

**Единый государственный экзамен  
по МАТЕМАТИКЕ  
Профильный уровень**

**Инструкция по выполнению работы**

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8.

|    |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 10 | - | 0 | , | 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

**Желаем успеха!**

**Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

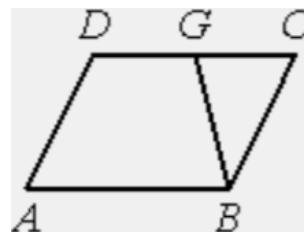
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

*Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

**1**

Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 132. Точка  $G$  — середина стороны  $CD$ . Найдите площадь трапеции  $ABGD$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

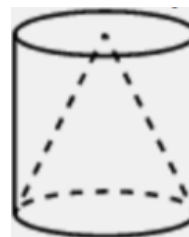
**2**

Длины векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны 3 и 5, а угол между ними равен  $60^\circ$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**3**

Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 57.



Ответ: \_\_\_\_\_.





- 4 На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Италии и 6 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвёртым будет выступать прыгун из Италии.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 6 Найдите корень уравнения

$$7^{-6-x} = 343.$$

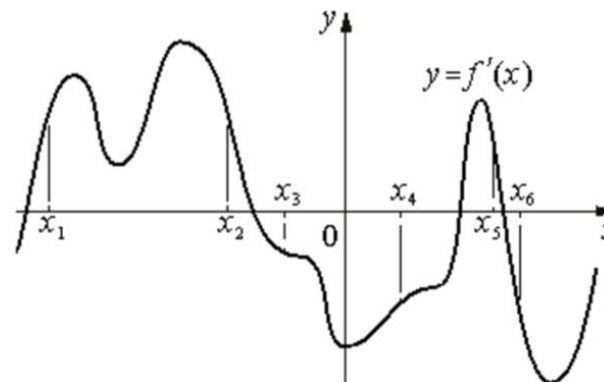
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите значение выражения

$$\frac{\log_5 2}{\log_5 13} + \log_{13} 0,5.$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечены шесть точек:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ . Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции  $f(x)$ ?



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 9 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой  $f_0 = 192$  Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка  $f$  (в Гц) больше первого: она зависит от скорости тепловоза  $v$  (в м/с) по закону  $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$  (Гц), где  $c$  — скорость звука (в м/с).

Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 8 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а  $c = 300$  м/с. Ответ дайте в м/с.

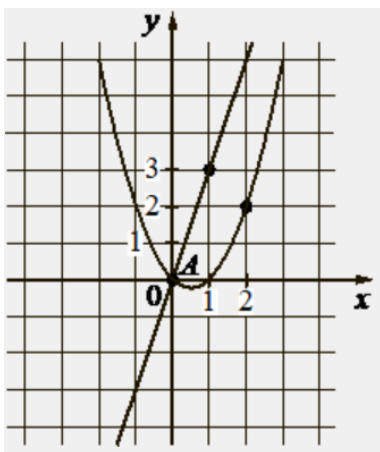
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 180 литров она заполняет на 8 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: \_\_\_\_\_.



- 11 На рисунке изображены графики функций видов  $f(x) = ax^2 + bx + c$  и  $g(x) = kx$ , пересекающиеся в точках  $A$  и  $B$ . Найдите абсциссу точки  $B$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5 \text{ на отрезке } [9; 36].$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.*

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.*

## Часть 2

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.*

- 13 а) Решите уравнение

$$\cos x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \sin^2 x + \cos x.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

- 14 В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит параллелограмм  $ABCD$  с углом  $60^\circ$  при вершине  $A$ . На рёбрах  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $BC$  отмечены точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  соответственно так, что четырёхугольник  $AMKN$  — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

- а) Докажите, что точка  $M$  — середина ребра  $A_1 B_1$ .  
б) Найдите высоту призмы, если её объём равен 16 и известно, что точка  $K$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении  $B_1 K : KC_1 = 1 : 3$ .

- 15 Решите неравенство

$$(\log_{0,25}^2(x+3) - \log_4(x^2 + 6x + 9) + 1) \cdot \log_4(x+2) \leq 0.$$

- 16 В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в конце 2030 года долг составит 400 тыс. руб;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите  $r$ , если общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 1740 тыс. рублей.



- 17 Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . На стороне  $AC$  выбрана точка  $M$ , серединный перпендикуляр к отрезку  $BM$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$ , а сторону  $BC$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что угол  $AEM$  равен углу  $CMK$ .  
 б) Найдите отношение площадей треугольников  $AEM$  и  $CMK$ , если  $AM:CM = 1:4$ .

- 18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - 2x + 12) \cdot \sqrt{y - 2x + 12} = 0, \\ y = ax - 10 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

- 19 Из пары натуральных чисел  $(a; b)$ , где  $a > b$ , за один ход получают пару  $(a + b; a - b)$ .

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары  $(50; 9)$  пару, большее число в которой равно 200?  
 б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары  $(50; 9)$  пару  $(408; 370)$ ?  
 в) Какое наименьшее  $a$  может быть в паре  $(a; b)$ , из которой за несколько ходов можно получить пару  $(408; 370)$ ?

**Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.**

### Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

| Номер задания | Правильный ответ                                                                               |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1             | 99                                                                                             |
| 2             | 7,5                                                                                            |
| 3             | 171                                                                                            |
| 4             | 0,16                                                                                           |
| 5             | 0,0009                                                                                         |
| 6             | -9                                                                                             |
| 7             | 0                                                                                              |
| 8             | 3                                                                                              |
| 9             | 12                                                                                             |
| 10            | 10                                                                                             |
| 11            | 4                                                                                              |
| 12            | -77                                                                                            |
| 13            | а) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \pi n; n \in \mathbb{Z}$<br>б) $-2\pi; -\frac{5\pi}{4}; -\pi$ |
| 14            | $\sqrt{3}$                                                                                     |
| 15            | $(-2; -1] \cup \{1\}$                                                                          |
| 16            | 30                                                                                             |
| 17            | $\frac{4}{9}$                                                                                  |
| 18            | $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right] \cup \{2\} \cup \{3\}$                          |
| 19            | а) да<br>б) нет<br>в) 204                                                                      |



# Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$\cos x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \sin^2 x + \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$ .

а)  $\cos x (2\cos^2 x - 1) = \sqrt{2} \cdot (1 - \cos^2 x) + \cos x$

$$2\cos^3 x - \cos x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x$$

$$2\cos^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x - 2\cos x - \sqrt{2} = 0$$

$$\cos^2 x (2\cos x + \sqrt{2}) - (2\cos x + \sqrt{2}) = 0$$

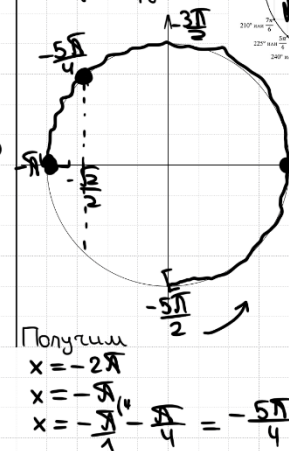
$$(2\cos x + \sqrt{2}) \cdot (\cos^2 x - 1) = 0$$

$$2\cos x = -\sqrt{2} \quad \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos x = \pm 1$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) ОТВЕРЯЕМ КОРНИ С ПОМОЩЬЮ ОКРУЖНОСТИ



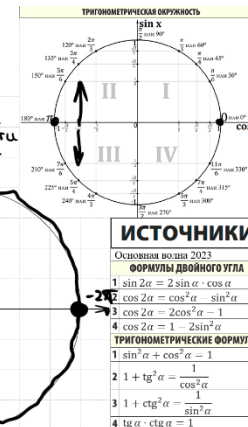
Получим

$$x = -2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{4}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$$

Ответ: а)  $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \pi n; n \in \mathbb{Z}$   
б)  $-2\pi; -\pi; -\frac{5\pi}{4}$ .



| Содержание критерия                                                                                                                                                                                             | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах                                                                                                                                                              | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                             | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                               | 2     |

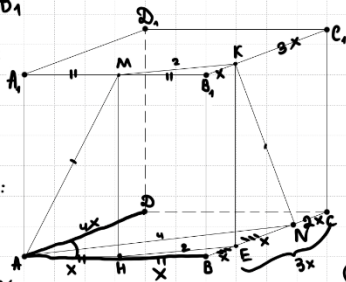
**14** В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит параллелограмм  $ABCD$  с углом  $60^\circ$  при вершине  $A$ . На рёбрах  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $BC$  отмечены точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  соответственно так, что четырёхугольник  $AMKN$  — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

**ИСТОЧНИКИ**  
Основная волна 2023

а) Докажите, что точка  $M$  — середина ребра  $A_1 B_1$ .

б) Найдите высоту призмы, если её объём равен 16 и известно, что точка  $K$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении  $B_1 K : KC_1 = 1 : 3$ .

а) ① Построим  $MM \parallel BB_1$   
 $KE \parallel BB_1$   
Построим  $MKEN$ -трап.  
 $KE = 2 = MK$



б) ①  $V = 16 = S_{\text{осн}} \cdot h$   
 $h = \frac{16}{S_{\text{паралл.}}}$

②  $\triangle AMH = \triangle KEN$   
по т.п. и катету  
тогда  $AM = EN = x$

③ Рассмотрим  $\triangle ABN$ :  
 $KE \parallel AN$   
(т.к.  $KE \parallel MM \parallel AN$ )  
 $KE = 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2} AN$   
 $KE$  — ср. линия  $\triangle ABN$   
 $H$  — середина  $AB$   
 $M$  — середина  $A_1 B_1$

③  $\triangle BME$ : по т. кос.  
 $2^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 120^\circ$   
 $4 = 2x^2 + x^2$   
 $3x^2 = 4$   
 $x^2 = \frac{4}{3}$   
 $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$h = \frac{16}{S_{\text{пар.}}}$   
 $h = \frac{16}{4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin 60^\circ} =$   
 $= \frac{16 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3}$   
Ответ:  $\sqrt{3}$ .

| Содержание критерия                                                                                                                                                                               | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$                                                                                            | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте $b$<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , ИЛИ                                                                                                                                        | 1     |

при обоснованном решении пункта  $b$  получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,  
ИЛИ  
обоснованно получен верный ответ в пункте  $b$  с использованием утверждения пункта  $a$ , при этом пункт  $a$  не выполнен  
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше

Максимальный балл

0

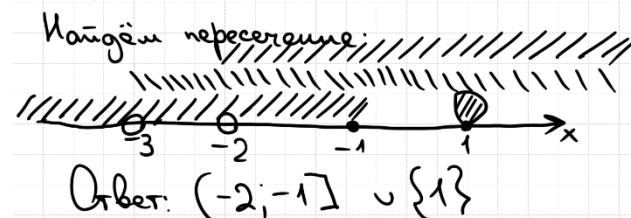
3

**15** Решите неравенство

$(\log_{0,25}^2(x+3) - \log_4(x^2+6x+9)+1) \cdot \log_4(x+2) \leq 0.$

$(\log_{4^{-1}}(x+3) \cdot \log_{4^{-1}}(x+3) - \log_4(x+3)^2 + 1) \cdot \log_4(x+2) \leq 0$   
 $(\log_4^2(x+3) - 2 \cdot \log_4|x+3| + 1) \cdot \log_4(x+2) \leq 0$   
 $x+3, \text{ т.к. } x+3 > 0$   
 $(\log_4(x+3) - 1)^2 \cdot \log_4(x+2) \leq 0$   
 $(\log_4(x+3) - 1) \cdot (\log_4(x+3) - 1) \cdot (\log_4(x+2) - \log_4 1) \leq 0$   
①  $(x-1)(x-1)(x+1) \leq 0$   
②  $x+3 > 0$   
③  $x+2 > 0$

①  $(x-1)(x-1)(x+1) \leq 0$  ②  $x > -3$  ③  $x > -2$



**ИСТОЧНИКИ**

| Основная волна 2023   |                                                |
|-----------------------|------------------------------------------------|
| СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ   |                                                |
| 1                     | $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$      |
| 2                     | $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$     |
| 3                     | $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$                |
| 4                     | $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$    |
| 5                     | $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$                |
| 6                     | $\log_a a = \log_a a$                          |
| ОС                    |                                                |
| 1                     | $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$                   |
| 2                     | $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$                  |
| 3                     | $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$                  |
| 4                     | $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ |
| 5                     | $a^4 + b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$ |
| 6                     | $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$        |
| 7                     | $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$        |
| МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ  |                                                |
| БЫЛО                  | СТАЛО                                          |
| $\log_a f - \log_a g$ | $(a-1)(f-g)$                                   |
| $a^f - a^g$           | $(a-1)(f-g)$                                   |
| $ f  -  g $           | $(f-g)(f+g)$                                   |
| $\sqrt{f} - \sqrt{g}$ | $(f-g)$                                        |

| Содержание критерия                                                                                | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                   | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек<br>ИЛИ | 1     |

|                                                                                                                      |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения |   |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                  | 0 |
| Максимальный балл                                                                                                    | 2 |

**16** В июле 2025 года планируется взять кредит на десяти лет в размере 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в конце 2030 года долг составит 400 тыс. руб;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите  $r$ , если общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 1740 тыс. рублей.

**ИСТОЧНИКИ**  
Основная волна 2023

*Решение:*

Пусть  $(1 + \frac{r}{100}) = b$

январь – месяц платежа

$x$  – величина уменьшения долга первые 5 лет

$y$  – величина уменьшения долга след. 5 лет

Первые 5 выплат и последние 5 выплат обр. две арифм. прогр.

Восполучаем  $r$ -ой  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

О.С.В. = 1740 тыс.

Первые 5 выплат + Последние 5 выплат = 1740 тыс.

$$\frac{600b - 560 + 440b - 400}{2} \cdot 5 + \frac{400b - 320 + 80b}{2} \cdot 5 = 1740$$

$$(520b - 480) \cdot 5 + (240b - 160) \cdot 5 = 1740$$

$$2600b - 2400 + 1200b - 800 = 1740$$

$$3800 \cdot b = 4940$$

$$b = \frac{4940}{3800} = 1,3$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1,3$$

$$\frac{r}{100} = 0,3$$

$$r = 30\%$$

| Дата       | Сумма долга            |
|------------|------------------------|
| июль 25    | 600 тыс.               |
| январь 26  | 600 б                  |
| февраль 26 | 600 - x = 560          |
| январь 27  | 560 б                  |
| февраль 27 | 560b - 520             |
| январь 28  | 600 - 2x = 520         |
| февраль 28 | 520 б                  |
| январь 29  | 520b - 480             |
| февраль 29 | 600 - 3x = 480         |
| январь 30  | 480 б                  |
| февраль 30 | 480b - 440             |
| январь 31  | 600 - 4x = 440         |
| февраль 31 | 440 б                  |
| январь 32  | 440b - 400             |
| февраль 32 | 600 - 5x = 400, x = 40 |
| январь 33  | 400 б                  |
| февраль 33 | 400b - 320             |
| январь 34  | 400 - y = 320          |
| февраль 34 | 320 б                  |
| январь 35  | 320b - 240             |
| февраль 35 | 400 - 2y = 240         |
| январь 36  | 240 б                  |
| февраль 36 | 240b - 160             |
| январь 37  | 400 - 3y = 160         |
| февраль 37 | 160 б                  |
| январь 38  | 160b - 80              |
| февраль 38 | 400 - 4y = 80          |
| январь 39  | 80 б                   |
| февраль 39 | 80b                    |
| январь 40  | 400 - 5y = 0, y = 80   |

Ответ: 30.

| Содержание критерия                                                 | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| Максимальный балл                                                   | 2     |

**17** Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . На стороне  $AC$  выбрана точка  $M$ , серединный перпендикуляр к отрезку  $BM$  пересекать сторону  $AB$  в точке  $E$ , а сторону  $BC$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что угол  $AEM$  равен углу  $CMK$ .  
 б) Найдите отношение площадей треугольников  $AEM$  и  $CMK$ , если  $AM:CM = 1:4$ .

**ИСТОЧНИКИ**  
 Основная волна 2023

**Решение:**

а) Пусть  $\angle EBM = d$ .  
 Тогда  $\angle CBM = 60 - d$ .  
 $\triangle BEM$  — р/б.  
 (т.к.  $EM$  — высота — мед.)  
 $\angle EMB = d = \angle EBM$ .  
 $\triangle MBK$  — р/б.  
 (т.к.  $KM$  — высота — мед.)  
 $\angle KMB = 60 - d = \angle KBM$ .

б) ① Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

②  $\triangle AEM$ :  
 $\angle BEM = 180 - d - d = 180 - 2d$   
 $\angle AEM = 180 - (180 - 2d) = 2d$   
 $\triangle AEM$ :  
 $\angle AME = 180 - 60 - 2d = 120 - 2d$

③  $\triangle CMK$ :  
 $\angle CMK = 180 - \angle AMK$   
 $= 180 - (120 - 2d) - d - (60 - d) = 2d$   
 $\angle CMK = 2d = \angle AEM$ .

④ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑤ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑥ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑦ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑧ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑨ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑩ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑪ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑫ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑬ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑭ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑮ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑯ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑰ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑱ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑲ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

⑳ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉑ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉒ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉓ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉔ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉕ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉖ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉗ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉘ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉙ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉚ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉛ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉜ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉝ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉞ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㉟ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊱ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊲ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊳ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊴ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊵ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊶ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊷ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊸ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊹ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊺ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊻ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊼ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊽ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊾ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

㊿ Пусть  $AM = x$ ,  $CM = 4x$ .  
 Тогда  $AB = 5x = AC$ .  
 $AE = y$ ,  $BE = 5x - y = EM$ .

ОТВЕТ:  $\frac{4}{9}$ .

| Содержание критерия                                                                                    | Баллы |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте $b$ ИЛИ                                                            | 2     |

|                                                                                                                                                                                                                                                                               |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                                                               |   |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , ИЛИ при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                                                                           | 0 |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                             | 3 |



18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - 2x + 12) \cdot \sqrt{y - 2x + 12} = 0, \\ y = ax - 10 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2023

$$\begin{cases} xy - 2x + 12 = 0 \\ y - 2x + 12 = 0 \\ y - 2x + 12 \geq 0 \\ y = ax - 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - \frac{12}{x} \\ y = 2x - 12 \\ y \geq 2x - 12 \\ y = ax - 10 \end{cases}$$

График - гипербола

График - прямая

Прямая  $y = 2x - 12$  и гипербола  $y = 2 - \frac{12}{x}$  пересекаются в 2 точках

Найдем координаты этих точек:

$$\begin{aligned} 2x - 12 &= 2 - \frac{12}{x} \\ \frac{12}{x} + 2x - 14 &= 0 \\ \frac{12}{x^2} - 14x + 12 &= 0 \\ x^2 - 7x + 6 &= 0 \\ x = 1 \quad x = 6 \\ y = -10 \quad y = 0 \\ A(1, -10) \quad B(6, 0) \end{aligned}$$

Найдем  $a$  для прямой  $k$ :

проходит через  $A(1, -10)$

$-10 = a \cdot 1 - 10$

$a = 0$

Найдем  $a$  для прямой  $l$ :

проходит через  $B(6, 0)$

$0 = a \cdot 6 - 10$

$10 = 6a$

$a = \frac{5}{3}$

Найдем  $a$  для прямой  $m$ :

$m \parallel y = 2x - 12$

$\Rightarrow a = 2$

Найдем  $a$  для прямой  $n$ :

$y = ax - 10$  касается гиперболы  $y = 2 - \frac{12}{x}$

①  $a = \left(2 - \frac{12}{x}\right)'$

②  $ax - 10 = 2 - \frac{12}{x}$

①  $a = \left(2 - \frac{12}{x}\right)'$

$a = +12 \cdot x^{-2}$

$a = \frac{12}{x^2}$

②  $\frac{12}{x^2} \cdot x - 10 = 2 - \frac{12}{x}$

$\frac{12}{x} = 12$   $x = 2$

$a = \frac{12}{4} = 3$

Ответ:  $(-\infty; 0) \cup (0; \frac{5}{3}] \cup \{2\} \cup \{3\}$

| Содержание критерия                                                                                            | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                               | 4     |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек | 3     |
| С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$                     | 2     |
| Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$                                    | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                            | 0     |
| Максимальный балл                                                                                              | 4     |



## 19 Источники

- Из пары натуральных чисел  $(a; b)$ , где  $a > b$ , за один ход получают пару  $(a + b; a - b)$ .
- а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары  $(50; 9)$  пару, большее число в которой равно 200?
- б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары  $(50; 9)$  пару  $(408; 370)$ ?
- в) Какое наименьшее  $a$  может быть в паре  $(a; b)$ , из которой за несколько ходов можно получить пару  $(408; 370)$ ?

Источники

Основная волна 2023

а)  $(50; 9)$

$(59; 41)$

$(100; 18)$

$(118; 82)$

$(200; 36)$

Ответ: а) да, пример приведен.

б)  $(50; 9)$

$(1 \cdot 59; 1 \cdot 41)$

$(1 \cdot 100; 1 \cdot 18)$

$(2 \cdot 59; 2 \cdot 41)$

$(2 \cdot 100; 2 \cdot 18)$

$(4 \cdot 59; 4 \cdot 41)$

$(4 \cdot 100; 4 \cdot 18)$

Заметим, что после четного числа ходов получаем пару  $(2^k \cdot 59; 2^k \cdot 41)$

после четного числа ходов получаем пару  $(2^m \cdot 100; 2^m \cdot 18)$

370 кратно 37, но никто из чисел в парах выше 37 не кратен 37.

Ответ: б) нет

- в) Какое наименьшее  $a$  может быть в паре  $(a; b)$ , из которой за несколько ходов можно получить пару  $(408; 370)$ ?

в)  $(408; 370)$

$a+b=408$

$a-b=370$

$2a=778$

$a=389$

$b=19$

$(389; 19)$

$(408; 370)$

$(204; 185)$

$(389; 19)$

$a+b=389$

$a-b=19$

$2a=408$

$a=204$

$b=185$

$a+b=204$

$a-b=185$

$2a=389$

$a=194,5$  (противоречит условию), значит пара  $(204; 185)$  не была

Получаем, что  $a=204$  — наименьшее, т.е.  $(204; 185)$

Ответ: в) 204.

| Содержание критерия                                                                                | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в                                              | 4     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б    | 3     |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б                                                  | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                | 0     |
| Максимальный балл                                                                                  | 4     |

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 04.04.2023 № 233/552, зарегистрирован Минюстом России 15.05.2023 № 73314)

«81. Проверка экзаменационных работ включает в себя:

1) проверку и оценивание предметными комиссиями ответов на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развернутым ответом <...>, в том числе устных ответов, в соответствии с критериями оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособнадзором <...>

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособнадзором.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о первичных баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 13–19, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.



3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 13–19 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

