

Справочный материал

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

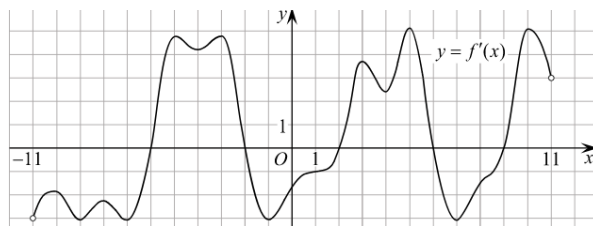
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

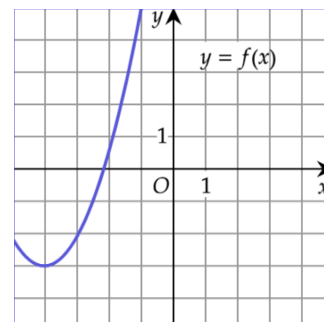
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

- Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 15 и 22. Найдите среднюю линию трапеции.
- Даны векторы $\vec{a}\{3; -1\}$, $\vec{b}\{2; 0\}$ и $\vec{c}\{4; y\}$. Найдите y , если $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.
- Площадь боковой поверхности цилиндра равна 12π , а диаметр основания равен 6. Назовите высоту цилиндра.
- Дима, Марат, Петя, Надя и Света бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.
- Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.



- Решите уравнение $5^{\log_{0,2}(2x+1)} = 10$
- Найдите значение выражения $5 \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}$.
- На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 11)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 3]$.
- Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_n = 25^\circ\text{C}$ через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_k = 57^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_k - T_n}{T - T_n}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}$ теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, $\alpha = 1,4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.
- Смешав 43%-ный и 89%-ный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 69%-ный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 73%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 43%-ного раствора использовали для получения смеси?



- На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-12)$.

- Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 2e^x + 8$ на отрезке $[-2; 1]$

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\left(\frac{4}{9}\right)^{\cos x} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos x} - 3 = 0$
 б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 4\pi]$.
14. Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка M - середина образующей SA конуса, а точки N и B лежат на основании конуса, причем прямая MN параллельна образующей конуса SB .
 а) Докажите, что $\angle ANO$ - прямой.
 б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB=8$.
15. Решите неравенство $x^2 \log_{25}(x-3) \geq \log_5(x^2 - 6x + 9)$
16. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн. рублей, где S - целое число. Условия его возврата таковы:
 - каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
 - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.
- | Месяц и год | Июль 2016 | Июль 2017 | Июль 2018 | Июль 2019 | Июль 2020 |
|------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Долг
(в млн рублей) | S | $0,8S$ | $0,5S$ | $0,1S$ | 0 |
- Найдите наибольшее значение S , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн. рублей.
17. В трапеции $ABCD$ точка E - середина основания AD , точка M - середина боковой стороны AB . Отрезки CE и DM пересекаются в точке O .
 а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.
 б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.
18. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{|4x|-x-3-a}{x^2-x-a} = 0$ имеет ровно два различных решения.
19. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.
 а) Пусть $q = 34$. Найдите все возможные значения p .
 б) Пусть $p + q = 22$. Найдите все возможные значения q .
 в) Пусть $q^2 - p^2 = 2812$. Найдите все возможные корни исходного уравнения.

Ответы: (май 2024)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18,5	4	2	0,6	0,33	4,5	-1,25	3	33	35	61	7

13. **Ответ:** : а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}$.

14. **Ответ:** 30°

15. **Ответ:** $x \in [4; +\infty)$

16. **Ответ:** 36 млн.руб.

17. **Ответ:** $\frac{2}{9}$

18. **Ответ:** $a \in (-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; 12) \cup (12; +\infty)$

19. **Ответ:** а) -35,-19; б) 48; в) 4 и 14