

# Содержание

|    |                                                            |    |
|----|------------------------------------------------------------|----|
| 1  | Очевидные факты . . . . .                                  | 3  |
| 2  | Прямоугольный треугольник . . . . .                        | 7  |
| 3  | Равносторонний треугольник . . . . .                       | 9  |
| 4  | Угол между биссектрисами и высотами треугольника . . . . . | 10 |
| 5  | Площадь треугольника . . . . .                             | 11 |
| 6  | Средняя линия . . . . .                                    | 12 |
| 7  | Параллелограмм . . . . .                                   | 13 |
| 8  | Четырехугольники . . . . .                                 | 15 |
| 9  | Трапеция . . . . .                                         | 19 |
| 10 | Ромб . . . . .                                             | 22 |
| 11 | Прямоугольник . . . . .                                    | 23 |
| 12 | Квадрат . . . . .                                          | 24 |
| 13 | Синус, косинус, тангенс, котангенс . . . . .               | 25 |
| 14 | Окружность . . . . .                                       | 26 |
| 15 | Вписанная окружность . . . . .                             | 27 |
| 16 | Описанная окружность . . . . .                             | 29 |
| 17 | Теорема синусов . . . . .                                  | 31 |
| 18 | Теорема косинусов . . . . .                                | 32 |
| 19 | Окружность и касательная . . . . .                         | 32 |
| 20 | Вписанный и центральный углы . . . . .                     | 33 |
| 21 | Углы многоугольника . . . . .                              | 34 |
| 22 | Шестиугольник . . . . .                                    | 35 |

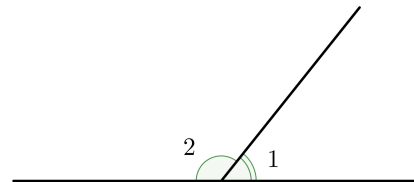
# 1 Очевидные факты

Мы знаем, что вы это знаете, но мы вам напоминаем.

## 1. Смежные углы:

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными. Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

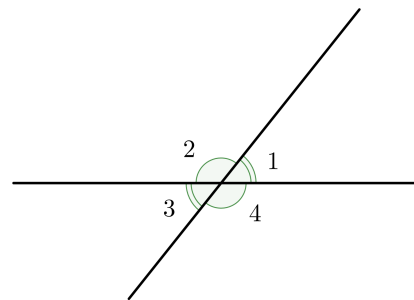


## 2. Вертикальные углы:

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.

$$\angle 1 = \angle 3$$

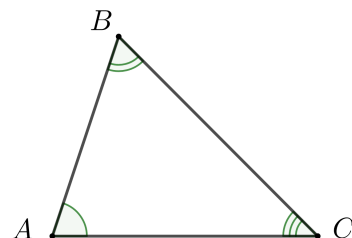
$$\angle 2 = \angle 4$$



## 3. Сумма углов треугольника равна $180^\circ$ .

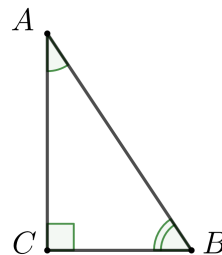
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

\*Примечание: угол  $C$  треугольника  $ABC$  – это угол  $ACB$ .



## 4. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90^\circ$ .

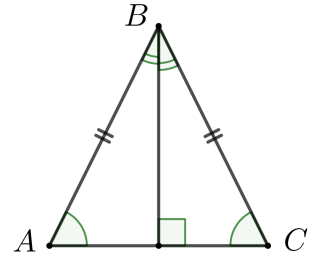
$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$



5. Равнобедренный треугольник – это треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, а третья сторона – основанием. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

$$AB = BC$$

$$\angle A = \angle C$$

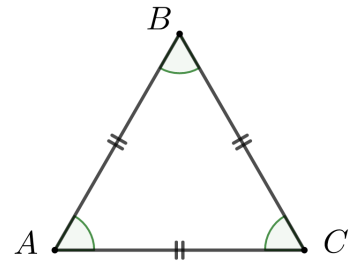


Биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника к основанию, является медианой и высотой.

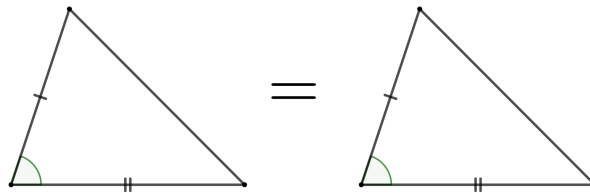
6. Равносторонний треугольник – это треугольник, у которого все стороны равны. Все углы равностороннего треугольника равны  $60^\circ$ .

$$AB = BC = AC$$

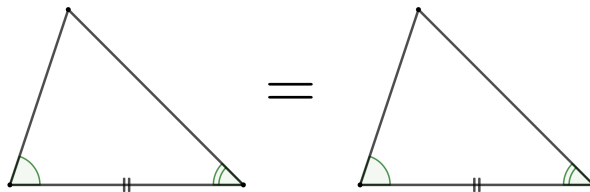
$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$



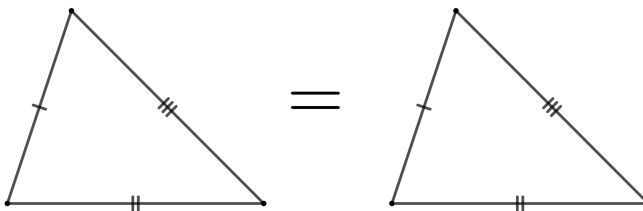
7. Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними.



8. Второй признак равенства треугольников: по стороне и прилежащим к ней углам.

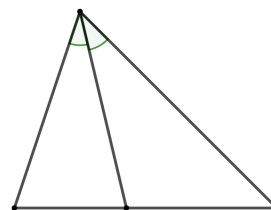


9. Третий признак равенства треугольников: по трем сторонам.

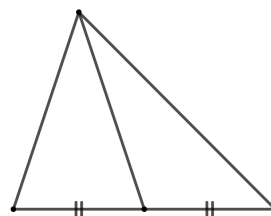


10. Биссектриса – луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла.

Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы одного из углов треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.



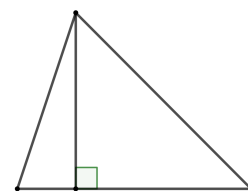
11. Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



12. Высота – это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.

Если треугольник тупоугольный, то две его высоты лежат вне треугольника.

Если треугольник прямоугольный, то две его высоты совпадают с его катетами.



### 13. Признаки параллельности двух прямых.

Прямая  $c$  называется **секущей** по отношению к прямым  $a$  и  $b$ , если она пересекает их в двух точках. При пересечении прямых  $a$  и  $b$  секущей  $c$  образуется восемь углов, которые на рисунке обозначены цифрами от 1 до 8. Некоторые пары этих углов имеют специальные названия:

**внутренние накрест лежащие углы:** 3 и 5, 4 и 6;

**внешние накрест лежащие углы:** 2 и 8, 7 и 1;

**внутренние односторонние углы:** 4 и 5, 3 и 6;

**внешние односторонние углы:** 1 и 8, 2 и 7;

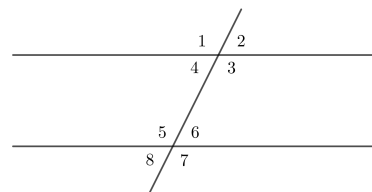
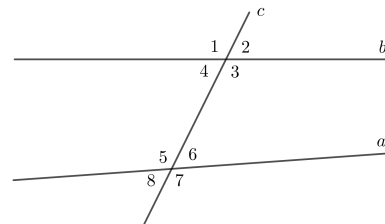
**соответственные углы:** 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

Если при пересечении двух прямых секущей выполняется одно из указанных условий:

а) накрест лежащие углы равны (внутренние или внешние);

б) односторонние (внутренние или внешние) углы дают в сумме  $180^\circ$ ;

в) соответственные углы равны,  
то прямые параллельны.

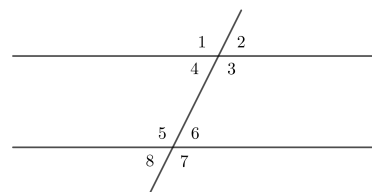


### 14. Свойства параллельных прямых:

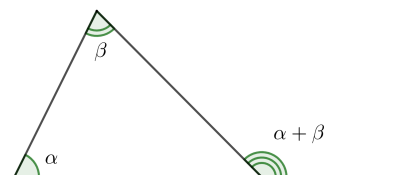
а) накрест лежащие углы равны (внутренние или внешние);

б) односторонние (внутренние или внешние) углы дают в сумме  $180^\circ$ ;

в) соответственные углы равны.



### 15. Теорема о внешнем угле треугольника:

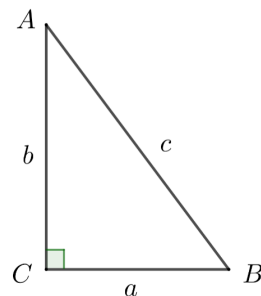


## 2 Прямоугольный треугольник

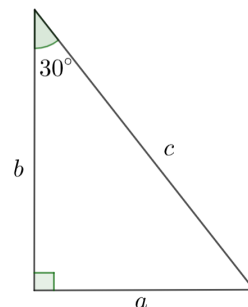
1. Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

2. Если в треугольнике  $ABC$  со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  верно, что  $a^2 + b^2 = c^2$ , то угол, лежащий напротив стороны  $c$ , равен  $90^\circ$  (Обратная теореме Пифагора).



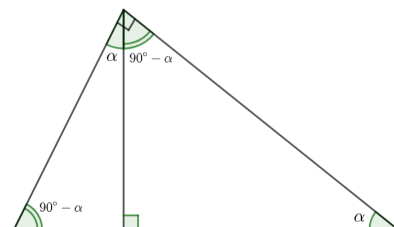
3. Напротив угла в  $30^\circ$  лежит катет, равный половине гипотенузы: если  $\alpha = 30^\circ$ , тогда  $a = \frac{c}{2}$ .



4. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит прямой угол на два угла, которые равны двум острым углам прямоугольного треугольника.

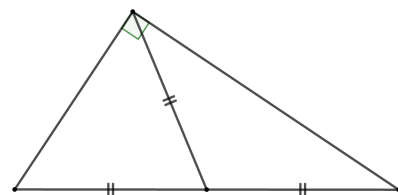
Иначе говоря, высота, проведенная из вершины прямого угла, делит прямоугольный треугольник на 2 прямоугольных треугольника, подобных исходному.

\*Возможно, что вы ничего не поняли, но мы надеемся, что вы посмотрите на картинку и все поймете.

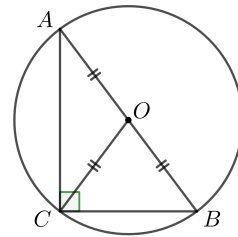


5. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

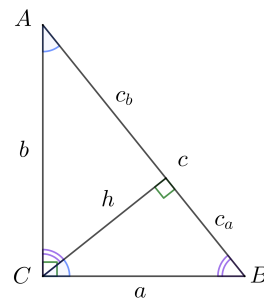
Верно и обратное: если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то эта медиана исходит из вершины прямого угла. То есть наш треугольник – прямоугольный.



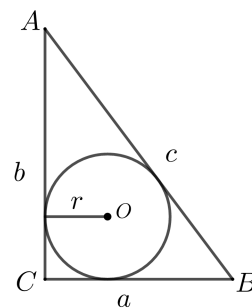
6. Гипотенуза является диаметром, а ее середина – центром окружности, описанной вокруг данного прямоугольного треугольника.



7. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, вычисляется по формуле:  $h = \frac{ab}{c}$  или  $h^2 = c_a c_b$ . Также обратите внимание на следующие соотношения:  $c_a c = a^2$  и  $c_b c = b^2$ .



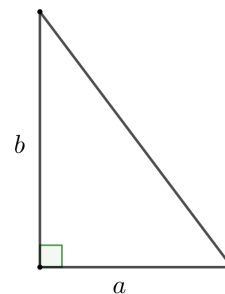
8. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно вычислить по формуле:  $r = p - c$ , где  $p$  – полупериметр ( $p = \frac{a+b+c}{2}$ ), или  $r = \frac{a+b-c}{2}$ .



9. Площадь прямоугольного треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ab$$

.

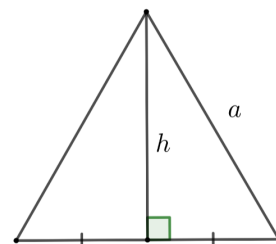


### 3 Равносторонний треугольник

В равностороннем треугольнике каждая высота совпадает с медианой и биссектрисой, проведенными из той же вершины.

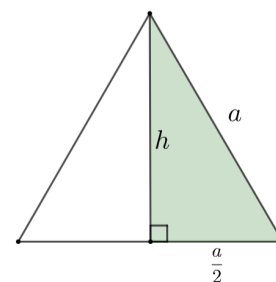
Точки пересечения высот, медиан и биссектрис совпадают. Также эта точка является центром вписанной и описанной окружности.

1. Высота равностороннего треугольника



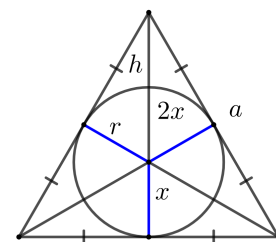
Действительно, по теореме Пифагора для выделенного треугольника:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



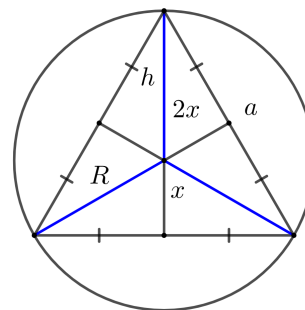
2. Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

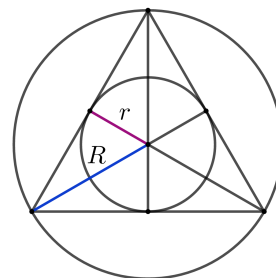


3. Радиус описанной окружности равен

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$



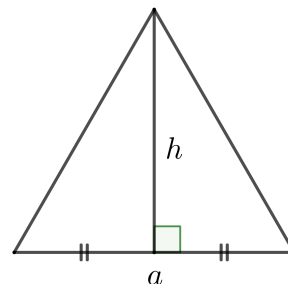
4.  $R = 2r$ .



5. Площадь равностороннего треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



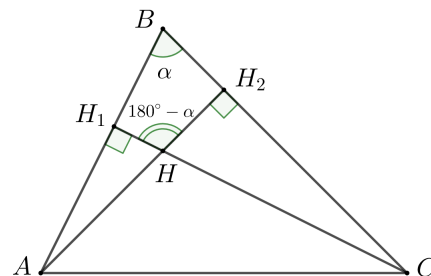
## 4 Угол между биссектрисами и высотами треугольника

1. Угол, образованный высотами.

Сумма углов четырехугольника  $H_1BH_2H$ :

$$90^\circ + \alpha + 90^\circ + \angle H_1HH_2 = 360^\circ, \text{ тогда}$$

$$\angle H_1HH_2 = \angle AHC = 180^\circ - \alpha.$$



2. Угол, образованный биссектрисами.

Сумма углов треугольника  $ABC$ :

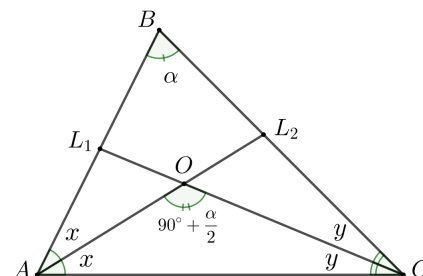
$$2x + 2y + \alpha = 180^\circ, \quad 2x + 2y = 180^\circ - \alpha, \text{ тогда}$$

$$x + y = \frac{1}{2}(2x + 2y) = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Сумма углов треугольника  $AOC$ :

$$x + y + \angle AOC = 180^\circ, \text{ тогда}$$

$$\angle AOC = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

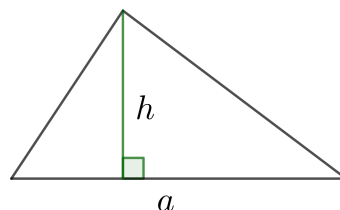


## 5 Площадь треугольника

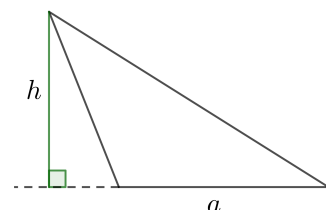
1. Если известны высота и сторона, к которой она проведена:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

для остроугольного



для тупоугольного

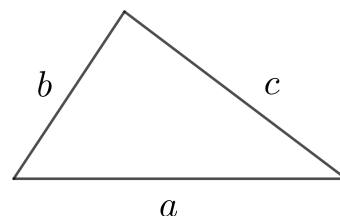


2. Если известны 3 стороны (формула Герона):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

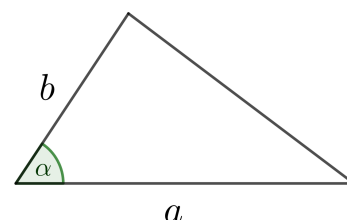
где  $p$  – это полупериметр.

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$



3. Если известны 2 стороны и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha.$$

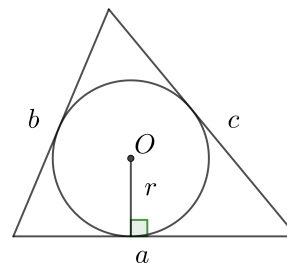


4. Если известны полупериметр и радиус вписанной окружности:

$$S = pr,$$

где  $p$  – это полупериметр.

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

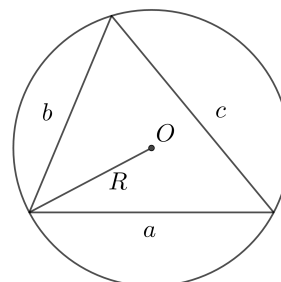


\*Чаще всего эта формула используется для нахождения радиуса вписанной окружности.

5. Если известны 3 стороны и радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

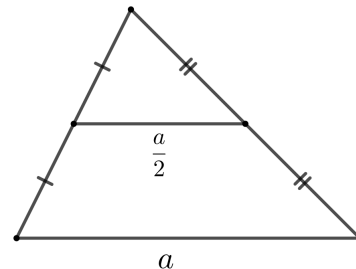
\*Достаточно бесполезная формула, которую иногда удобно использовать для того, чтобы искать радиус описанной окружности.



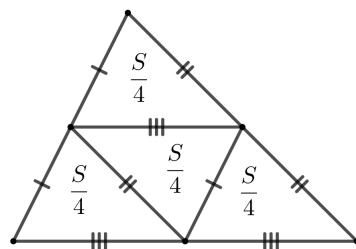
## 6 Средняя линия

**Определение:** Средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

1. Свойство средней линии: средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

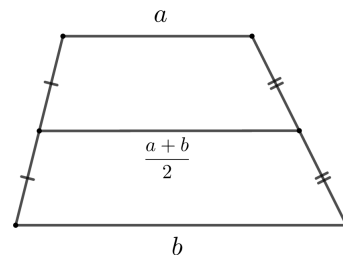


2. Каждая средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, периметр которого в два раза меньше данного, а площадь в четыре раза меньше.

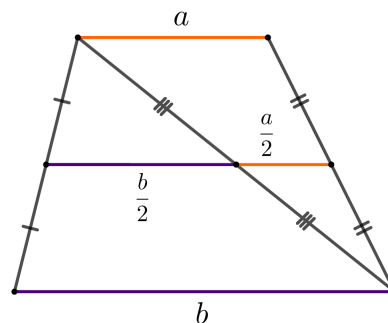


**Определение:** Средняя линия трапеции — это отрезок, соединяющий середины двух боковых сторон трапеции.

3. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

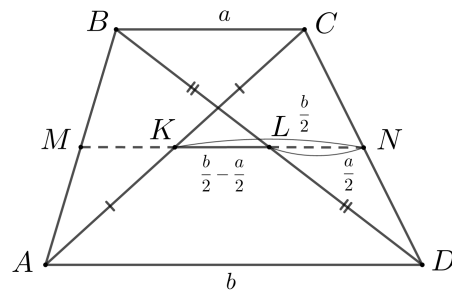


4. Средняя линия делит каждую диагональ трапеции пополам.



5. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции равен, полуразности оснований.

$$KL = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$



Доказательство:

Средняя линия параллельна основаниям. По теореме Фалеса точка  $K$  середина  $AC$ , а точка  $L$  середина  $BD$ .

$ML$  и  $KN$  - средние линии  $\triangle ABD$  и  $\triangle DCA$  соответственно  $\Rightarrow ML = KN = \frac{b}{2}$

$MK$  и  $LN$  - средние линии  $\triangle ABC$  и  $\triangle DBC$  соответственно  $\Rightarrow MK = LN = \frac{a}{2}$

$$KL = KN - LN = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$

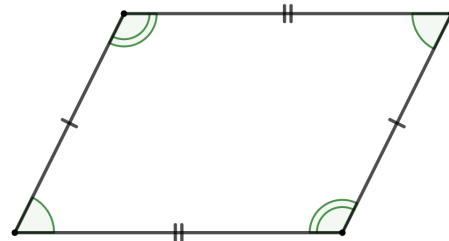
## 7 Параллелограмм

**Определение:** Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

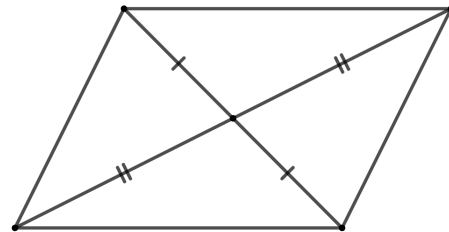
1. Свойства параллелограмма:

В параллелограмме противоположные стороны равны.

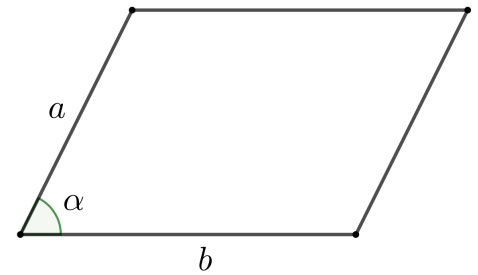
В параллелограмме противоположные углы равны.



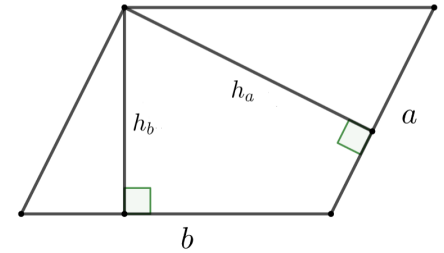
Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.



2.  $S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$ .



3.  $S = b \cdot h_b$  или  $S = a \cdot h_a$ .

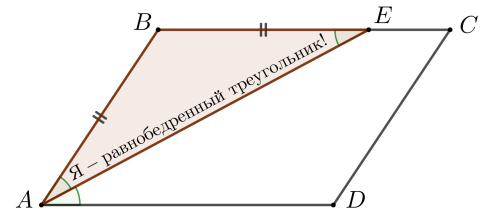


4. Пусть  $AE$  – биссектриса, тогда  $\triangle ABE$  – равнобедренный.

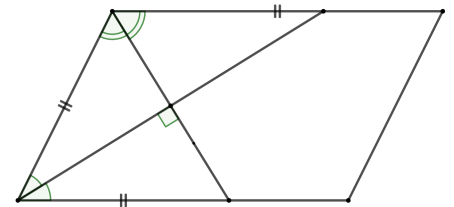
Доказательство:

1.  $\angle BAE = \angle EAD$ , так как  $AE$  биссектриса  $\angle BAD$ .
2.  $\angle EAD = \angle BEA$  как накрест лежащие углы при параллельных прямых  $BC$  и  $AD$  и секущей  $AE$ .
3. Тогда мы понимаем, что  $\angle BAE = \angle BEA = \angle EAD$ .

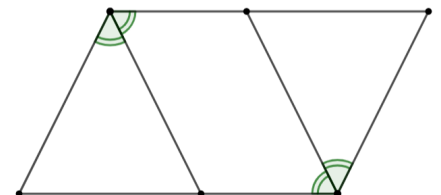
А значит треугольник  $ABE$  – равнобедренный.



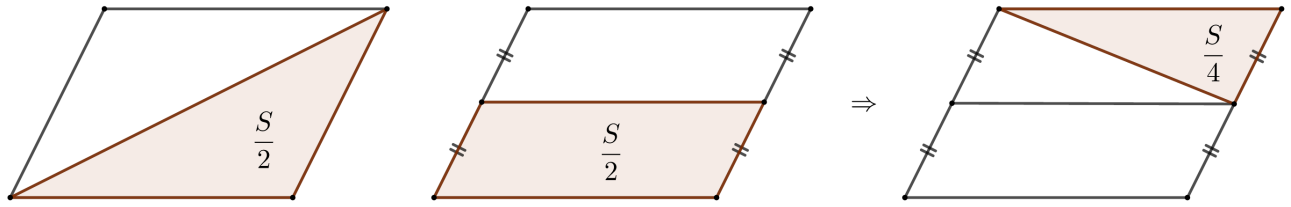
\*Угол между биссектрисами соседних углов параллелограмма прямой, или, по-другому говоря, биссектрисы соседних углов перпендикулярны.



\*Биссектрисы противоположных углов параллельны.



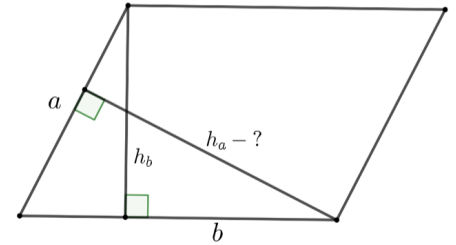
## 5. Немного о площадях частей параллелограмма



6. Как найти высоту параллелограмма, зная другую высоту и две стороны?

Заметим, что площадь параллелограмма, с одной стороны, равна  $S = b \cdot h_b$ , а с другой стороны  $S = h_a \cdot a$ ,

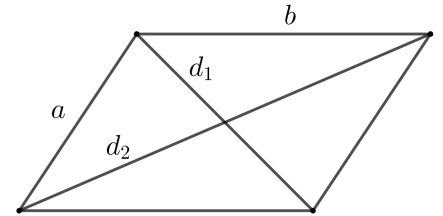
тогда  $h_a = \frac{b \cdot h_b}{a}$ .



7. Тождество параллелограмма:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2),$$

где  $a$  и  $b$  - стороны параллелепипеда,  $d_1$  и  $d_2$  - диагонали.

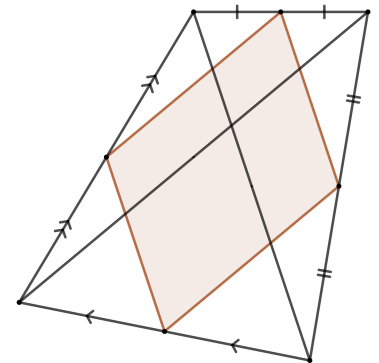


## 8 Четырехугольники

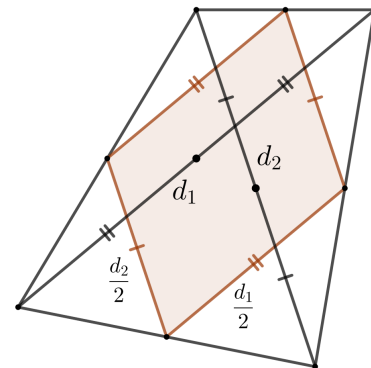
1. Теорема Вариньона

Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, является параллелограммом.

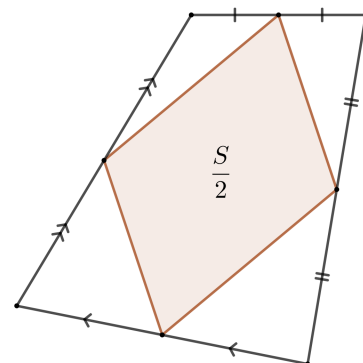
Действительно, стороны внутреннего четырехугольника параллельны диагоналям исходного четырехугольника, как средние линии соответствующих треугольников.



2. Стороны получившегося параллелограмма равны половинкам диагоналей исходного четырехугольника.



3. Площадь такого четырехугольника равна половине площади исходного четырехугольника.



Доказательство:

1. Пусть  $BD = d_1$ ,  $AC = d_2$ .

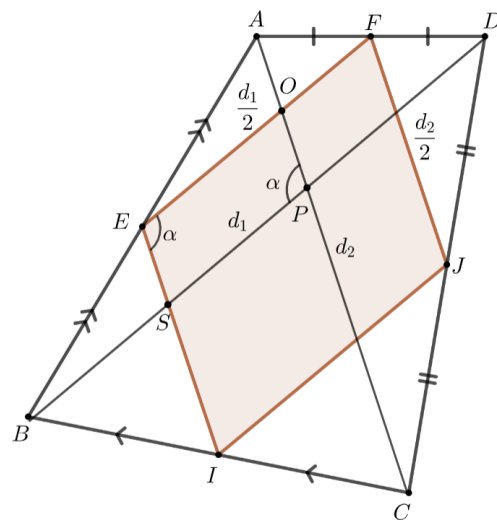
2.  $EF = \frac{d_1}{2}$ , так как  $EF$  - средняя линия  $\triangle BAD$ .

3.  $EOPS$  - параллелограмм  $\Rightarrow \angle OES = \angle OPS = \alpha$ .

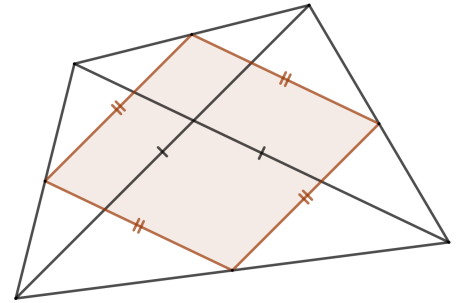
4.  $FJ = \frac{d_2}{2}$ , так как  $FJ$  - средняя линия  $\triangle ADC$ .

5. Тогда  $S_{EFJI} = \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha = \frac{S}{2}$ .

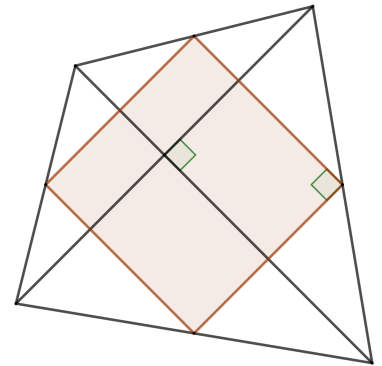
■



4. Если диагонали исходного четырехугольника равны, то параллелограмм Вариньона становится ромбом.

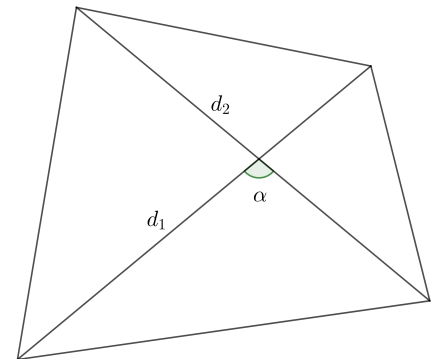


5. Если диагонали исходного четырехугольника перпендикулярны, то параллелограмм Вариньона становится прямоугольником.



6. Площадь любого выпуклого четырехугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$



Доказательство:

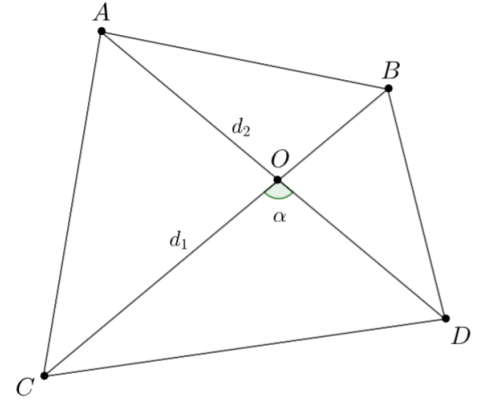
Распишем площадь каждого из треугольников:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$$

$$S_{BOD} = \frac{1}{2}BO \cdot OD \cdot \sin \angle BOD$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2}CO \cdot OD \cdot \sin \angle COD$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2}AO \cdot OC \cdot \sin \angle AOC$$



Так как  $\angle AOB$  и  $\angle BOD$  являются смежными, то  $\angle BOD = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - \alpha$ .

$\angle AOB = \angle COD = \alpha$ , так как  $\angle AOB$  и  $\angle COD$  – вертикальные.

$\angle AOC = \angle BOD = 180^\circ - \alpha$ , так как  $\angle AOC$  и  $\angle BOD$  – вертикальные.

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  – по формуле приведения.

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot OB \cdot \sin \alpha$$

$$S_{BOD} = \frac{1}{2}BO \cdot OD \cdot \sin \alpha$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2}CO \cdot OD \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2}AO \cdot OC \cdot \sin \alpha$$

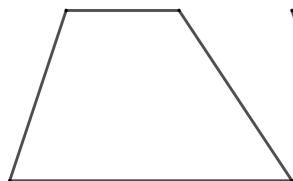
Таким образом:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{AOB} + S_{BDO} + S_{DOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}AO \cdot OB \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}BO \cdot OD \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}CO \cdot \\ OD \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}AO \cdot OC \cdot \sin \alpha &= \frac{1}{2} \sin \alpha (AO \cdot OB + BO \cdot OD + CO \cdot OD + AO \cdot OC) = \\ \frac{1}{2} \sin \alpha ((AO \cdot OB + BO \cdot OD) + (CO \cdot OD + AO \cdot OC)) &= \frac{1}{2} \sin \alpha (OB \cdot (AO + OD) + CO \cdot \\ (OD + AO)) &= \frac{1}{2} \sin \alpha (OB + CO)(OD + AO) = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

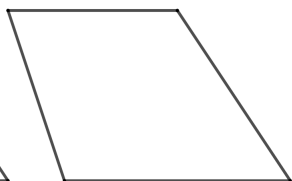
■

## 9 Трапеция

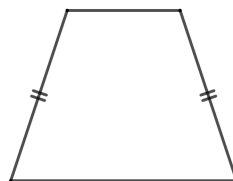
**Определение:** Трапеция – это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – нет.



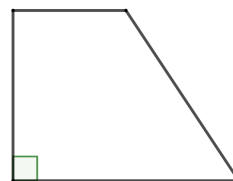
трапеция



произвольная



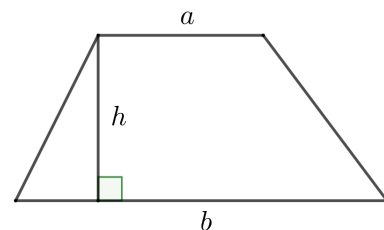
равнобедренная



прямоугольная

$$1. S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Заметим, что  $\frac{a+b}{2}$  – это длина средней линии, поэтому площадь трапеции равна средней линии, умноженной на высоту.



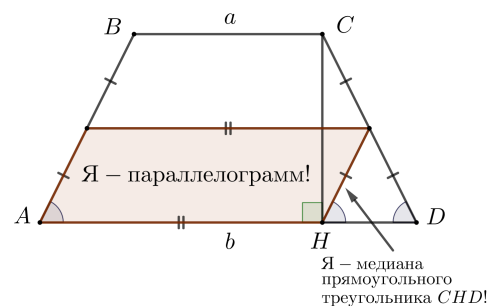
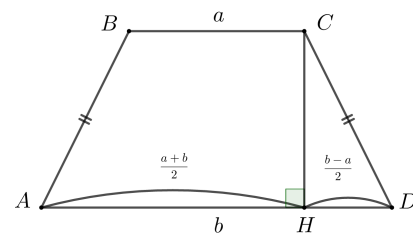
2. Очень ценное свойство **равнобедренной** трапеции:

Заметим, что отрезок  $AH$  по длине равен средней линии трапеции. Отрезок  $AH = \frac{a+b}{2}$ , а отрезок

$$HD = \frac{b-a}{2}.$$

Первое доказательство этого факта можно увидеть на второй картинке.

Приведём второе доказательство этого факта. Рассмотрим третью картинку. Из неё следует следующее:

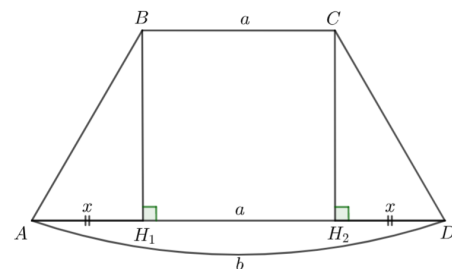


$$x + a + x = b$$

$$2x = b - a$$

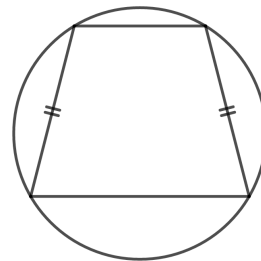
$$x = \frac{b-a}{2}$$

$$AH_2 = x + a = \frac{b-a}{2} + a = \frac{b-a+2a}{2} = \frac{b+a}{2}$$

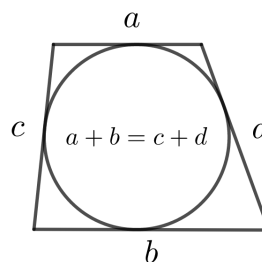


3. Вокруг равнобедренной трапеции всегда можно описать окружность.

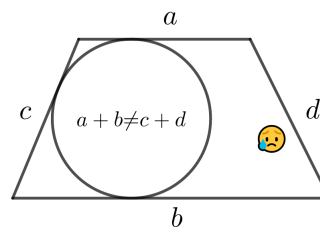
Верно и обратное: если вокруг трапеции можно описать окружность – она равнобедренная.



4. Вписать окружность можно в трапецию произвольной формы, главное, чтобы соблюдалось условие  $a + b = c + d$ ,



иначе нельзя вписать.



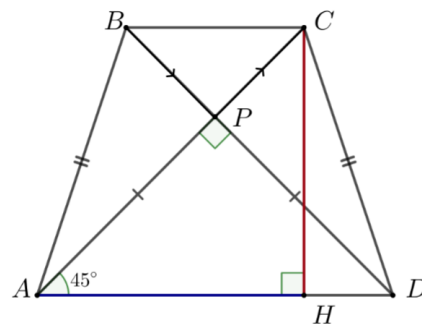
5. В равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями высота  $CH$  равна отрезку  $AH$  и равна средней линии  $MN$ .

$$\boxed{CH=AH=MN}$$

$\triangle APD$  – равнобедренный. Это можно доказать, заметив, например, что  $\triangle ACD = \triangle ABD$  по трём сторонам, следовательно  $\angle BDA = \angle CAD$ . Так как по условию  $\triangle APD$  – прямоугольный, то  $\angle PAD = \angle PDA = 45^\circ$ .

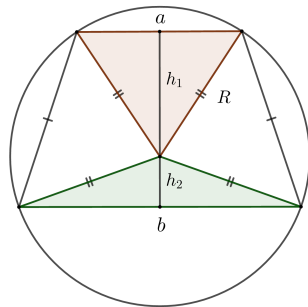
$\triangle ACH$  – прямоугольный с  $\angle CAH = 45^\circ$ , поэтому он равнобедренный. Тогда  $CH = AH$ .

А из пункта 2 этого раздела мы знаем, что в равнобедренной трапеции отрезок  $AH$  равен по длине средней линии. Отсюда и получается наше утверждение.

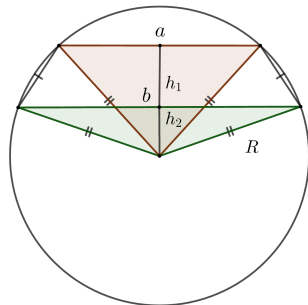


6. Пусть известны длины оснований трапеции  $a$  и  $b$ , а также  $R$  – радиус описанной окружности. Как нам найти высоту?

Ответ будет зависеть от положения центра окружности относительно трапеции. Если центр внутри, то высота трапеции равна  $h_1 + h_2$ , которые можно найти по теореме Пифагора из двух треугольников.

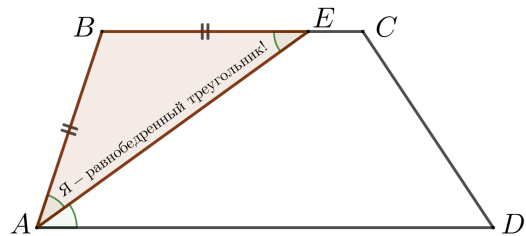


Если центр вне трапеции, то высота трапеции равна  $h_1 - h_2$ .

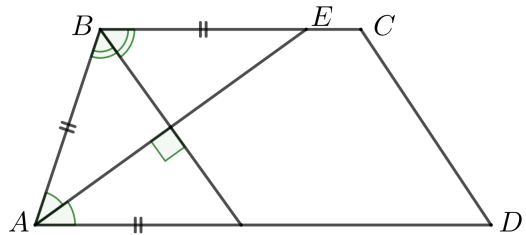


7.  $AE$  – биссектриса угла  $A$  трапеции. Пусть  $AE$  пересекает основание  $BC$  трапеции в точке  $E$ , тогда  $\triangle ABE$  – равнобедренный.

Действительно, если  $AE$  – биссектриса, то  $\angle BAE = \angle EAD$ . Заметим, что  $\angle EAD = \angle BEA$  как накрест лежащие углы при параллельных прямых  $BC$  и  $AD$ . Тогда в  $\triangle ABE$  два угла равны, значит, он равнобедренный.



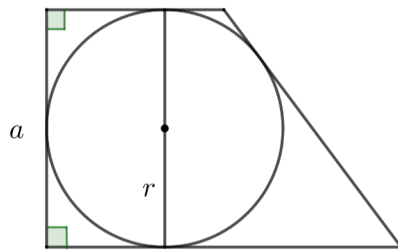
\*Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции перпендикулярны.



8. Если в прямоугольную трапецию можно вписать окружность, то радиус этой окружности равен половине стороны трапеции, перпендикулярной основанию.

$$a = 2r$$

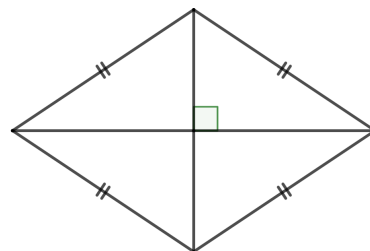
$$r = \frac{a}{2}$$



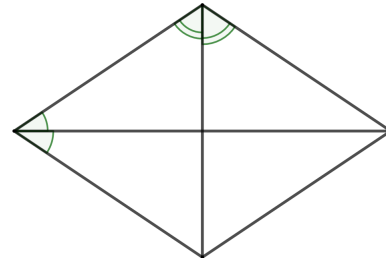
## 10 Ромб

**Определение:** Ромб – это четырехугольник, у которого все стороны равны.

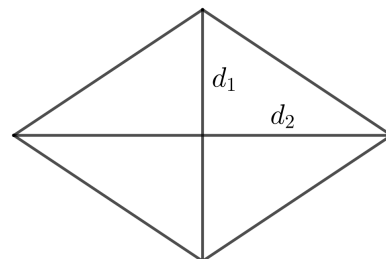
1. Диагонали ромба пересекаются под углом  $90^\circ$ .



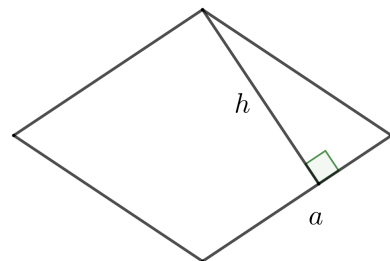
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.



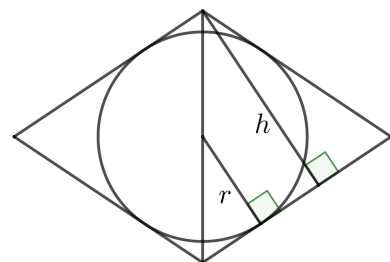
3.  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ .



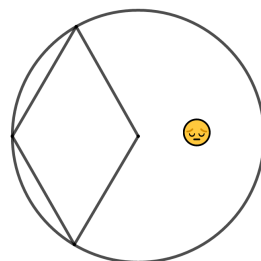
4.  $S = a \cdot h$ .



5. В ромб всегда можно вписать окружность, радиус которой будет равен  $r = \frac{h}{2}$ .

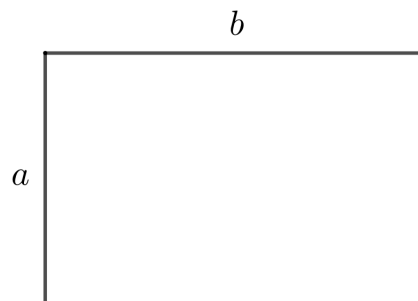


6. Если ромб не является квадратом, то описать вокруг него окружность нельзя.



## 11 Прямоугольник

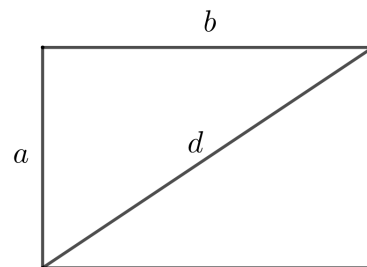
1.  $S = a \cdot b$ .



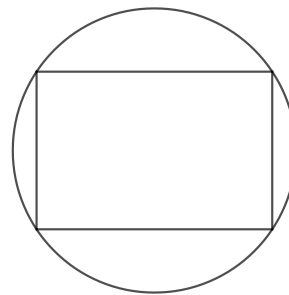
2. Диагонали прямоугольника равны. Их можно вычислить, зная стороны прямоугольника, по теореме Пифагора:

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

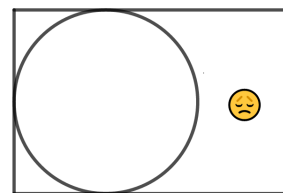
\*На самом деле, любой параллелограмм, у которого диагонали равны, является прямоугольником.



3. Вокруг прямоугольника всегда можно описать окружность.



4. Если прямоугольник не является квадратом, то вписать в него окружность нельзя.



## 12 Квадрат

1.  $S = a \cdot a = a^2$ .

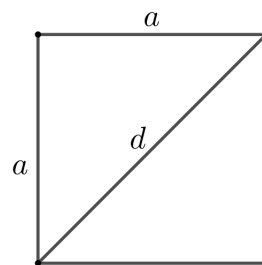
2. Диагональ квадрата можно найти по теореме Пифагора:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, d = a\sqrt{2}.$$

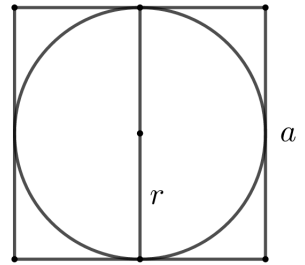
3. Площадь квадрата можно выразить через длину его диагонали:

Так как  $S = a^2$ , а  $d^2 = 2a^2$ , значит  $a^2 = \frac{d^2}{2}$ , значит

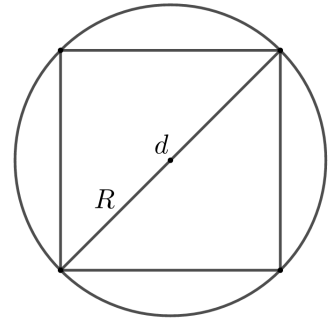
$$S = \frac{d^2}{2}.$$



$$4. r = \frac{a}{2}.$$



$$5. R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



## 13 Синус, косинус, тангенс, котангенс

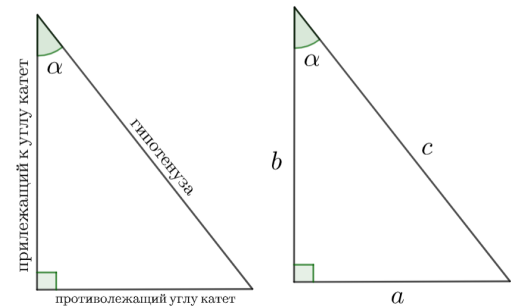
Для острых углов  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$  определяются следующим образом:

Синус — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ .

Косинус — это отношение прилежащего катета к гипотенузе:  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ .

Тангенс — это отношение противолежащего катета к прилежащему катету:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ .

Котангенс — это отношение прилежащего катета к противолежащему катету:  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$ .



Напоминаем, что для тупых углов  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$  определяются через тригонометрическую окружность.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

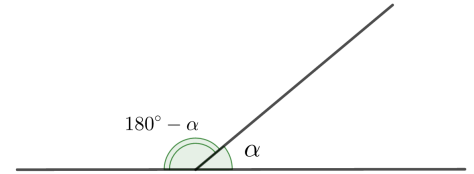
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$



Из определений легко получить следующие формулы:

Основное тригонометрическое тождество:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$$

## 14 Окружность

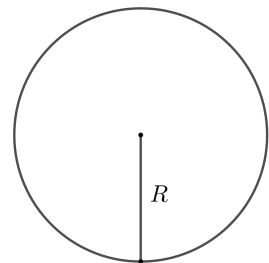
**Определение:** Окружность — это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки.

1. Длина окружности:

$$C = 2\pi R$$

2. Площадь круга:

$$S = \pi R^2$$

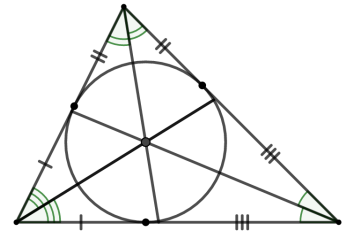


## 15 Вписанная окружность

1. Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис.

\*В треугольнике биссектрисы всегда пересекаются в одной точке, поэтому в треугольник всегда можно вписать окружность. А в многоугольнике биссектрисы не всегда пересекаются в одной точке, поэтому в многоугольник не всегда можно вписать окружность.

Если вы не верите, можете попробовать вписать окружность в прямоугольник.

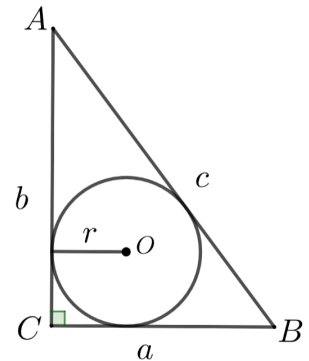


2. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно вычислить по формуле:

$$r = p - c, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}$$

или

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

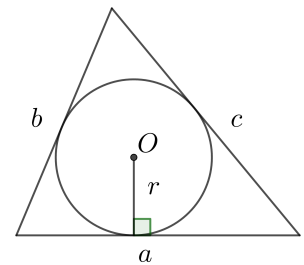


3. Радиус вписанной в треугольник окружности можно найти по формуле:

$$S = pr,$$

где  $p$  – это полупериметр.

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

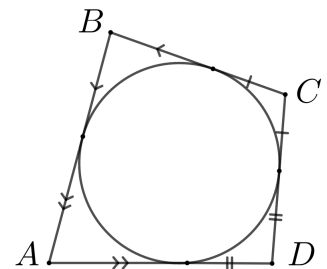


\*На самом деле площадь любого многоугольника, в который можно вписать окружность, находится по формуле  $S = pr$ , где  $p$  – полупериметр, а  $r$  – радиус вписанной окружности.

4. Когда в четырехугольник можно вписать окружность:

Если  $AB + CD = BC + AD$ , то в четырехугольник можно вписать окружность.

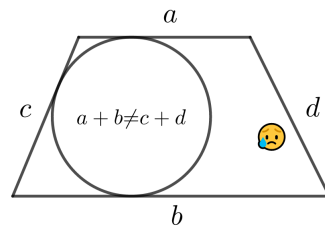
Верно и обратное: если в четырехугольник вписана окружность, то суммы длин противоположных сторон равны.



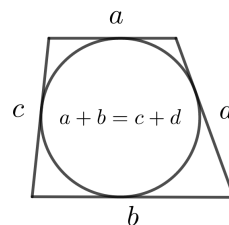
5. Четырехугольники, в которые можно вписать окружность:

а) Трапеция:

обычно нельзя вписать окружность.



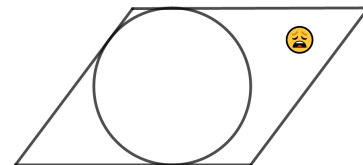
Можно только тогда, когда  $a + b = c + d$



б) Параллелограмм:

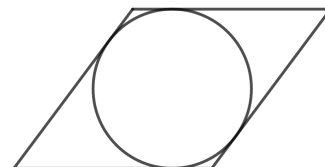
обычно нельзя вписать окружность.

Можно только тогда, когда параллелограмм – ромб.



в) Ромб:

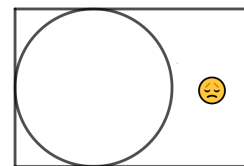
всегда можно вписать окружность.



г) Прямоугольник:

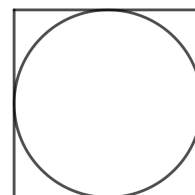
обычно нельзя вписать окружность.

Можно только тогда, когда прямоугольник – квадрат.



д) Квадрат:

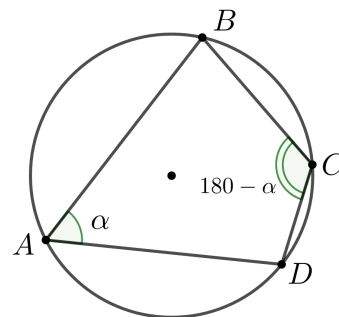
всегда можно вписать окружность.



## 16 Описанная окружность

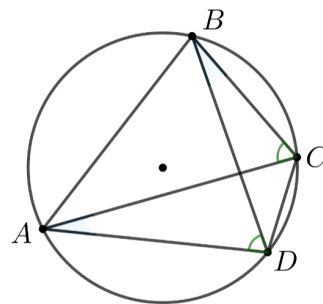
1. I признак четырехугольника, вписанного в окружность:

Четыре точки лежат на одной окружности, если два противоположных угла в сумме дают  $180^\circ$ .

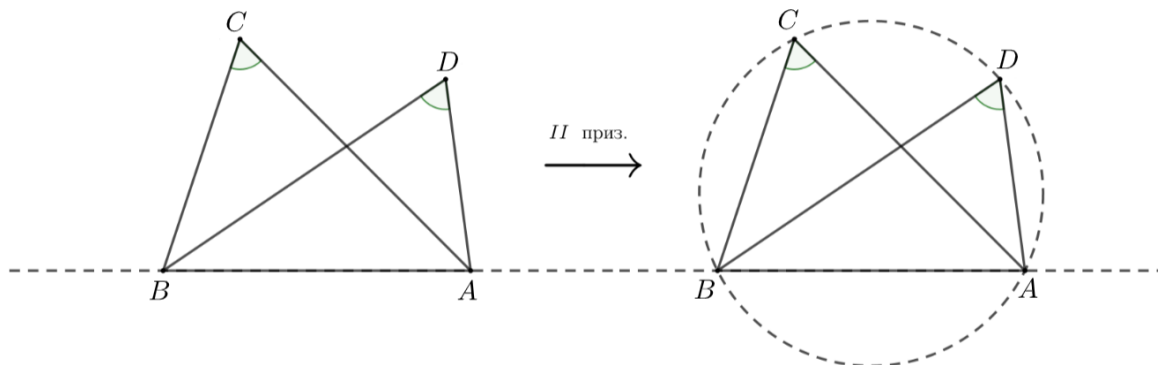


2. II признак четырехугольника, вписанного в окружность:

Точки  $C$  и  $D$  лежат по одну сторону от прямой, содержащей отрезок  $AB$ . Углы  $ACB$  и  $BDA$  равны тогда и только тогда, когда точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на одной окружности.



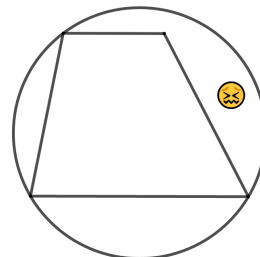
\*Чаще всего мы используем это для того, чтобы доказать, что точки  $A, B, C, D$  лежат на одной окружности.



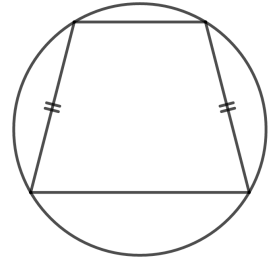
3. Четырехугольники, вокруг которых можно описать окружность:

а) Трапеция:

обычно нельзя описать.



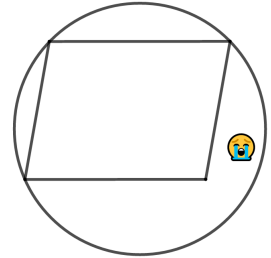
Можно только тогда, когда трапеция равнобедренная.



б) Параллелограмм:

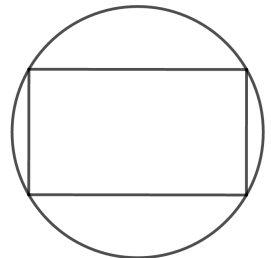
обычно нельзя описать окружность.

Можно только тогда, когда параллелограмм – прямоугольник.



в) Прямоугольник:

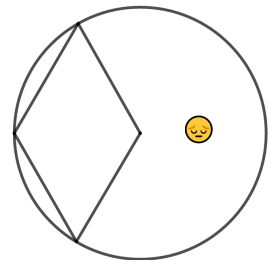
всегда можно описать окружность.



г) Ромб:

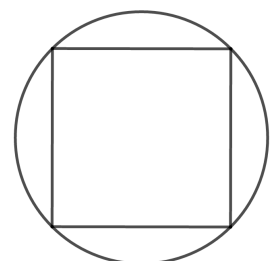
обычно нельзя описать окружность.

Можно только тогда, когда ромб – квадрат.



д) Квадрат:

всегда можно описать окружность.

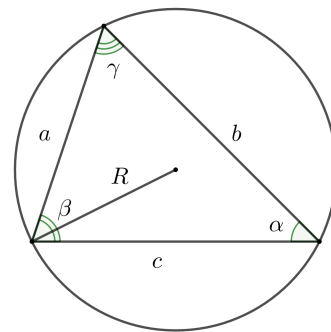


## 17 Теорема синусов

1. Теорема синусов:  $2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

\*Чаще всего мы используем теорему синусов для нахождения радиуса описанной окружности.

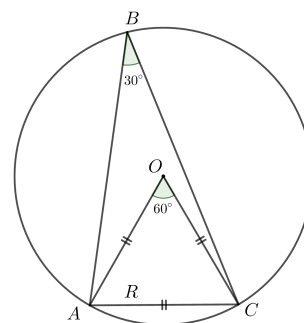
\*\*А еще мы используем теорему синусов, если знаем в треугольнике два угла и одну сторону и хотим найти еще одну сторону.



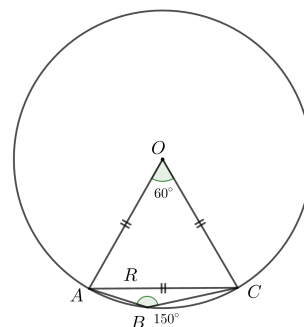
2. Иногда без теоремы синусов:

Вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу, равен либо  $30^\circ$  либо  $150^\circ$ :

а) Если точка  $B$  лежит на большей дуге  $AC$ , то треугольник  $AOC$  – равносторонний, а  $\angle AOC = 60^\circ$ , следовательно, угол  $ABC = 30^\circ$ .



б) Если точка  $B$  лежит на меньшей дуге  $AC$ , то треугольник  $AOC$  – равносторонний, а  $\angle AOC = 60^\circ$ , следовательно, угол  $ABC = 150^\circ$ .



## 18 Теорема косинусов

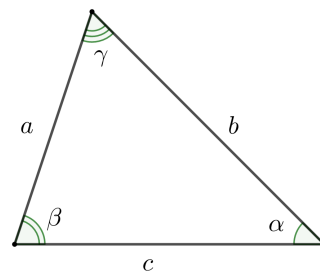
Теорема косинусов поможет в случае, если нам известны три стороны треугольника и требуется найти какой-нибудь из углов, или если известны две стороны и угол и необходимо найти третью сторону.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

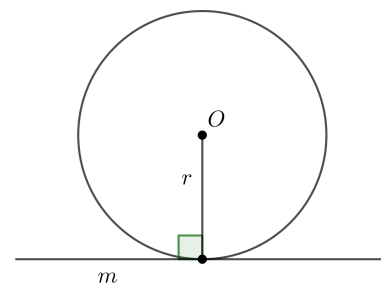
\*Теорема косинусов – она как теорема Пифагора, только в теореме Пифагора нет  $-2bc \cos \alpha$ , ведь  $\cos 90^\circ = 0$ .



## 19 Окружность и касательная

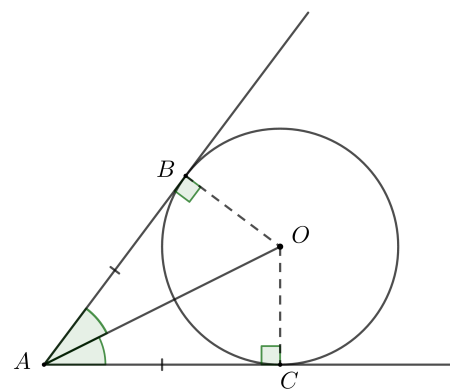
1. Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной:

$$r \perp m$$



2. Если из точки  $A$  провести касательные (две) к окружности, где  $B$  и  $C$  - точки касания, то  $AB = AC$ .

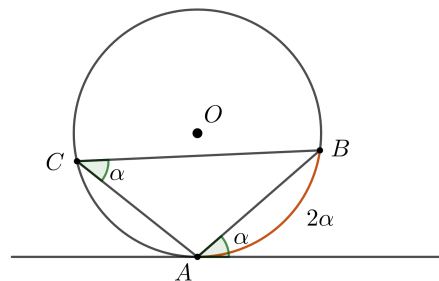
3. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.



4. Пусть к окружности в точке  $A$  проведена касательная,  $AB$  – хорда этой окружности, проходящая через точку  $A$ , тогда угол  $\alpha$  между хордой  $AB$  и касательной равен половине угловой величины дуги  $AB$ , а значит, любому вписанному углу, опирающемуся на дугу  $AB$ .

Угол между касательной и хордой:

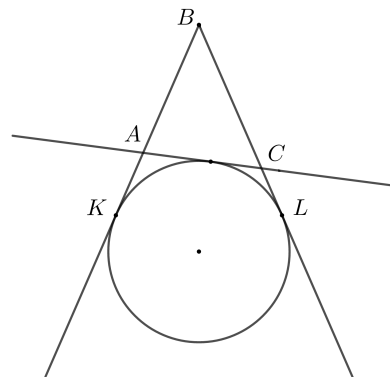
$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB}$$



5. Важное свойство вневписанной окружности:

Пусть периметр треугольника  $ABC = P$ , тогда  $BL = BK = \frac{P}{2}$ .

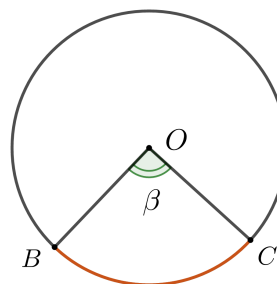
Например, если стороны треугольника  $AB = 5$ ,  $AC = 6$ ,  $BC = 7$ , то  $BL = BK = \frac{AB + AC + BC}{2} = 9$ .



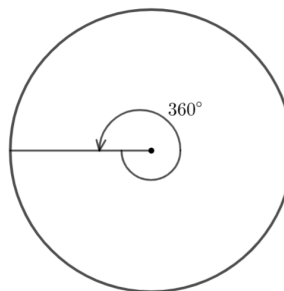
## 20 Вписанный и центральный углы

1. Центральный угол – угол с вершиной в центре окружности.

$$\angle \beta = \overset{\frown}{BC}$$

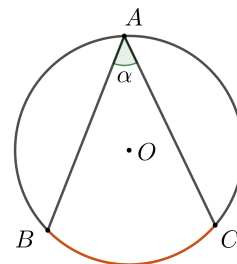


2. Градусная мера всей дуги окружности равна  $360^\circ$ .



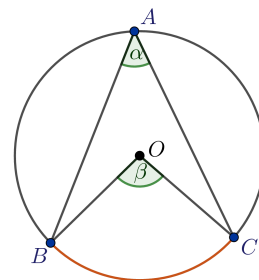
3. Вписанный угол - угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC}$$



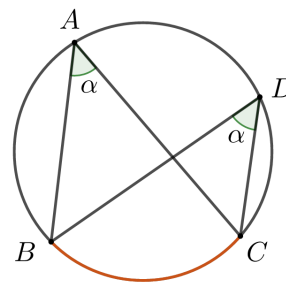
4. Вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный, равен его половине.

$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \angle \beta$$



5. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

$$\angle BAC = \angle BDC$$



## 21 Углы многоугольника

1. Сумма углов  $n$ -угольника равна  $180^\circ \cdot (n - 2)$ , например сумма углов четырехугольника равна  $180^\circ \cdot (4 - 2) = 360^\circ$ .

2. Угол правильного  $n$ -угольника равен  $\frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n}$ , например, у правильного четырехугольника (квадрата) угол равен  $\frac{180^\circ \cdot (4 - 2)}{4} = 90^\circ$ .

## 22 Шестиугольник

**Определение:** Правильный шестиугольник — это шестиугольник, у которого все стороны и все углы равны.

1. Правильный шестиугольник состоит из шести правильных треугольников. Супер важное свойство!

2. Угол правильного шестиугольника равен  $120^\circ$ .

3. Радиус описанной окружности:  $R = a$ .

4. Радиус вписанной окружности:

$$r = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

5. Площадь правильного шестиугольника:

$$S = 6S_{\triangle} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$

