН и СК трапеции ABCD ($СК \perp AD, СК \perp BC, АН \perp BC, АН = СК$ – расстояние между $AD \parallel BC$).

2. По условию $AD \parallel BC$, CD – секущая, тогда $\angle BCD$ и $\angle ADC$ – односторонние и $\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$, откуда $\angle ADC = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

3. $\angle BCD = 135^\circ$ (по условию), $\angle BCK = 90^\circ$ (СК – высота, $СК \perp BC$), тогда $\angle KCD = \angle BCD - \angle BCK = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.

4. Рассмотрим $\triangle CKD$:

$\angle K = 90^\circ$ (т.к. СК – высота, $СК \perp AD$), следовательно, $\triangle CKD$ – прямоугольный; $\angle D = 45^\circ$ (п. 2), $\angle C = 45^\circ$ (п. 3), т.е. $\angle D = \angle C$, тогда $\triangle CKD$ – равнобедренный по определению; зная, что $CD = 32$, найдем катет СК по т. Пифагора:

$$CK^2 + KD^2 = CD^2, \quad CK^2 + CK^2 = 32^2, \quad 2CK^2 = 32^2, \quad CK^2 = 32 \cdot 16, \quad CK = 16\sqrt{2}.$$

5. Рассмотрим $\triangle ABH$:

$\angle H = 90^\circ$ (т.к. АН – высота, $АН \perp BC$), следовательно, $\triangle ABH$ – прямоугольный; $\angle B = 60^\circ$ (по условию), найдем $\angle A$ по теореме о сумме углов треугольника:

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle H &= 180^\circ, & \angle A &= 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ, \\ \angle A &= 180^\circ - \angle B - \angle H, & \angle A &= 30^\circ; \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме о катете, лежащем против угла в 30°

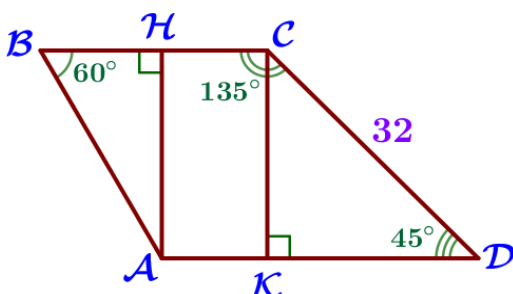
$BH = \frac{1}{2}AB$; зная, что $АН = СК = 16\sqrt{2}$ (п. 1 и 4), найдем гипотенузу АВ по т.

Пифагора:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BH^2 + AH^2, & AB^2 &= \frac{16^2 \cdot 2 \cdot 4}{3}, \\ AB^2 &= \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + AH^2, & AB &= \frac{16 \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{3}}, \\ AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 &= (16\sqrt{2})^2, & AB &= \frac{32 \cdot \sqrt{6}}{3}. \\ \frac{3}{4}AB^2 &= 16^2 \cdot 2, \end{aligned}$$

Ответ: $AB = \frac{32\sqrt{6}}{3}$.

10.2. Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135° , а $CD = 32$.



Дано:

ABCD – трапеция, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCD = 135^\circ$, $CD = 32$.

Найти: АВ.

Решение:

1. По условию $AD \parallel BC$, CD – секущая, тогда $\angle BCD$ и $\angle ADC$ – односторонние и $\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$, откуда $\angle ADC = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

2. Проведем высоты AH и CK трапеции $ABCD$ ($CK \perp AD$, $AH \perp BC$, $AH = CK$ – расстояние между $AD \parallel BC$).

3. Рассмотрим $\triangle CKD$:

$\angle K = 90^\circ$ (т.к. CK – высота, $CK \perp AD$), $\angle D = 45^\circ$ (п. 1), $CD = 32$ (по условию), тогда $\frac{CK}{CD} = \sin \angle D$, то есть

$$CK = CD \cdot \sin \angle D = 32 \cdot \sin 45^\circ = 32 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}.$$

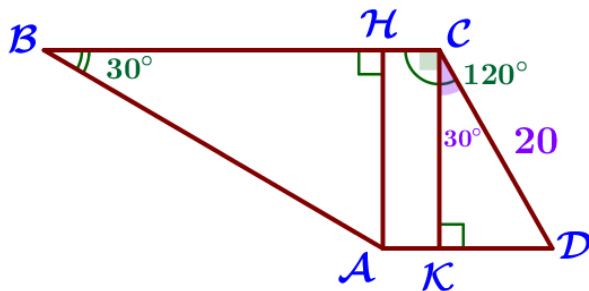
3. Рассмотрим $\triangle ABH$:

$\angle H = 90^\circ$ (т.к. AH – высота, $AH \perp BC$), $\angle B = 60^\circ$ (по условию), $AH = CK = 16\sqrt{2}$ (п. 2-3), тогда $\frac{AH}{AB} = \sin \angle B$, то есть

$$AB = AH : \sin \angle B = 16\sqrt{2} : \sin 60^\circ = 16\sqrt{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $AB = \frac{32\sqrt{6}}{3}$.

11. Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 120° , а $CD = 20$.



Дано:

$ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, $CD = 20$.

Найти: AB .

Решение:

1. Проведем высоты AH и CK трапеции $ABCD$ ($CK \perp AD$, $CK \perp BC$, $AH \perp BC$, $AH = CK$ – расстояние между $AD \parallel BC$).

2. $\angle BCD = 120^\circ$ (по условию), $\angle BCK = 90^\circ$ (CK – высота, $CK \perp BC$), тогда $\angle KCD = \angle BCD - \angle BCK = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

3. Рассмотрим $\triangle KCD$:

$\angle K = 90^\circ$ (CK – высота, $CK \perp AD$), тогда $\triangle KCD$ – прямоугольный; гипотенуза $CD = 20$ (по условию), $\angle KCD = 30^\circ$ (п. 2), следовательно, тогда по теореме о катете, лежащем против угла в 30° , катет $KD = CD : 2 = 20 : 2 = 10$; по т. Пифагора найдем катет CK :

$$CK^2 + KD^2 = CD^2, CK^2 = CD^2 - KD^2, CK^2 = 20^2 - 10^2, CK^2 = 300, CK = 10\sqrt{3}.$$

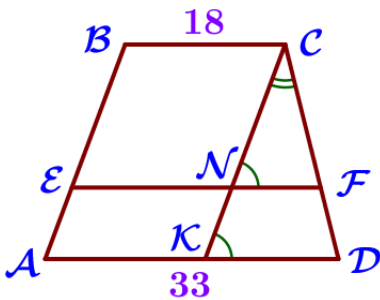
4. Рассмотрим $\triangle ABH$:

$\angle H = 90^\circ$ (AH – высота, $AH \perp BC$), т.е. $\triangle ABH$ – прямоугольный; $\angle B = 30^\circ$ (по условию), катет $AH = CK = 10\sqrt{3}$ (п. 1 и 3), тогда по теореме о катете, лежащем против угла в 30° , $AH = \frac{1}{2}AB$, следовательно, гипотенуза

$$AB = AH \cdot 2 = 10\sqrt{3} \cdot 2 = 20\sqrt{3}.$$

Ответ: $AB = 20\sqrt{3}$.

12.1. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 33$, $BC = 18$, $CF : DF = 2 : 1$.



Дано:

$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$,
 $EF \cap AB = E$, $EF \cap CD = F$, $AD = 33$, $BC = 18$,
 $CF : DF = 2 : 1$.

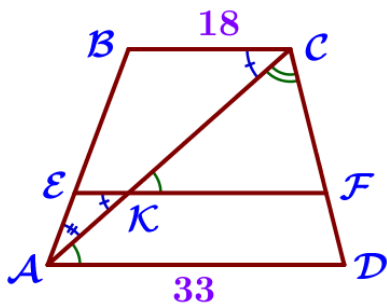
Найти: EF .

Решение:

1. Проведем отрезок CK так, что $CK \parallel AB$, $CK \cap AD = K$, $CK \cap EF = N$.
2. $BC \parallel AD$, $CK \parallel AB$, следовательно, $ABCK$ – параллелограмм (по определению) и тогда по свойству параллелограмма $AK = BC = 18$.
3. $EF \parallel BC$, $CK \parallel AB$, следовательно, $BCNE$ – параллелограмм (по определению) и тогда по свойству параллелограмма $EN = BC = 18$.
4. По условию $EF \parallel AD$, KN – секущая, тогда $\angle FNC = \angle DKC$ по свойству соответственных углов.
5. $AD = 33$, $AK = 18$, следовательно, $KD = AD - AK = 33 - 18 = 15$.
6. $CF : DF = 2 : 1$, следовательно, $CF : CD = 2 : 3$.
7. Рассмотрим $\triangle NCF$ и $\triangle KCD$: $\angle FNC = \angle DKC$ (п. 4), $\angle C$ – общий, следовательно, $\triangle NCF \sim \triangle KCD$ по двум углам, тогда $\frac{NF}{KD} = \frac{CF}{CD}$.
8. $KD = 15$ (п. 5), $CF : CD = 2 : 3$ (п. 6), $\frac{NF}{KD} = \frac{CF}{CD}$ (п. 7), тогда $\frac{NF}{15} = \frac{2}{3}$, а $NF = \frac{15 \cdot 2}{3} = 10$.
9. $EF = EN + NF = 18 + 10 = 28$.

Ответ: $EF = 28$.

12.2. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD=33$, $BC=18$, $CF:DF=2:1$.



Дано:

ABCD – трапеция, $BC \parallel AD$, $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$,
 $EF \cap AB = E$, $EF \cap CD = F$, $AD = 33$, $BC = 18$,
 $CF:DF = 2:1$.

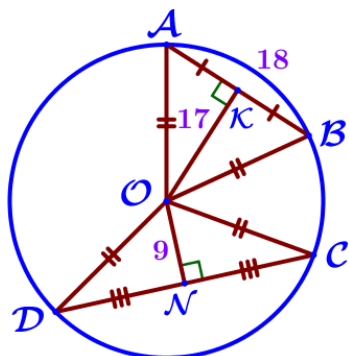
Найти: EF.

Решение:

1. Проведем отрезок AC, $AC \cap EF = K$.
2. По условию $EF \parallel AD$, AK – секущая, тогда $\angle FKC = \angle DAC$ по свойству соответственных углов.
3. $CF:DF = 2:1$, следовательно, $CF:CD = 2:3$.
4. Рассмотрим $\triangle KCF$ и $\triangle ACD$: $\angle FKC = \angle DAC$ (п. 2), $\angle C$ – общий, следовательно, $\triangle KCF \sim \triangle ACD$ по двум углам, тогда $\frac{CK}{AC} = \frac{KF}{AD} = \frac{CF}{CD}$.
5. $AD = 33$ (по условию), $CF:CD = 2:3$ (п. 3), $\frac{KF}{AD} = \frac{CF}{CD}$ (п. 4), тогда $\frac{KF}{33} = \frac{2}{3}$,
а $KF = \frac{33 \cdot 2}{3} = 22$.
6. $\frac{CK}{AC} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{3}$, следовательно, $AK:AC = 1:3$.
7. По условию $EF \parallel BC$, AK – секущая, тогда $\angle AKE = \angle ACB$ по свойству соответственных углов.
8. Рассмотрим $\triangle AKE$ и $\triangle ABC$: $\angle AKE = \angle ACB$ (п. 7), $\angle A$ – общий, следовательно, $\triangle AKE \sim \triangle ABC$ по двум углам, тогда $\frac{EK}{BC} = \frac{AK}{AC}$.
9. $BC = 18$ (по условию), $AK:AC = 1:3$ (п. 6), $\frac{EK}{BC} = \frac{AK}{AC}$ (п. 8), тогда $\frac{EK}{18} = \frac{1}{3}$, а
 $EK = \frac{18 \cdot 1}{3} = 6$.
10. $EF = EK + KF = 6 + 22 = 28$.

Ответ: EF = 28.

13. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD , если $AB=18$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 17 и 9.



Дано:

O – центр окружности, AB и CD – хорды, $AB=18$, расстояние от O до AB равно 17, расстояние от O до CD равно 9.

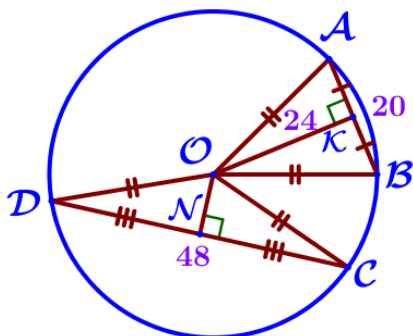
Найти: CD .

Решение:

1. Пусть OK – расстояние от O до AB , то есть $OK \cap AB = K$, $OK \perp AB$, $OK=17$.
2. Пусть ON – расстояние от O до CD , то есть $ON \cap CD = N$, $ON \perp CD$, $ON=9$.
3. Проведем радиусы OA , OB , OC и OD .
4. Рассмотрим $\triangle AOB$: $OA=OB$ (радиусы), тогда $\triangle AOB$ – равнобедренный по определению, а OK – высота ($OK \perp AB$) в р/б треугольнике, проведённая к основанию, следовательно, OK – медиана, поэтому K – середина AB , $AK = AB:2 = 18:2 = 9$.
5. Рассмотрим $\triangle AOK$ и $\triangle OCN$: $\angle AKO = 90^\circ$ ($OK \perp AB$), то есть $\triangle AOK$ – прямоугольный, $\angle ONC = 90^\circ$ ($ON \perp CD$), то есть и $\triangle OCN$ – прямоугольный; $AO=OC$ (радиусы), $AK=ON$ ($AK=9$, $ON=9$), тогда $\triangle AOK = \triangle OCN$ по гипотенузе и катету, следовательно, $CN=OK=17$.
6. Рассмотрим $\triangle COD$: $OC=OD$ (радиусы), тогда $\triangle COD$ – равнобедренный по определению, а ON – высота ($ON \perp CD$) в р/б треугольнике, проведённая к основанию, следовательно, ON – медиана, поэтому N – середина CD , $CD=CN \cdot 2 = 17 \cdot 2 = 34$.

Ответ: $CD=34$.

14. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB=20$, $CD=48$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 24.



Дано:

O – центр окружности, AB и CD – хорды, $AB=20$, $CD=48$, расстояние от O до AB равно 24.

Найти: расстояние от O до CD .

Решение:

1. Пусть OK – расстояние от O до AB , то есть $OK \cap AB = K$, $OK \perp AB$, $OK = 24$.
2. Пусть ON – расстояние от O до CD , то есть $ON \cap CD = N$, $ON \perp CD$.
3. Проведем радиусы OA , OB , OC и OD .
4. Рассмотрим $\triangle AOB$: $OA = OB$ (радиусы), тогда $\triangle AOB$ – равнобедренный по определению, а OK – высота ($OK \perp AB$) в р/б треугольнике, проведённая к основанию, следовательно, OK – медиана, поэтому K – середина AB , $AK = AB:2 = 20:2 = 10$.
5. Рассмотрим $\triangle AOK$: $OK = 24$, $AK = 10$; $\angle AKO = 90^\circ$ ($OK \perp AB$), следовательно, $\triangle AOK$ – прямоугольный и OA можно найти по т. Пифагора:

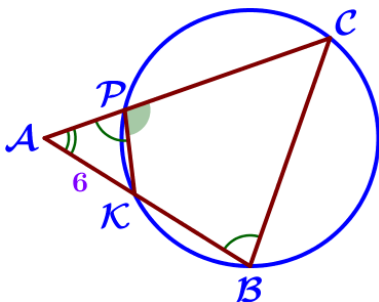
$$\begin{aligned} OA^2 &= AK^2 + OK^2, & OA^2 &= 676, \\ OA^2 &= 10^2 + 24^2, & OA &= 26. \end{aligned}$$

6. Рассмотрим $\triangle COD$: $OC = OD$ (радиусы), тогда $\triangle COD$ – равнобедренный по определению, а ON – высота ($ON \perp CD$) в р/б треугольнике, проведённая к основанию, следовательно, ON – медиана, поэтому N – середина CD , $CN = CD:2 = 48:2 = 24$.
7. Рассмотрим $\triangle CON$: $OC = OA = 26$ (радиусы), $CN = 24$; $\angle ONC = 90^\circ$ так как $ON \perp CD$, следовательно, $\triangle CON$ – прямоугольный и ON можно найти по т. Пифагора:

$$\begin{aligned} OC^2 &= ON^2 + NC^2, & ON^2 &= 26^2 - 24^2, \\ ON^2 &= OC^2 - NC^2, & ON^2 &= 100, \\ & & ON &= 10. \end{aligned}$$

Ответ: расстояние от O до CD равно 10.

15. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AK = 6$, а сторона AC в 1,2 раза больше стороны BC .



Дано:

$\triangle ABC$, окружность проходит через вершины B и C и пересекает AB в точке K , AC – в точке P , $AK = 6$, $AC = 1,2BC$.

Найти: KP .

Решение:

1. Четырёхугольник $BCPK$ вписан в окружность, поэтому по свойству вписанного четырёхугольника $\angle CBK + \angle CPK = 180^\circ$, откуда $\angle CBK = 180^\circ - \angle CPK$.
2. $\angle KPA$ и $\angle CPK$ – смежные, поэтому $\angle KPA + \angle CPK = 180^\circ$, тогда $\angle KPA = 180^\circ - \angle CPK$.

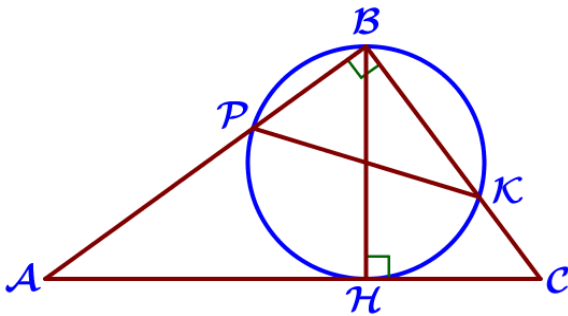
3. $\angle CBK = 180^\circ - \angle CPK$ (п.1), $\angle KPA = 180^\circ - \angle CPK$ (п.2), следовательно, $\angle CBK = \angle KPA$.

4. Рассмотрим треугольники ABC и APK:

$\angle CBA = \angle KPA$ (п. 3), $\angle A$ – общий, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle APK$ по двум углам, тогда $\frac{AC}{AK} = \frac{CB}{KP}$, откуда $KP = \frac{AK \cdot BC}{AC} = \frac{6 \cdot BC}{1,2BC} = \frac{60}{12} = 5$.

Ответ: $KP = 5$.

16. Точка Н является основанием высоты ВН, проведённой из вершины прямого угла В прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром ВН пересекает стороны АВ и СВ в точках Р и К соответственно. Найдите ВН, если $PK = 8$.



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle B = 90^\circ$,
 ВН – высота, окружность с диаметром
 ВН пересекает АВ в точке Р,
 ВС – в точке К, $PK = 8$.

Найти: ВН.

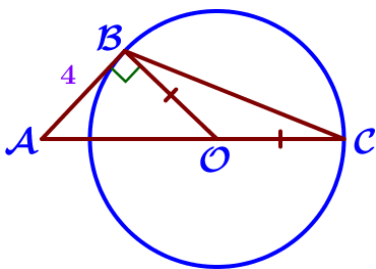
Решение:

1. $\angle B$ вписан в окружность и опирается на дугу РНК, следовательно, по теореме о вписанном угле $\angle B = \frac{1}{2} \cup РНК$, $\cup РНК = \angle B \cdot 2 = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ$, то есть $\cup РНК$ – полуокружность, РК – диаметр.

2. ВН и РК – диаметры одной окружности, значит $ВН = РК = 8$.

Ответ: $ВН = 8$.

17. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой АВ в точке В. Найдите AC, если диаметр окружности равен 8,4, а $AB = 4$.



Дано:

$\triangle ABC$, O – центр окружности, $O \in AC$, окружность проходит через точку C и касается АВ в точке В, диаметр окружности равен 8,4, $AB = 4$.

Найти: AC.

Решение:

1. Проведем радиус OB.

2. Диаметр окружности равен 8,4, OB и OC – радиусы, следовательно, $OB = OC = 8,4 : 2 = 4,2$.

3. АВ – касательная, ОВ – радиус, В – точка касания, тогда по свойству касательной $OB \perp AB$.

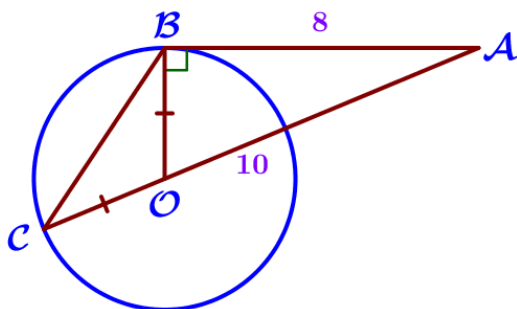
4. Рассмотрим $\triangle ABO$: $\angle ABO = 90^\circ$ ($OB \perp AB$), следовательно, $\triangle ABO$ – прямоугольный; $AB=4$ (по условию), $OB=4,2$ (п.2), найдем AO по т. Пифагора:

$$\begin{aligned} AO^2 &= AB^2 + OB^2, & AO^2 &= 33,64, \\ AO^2 &= 4^2 + 4,2^2, & AO &= 5,8. \end{aligned}$$

5. $AC = AO + OC = 5,8 + 4,2 = 10$.

Ответ: $AC = 10$.

18.1. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите диаметр окружности, если $AB=8$, $AC=10$.



Дано:

$\triangle ABC$, O – центр окружности, $O \in AC$, окружность проходит через точку C и касается AB в точке B , $AB=8$, $AC=10$.

Найти: диаметр окружности.

Решение:

1. Проведем радиус OB .

2. OB и OC – радиусы, следовательно, $OC = OB$.

3. $AC = AO + OC$, следовательно, $AO = AC - OC = 10 - OB$.

4. AB – касательная, OB – радиус, B – точка касания, тогда по свойству касательной $OB \perp AB$.

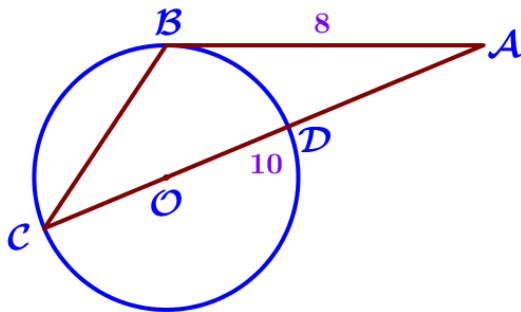
5. Рассмотрим $\triangle ABO$: $\angle ABO = 90^\circ$ ($OB \perp AB$), следовательно, $\triangle ABO$ – прямоугольный; $AB=8$ (по усл.), $AO=10 - OB$ (п.3), найдем OB по т. Пифагора:

$$\begin{aligned} OB^2 + AB^2 &= AO^2, \\ OB^2 + 8^2 &= (10 - OB)^2, \\ OB^2 + 8^2 &= 100 - 20 \cdot OB + OB^2, \\ OB^2 - OB^2 + 20 \cdot OB &= 100 - 64, \\ 20 \cdot OB &= 36, \\ OB &= \frac{36}{20}, \quad OB = 1,8. \end{aligned}$$

4. Радиус окружности равен $1,8$, следовательно, диаметр – $3,6$.

Ответ: диаметр окружности равен $3,6$.

18.2. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB=8$, $AC=10$.



Дано:

$\triangle ABC$, O – центр окружности, $O \in AC$, окружность проходит через точку C и касается AB в точке B , $AB=8$, $AC=10$.

Найти: диаметр окружности.

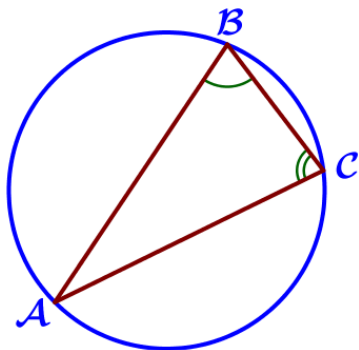
Решение:

1. Пусть D – точка пересечения окружности со стороной AC , CD – диаметр.
2. $AC = AD + CD$, следовательно, $AD = AC - CD = 10 - CD$.
3. AB – касательная, AC – секущая, тогда по свойству секущей и касательной, проведенных из одной точки к окружности:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD \cdot AC, & 10 \cdot CD &= 100 - 64, \\ 8^2 &= (10 - CD) \cdot 10, & 10 \cdot CD &= 36, \\ 64 &= 100 - 10 \cdot CD, & CD &= 3,6. \end{aligned}$$

Ответ: диаметр окружности равен 3,6.

19.1. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 61° и 89° . Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 8.



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle B = 61^\circ$, $\angle C = 89^\circ$, радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен 8.

Найти: BC .

Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle B = 61^\circ$, $\angle C = 89^\circ$, тогда по теореме о сумме углов треугольника найдем $\angle A$:

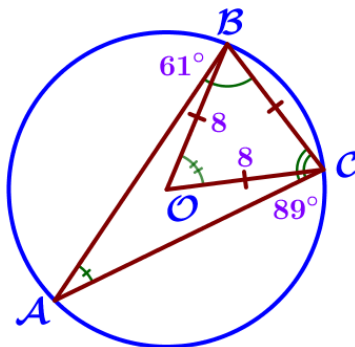
$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ, \\ \angle A &= 180^\circ - \angle B - \angle C, \\ \angle A &= 180^\circ - 61^\circ - 89^\circ, \\ \angle A &= 30^\circ. \end{aligned}$$

2. По расширенной теореме синусов известно, что $\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R$; R – радиус описанной окружности, $R=8$ (по условию), $\angle A = 30^\circ$ (п. 1), тогда

$$BC = 2R \cdot \sin \angle A = 2 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8.$$

Ответ: $BC = 8$.

19.2. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 61° и 89° . Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 8 .



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle B = 61^\circ$, $\angle C = 89^\circ$, радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен 8 .

Найти: BC .

Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle B = 61^\circ$, $\angle C = 89^\circ$, тогда по теореме о сумме углов треугольника найдем $\angle A$:

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ, \\ \angle A &= 180^\circ - \angle B - \angle C, \\ \angle A &= 180^\circ - 61^\circ - 89^\circ, \\ \angle A &= 30^\circ. \end{aligned}$$

2. $\angle A$ вписан в окружность и опирается на дугу BC , следовательно, по теореме о вписанном угле $\angle A = \frac{1}{2} \cup BC$, откуда $\cup BC = \angle A \cdot 2 = 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ$.

3. Пусть O – центр окружности, тогда $\angle BOC$ – центральный и $\angle BOC = \cup BC = 60^\circ$.

4. OB и OC – радиусы окружности, следовательно, $OB = OC = 8$.

5. Рассмотрим $\triangle BOC$:

а) так как $OB = OC$, то $\triangle BOC$ – равнобедренный (с основанием BC) по определению, следовательно, $\angle OBC = \angle OCB$;

б) $\angle BOC = 60^\circ$, $\angle OBC = \angle OCB$, тогда по теореме о сумме углов треугольника $\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$;

в) $\angle BOC = 60^\circ$, $\angle OBC = 60^\circ$, то есть $\angle BOC = \angle OBC$, тогда $\triangle BOC$ – равнобедренный (с основанием OB) по признаку равнобедренного треугольника, следовательно, $BC = OC = 8$.

Ответ: $BC = 8$.

23. Геометрическая задача на вычисление

Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия

Примеры решений

1. Прямая AD , перпендикулярная медиане BM треугольника ABC , делит её пополам. Найдите сторону AC , если сторона AB равна 6.
2. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC . Найдите AB , если $BC=38$.
3. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 24, а площадь равна $72\sqrt{2}$.
4. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 15 и 9, а средняя линия равна 6.
5. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC , если $BK:KA=2:5$, $KM=20$.
6. Около трапеции, один из углов которой равен 47° , описана окружность. Найдите остальные углы трапеции.
7. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K , длина стороны AC относится к длине стороны AB как 3:4. Найдите отношение площади треугольника AKM к площади треугольника ABC .
8. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K , длина стороны AC относится к длине стороны AB как 4:7. Найдите отношение площади треугольника BKP к площади треугольника ABC .
9. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K , длина стороны AC относится к длине стороны AB как 10:7. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.
10. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся, как 3:7:8. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон треугольника равна 22.
11. Стороны AC , AB , BC треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ и 1 соответственно. Точка K расположена вне треугольника ABC , причём отрезок KC пересекает сторону AB в точке, отличной от B . Известно, что треугольник с вершинами K , A и C подобен исходному. Найдите косинус угла AKC , если $\angle KAC > 90^\circ$.