

Содержание

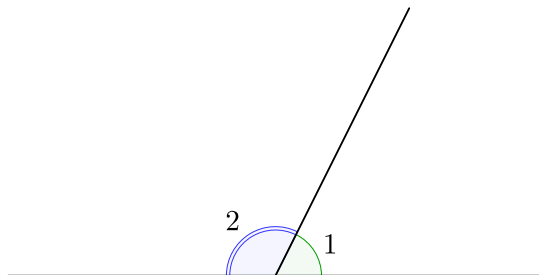
1	Углы	3
2	Треугольники общего вида	5
3	Прямоугольный треугольник	24
4	Площади	30
5	Свойства отношений и площадей	39
6	Медиана	45
7	Биссектриса	47
8	Средняя линия	52
9	Трапеция	56
10	Основные четырёхугольники	69
11	Вписанные и описанные четырехугольники	74
12	Центральные и вписанные углы	78
13	Свойства ортоцентра	88
14	Конструкции и теоремы	93
15	Доказательства	122
15.1	Углы	122
15.2	Треугольники общего вида	123

1 Углы

1. Смежные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными. Сумма смежных углов равна 180° .

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$



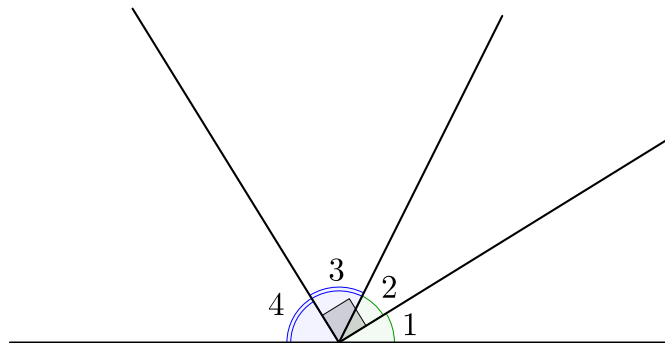
2. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

$$\angle 1 = \angle 2;$$

$$\angle 3 = \angle 4;$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2 \cdot (\angle 2 + \angle 3) = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ.$$



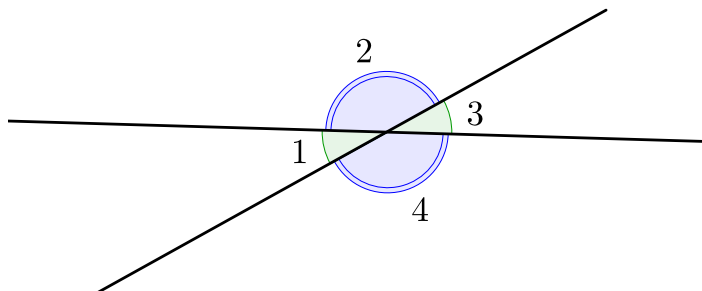
3. Вертикальные углы:

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

Вертикальные углы равны.

$$\angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 2 = \angle 4$$



4. Если даны две параллельные прямые и их секущая, то углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются **соответственными**, углы 3 и 6, 4 и 5 называются **накрест лежащими**, углы 3 и 5, 4 и 6 называются **внутренними односторонними**. Тогда:

Соответственные углы равны:

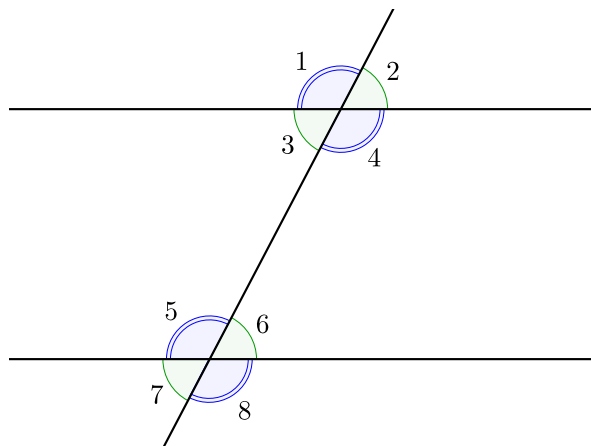
$$\angle 1 = \angle 5, \quad \angle 2 = \angle 6, \quad \angle 3 = \angle 7, \quad \angle 4 = \angle 8;$$

Накрест лежащие углы равны:

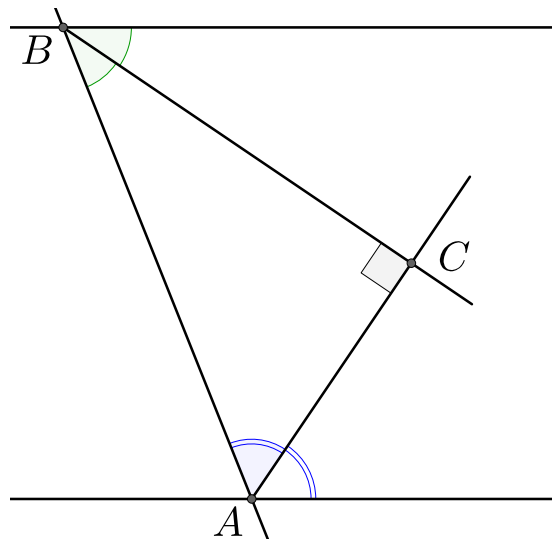
$$\angle 3 = \angle 6; \quad \angle 4 = \angle 5;$$

Внутренние односторонние углы в сумме дают 180 градусов:

$$\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ; \quad \angle 4 + \angle 6 = 180^\circ.$$



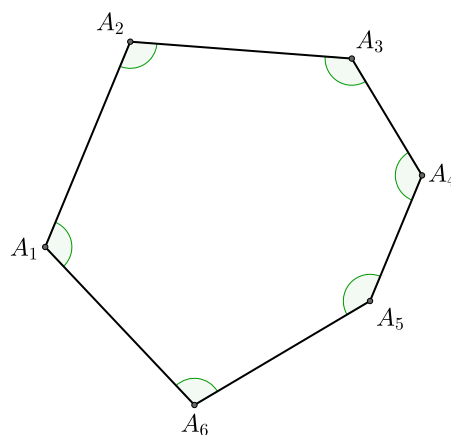
5. Биссектрисы односторонних внутренних углов перпендикулярны.



6. Сумма внутренних углов произвольного n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Например, если $n = 6$, то

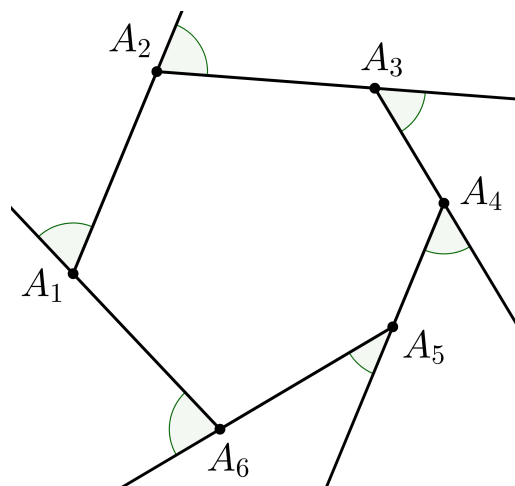
$$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 = 180^\circ \cdot (6 - 2) = 720^\circ.$$



7. **Внешним углом** многоугольника будем называть угол, смежный внутреннему углу многоугольника. Их сумма равна

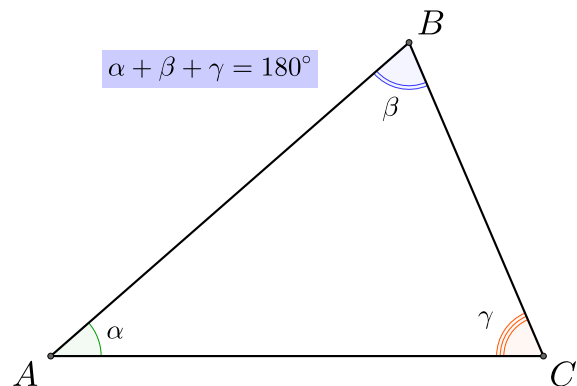
$$(180^\circ - \angle A_1) + \dots + (180^\circ - \angle A_n) = n \cdot 180^\circ -$$

$$-180^\circ \cdot (n - 2) = 360^\circ.$$

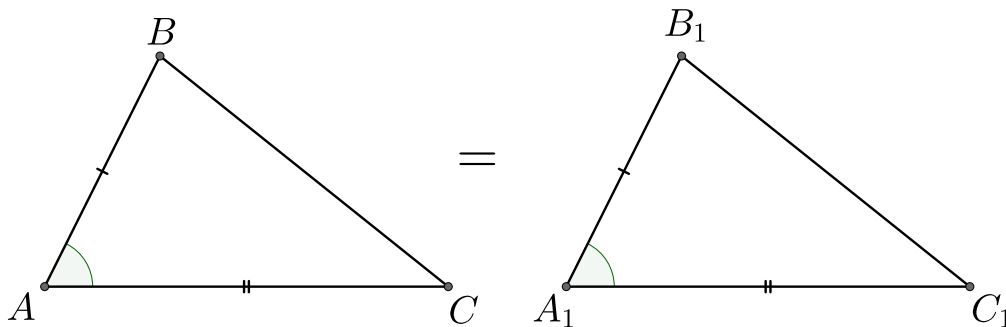


2 Треугольники общего вида

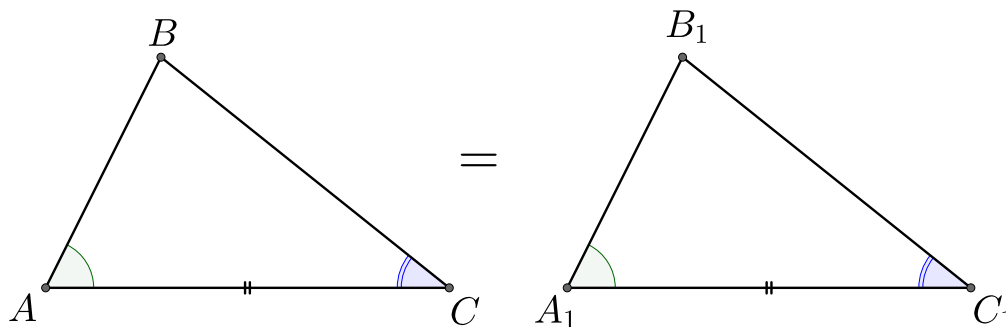
1. Сумма углов треугольника равна 180° .



2. Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними.



3. Второй признак равенства треугольников: по стороне и прилежащим к ней углам.

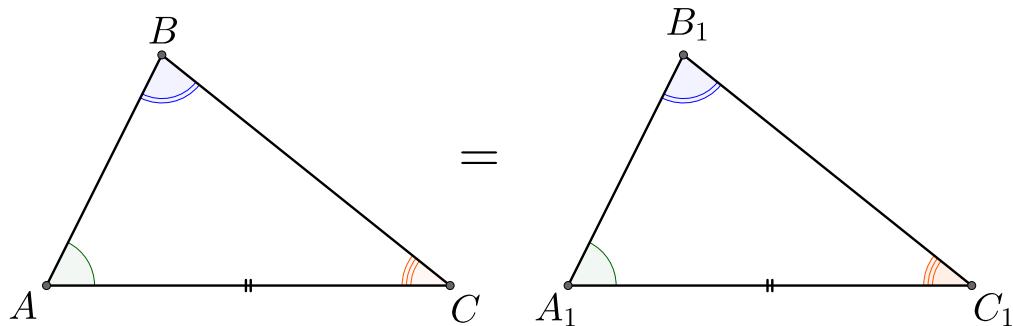


Замечание: На самом деле ситуация, в которой один угол прилѣг к стороне, а второй – нет, также приводит к равенству треугольников, так как оставшийся угол задаѣтся однозначно по двум известным.

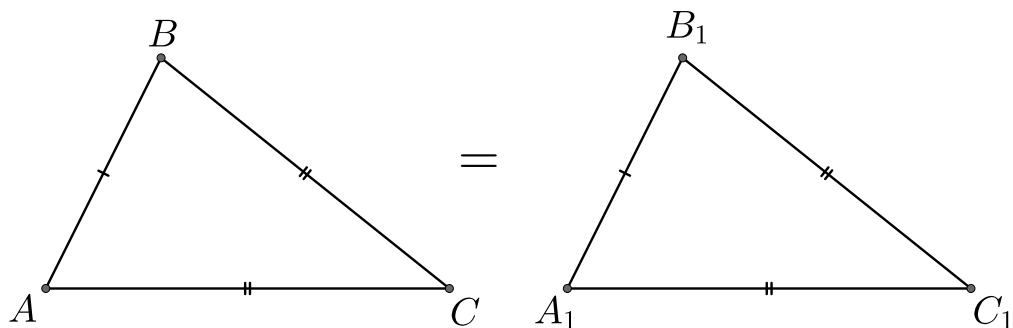
Ситуация, в которой один из пар равных углов прилегаѣт к равной стороне, а вторая пара равных углов нет, тоже приводит к равенству треугольников. Действительно, пусть нам даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причѣм $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AC = A_1C_1$, тогда

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle B_1) = \angle C_1 \implies \angle C = \angle C_1$$

А значит треугольники равны по второму признаку.

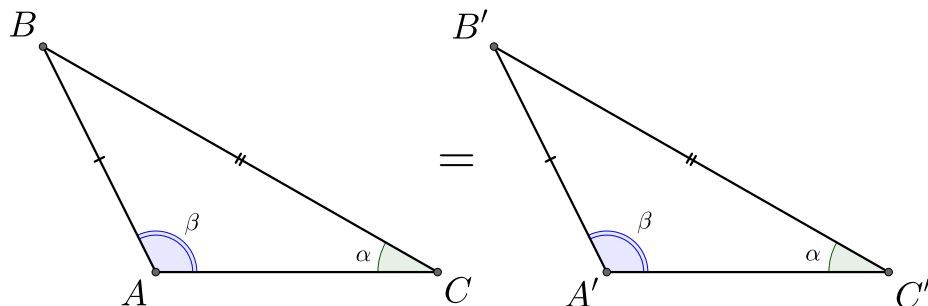


4. Третий признак равенства треугольников: по трем сторонам.

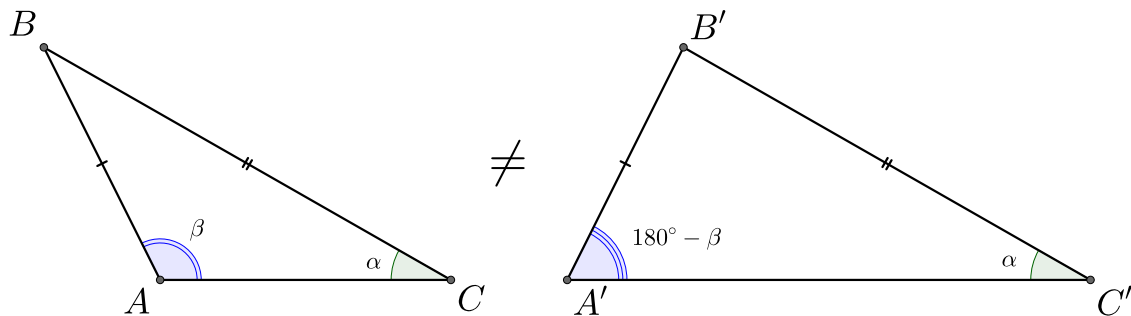


5. Если две стороны и угол напротив одной из сторон первого треугольника соответственно равны двум сторонам и углу второго треугольника, то возможны два варианта:

1) Углы напротив второй стороны равны $\iff$ треугольники равны

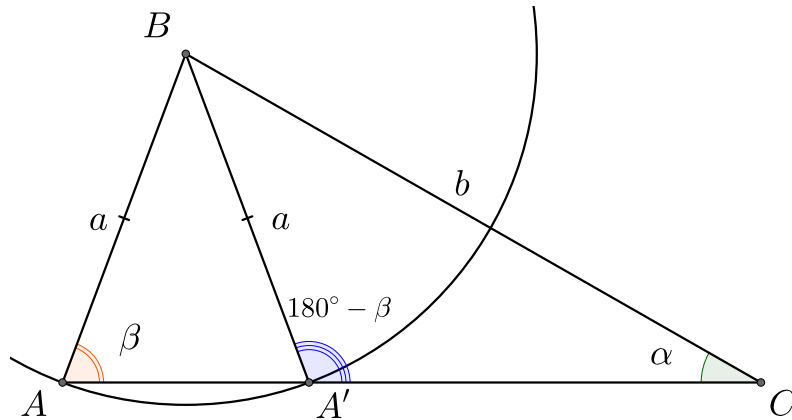


2) Углы напротив второй стороны дополняют друг друга до $180^\circ \iff$ треугольники не равны (кроме случая прямоугольного треугольника).

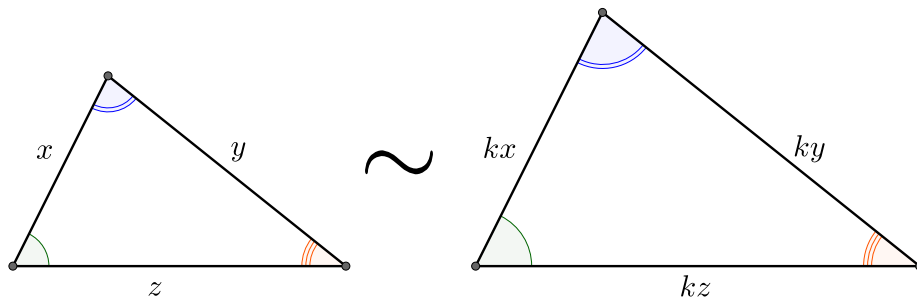


Замечание: Покажем, почему в четвёртом признаке равенства треугольников возникает два случая. Пусть длина стороны AB равна a , длина стороны BC равна b и угол при вершине C равен α . Построим два разных треугольника со сторонами a , b и углом α : построим угол α и назовем его вершину C , от вершины C отложим от одной из сторон угла отрезок, равный по длине b , его концом назовём точку B , через вершину B проведём

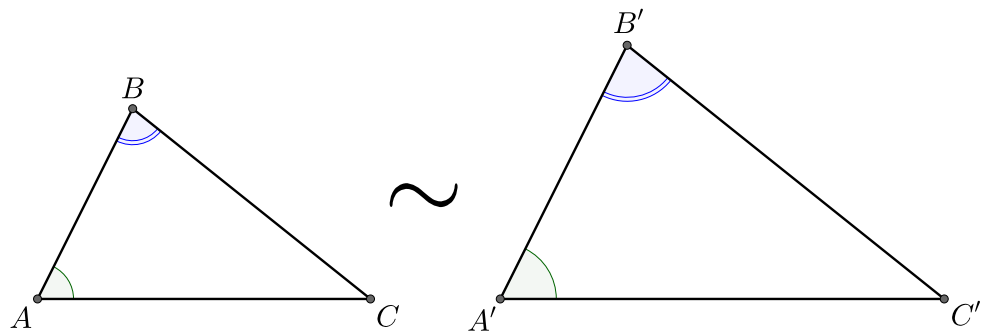
окружность радиуса a , которая может пересечь вторую сторону угла в двух точках (назовём их A и A'). Тогда отрезки AB и $A'B$ имеют длину a , то есть мы получили два не совпадающих треугольника ABC и $A'BC$, которые имеют стороны a , b и угол α . Именно поэтому в первом признаке равенства треугольников речь идёт об угле **между** сторонами.



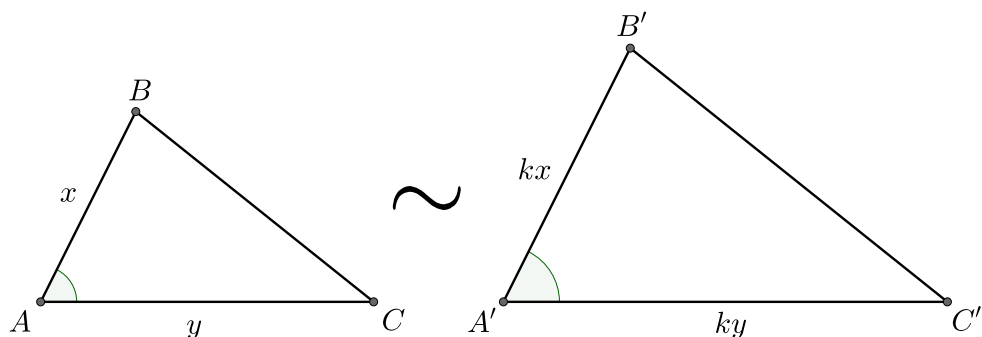
Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны, а стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого. Отношение k соответственных сторон подобных треугольников называется **коэффициентом подобия**.



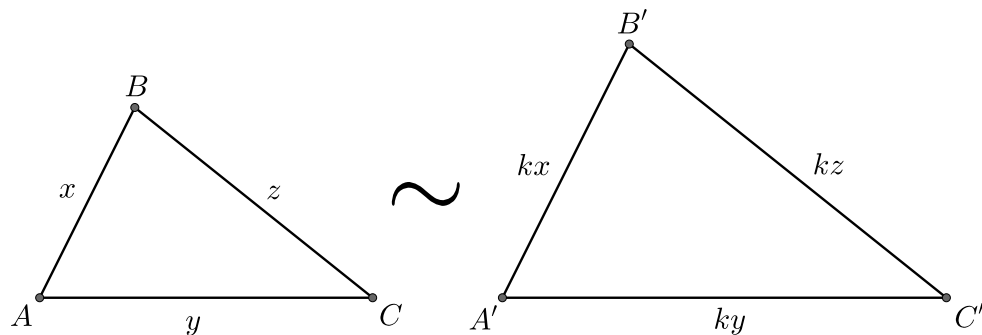
6. Первый признак подобия двух треугольников: по двум углам.



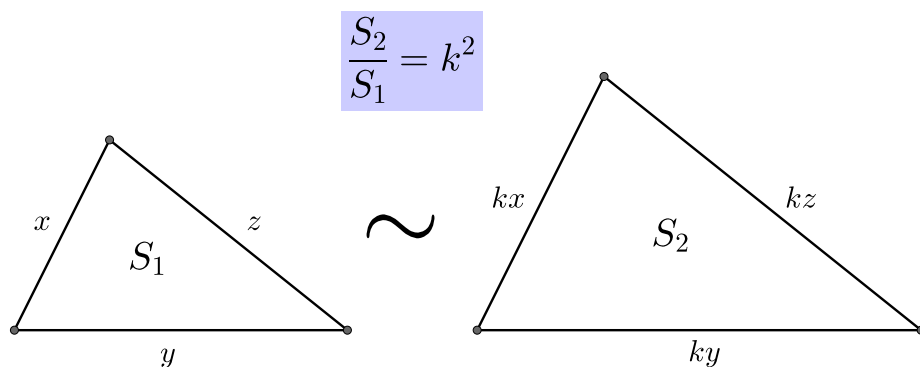
7. Второй признак подобия двух треугольников: по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.



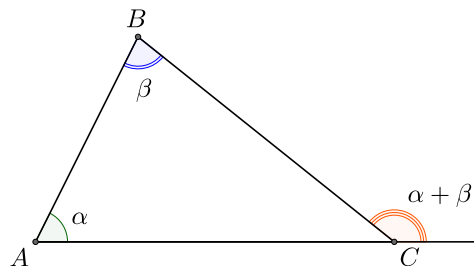
8. Третий признак подобия двух треугольников: по трём пропорциональным сторонам.



9. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.



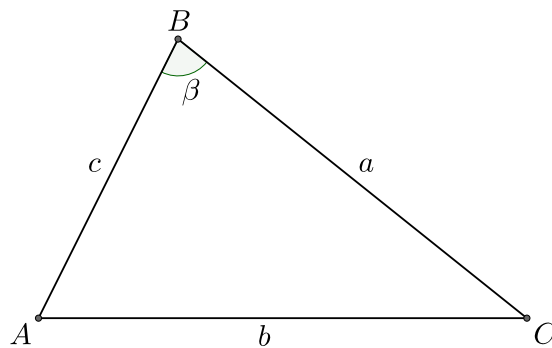
10. Теорема о внешнем угле треугольника: внешний угол треугольника равен сумме двух, не смежных с ним, внутренних углов треугольника.



11. Неравенство треугольника: для сторон треугольника верны неравенства:

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

12. Напротив большей стороны лежит больший угол: если $b > a$ и c , то β – больший угол треугольника.

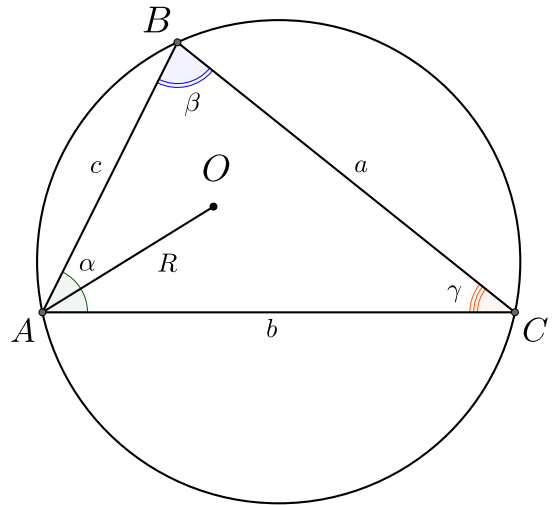


13. Теорема синусов: $2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Доказательство: Докажем, что $2R = \frac{b}{\sin \beta}$.

Оставшиеся соотношения доказываются аналогично.

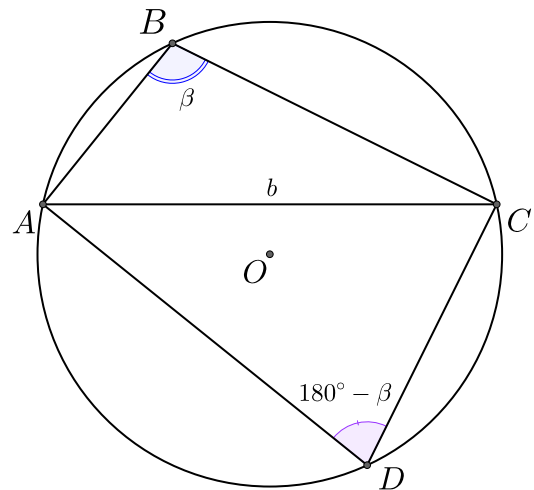
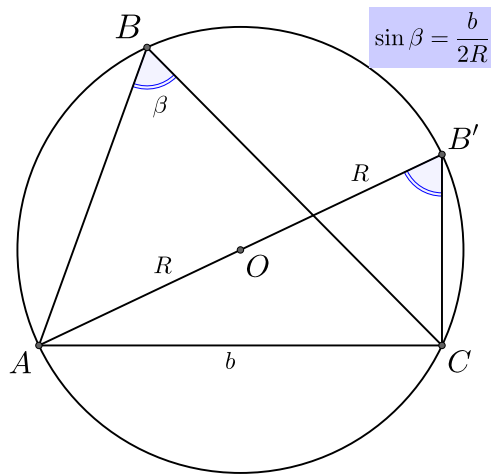
Случай 1: $\beta \leq 90^\circ$. Рассмотрим треугольник $AB'C$, вписанный в окружность, причём AB' – диаметр окружности. Угол $\angle ACB'$ опирается на диаметр окружности, поэтому он равен 90° . Углы $\angle ABC$ и $\angle AB'C$ опираются на дугу $\widehat{AC}$, значит $\angle AB'C = \beta$. Отсюда получаем, что $\sin \beta = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{b}{\sin \beta}$.



Случай 2: $\beta > 90^\circ$. Рассмотрим треугольник ADC , вписанный в окружность, угол $\angle ADC$ опирается на дугу $\widehat{CA}$, значит $\angle ADC = 180^\circ - \beta < 90^\circ$, поэтому верно соотношение $\sin(180^\circ - \beta) = \frac{b}{2R}$. Так как $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$, имеем $2R = \frac{b}{\sin \beta}$. $\square$

Замечание 1: Чаще всего мы используем теорему синусов для нахождения радиуса описанной окружности.

Замечание 2: А еще мы используем теорему синусов, если знаем в треугольнике два угла и одну сторону и хотим найти еще одну сторону.



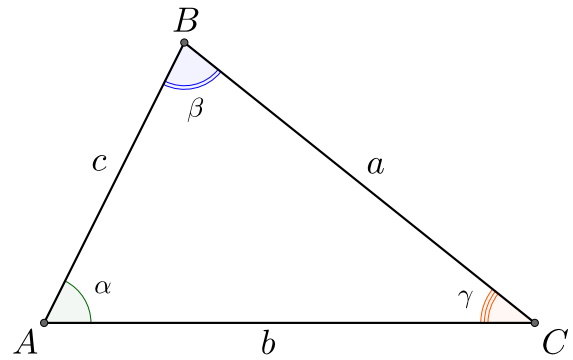
14. Теорема косинусов утверждает, что в произвольном треугольнике верны соотношения:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Доказательство: Докажем первую из формул. Остальные доказываются аналогично.

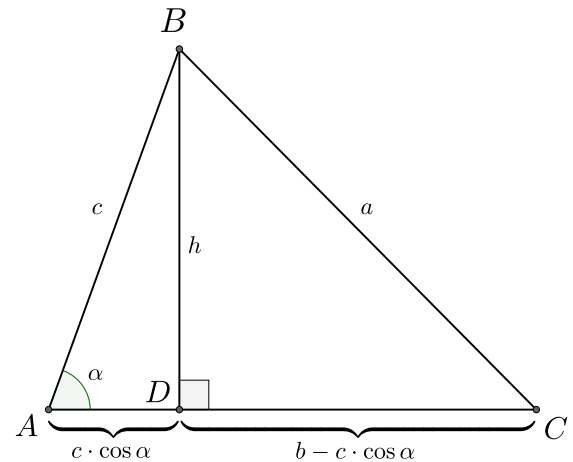


Случай 1: Пусть углы при основании AC являются острыми. В этом случае высота BD упадёт на отрезок AC . Получаем: $\cos \alpha = \frac{AD}{c} \implies AD = c \cdot \cos \alpha$, $DC = b - c \cdot \cos \alpha$. Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников ABD и DBC :

$$h^2 = c^2 - (c \cdot \cos \alpha)^2;$$

$$h^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos \alpha)^2.$$

Приравниваем правые части полученных равенств: $c^2 - (c \cdot \cos \alpha)^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos \alpha)^2$. Откуда получаем, что $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$.

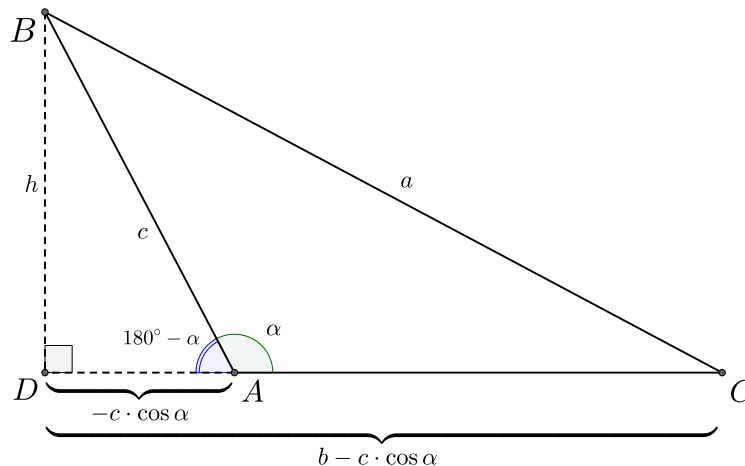


Случай 2: Пусть угол α – тупой. В этом случае высота BD упадёт на продолжение стороны AC . Угол $\angle BAD$ равен $180^\circ - \alpha$. $\cos \alpha = -\cos 180^\circ - \alpha$, поэтому $AD = -c \cdot \cos \alpha$, $DC = b - c \cdot \cos \alpha$. Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников ABD и DBC :

$$h^2 = c^2 - (-c \cdot \cos \alpha)^2;$$

$$h^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos \alpha)^2.$$

Приравниваем правые части полученных равенств: $c^2 - (c \cdot \cos \alpha)^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos \alpha)^2$. Откуда получаем, что $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$.

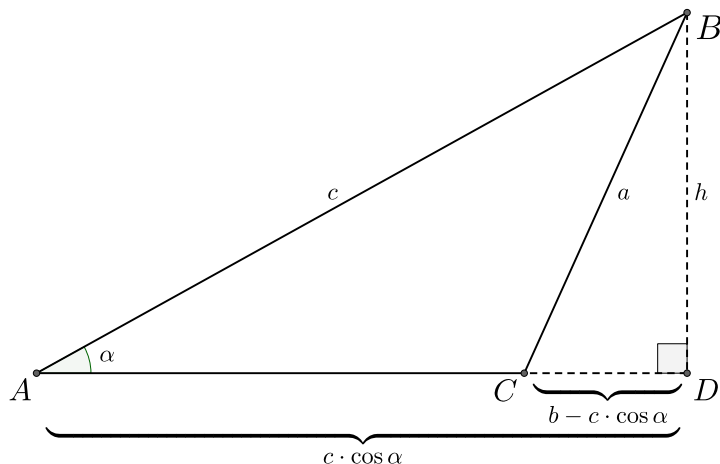


Случай 3: Пусть угол γ – тупой. В этом случае высота BD упадёт на продолжение стороны AC . $AD = c \cdot \cos \alpha$, $CD = b - c \cdot \cos \alpha$. Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников ABD и DBC :

$$h^2 = c^2 - (c \cdot \cos \alpha)^2;$$

$$h^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos \alpha)^2.$$

Приравниваем правые части полученных равенств: $c^2 - (c \cdot \cos \alpha)^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos \alpha)^2$.
Откуда получаем, что $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$. $\square$



Теорема косинусов позволяет:

1) Найти одну из сторон треугольника, если известны две другие стороны и угол между ними: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$.

2) Найти угол треугольника, если известны все стороны треугольника. $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

3) Найти одну из сторон треугольника, если известны две стороны и угол не между ними из квадратного уравнения (в этом случае решений может быть два): $a^2 - 2ac \cos \beta + c^2 - b^2 = 0$ (в данном случае мы знаем стороны b , c и угол между сторонами a и c).

Замечание: Теорема Пифагора – это частный случай теоремы косинусов, действительно, если c – гипотенуза, a , b – катеты, получаем $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ = a^2 + b^2$, так как $\cos 90^\circ = 0$.

15. Пусть c – БОльшая сторона треугольника, тогда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \iff \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

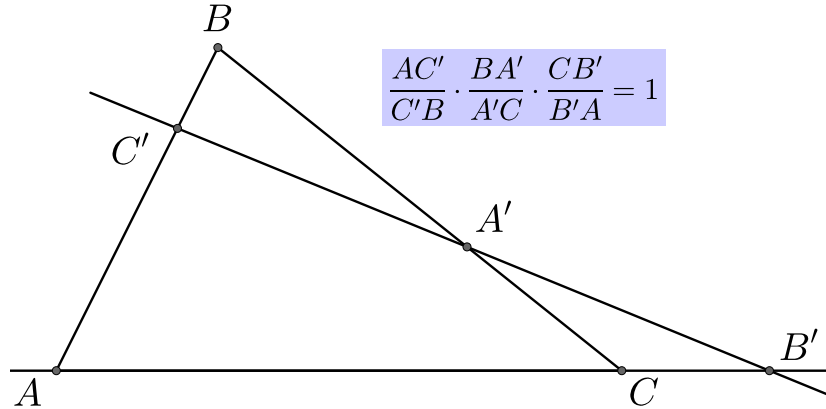
Знаменатель всегда положителен, поэтому знак косинуса зависит только от числителя:

1) если $c^2 > a^2 + b^2$, то $\cos \gamma < 0$, значит треугольник тупоугольный;

2) если $c^2 = a^2 + b^2$, то $\cos \gamma = 0$ треугольник прямоугольный;

3) если $c^2 < a^2 + b^2$, то $\cos \gamma > 0$, значит угол γ – острый. Так как γ лежит напротив БОльшей стороны, то γ самый большой угол в треугольнике, а значит треугольник остроугольный.

16. **Теорема Менелая.** Пусть прямая пересекает треугольник ABC , причем C' – это точка ее пересечения со стороной AB , A' – точка ее пересечения со стороной BC и B' – точка ее пересечения с продолжением стороны AC . Тогда имеет место соотношение:

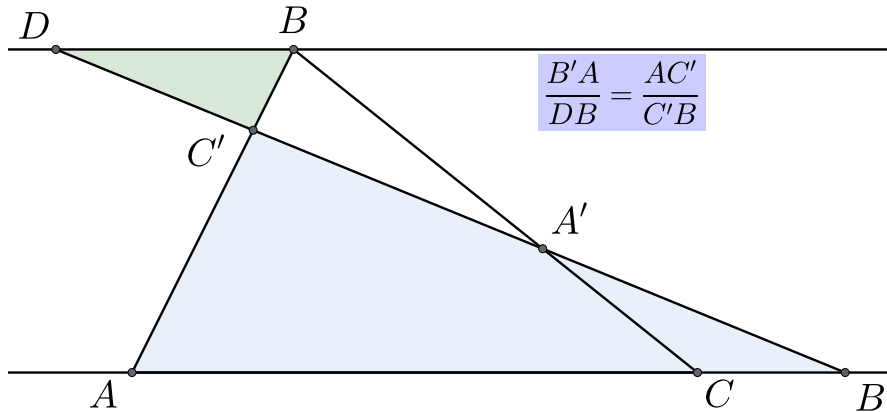


Обратно, пусть точки A' , B' , C' лежат на сторонах треугольника или на их продолжениях, тогда если верно соотношение

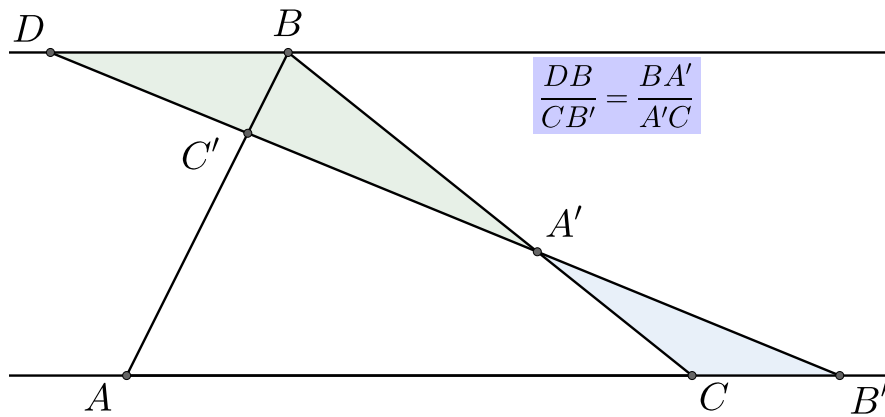
$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

то точки A' , B' , C' лежат на одной прямой.

Доказательство: Докажем основное утверждение: через вершину B проведём прямую, параллельную стороне AC , D – точка пересечения прямой $B'C'$ с данной прямой. Углы $\angle AC'B'$ и $\angle DC'B$ являются вертикальными, поэтому они равны. Углы $\angle BAB'$ и $\angle ABD$ равны, так как являются накрест лежащими при параллельных прямых AB' и BD , значит треугольники $DC'B$ и $B'C'A$ подобны, то есть верно соотношение $\frac{B'A}{DB} = \frac{AC'}{C'B}$.



Аналогично легко показать, что треугольники $DA'B$ и $B'A'C$ подобны, а значит выполнено соотношение $\frac{DB}{CB'} = \frac{BA'}{A'C}$.



Перемножим полученные равенства:

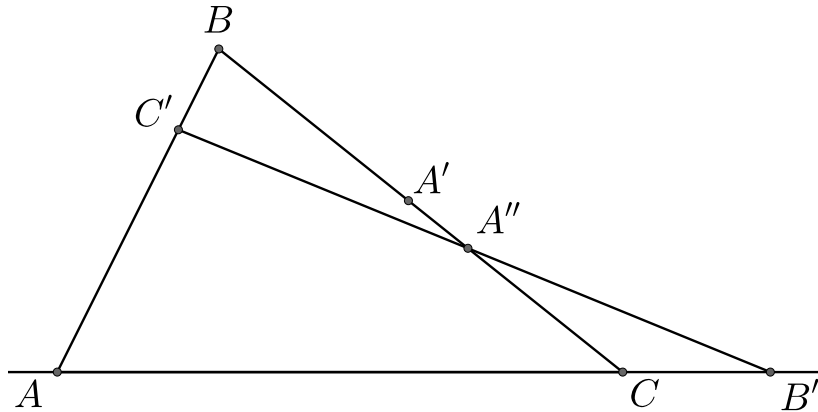
$$\frac{B'A}{DB} \cdot \frac{DB}{CB'} = \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \implies \frac{B'A}{CB'} = \frac{AC' \cdot BA'}{C'B \cdot A'C} \implies \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \quad \square$$

Докажем обратное утверждение. Пусть выполнено соотношение

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

но точки A' , B' , C' не лежат на одной прямой. Через точки C' и B' проведём прямую, она пересечёт сторону BC в точке A'' . Для треугольника ABC и точек A'' , B' , C' запишем теорему Менелая:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$



Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{BA''}{A''C} &= \frac{BA'}{A'C} = \frac{BA''}{AC - BA''} = \frac{BA'}{AC - BA'} \implies BA'' \cdot AC - BA'' \cdot BA' = BA' \cdot AC - BA'' \cdot BA' \\ &\implies BA'' \cdot AC = BA' \cdot AC \implies BA'' = BA', \end{aligned}$$

значит точки A' и A'' совпадают, поэтому точки A' , B' , C' лежат на одной прямой. $\square$

Замечание 1. Теорему очень легко запомнить, используя следующее мнемоническое правило: «Вершина $\rightarrow$ точка; точка $\rightarrow$ вершина», т.е. вначале мы выбираем стартовую вершину (в нашем случае это вершина A) и идем из нее в точку пересечения прямой и стороны треугольника, выходящей из вершины A (в нашем случае в C'), из нее во вторую вершину треугольника на этой стороне (в нашем случае B) и т.д.

Замечание 2. Если бы из A мы пошли в B' , ничего бы не изменилось. Наша теорема

выглядела бы так:

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

Чевианой будем называть любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной.

17. Теорема Чевы. Если три чевианы AA' , BB' , CC' , проведённые из разных вершин треугольника, пересекаются в одной точке, то выполнено соотношение:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Обратно, если выполнено соотношение

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

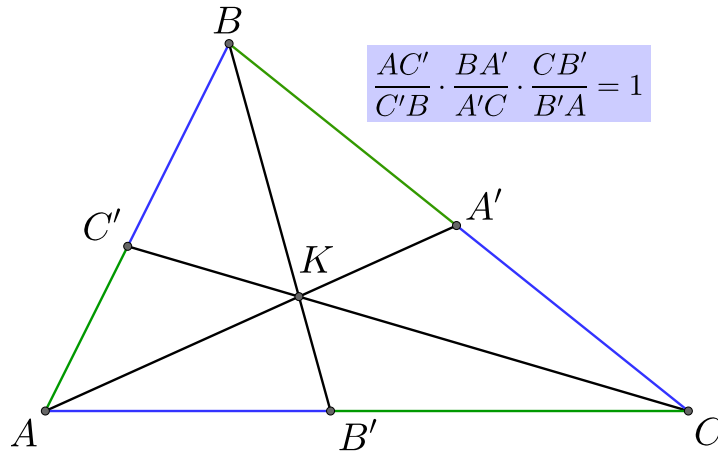
то чевианы пересекаются в одной точке.

Доказательство: Докажем прямую теорему Чевы. Применим теорему Менелая для треугольника ABB' и прямой CC' :

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BK}{KB'} \cdot \frac{B'C}{CA} = 1.$$

Применим теорему Менелая для треугольника $B'BC$ и прямой AA' :

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CA}{AB'} \cdot \frac{B'K}{KB} = 1.$$



Перемножим полученные равенства:

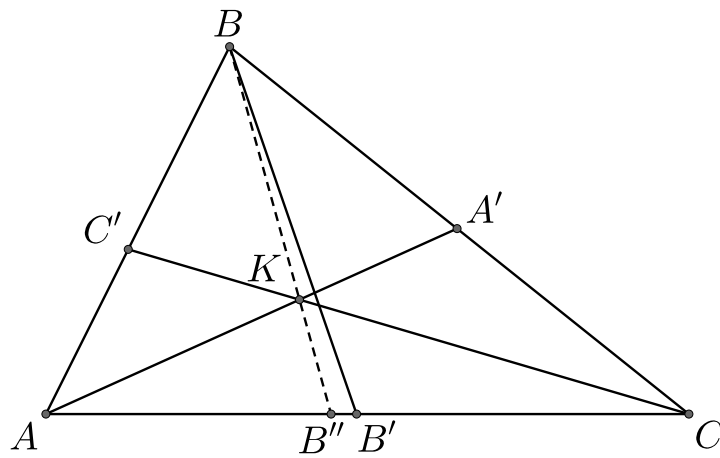
$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{BK}{KB'} \cdot \frac{CA}{AB'} \cdot \frac{B'C}{CA} \cdot \frac{B'K}{KB} = 1.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \quad \square$$

Докажем обратное утверждение. Прямые AA' и CC' пересекаются в точке K . Пусть прямая BK пересекает AC в точке B'' . Тогда по прямой теореме Чевы получаем:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = 1.$$



При этом верно равенство

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

А значит

$$\frac{CB''}{B''A} = \frac{CB'}{B'A},$$

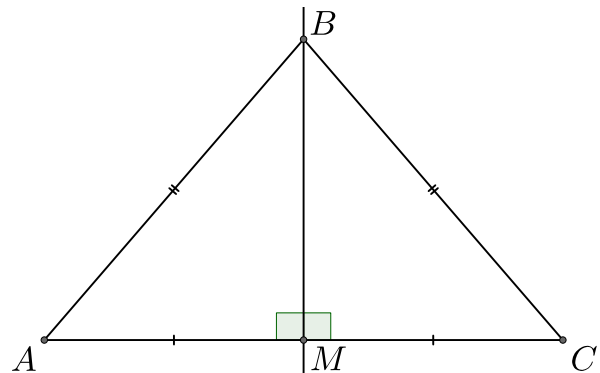
то есть точки B' и B'' совпадают. $\square$

Замечание. Теорему Чевы можно запомнить ровно так же, как и теорему Менелая: то есть вначале мы выбираем стартовую вершину (в нашем случае это вершина A) и идем из нее в точку пересечения прямой и стороны треугольника, выходящей из вершины A (в нашем случае в C'), из нее во вторую вершину треугольника на этой стороне (в нашем случае B) и т.д.

Прямая, перпендикулярная данному отрезку и проходящая через его середину, называется **серединным перпендикуляром**.

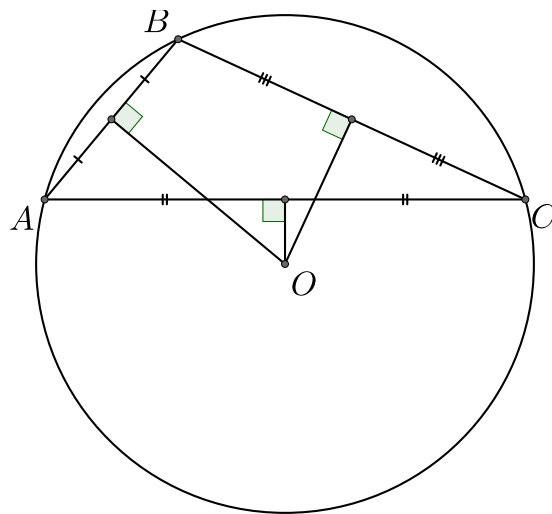
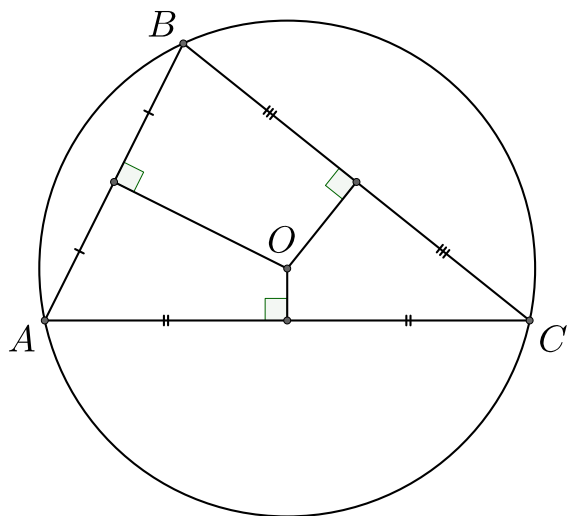
18. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре.

Обратно, если точка лежит на серединном перпендикуляре, то она равноудалена от концов отрезка.



Доказательство: Пусть точка B равноудалена от точек A и C , то есть $AB = BC$. Пусть M – середина отрезка AC , то есть $AM = MC$. Сторона BM общая для треугольников ABM и CBM , значит эти треугольники равны по трём сторонам. Значит $\angle AMB = \angle CMB$, при этом они являются смежными, а значит в сумме дают 180° , поэтому они оба равны 90° . $\square$ Докажем обратное утверждение. Пусть точка B лежит на серединном перпендикуляре. $AM = MC$ и сторона BM общая для треугольников ABM и CBM , а значит прямоугольные треугольники ABM и CBM равны, следовательно равны их гипотенузы: $AB = BC$. $\square$

19. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Данная точка является центром описанной вокруг треугольника окружности.

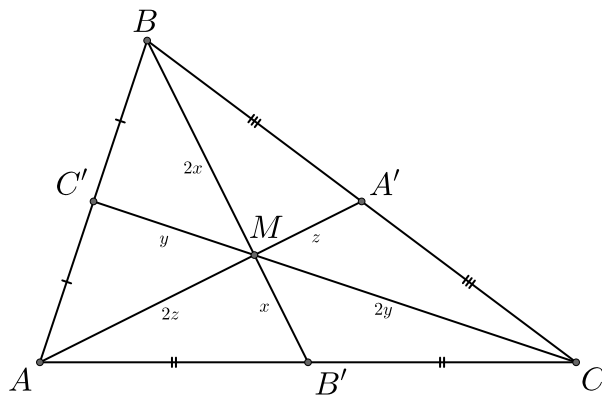
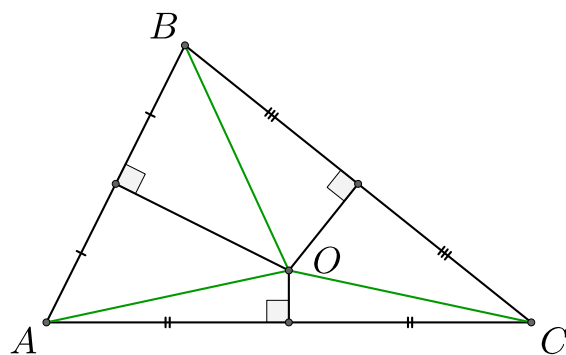


Доказательство: Пусть серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC пересекаются в точке O . Тогда по свойству серединного перпендикуляра получаем: $AO = OC$ и $AO = OB$, то есть $OB = OC$, следовательно точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC , значит O – точка пересечения серединных перпендикуляров. $AO = OB = OC$, поэтому центр описанной окружности лежит в точке O . $\square$

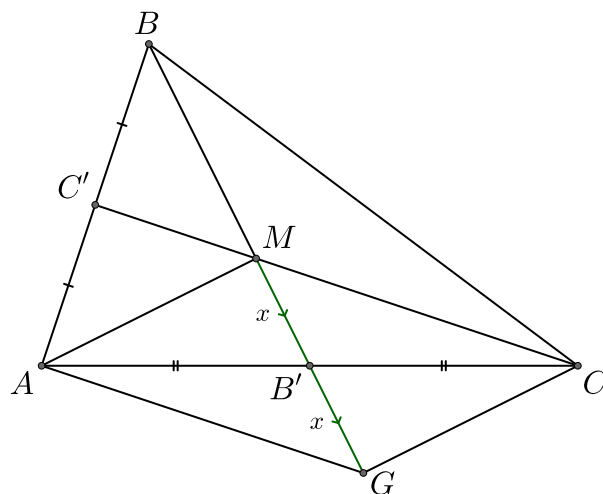
Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

20. Медианы треугольника пересекаются в одной точке. Точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника.

Доказательство: Докажем, что $BM : MB = 2 : 1$. Остальные соотношения докажутся аналогично.



Продлим отрезок MB до точки G так, что $MB = BG$. Тогда в четырёхугольнике $MAGC$ диагонали делятся точкой пересечения пополам, значит $MAGC$ – параллелограмм, из чего следует, что отрезки C_1M и AG параллельны. При этом C_1 – середина стороны AB , значит C_1M – средняя линия треугольника ABG . То есть $BM = MG = 2x$ и $BM : MB = 2 : 1$. $\square$

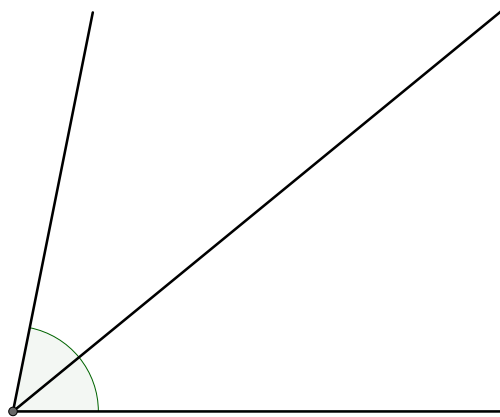


Замечание: Данный факт также можно доказать при помощи теоремы Менелая. Возьмём треугольник ABB' и прямую CC' , тогда по теореме Менелая получим:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BM}{MB'} \cdot \frac{B'C}{CA} = 1 \implies \frac{BM}{MB'} \cdot \frac{1}{2} = 1 \implies \frac{BM}{MB'} = 2.$$

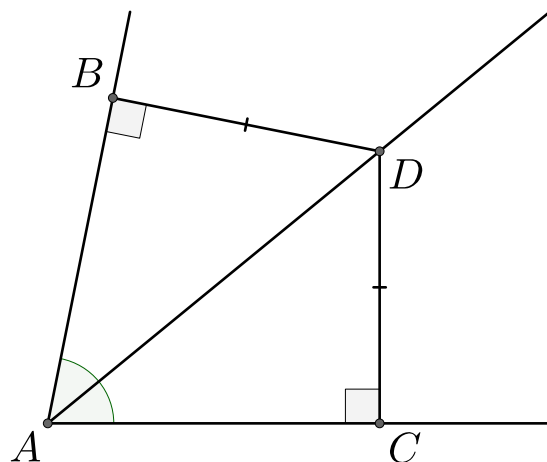
Биссектрисой называется луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла.

Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы одного из углов треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.



21. Точка лежащая на биссектрисе равноудалена от сторон угла. Обратно, точка равноудалённая от сторон угла лежит на биссектрисе этого угла.

Доказательство: Пусть D – точка, лежащая на биссектрисе. Проведём перпендикуляры к сторонам угла. Получим два треугольника: ABD и ACD . AD – их общая сторона, $\angle BAD = \angle DAC$, значит треугольники ABD и ACD равны и $BD = DC$. $\square$

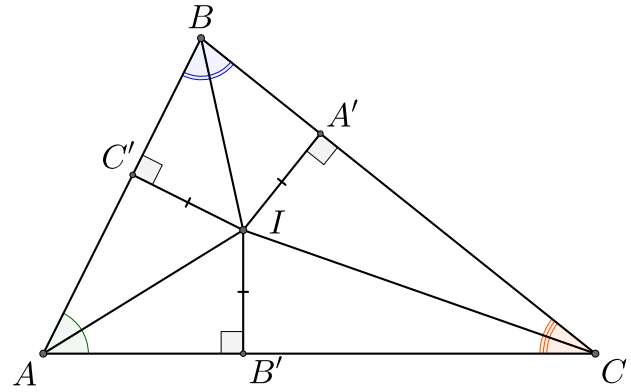
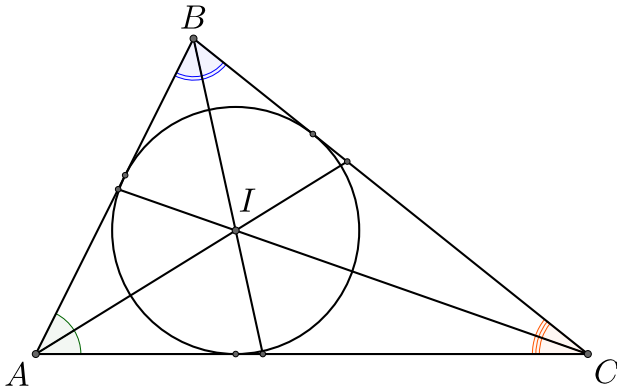


Докажем обратное утверждение. Пусть D равноудалена от сторон угла A , тогда у прямоугольных треугольников ABD и ACD есть общая сторона AD и равные стороны BD и DC , значит треугольники равны, поэтому $\angle BAD = \angle DAC$. $\square$

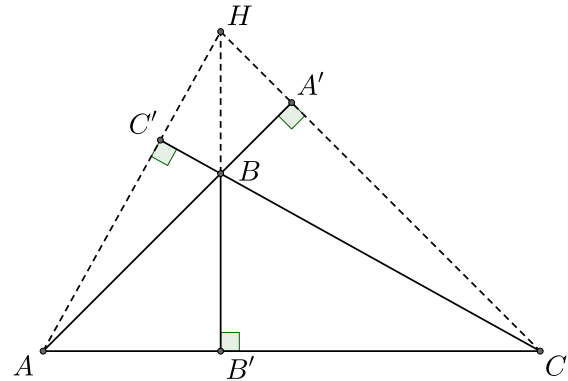
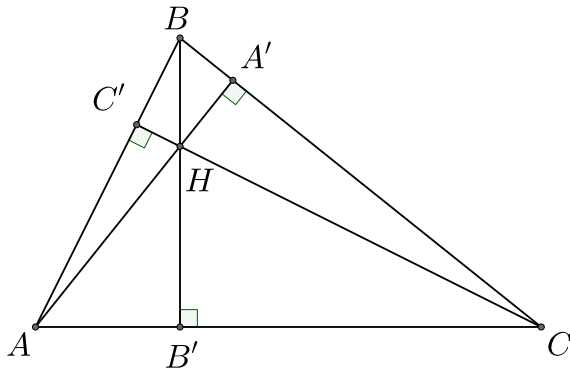
22. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Данная точка является центром вписанной в треугольник окружности.

Доказательство: Пусть I – точка пересечения биссектрис углов $\angle A$ и $\angle B$, IA' , IB' , IC' – перпендикуляры к сторонам треугольника. I лежит на биссектрисе угла A , значит $IB' = IC'$, аналогично получаем, что $IA' = IC'$, значит $IB' = IA'$, то есть точка I

равноудалена от сторон угла C , значит она лежит на биссектрисе угла C . $IA' = IB' = IC'$, поэтому I – центр вписанной окружности. $\square$



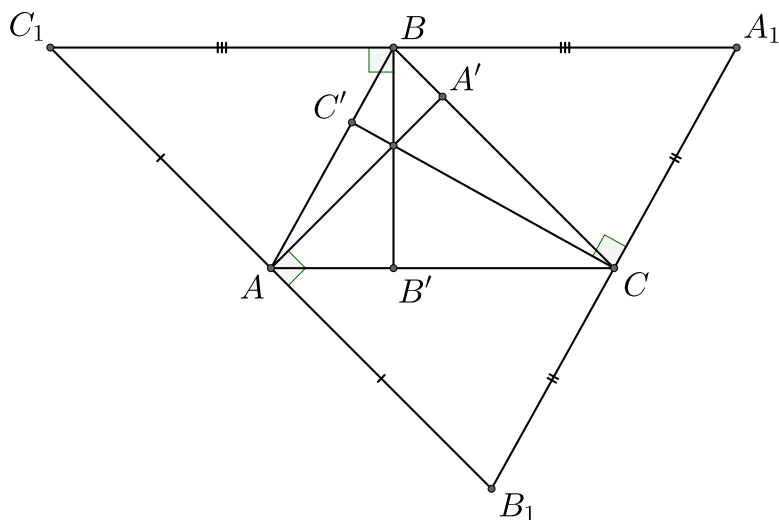
Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.



23. Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Данная точка называется **ортоцентром** треугольника.

Доказательство: Через вершины A , B и C проведём прямые, параллельные сторонам, лежащим напротив данных вершин. Пусть эти прямые пересекутся в точках A_1 , B_1 , C_1 . Получаем треугольник $A_1B_1C_1$, причём высоты AA' , BB' , CC' треугольника ABC перпендикулярны сторонам C_1B_1 , A_1C_1 и B_1A_1 соответственно.

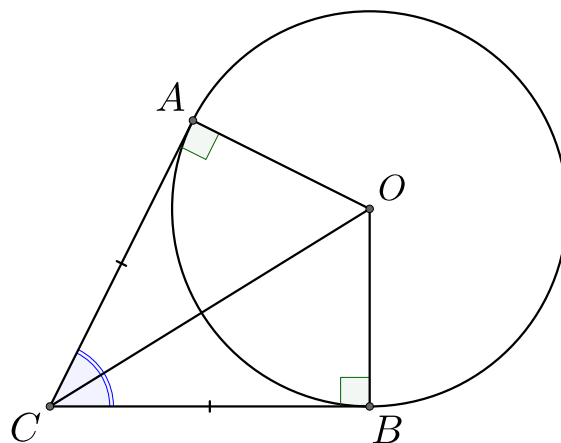
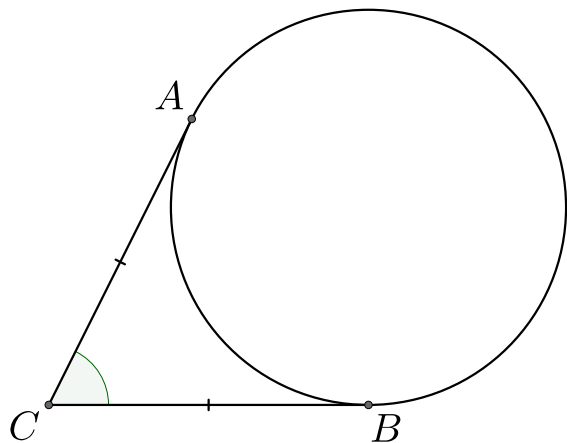
Рассмотрим четырёхугольник AC_1BC . По построению получаем, что $AC_1 \parallel CB$, $AC \parallel C_1B$, значит $BC_1 = AC$ и $AC_1 = BC$. Аналогично получаем, что четырёхугольники ABA_1C и $ABCB_1$ также являются параллелограммами и $A_1B = AC$, $A_1C = AB$, $B_1C = AB$, $AB_1 = BC$ следовательно $C_1A = AB_1$, $C_1B = BA_1$, $A_1C = CB_1$. Значит отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. В пункте 19 данного раздела мы установили, что серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке, значит AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке. $\square$



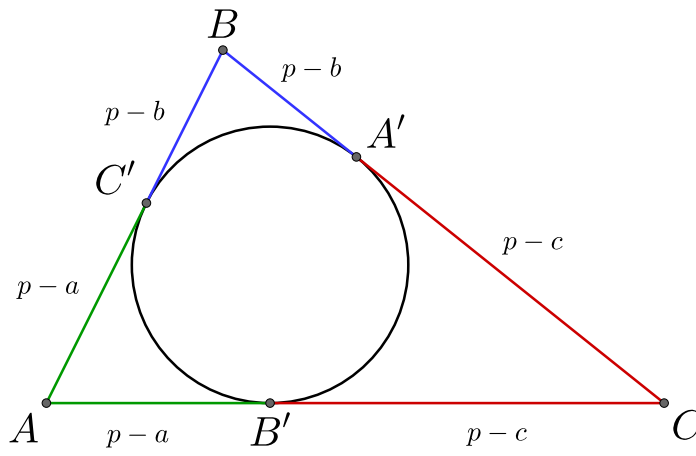
Калиткой будем называть отрезок, соединяющий вершину угла с точкой касания вписанной в этот угол окружности (это не устоявшийся термин, его не следует использовать на ЕГЭ).

24. Калитки любого угла равны.

Доказательство: Точки A и B равноудалены от центра O вписанной окружности, значит O лежит на биссектрисе нашего угла, откуда следует, что прямоугольные треугольники ACO и BCO равны, а значит $AC = CB$. $\square$

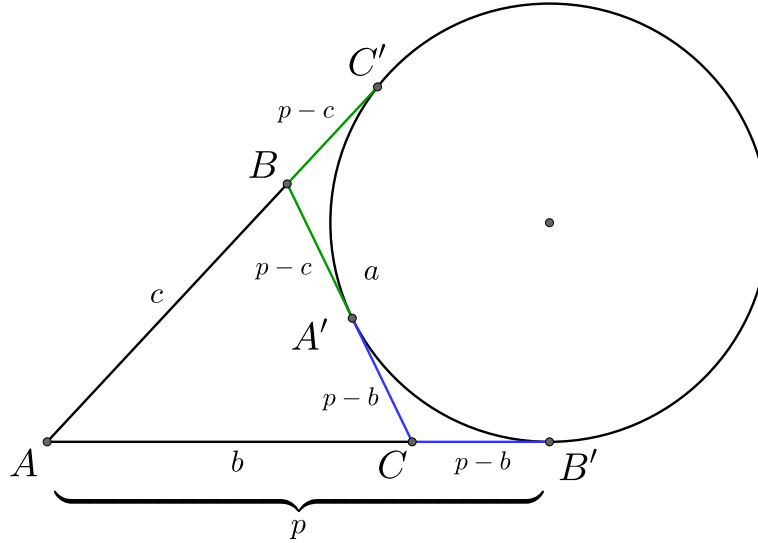


25. Пусть дан треугольник ABC , $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ и $p = \frac{a + b + c}{2}$. Тогда калитка угла A имеет длину $p - a$, калитка угла B имеет длину $p - b$ и калитка угла C имеет длину $p - c$.



Доказательство: Пусть k_A – калитка угла A , k_B – калитка угла B , k_C – калитка угла C . Тогда $k_A + k_B + k_C = p$. $AB' + B'C = k_A + k_C = b$, значит $k_B = p - b$. Аналогично $k_B + k_C = a$, значит $k_A = p - a$; $k_A + k_B = c$, значит $k_C = p - c$. $\square$

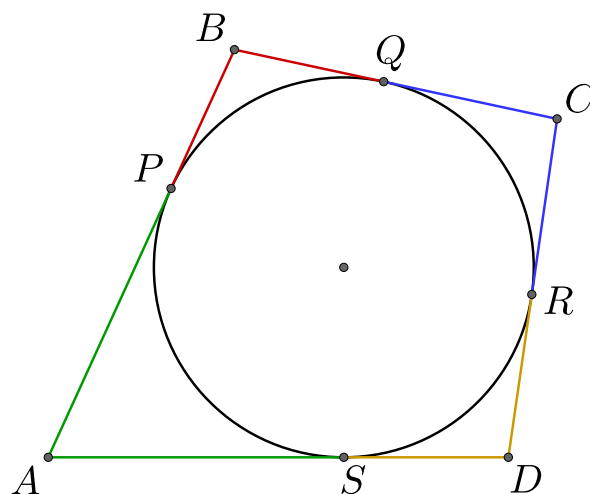
26. Пусть дана внеписанная окружность, касающаяся стороны BC треугольника ABC . Тогда калитка угла A равна p ; калитка угла, смежного с углом C , равна $p - b$; калитка угла, смежного с углом B , равна $p - c$.



Доказательство: $AB + BC + CA = a + b + c = 2p$, $BA' = BC'$, $A'C = CB'$, значит $AC' + AB' = AB + BC' + AC + CB' = AB + AC + BA' + A'C = a + b + c$, причём $AB' = AC'$, значит $AB' = AC' = p$. $CB' = AB' - AC = p - b$, аналогично $BC' = AC' - BC = p - c$. $\square$

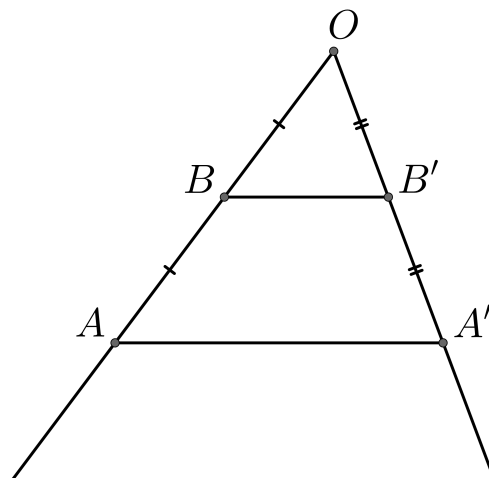
25. Пусть в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, тогда $AD + BC = AB + CD$. Действительно, в суммы $AD + BC$ и $AB + CD$ катитка каждого угла четырёхугольника входит ровно один раз.

Обратно: Если суммы противоположных сторон четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.



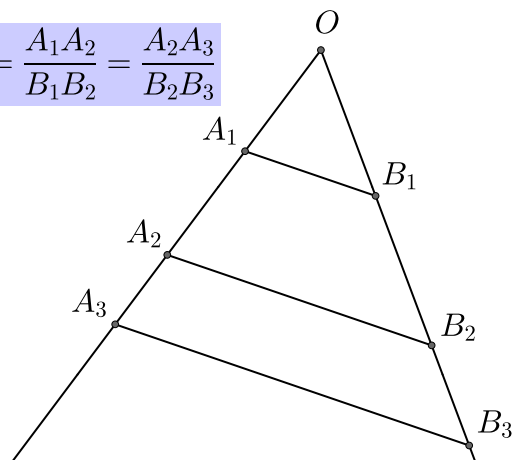
26. **Теорема Фалеса.** Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла будут высечены также равные отрезки.

27. **Обратная теорема Фалеса.** Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на обеих из них равные между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.



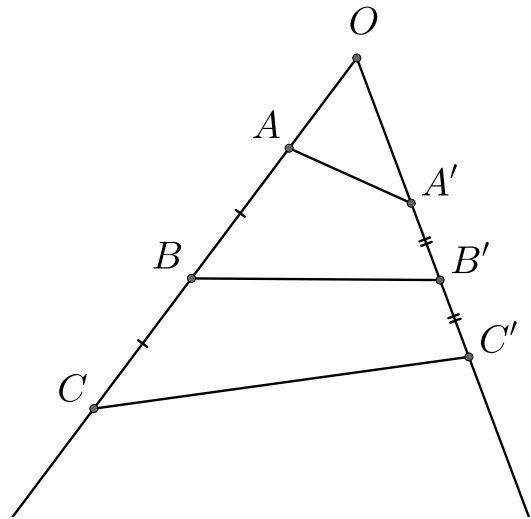
28. **Обобщенная теорема Фалеса.** Если на одной из сторон угла последовательно отложить отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то прямые отсекут на другой стороне угла, отрезки, пропорциональные отрезкам на первой стороне.

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$$



29. **Обратная обобщённая теорема Фалеса.** Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на обеих из них пропорциональные между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.

Замечание: очень важно, что пропорциональные (равные) отрезки должны начинаться от вершины угла, иначе обратные теоремы не будут работать.

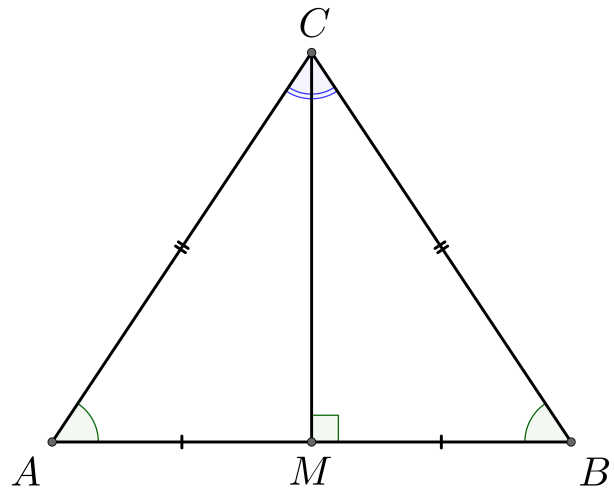


30. Равнобедренный треугольник – это треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, а третья сторона – основанием. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

$$AC = BC$$

$$\angle A = \angle B$$

Биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника к основанию, является медианой и высотой.

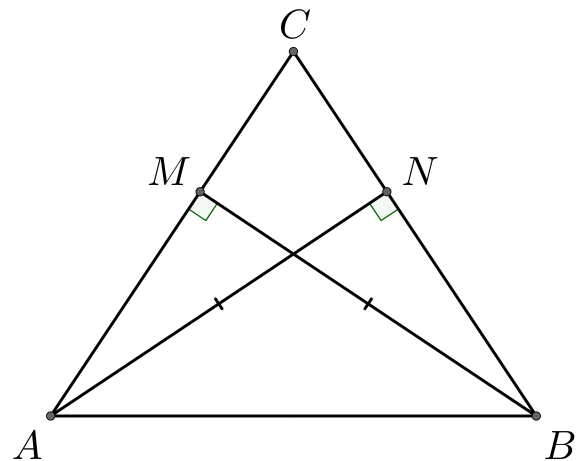
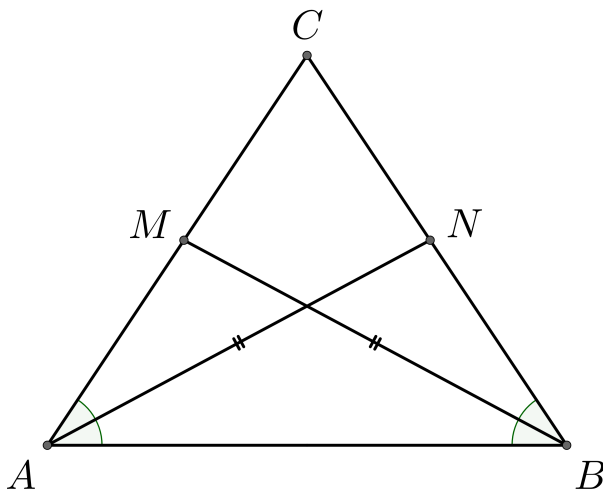
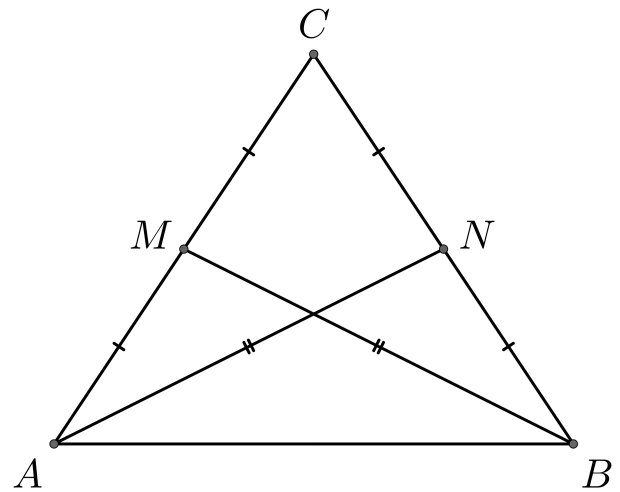


Замечание:

- 1) Если в треугольнике биссектриса совпадает с медианой, то он равнобедренный.
- 2) Если в треугольнике медиана совпадает с высотой, то он равнобедренный.
- 3) Если в треугольнике высота совпадает с биссектрисой, то он равнобедренный.

Замечание: Если углы при основании равны, то треугольник равнобедренный.

30. В равнобедренном треугольнике высоты, медианы и биссектрисы, проведённые из вершин основания, равны.



Замечание: Верны и обратные утверждения:

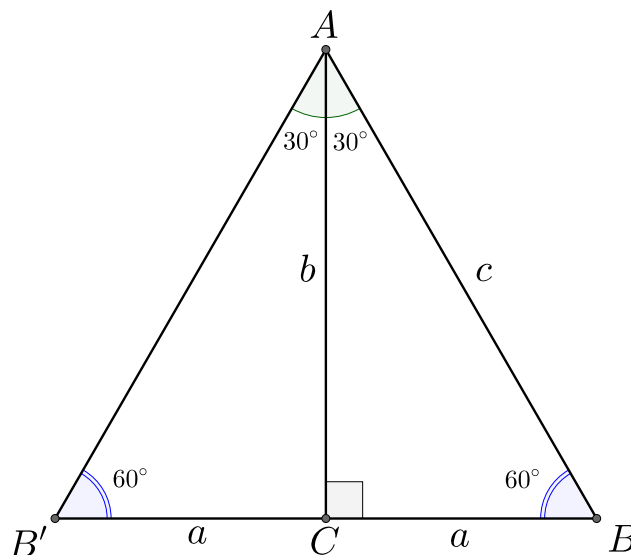
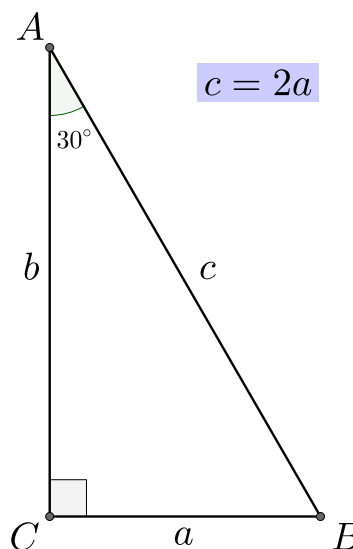
- 1) Если в треугольнике две медианы равны, то треугольник равнобедренный.
- 2) Если в треугольнике две высоты равны, то треугольник равнобедренный.
- 3) Если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

Первые два утверждения очевидны, а третье не имеет простого доказательства и называется теоремой Штейнера-Лемуса.

3 Прямоугольный треугольник

1. Напротив угла в 30° лежит катет, равный половине гипотенузы: если $\alpha = 30^\circ$, тогда $2a = c$.

Доказательство: Отложим от точки C отрезок $B'C$, такой что $B'C = a$, и точки B, C, C' – лежат на одной прямой. Тогда в треугольнике ABB' AC – высота и медиана, значит ABB' – равнобедренный треугольник ($\angle B' = \angle B$). AC – биссектриса угла $\angle B'AB$, поэтому $\angle B'AB = 60^\circ$, отсюда следует, что оставшиеся углы треугольника также равны 60° , то есть ABB' – равносторонний треугольник, в частности $2a = BB' = AB = c$. $\square$



Замечание: Если в прямоугольном треугольнике катет в два раза меньше гипотенузы, то против этого катета угол 30° .

Замечание: Если сторона против угла 30° вдвое меньше прилежащей к углу стороне, то треугольник прямоугольный (это не школьная теорема).

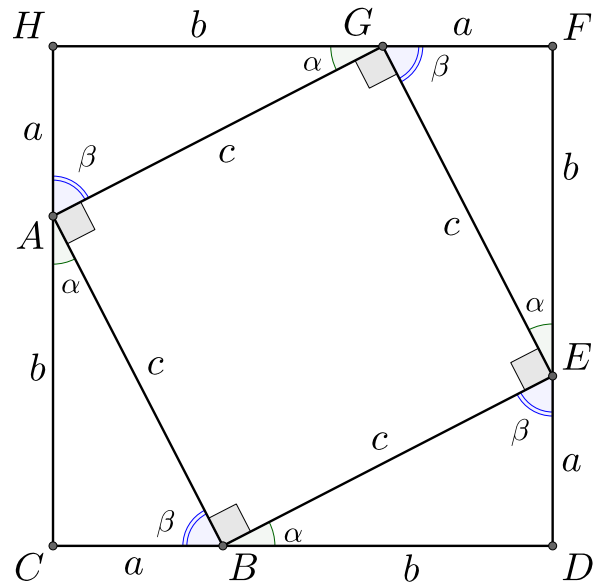
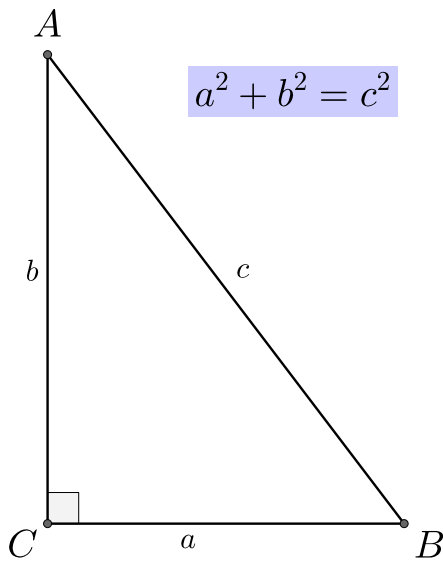
2. Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Если в треугольнике ABC со сторонами a, b, c верно, что $a^2 + b^2 = c^2$, то угол, лежащий напротив стороны c , равен 90° (Обратная теореме Пифагора).

Доказательство: Достроим треугольник ABC до квадрата $CHFD$ со стороной $(a + b)$ как показано на рисунке. Треугольники ABC, GAH, EGF, BED равны по двум сторонам (катетам) и углу между ними. $\alpha + \beta = 90^\circ$, поэтому $AGEB$ – квадрат. Таким образом, площадь квадрата равна, с одной стороны $(a + b)^2$, с другой стороны $4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$, то есть

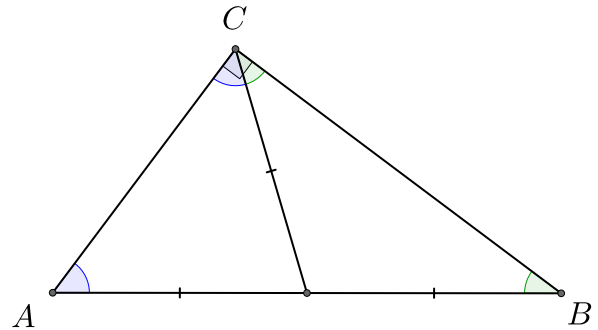
$$(a + b)^2 = 2ab + c^2 \implies a^2 + 2bc + b^2 = 2ab + c^2 \implies a^2 + b^2 = c^2.$$



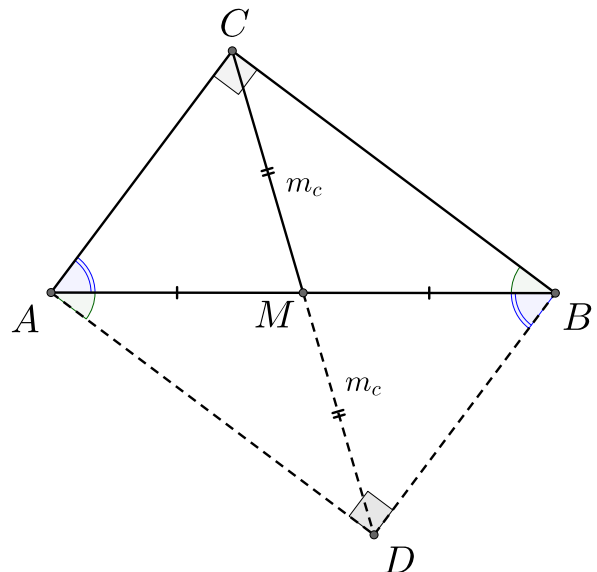
Докажем обратное утверждение. Пусть в треугольнике ABC со сторонами $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$ выполнено равенство верно $a^2 + b^2 = c^2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, так что $C_1B_1 = a$, $A_1C_1 = b$. По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = a^2 + b^2 = AB^2 = c^2$, то есть $A_1B_1 = AB = c$, значит треугольники ABC , $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам, значит ABC – прямоугольный. $\square$

4. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

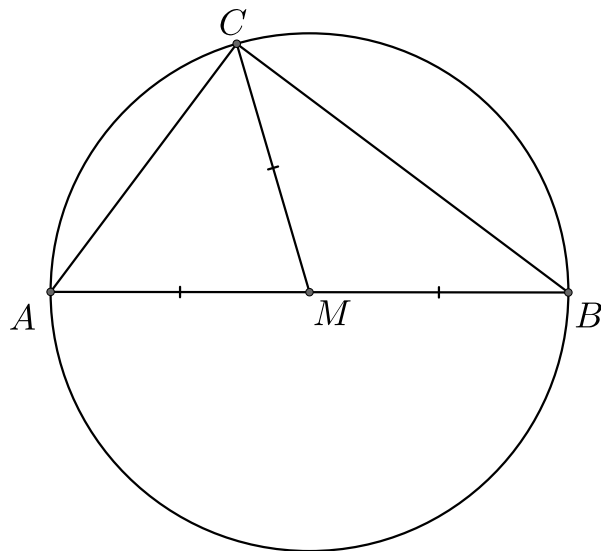
Верно и обратное: если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то эта медиана исходит из вершины прямого угла. То есть наш треугольник – прямоугольный.



Доказательство: Продлим медиану CM (за точку M) до точки D так, что $AM = MD$. Треугольники CMB и MDA равны по двум сторонам и углу между ними ($CM = MD$, $BM = MA$, $\angle CMB = \angle AMD$, так как они являются вертикальными), значит $\angle CBM = \angle MAD$. Аналогично, подобны треугольники CAM и DBM , а значит $\angle CAM = \angle MBD$. Таким образом, треугольники ABC и BAD равны, значит $CADB$ – прямоугольник, в котором AB и CD – диагонали, они равны и в точке пересечения делятся пополам, поэтому $CM = AM = MD = \frac{1}{2}AB$.

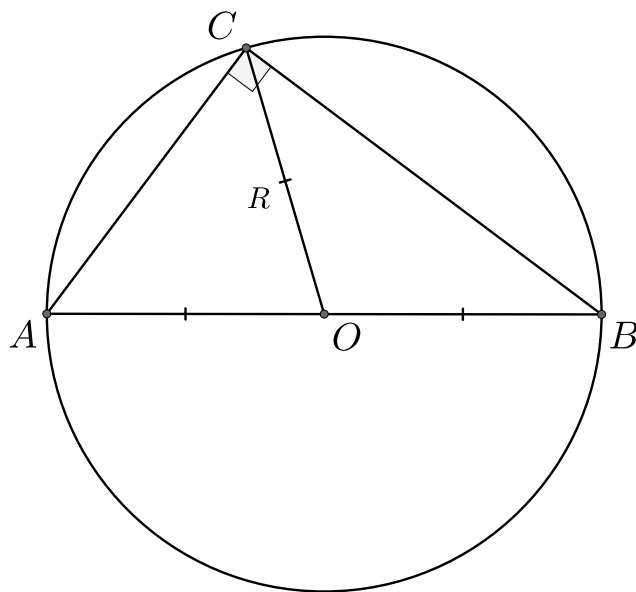


Докажем обратное утверждение: опишем вокруг треугольника окружность, $CM = AM = MB$, поэтому радиус описанной окружности равен AM и M – центр окружности, AB – диаметр окружности, угол $\angle ACB$ равен 90° , так как он опирается на диаметр окружности, значит наш треугольник является прямоугольным. $\square$



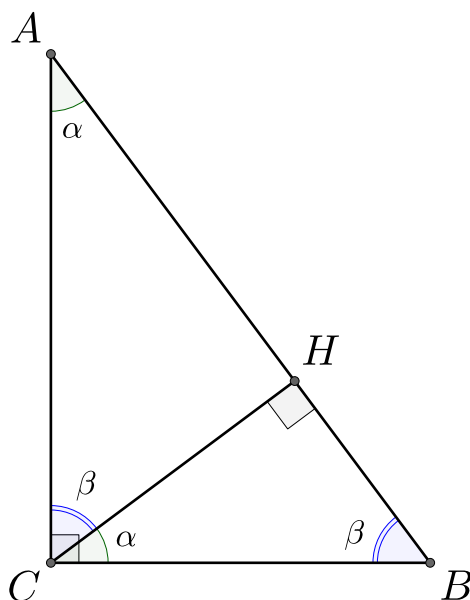
5. Гипотенуза является диаметром, а ее середина – центром окружности, описанной вокруг данного прямоугольного треугольника.

Доказательство: Угол $\angle ACB = 90^\circ$, отрезок, на который он опирается является диаметром, то есть AB – диаметр. Середина диаметра является центром окружности, значит середина гипотенузы является центром описанной окружности.



6. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол $\angle C$ – прямой), CH – высота, тогда треугольники ABC , ACH , CBH подобны.

Доказательство: $\angle HCB = 180^\circ - (90^\circ + \beta) = 90^\circ - \beta = \alpha$, значит треугольники ABC и CBH подобны по трём углам. Аналогично, $\angle ACH = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha = \beta$, то есть треугольники ABC и ACH подобны. $\square$



7. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, вычисляется по формуле:

$$h = \frac{ab}{c} \quad \text{или} \quad h^2 = c_a c_b.$$

Также верны следующие соотношения:

$$c_a c = a^2 \quad \text{или} \quad c_b c = b^2$$

Доказательство: Так как треугольники ABC и ACH подобны, то мы можем записать соотношение:

$$\frac{CH}{CB} = \frac{AC}{AB} \quad \text{или} \quad \frac{h}{a} = \frac{b}{c} \implies h = \frac{ab}{c}.$$

А также:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{b}{c} = \frac{c_b}{b} \implies c_b c = b^2.$$

Из подобия треугольников ACH и CBH получаем:

$$\frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH} \quad \text{или} \quad \frac{h}{c_a} = \frac{c_a}{h} \implies h^2 = c_a c_b.$$

Из подобия ABC и CBH следует:

$$\frac{CB}{AB} = \frac{HB}{CB} \quad \text{или} \quad \frac{a}{c} = \frac{c_a}{a} \implies c_a c = a^2. \quad \square$$

8. Пусть x_a , x_b , x_c — соответственные линейные элементы прямоугольных треугольников с гипотенузами a , b , c соответственно, тогда

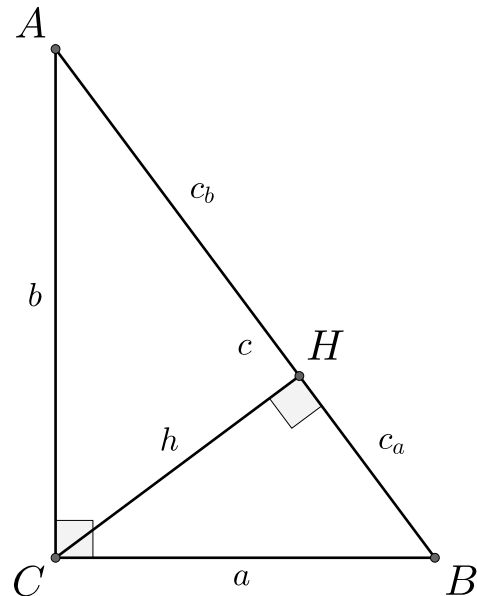
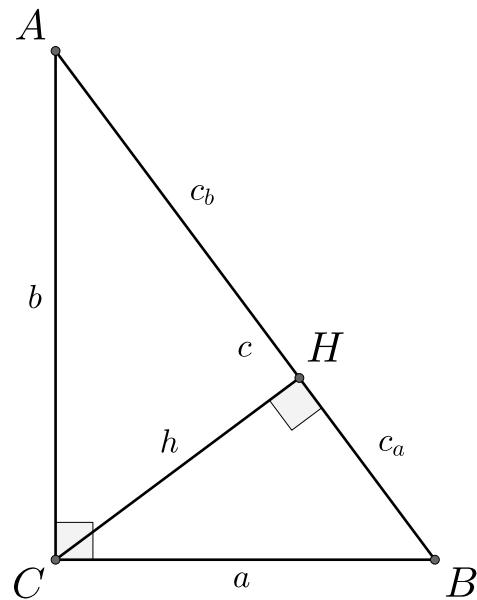
$$x_a^2 + x_b^2 = x_c^2.$$

Доказательство: В подобных треугольниках линейные элементы относятся также как стороны этих треугольников. Поэтому для треугольников ACH и CBH получаем:

$$\frac{a}{c} = \frac{x_a}{x_c}.$$

Для треугольников ABC и ACH :

$$\frac{b}{c} = \frac{x_b}{x_c}.$$



Возведём в квадрат оба равенства и сложим:

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{x_a^2 + x_b^2}{x_c^2}.$$

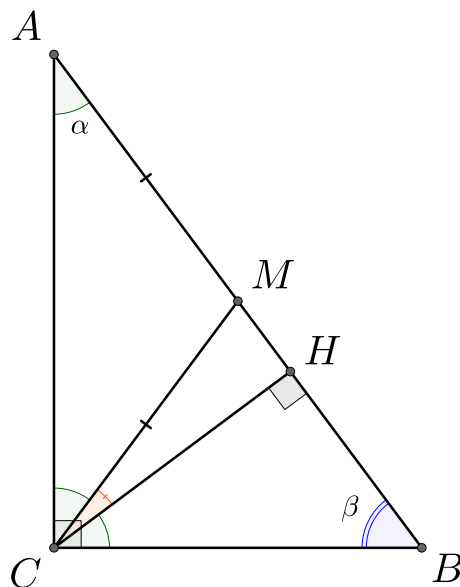
$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1, \text{ поэтому } x_a^2 + x_b^2 = x_c^2. \quad \square$$

Замечание: Обратите внимание, что это могут быть как отдельные соответственные элементы, так и их линейные комбинации: $I_a, I_b, I_c; p_a, p_b, p_c; r_a + R_a, r_b + R_b, r_c + R_c$ и т.д. Например, пусть p_a, p_b, p_c – полупериметры соответственно треугольников CBH, ACH, ABC , тогда $p_a^2 + p_b^2 = p_c^2$.

Если r_a, r_b, r_c – радиусы вписанных окружностей, R_a, R_b, R_c – радиусы описанных окружностей треугольников CBH, ACH, ABC , тогда $(r_a + R_a)^2 + (r_b + R_b)^2 = (r_c + R_c)^2$.

9. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведенными из прямого угла, равен разности острых углов треугольника.

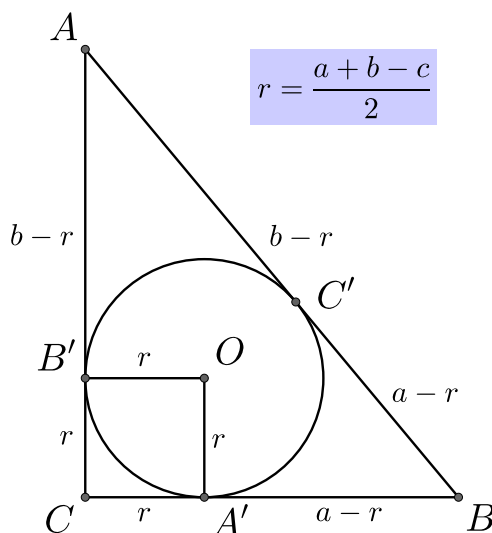
Доказательство: CM – медиана исходящая из прямого угла, поэтому $CM = MA$, значит $\angle ACM = \angle MAC = \alpha$. $\alpha + \beta = 90^\circ$. Треугольник HCB прямоугольный, поэтому $\angle HCB + \angle HBC = 90^\circ$, то есть $\angle HCB = 90^\circ - \beta = \alpha$. С одной стороны, $\angle MCH + 2\alpha = 90^\circ$, с другой $\alpha + \beta = 90^\circ$, значит $\angle MCH + 2\alpha = \alpha + \beta \implies \angle MCH = \beta - \alpha$. $\square$



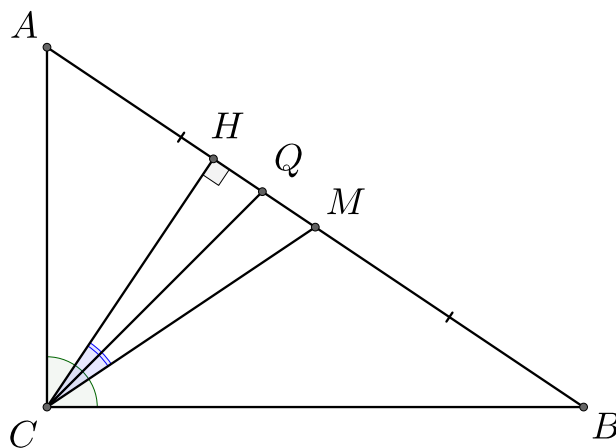
10. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

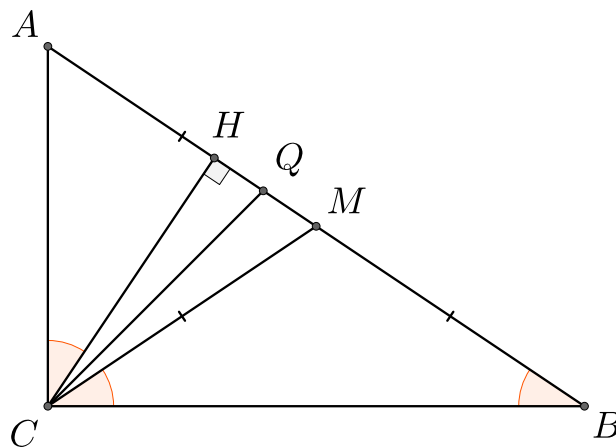
Доказательство: $B'C = CA' = r$, $A'B = BC' = a - r$, $B'A = AC' = b - r$, значит $c = (a - r) + (b - r) \implies 2r = a + b - c$ или $r = \frac{a + b - c}{2}$. $\square$



11. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является также биссектрисой треугольника, образованного высотой, медианой и отрезком гипотенузы. Верно и обратное: если в треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и медианой, исходящими из того же угла, то такой треугольник является прямоугольным.



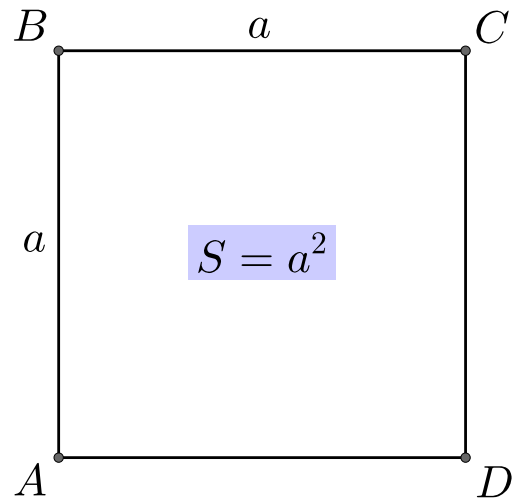
Доказательство: CM – медиана исходящая из прямого угла, поэтому $CM = MB$, значит $\angle MBC = \angle MCB$. ABC – прямоугольный, поэтому $\angle CAB + \angle MBC = 90^\circ$, ACH также является прямоугольным, поэтому $\angle CAB + \angle CAH = 90^\circ$. Таким образом, мы получаем, что $\angle MBC = \angle MCB = \angle CAH$, но биссектриса делит $\angle ACB$ пополам, значит и угол $\angle HCM$ пополам. $\square$



4 Площади

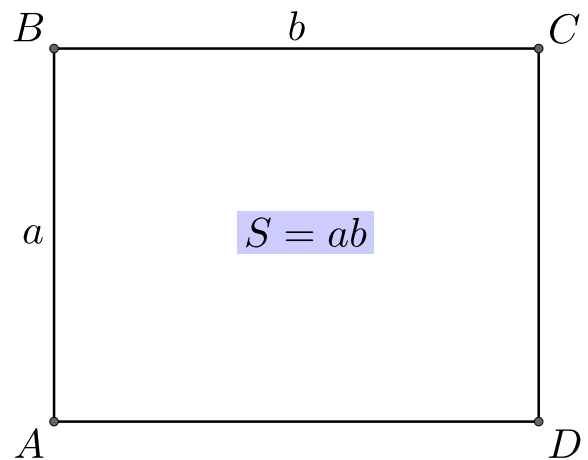
1. Если a – длина стороны квадрата, то его площадь можно найти по формуле:

$$S = a^2.$$



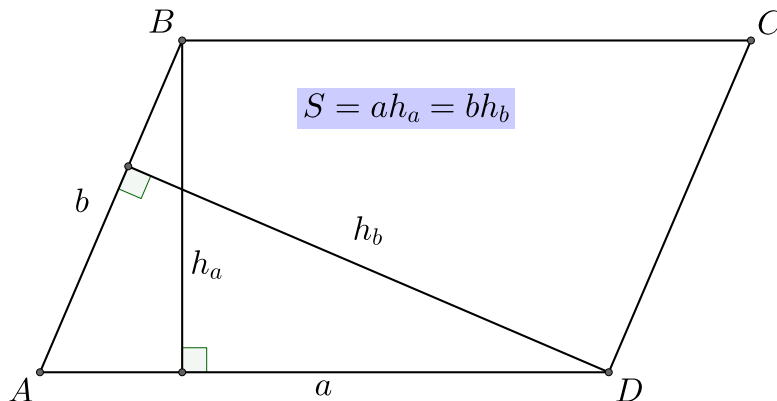
2. Если a и b – длины сторон прямоугольника, то его площадь можно найти по формуле:

$$S = ab.$$



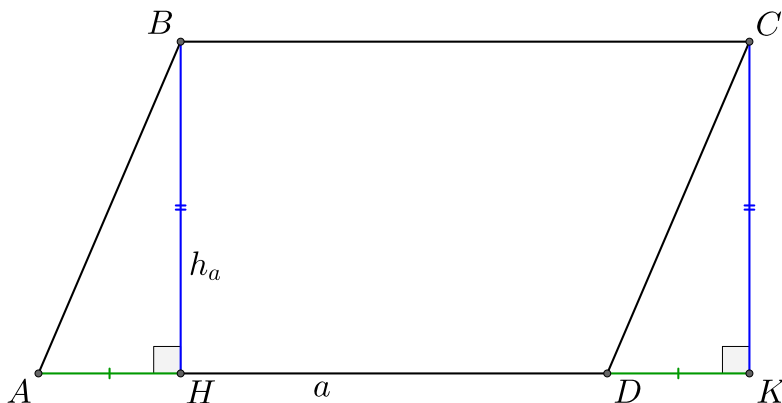
3. Если a и b – длины сторон параллелограмма, h_a и h_b – длины высот параллелограмма, тогда можно найти площадь по формулам:

$$S = ah_a = bh_b$$



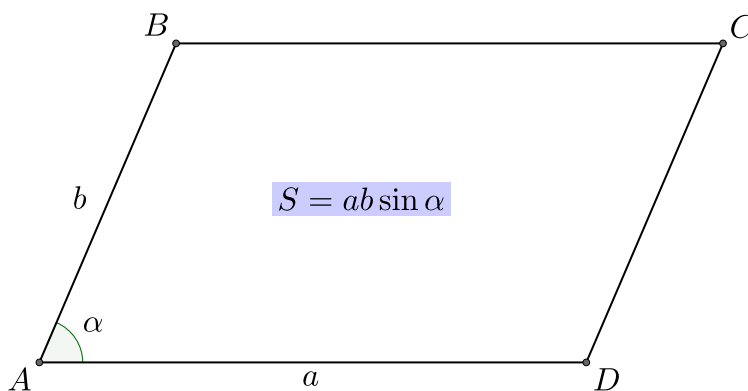
Доказательство: Докажем, что $S = ah_a$. Через точку C проведём отрезок CK равный h_a и параллельный ему. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABH , DCK . $BH = CK$, также $AB = DC$ так как $ABCD$ – параллелограмм, значит треугольники ABH , DCK равны из чего следует, что $AH = DK$, поэтому $HK = a$. Рассмотрим прямоугольник

$BHCK$: его стороны равны a и h_a . $S_{ABCD} = S_{ABH} + S_{BHCD}$; $S_{BHCK} = S_{BHCD} + S_{DCK} = ah_a$.
 Треугольники ABH и DCK равны, значит $S_{ABCD} = ah_a$. $\square$

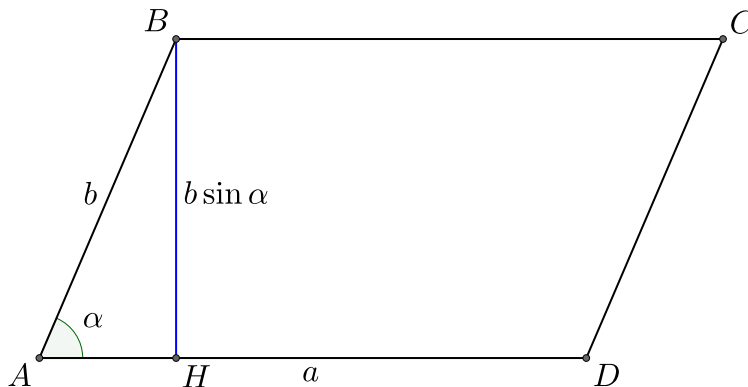


4. Если a и b – длины сторон параллелограмма, α – угол между этими сторонами, тогда мы можем найти площадь параллелограмма по формуле:

$$S = ab \sin \alpha.$$

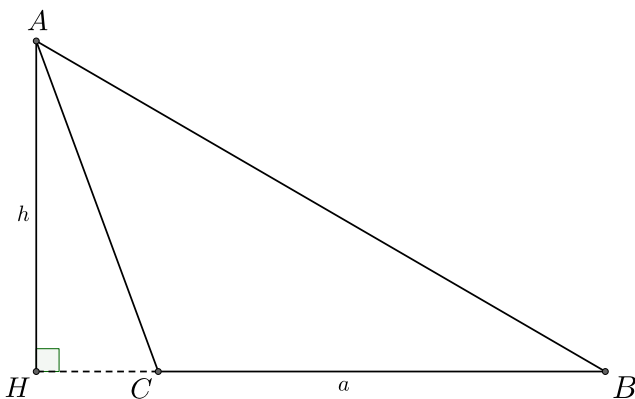
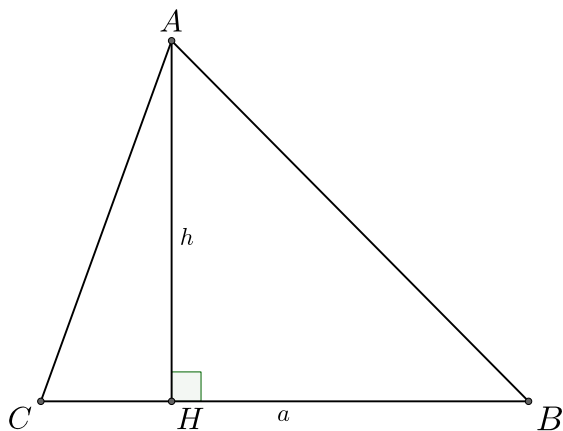


Доказательство: Рассмотрим прямоугольный треугольник ABH , $\sin \alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{h_a}{b}$, значит $h_a = b \sin \alpha$. $S = ah_a = ab \sin \alpha$. $\square$

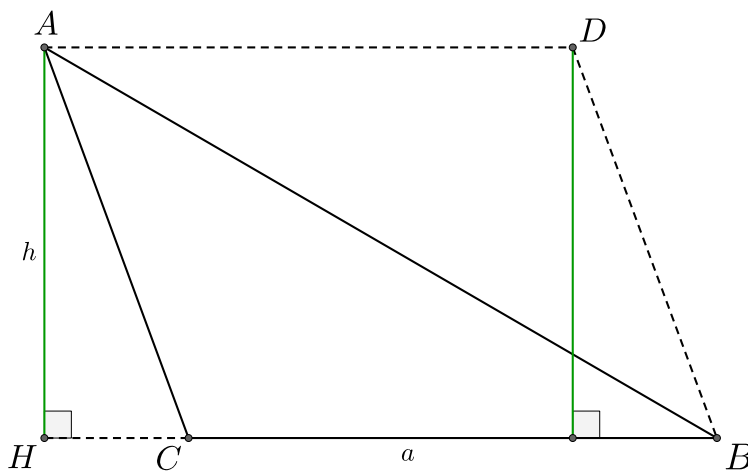
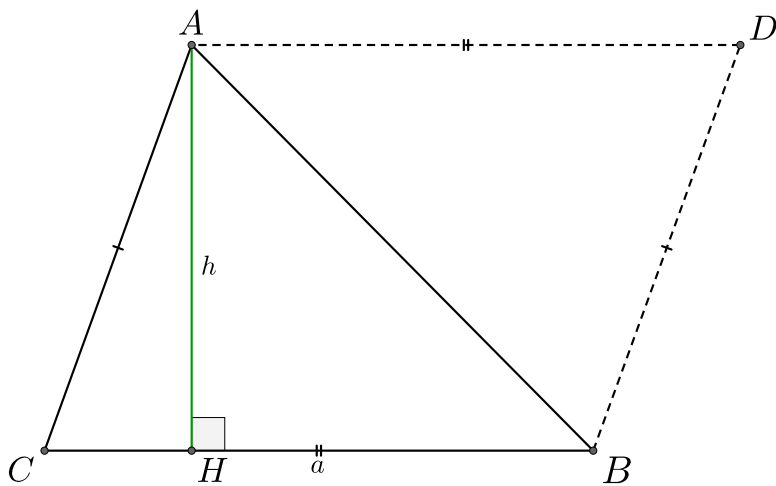


5. Если a – длина стороны треугольника, h – длина высоты, проведённой к данной стороне, тогда площадь треугольника мы можем найти по формуле:

$$S = \frac{ah}{2}.$$



Доказательство: Проведём через точку B прямую параллельно AC , аналогично проведём через A прямую параллельно CB . Данные прямые пересекаются в точке D . $ACBD$ – параллелограмм, так как $AC \parallel BD$ и $CB \parallel AD$. Треугольники ACB и BDA равны, значит $S_{ACB} = S_{BDA}$, при этом $S_{ABCD} = S_{ACB} + S_{BDA} = 2S_{ACB}$, значит $S_{ACB} = \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{ah}{2}$. $\square$

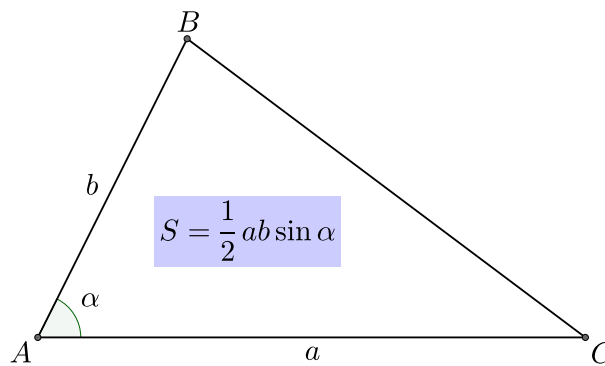


6. Если a, b – длины сторон треугольника, α – угол между этими сторонами, тогда площадь треугольника мы можем найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha.$$

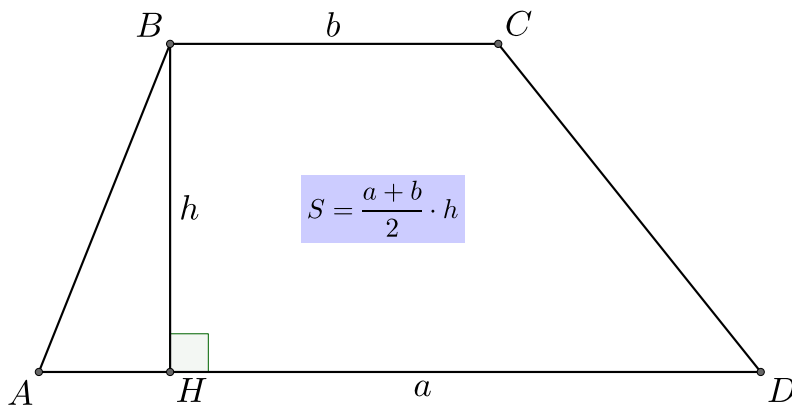
Доказательство: Аналогично предыдущему доказательству построим параллелограмм $ABCD$, его площадь равна $S = ab \sin \alpha$, значит $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

□

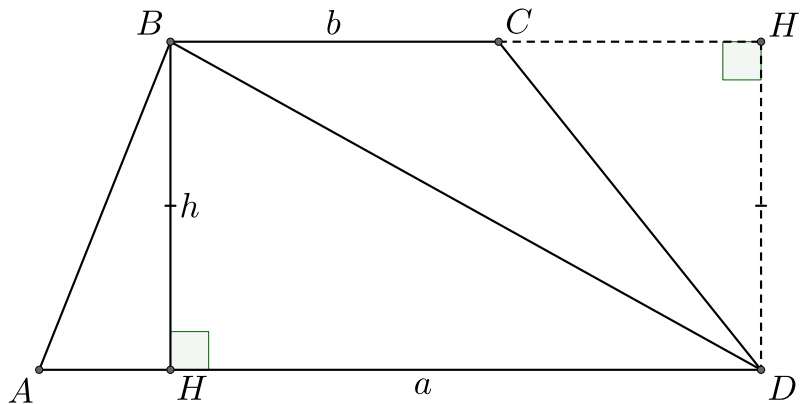


7. Если a и b – длины сторон основания трапеции, h – длина высота трапеции, тогда мы можем найти площадь по формуле:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$



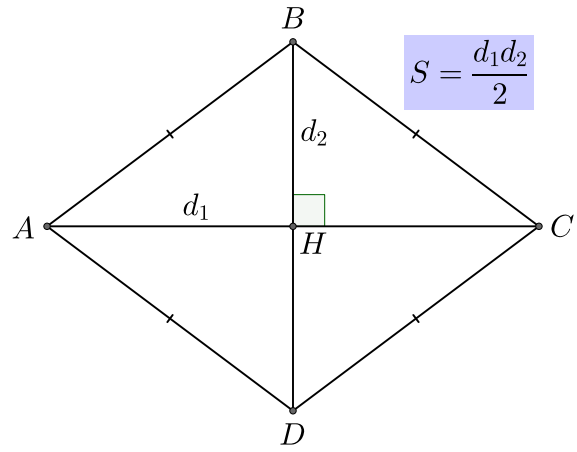
Доказательство: Рассмотрим треугольники ABD и BDC . Длина высоты трапеции равна высоте треугольника ABD к стороне AD и равна высоте треугольника BDC к стороне BC . Получаем: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h$. □



8. Если d_1 и d_2 – длины диагоналей ромба, тогда площадь мы можем найти по формуле:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Доказательство: Пусть диагонали ромба пересекаются в точке H . Ромб является параллелограммом, поэтому диагонали точкой пересечения делятся пополам, то есть $AH = HC = \frac{d_1}{2}$; $BH = HD = \frac{d_2}{2}$.



Диагонали ромба перпендикулярны, поэтому треугольники ABH , ADH , BCH , CDH – прямоугольные с катетами $\frac{d_1}{2}$ и $\frac{d_2}{2}$, их площади равны: $\frac{\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{8}$. Получаем:
 $S_{ABCD} = S_{ABH} + S_{ADH} + S_{BCH} + S_{CDH} = 4 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{8} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. $\square$

9. Если a, b, c – длины сторон треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр треугольника, тогда площадь треугольника ABC мы можем найти по **формуле Герона**:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Доказательство: Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда по теореме косинусов получаем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

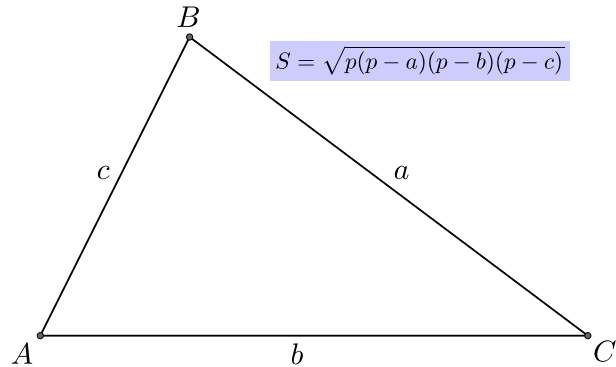
Откуда получаем:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \iff \cos^2 \alpha = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2bc)^2} \iff 1 - \sin^2 \alpha = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2bc)^2} \iff \\ \sin^2 \alpha &= 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4(bc)^2} = \frac{(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)}{4b^2c^2} = \\ &= \frac{(a^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - a^2)}{4b^2c^2} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2}. \end{aligned}$$

Мы знаем, что $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, получаем:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{b^2c^2}{4} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{16} = \\ &= \frac{((a+b+c) - 2a)((a+b+c) - 2b)((a+b+c) - 2c)(a+b+c)}{16} = \\ &= \frac{(a+b+c)}{2} \cdot \left(\frac{(a+b+c)}{2} - a \right) \cdot \left(\frac{(a+b+c)}{2} - b \right) \cdot \left(\frac{(a+b+c)}{2} - c \right) = p(p-a)(p-b)(p-c). \end{aligned}$$

Значит $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. $\square$



10. Если p – полупериметр треугольника, r – длина радиуса окружности, вписанной в данный треугольник, тогда площадь мы можем найти по формуле:

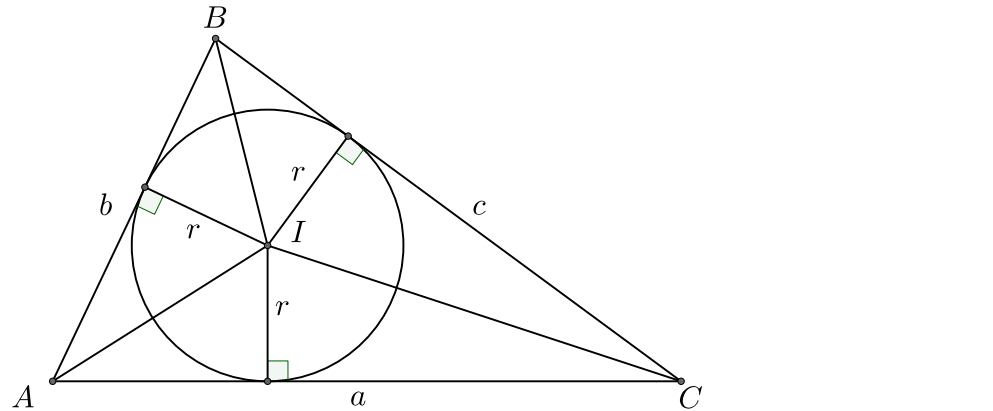
$$S = pr.$$

Доказательство: Пусть I – центр вписанной окружности. Рассмотрим треугольники AIB , AIC , BIC , тогда

$$S_{AIB} = \frac{1}{2}a \cdot r; \quad S_{AIC} = \frac{1}{2}b \cdot r; \quad S_{BIC} = \frac{1}{2}c \cdot r.$$

Получаем:

$$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = pr. \quad \square$$



11. Если p – полупериметр многоугольника, r – длина радиуса окружности, вписанной в этот многоугольник, тогда его площадь можно найти по формуле:

$$S = pr.$$

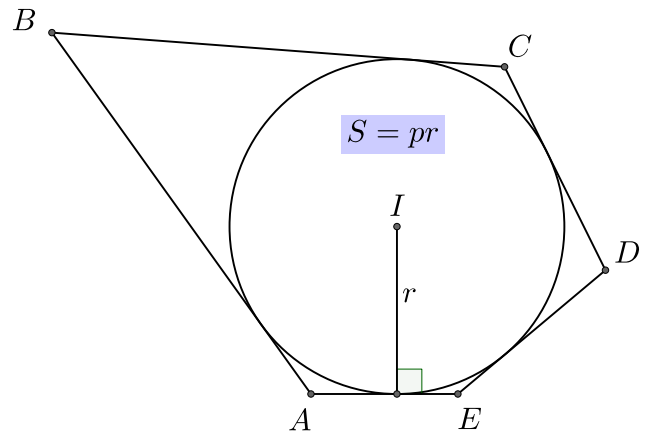
Доказательство: Рассмотрим треугольники, у которых одна из сторон является стороной многоугольника, а одной из вершин является центр описанной окружности. Пусть $a_1, \dots, a_n$ –

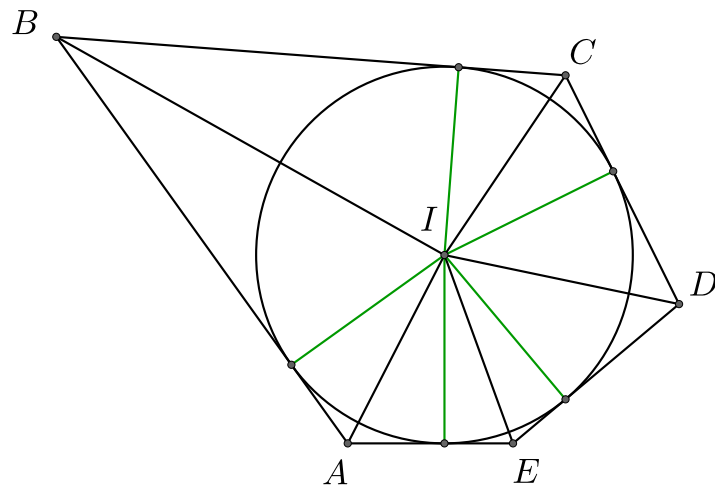
длины сторон многоугольника, тогда площади полученных треугольников равны

$$\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot r, \dots, \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot r.$$

В сумме они дают площадь всего многоугольника, а значит получаем:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot r + \dots + \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot r = \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{2} \cdot r = pr. \quad \square$$

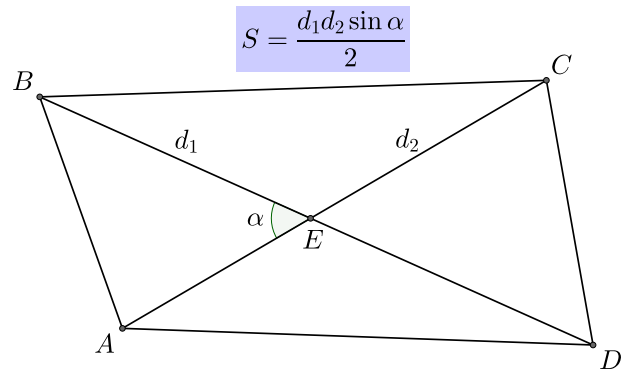




12. Если d_1 , d_2 – длины диагоналей четырёхугольника $ABCD$, α – угол между этими диагоналями, тогда площадь этого четырёхугольника равна:

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2}.$$

Доказательство: Для начала отметим, что $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Найдём площади треугольников AEB , BEC , CED , DEA :



$$S_{AEB} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin \alpha; \quad S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EC \cdot \sin \alpha; \quad S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot ED \cdot \sin \alpha;$$

$$S_{DEA} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EA \cdot \sin \alpha.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{AEB} + S_{BEC} + S_{CED} + S_{DEA} = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot EB \cdot (AE + EC) + \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot ED \cdot (AE + EC) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot EB \cdot AC + \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot ED \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot (BE + ED) \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot BE \cdot AC = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

13. Если R – длина радиуса, описанной вокруг треугольника ABC , окружности, a , b , c – длины сторон треугольника ABC , тогда площадь данного треугольника можно найти по формуле:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Доказательство: Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда из теоремы синусов следует, что

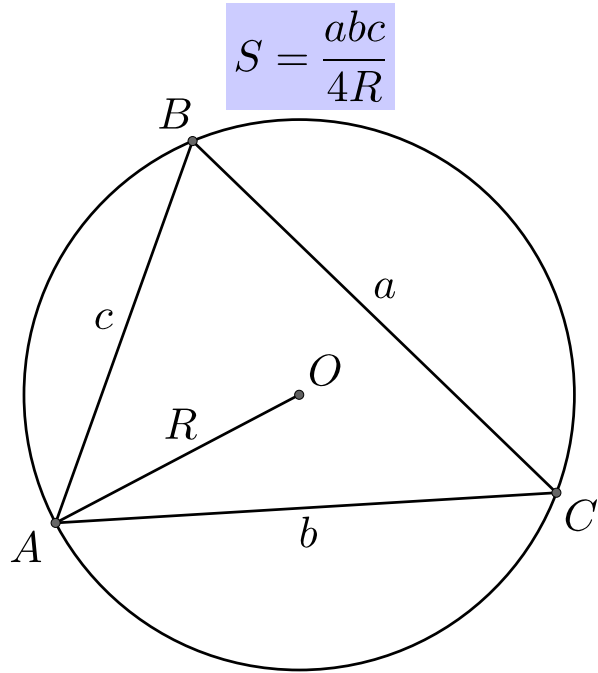
$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} \implies \sin \alpha = \frac{a}{2R}.$$

С другой стороны площадь ABC можно найти по формуле:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

Получаем:

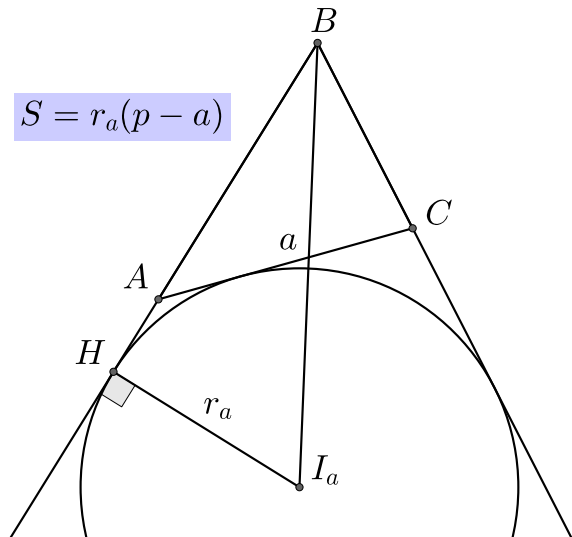
$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R}. \quad \square$$



14. Пусть p – полупериметр треугольника ABC , r_a , r_b , r_c – длины радиусов внеписанных окружностей. Тогда площадь треугольника ABC можно найти по формулам:

$$S = r_a(p - a); \quad S = r_b(p - b); \quad S = r_c(p - c).$$

Доказательство: Докажем для r_a . На прямой AB отметим точку D , проведем через неё касательную к окружности к нашей окружности, пусть эта касательная пересекает прямую BC в точке E . Площадь треугольника ADE равна:



$$S_{ADE} = \frac{(b + c + BD + DE + EC)}{2} \cdot r_a; \quad S_{BDEC} = \frac{a + BD + DE + EC}{2} \cdot r_a.$$

Тогда

$$S_{ABC} = S_{ADE} - S_{BDEC} = \frac{b + c - a}{2} \cdot r_a = \frac{a + b + c - 2a}{2} \cdot r_a = (p - a) \cdot r_a. \quad \square$$

Замечание: Из данных соотношений и формулы $S = p \cdot r$ (r – радиус вписанной окружности) легко получить, что

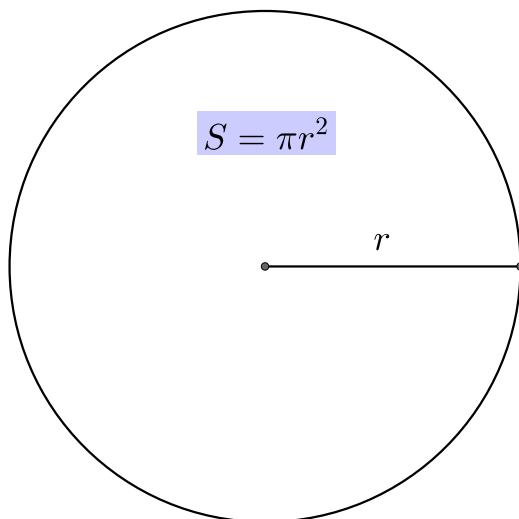
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Замечание: Из формулы Герона следует, что

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$$

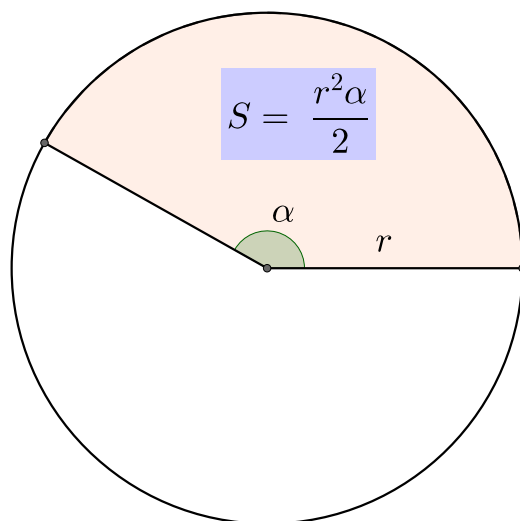
16. Площадь круга с радиусом длины r равна

$$S = \pi r^2.$$



17. Площадь сектора круга с радиусом длины r равна

$$S = \frac{r^2 \alpha}{2}.$$

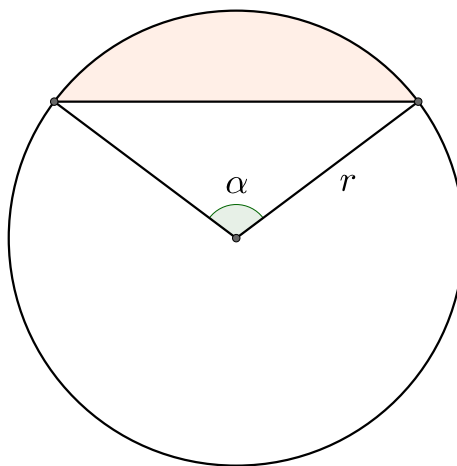


18. Площадь сегмента круга с радиусом длины r равна

$$S = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2} \cdot r^2.$$

Замечание: Как в этом пункте, так и в предыдущем, угол α мы считаем в радианах

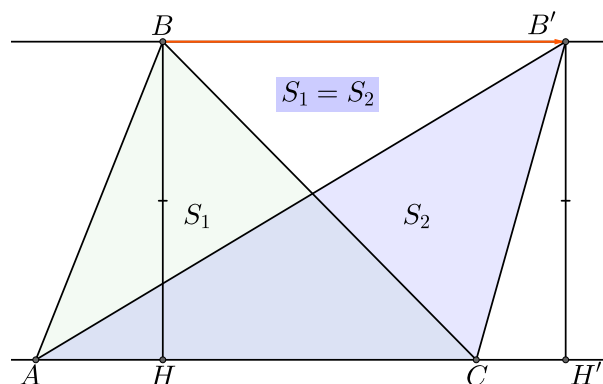
$$S = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2} \cdot r^2$$



5 Свойства отношений и площадей

1. (Рельсы Евклида). Пусть у нас есть треугольник ABC , ℓ – прямая параллельная AC , проходящая через точку B . Отметим на ℓ точку B' . Тогда площади треугольников ABC и $AB'C$ равны.

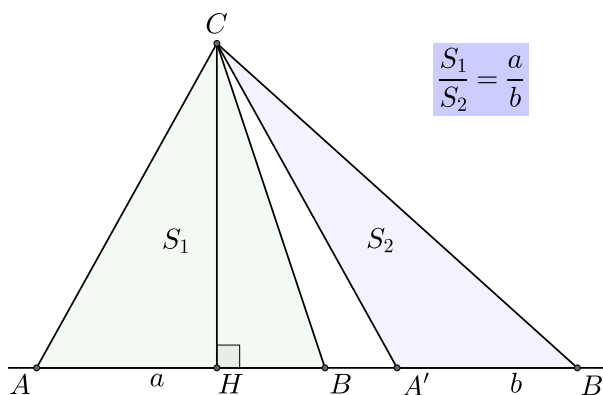
Доказательство: Треугольники ABC и $AB'C$ имеют общую сторону AC . Так как BB' параллельна AC , значит высоты BH и $B'H'$ равны. Получаем: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot B'H' = S_{AB'C}$. $\square$



2. Площади треугольников с общей высотой относятся как длины оснований.

Доказательство: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$,
 $S_{A'B'C} = \frac{1}{2}A'B' \cdot BH$, тогда

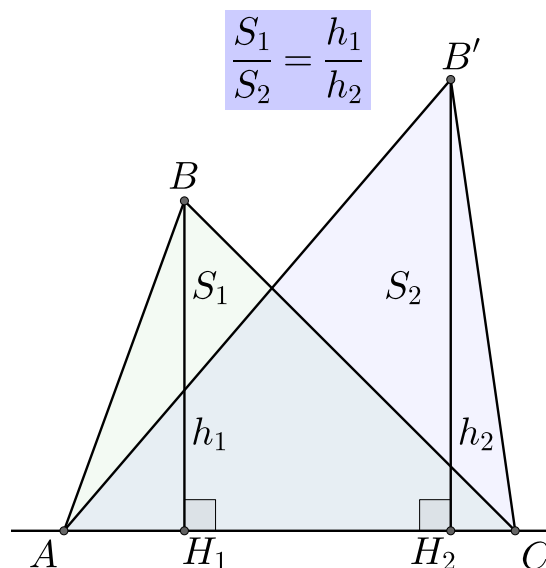
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C}} = \frac{AB}{A'B'}. \quad \square$$



3. Площади треугольников с общим основанием относятся как высоты.

Доказательство: $S_{ABC} = \frac{1}{2}BH_1 \cdot AC$,
 $S_{AB'C} = \frac{1}{2}B'H_2 \cdot AC$, тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C}} = \frac{BH_1}{B'H_2}. \quad \square$$



4. Площади треугольников с общим углом относятся как произведение отношений сторон, образующих общий угол.

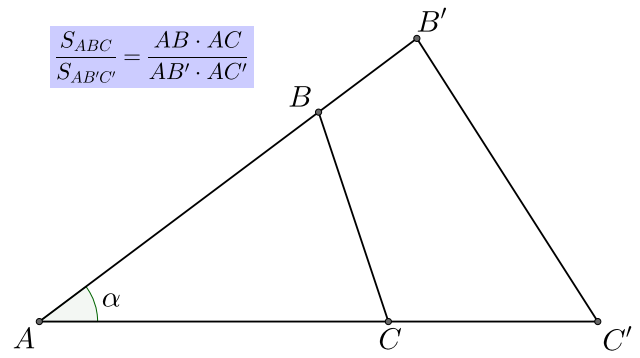
Доказательство: Найдем площади треугольников ABC и $AB'C'$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha;$$

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2} AB' \cdot AC' \cdot \sin \alpha.$$

Тогда:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}. \quad \square$$



5. Отношение площадей треугольников с одинаковым углом равно отношению произведений сторон, выходящих из этого угла.

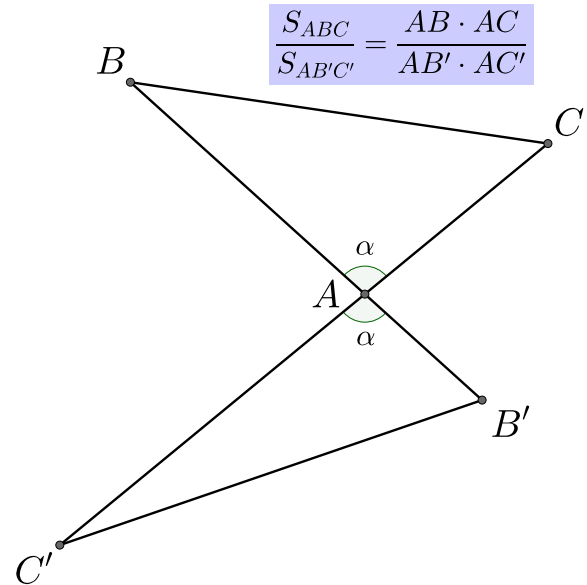
Доказательство: Найдем площади треугольников ABC и $AB'C'$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha;$$

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2} AB' \cdot AC' \cdot \sin \alpha.$$

Тогда:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}. \quad \square$$



6. Пусть на стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E , тогда $S_{CDE} = S_{ABE} + S_{CBE}$.

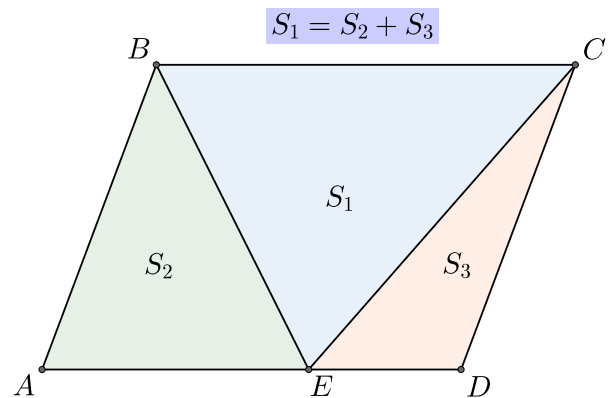
Доказательство: Пусть h – длина высоты параллелограмма к стороне AD . Высота треугольника ABE к стороне AE равна h , высота треугольника BEC к стороне BC равна h , высота треугольника CED к стороне ED равна h .

Получаем:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot h; \quad S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h; \quad S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot h.$$

Тогда:

$$S_{ABE} + S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot h + \frac{1}{2} \cdot ED \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (AE + ED) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h = S_{BEC}. \quad \square$$



7. Пусть на стороне AC треугольника ABC отмечена точка M , на прямой AM отмечена точка E , тогда если $S_{ABE} = S_{CBE}$, то BM – медиана.
Обратно, если BM – медиана, то $S_{ABE} = S_{CBE}$.

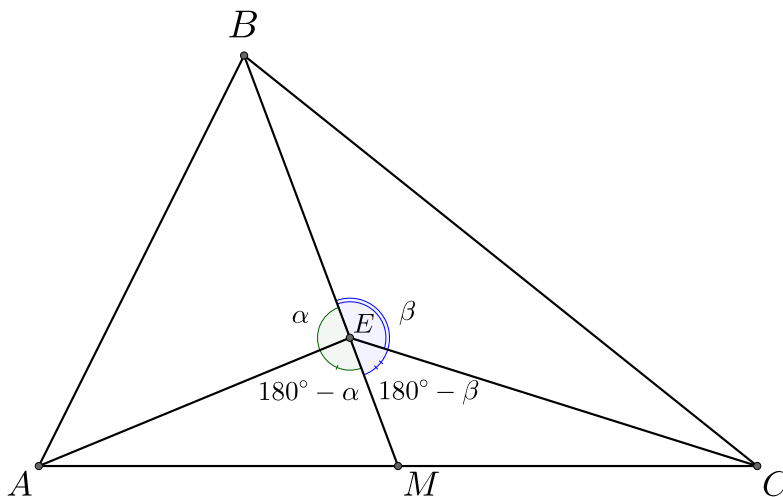
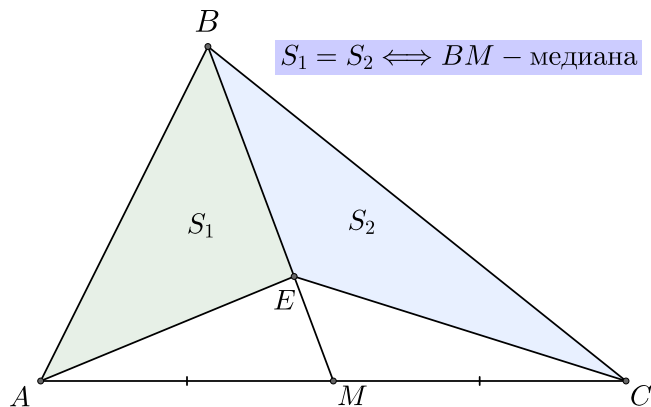
Доказательство: Пусть $S_{ABE} = S_{CBE}$.

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin \alpha;$$

$$S_{CBE} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EB \cdot \sin \beta$$

$$S_{AEM} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EM \cdot \sin (180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EM \cdot \sin \alpha;$$

$$S_{CEM} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EM \cdot \sin (180^\circ - \beta) = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EM \cdot \sin \beta;$$



Получаем:

$$\frac{S_{AEM}}{S_{CEM}} = \frac{AE \cdot \sin \alpha}{CE \cdot \sin \beta} = \frac{S_{ABE}}{S_{CBE}} = 1.$$

То есть $S_{AEM} = S_{CEM}$. Значит $S_{ABM} = S_{CBM}$, при этом треугольники ABM и CBM имеют общую высоту к сторонам AM и MC , значит $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{AM}{MC} = 1$, поэтому $AM = MC$. $\square$

Докажем обратное утверждение.

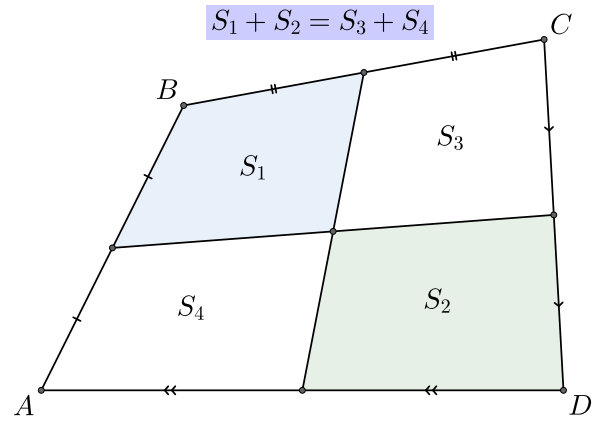
Пусть BM – медиана треугольника ABC , тогда EM – медиана треугольника AEC . Получаем, что $S_{ABE} = S_{CBE}$ и $S_{AEM} = S_{CEM}$. Тогда

$$S_{ABE} = S_{ABM} - S_{AEM} = S_{CBM} - S_{CEM} = S_{CBE}. \quad \square$$

8. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ провели две прямые через середины противоположных сторон, тогда $ABCD$ разделился на 4 четырёхугольника и

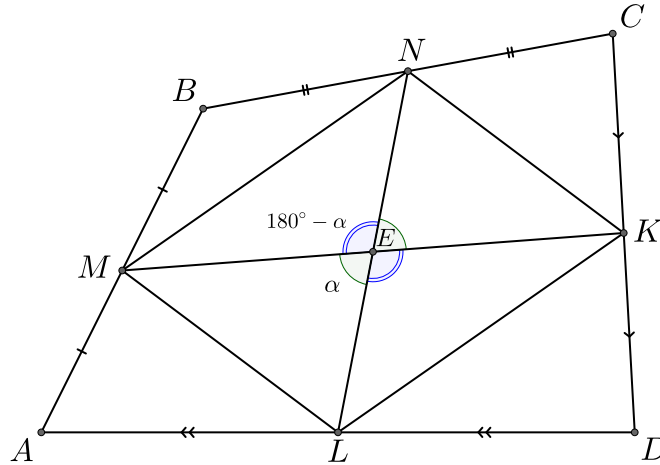
$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4.$$

Доказательство: Найдём площади треугольников LME , MNE , NKE и KLE :



$$S_{LME} = \frac{1}{2} \cdot LE \cdot EM \cdot \sin \alpha; \quad S_{MNE} = \frac{1}{2} \cdot ME \cdot EN \cdot \sin (180^\circ - \alpha)$$

$$S_{NKE} = \frac{1}{2} \cdot NE \cdot EK \cdot \sin \alpha; \quad S_{KLE} = \frac{1}{2} \cdot KE \cdot EL \cdot \sin (180^\circ - \alpha).$$



Так как четырёхугольник $MNKL$ построен на серединах сторон четырёхугольника $ABCD$, то $MNKL$ – параллелограмм, а значит диагонали $MNKL$ делятся точкой пересечения пополам, то есть $ME = EK$, $NE = EL$. Также $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$, поэтому получаем, что

$$S_{LME} + S_{NKE} = \frac{1}{2} \sin \alpha (LE \cdot EM + NE \cdot EK) = \frac{1}{2} \sin \alpha (NE \cdot EM + EL \cdot KE) = S_{MNE} + S_{KLE}.$$

Далее заметим, что треугольники S_{MBN} и S_{ABC} подобны с коэффициентом подобия 2, значит $S_{MBN} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABC}$. Аналогично получаем, что $S_{AML} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABD}$; $S_{CNK} = \frac{1}{4} \cdot S_{CBD}$;

$S_{DKL} = \frac{1}{4} \cdot S_{DAC}$. При этом $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABCD}$ и $S_{ABD} + S_{BCD} = S_{ABCD}$, значит

$$S_{AML} + S_{CNK} = S_{MBN} + S_{DKL} = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$

Окончательно получаем:

$$S_1 + S_3 = S_{MBN} + S_{MNE} + S_{DKL} + S_{KLE} = (S_{MNE} + S_{KLE}) + (S_{MBN} + S_{KLE}) = S_{LME} + S_{NKE} + S_{AML} + S_{CNK} = S_2 + S_4. \quad \square$$

8. Пусть внутри четырехугольника $ABCD$ отметили точку E , тогда

$$S_{BEC} \cdot S_{AED} = S_{AEB} \cdot S_{DEC}.$$

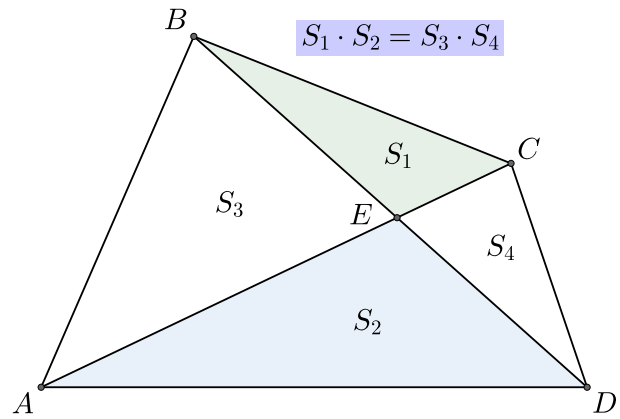
Доказательство: Пусть $\alpha = \angle BEC$, тогда $\alpha = \angle AED$ и $\angle AEB = \angle DEC = 180^\circ - \alpha$, а также $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$. Найдём площади треугольников:

$$S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EC \cdot \sin \alpha;$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot ED \cdot \sin \alpha; \quad S_{AEB} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin \alpha; \quad S_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot ED \cdot \sin \alpha.$$

Получаем:

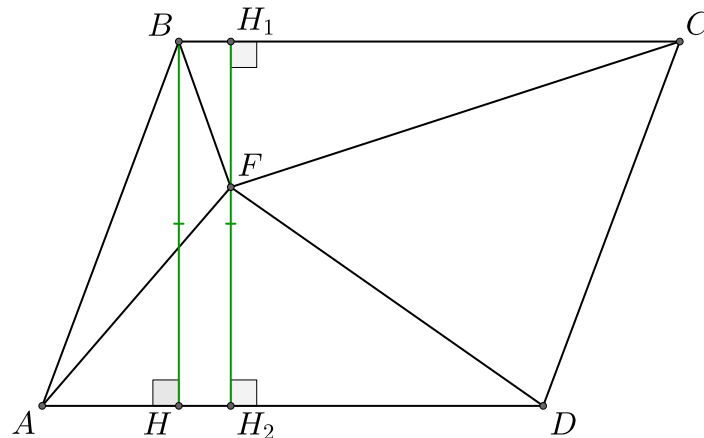
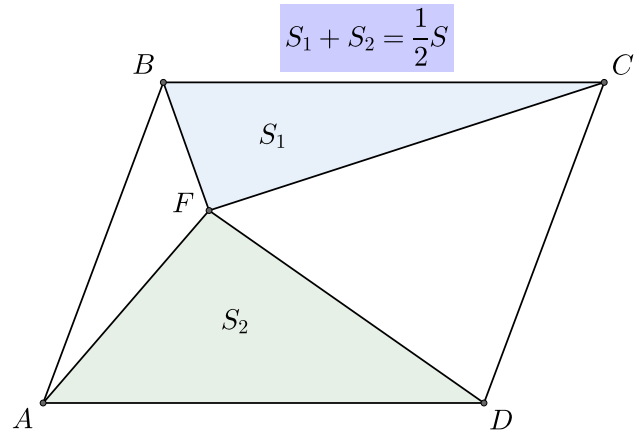
$$S_{BEC} \cdot S_{AED} = \left(\frac{1}{2} \cdot BE \cdot EC \cdot \sin \alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AE \cdot ED \cdot \sin \alpha \right) = \left(\frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin \alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot CE \cdot ED \cdot \sin \alpha \right) = S_{AEB} \cdot S_{DEC}. \quad \square$$



9. Пусть внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку F , тогда $S_{AFD} + S_{BFC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Доказательство: Через точку F проведём отрезок H_1H_2 параллельно высоте BH параллелограмма. $ABCD$ – параллелограмм, поэтому $AD = BC$. Тогда получаем:

$$S_{BFC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot FH_2; \quad S_{AFD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FH_1.$$

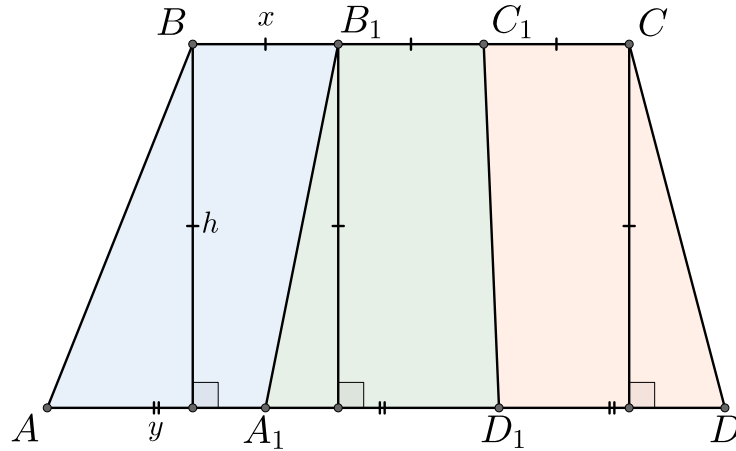
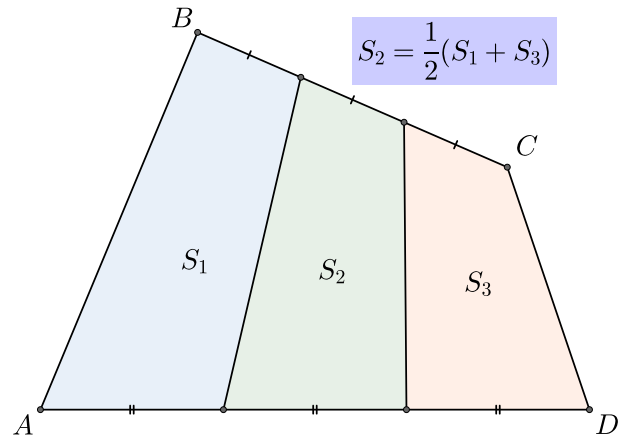


Получаем:

$$S_{BFC} + S_{AFD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot FH_2 + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FH_1 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot (FH_1 + FH_2) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH = \frac{1}{2} S_{ABCD}. \quad \square$$

10. В четырехугольнике $ABCD$ разделим две противоположные стороны на 3 равные части, тогда $ABCD$ разделится на 3 четырехугольника и $S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_3)$.

Доказательство: Рассмотрим случай, когда AD и BC параллельны. Пусть $x = \frac{1}{3} \cdot BC$; $y = \frac{1}{3} \cdot AD$, h – высота четырехугольника к стороне AD . Тогда $S_{ABB_1A_1} = S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{D_1C_1CD} = (x+y) \cdot h$, значит $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}(S_{ABB_1A_1} + S_{D_1C_1CD})$.



Теперь пусть AD и BC пересекаются в точке M . Пусть $\alpha = \angle AMB$. Тогда:

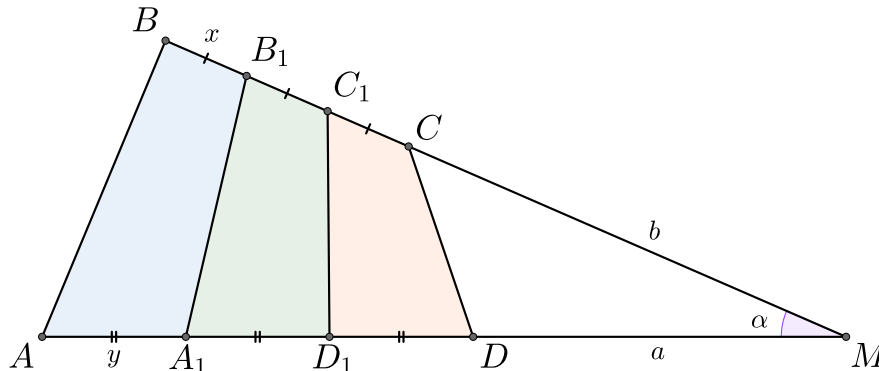
$$S_{D_1C_1CD} = S_{MC_1D_1} - S_{MCD} = \frac{1}{2}(a+y) \cdot (b+x) \sin \alpha - \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}(ax + by + xy) \sin \alpha;$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{MB_1A_1} - S_{MC_1D_1} = \frac{1}{2}(a+2y) \cdot (b+2x) \sin \alpha - \frac{1}{2}(a+y) \cdot (b+x) \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}(ax + by + 3xy) \sin \alpha;$$

$$S_{ABB_1A_1} = S_{MBA} - S_{MB_1A_1} = \frac{1}{2}(a+3y) \cdot (b+3x) \sin \alpha - \frac{1}{2}(a+2y) \cdot (b+2x) \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}(ax + by + 5xy) \sin \alpha;$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{2} \cdot (S_{ABB_1A_1} + S_{D_1C_1CD}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}(ax + by + 5xy) \sin \alpha + \frac{1}{2}(ax + by + xy) \sin \alpha \right) = \frac{1}{2}(ax + by + 3xy) \sin \alpha = S_{A_1B_1C_1D_1}. \quad \square$$

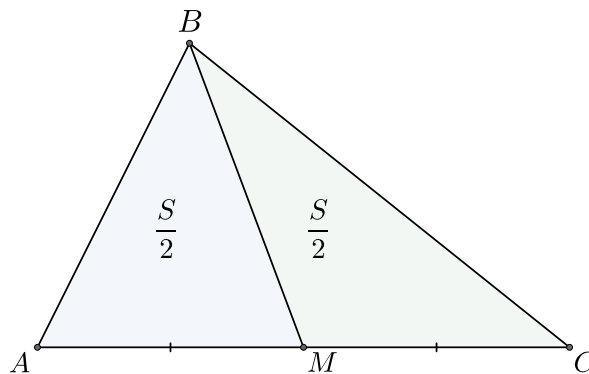


6 Медиана

1. Медиана делит площадь треугольника на две равновеликие части, то есть пополам.

$$S_{ABM} = S_{MBC} = \frac{S}{2}.$$

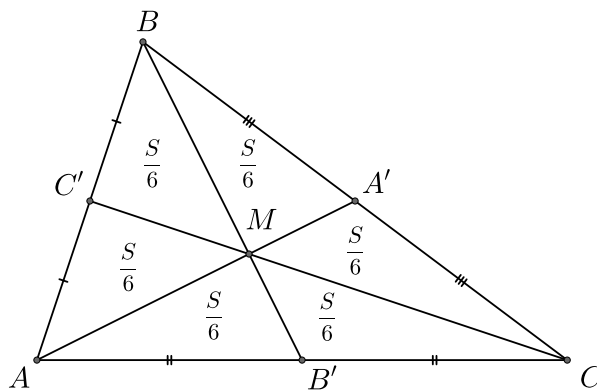
Доказательство: Треугольники ABM и BMC имеют общую высоту h . Тогда $S_{ABM} = S_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} h = \frac{S}{2}$. $\square$



2. Медианы треугольника пересекаются в точке M – центре масс треугольника. Ещё эту точку называют **центроидом** треугольника.

3. Все три медианы делят площадь треугольника на 6 равновеликих частей.

$$S_{AMC'} = S_{C'BM} = S_{MBA'} = S_{A'MC} = S_{CB'M} = S_{MAB'} = \frac{S}{6}.$$



Доказательство: $S_{AMB'} = S_{B'MC}$; $S_{AMC'} = S_{C'MB}$; $S_{CMA'} = S_{A'MB}$ (см. первый пункт данного раздела). Площади треугольников, имеющих одинаковую высоту, относятся как стороны основания (см. пункт 2 в разделе 5). Медианы точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, поэтому $S_{BAM} = 2S_{AMB'}$ и $S_{BCM} = 2S_{B'MC}$, а значит $S_{AMB'} = S_{AMC'} = S_{C'MB} = S_{B'MC} = S_{CMA'} = S_{A'MB} = \frac{S}{6}$. $\square$

4. В параллелограмме со сторонами a , b и диагоналями d_1 , d_2 выполняется **тождество параллелограмма**:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Доказательство: По теореме косинусов получаем, что

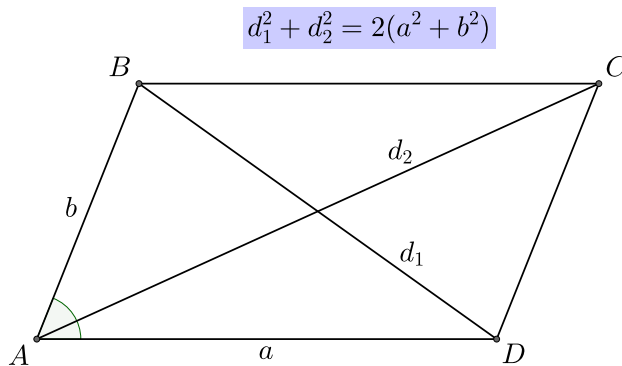
$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

$\angle ABD = 180^\circ - \alpha$, так как $ABCD$ – параллелограмм. Поэтому получаем второе соотношение:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha.$$

Сложим полученные равенства:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2). \quad \square$$

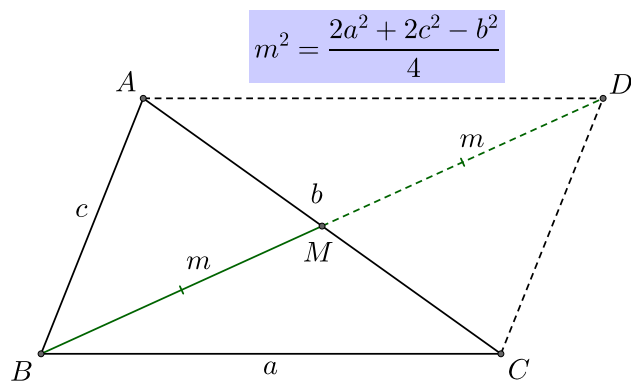


5. Формула для нахождения длины медианы:

$$m^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}.$$

Доказательство: Продлим медиану до точки D так, что $BM = MD$. Получим параллелограмм $ABCD$. Для него тождество параллелограмма запишется следующим образом:

$$b^2 + (2m)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

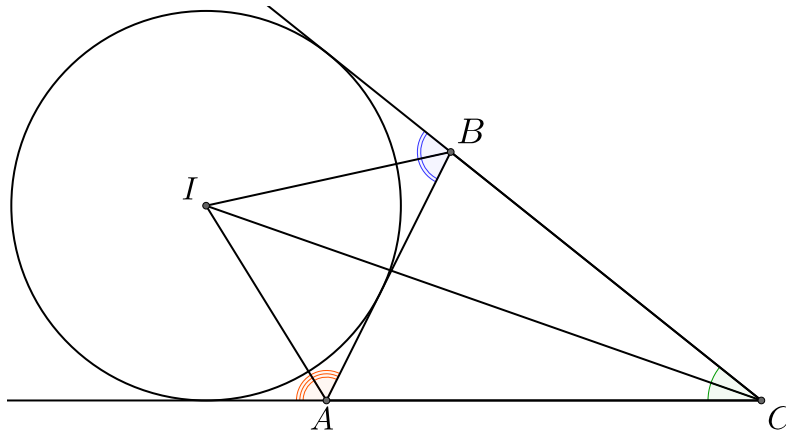


Из чего получаем:

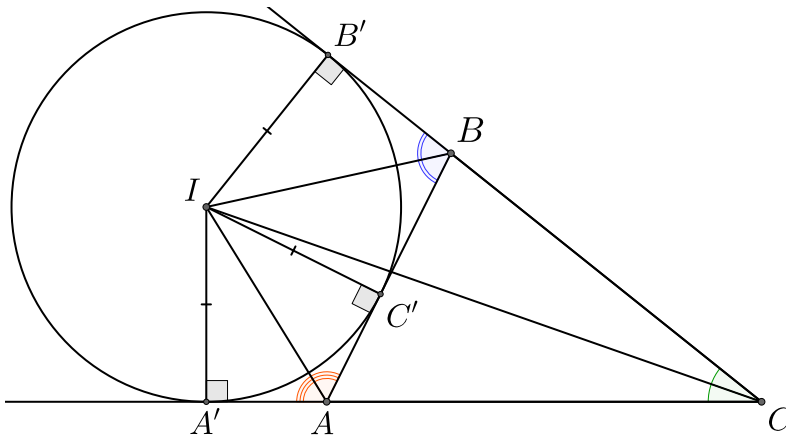
$$m^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}. \quad \square$$

7 Биссектриса

1. Биссектрисы двух внешних углов треугольника и одного внутреннего пересекаются в центре вневписанной окружности.



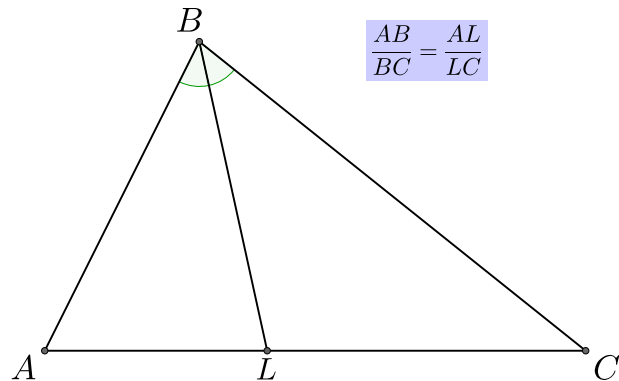
Доказательство: Пусть I – точка пересечения биссектрис внешних углов $\angle A$ и $\angle B$, IA' , IB' – отрезки перпендикуляров к продолжениям сторон AC и BC , IC' – отрезок перпендикуляра к стороне AB . I лежит на биссектрисе угла A , значит $IA' = IC'$, аналогично получаем, что $IB' = IC'$, значит $IB' = IA'$, то есть точка I равноудалена от сторон угла C , значит она лежит на биссектрисе угла C . $IA' = IB' = IC'$, поэтому I – центр вневписанной окружности. $\square$



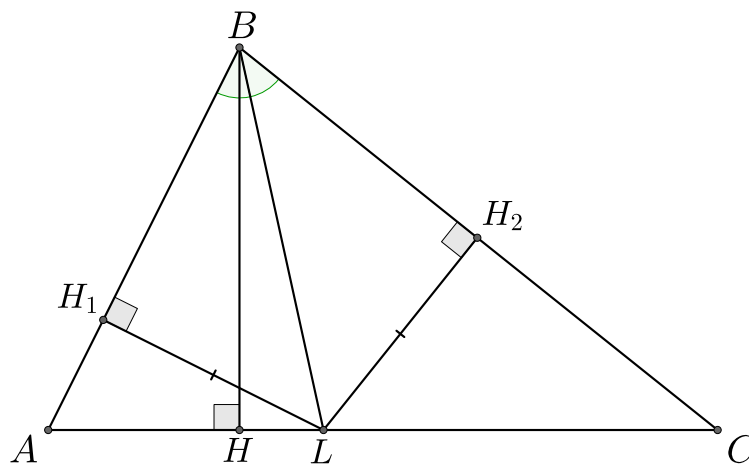
2. Биссектриса BL делит сторону AC так, что выполнено равенство:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}.$$

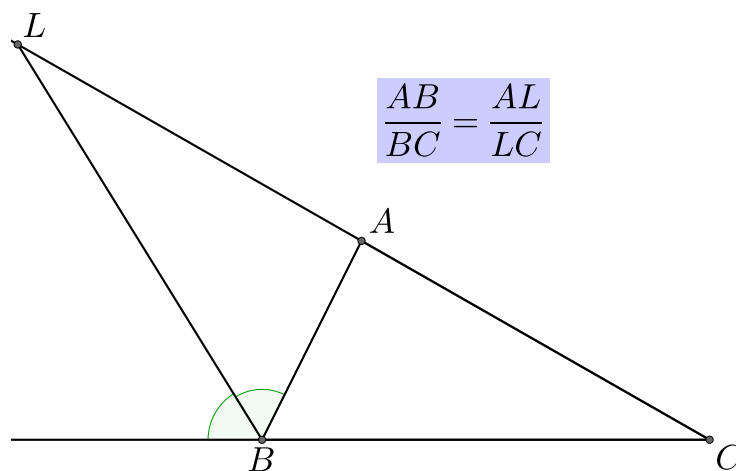
Доказательство: Пусть BH – высота треугольника ABC , LH_1 – высота треугольника ABL , LH_2 – высота треугольника BCL . Так как каждая точка на биссектрисе равноудалена от сторон угла, то $LH_1 = LH_2 = h$. Получаем:



$$\frac{AL}{LC} = \frac{AL \cdot BH}{LC \cdot BH} = \frac{S_{ABL}}{S_{BCL}} = \frac{AB \cdot h}{BC \cdot h} = \frac{AB}{BC}. \quad \square$$

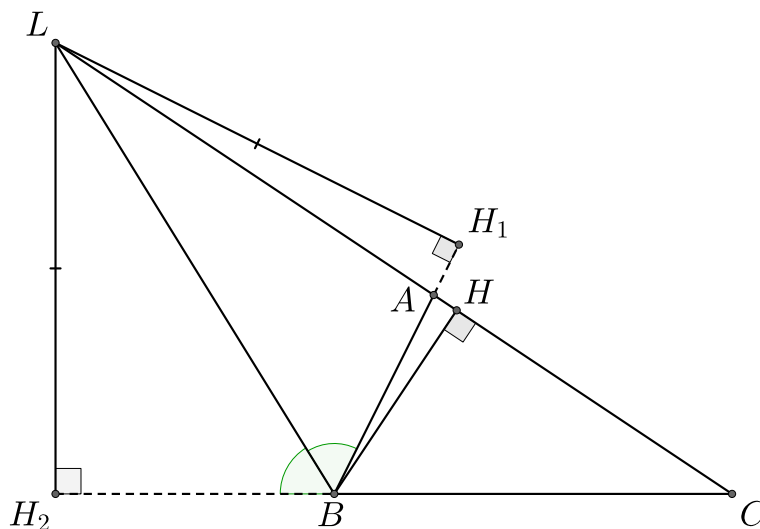


3. Биссектриса внешнего угла A пересекает продолжение стороны BC в точке K так, что выполнено равенство:



Доказательство: Доказательство ничем не будет отличаться от доказательства аналогично факта для биссектрисы внутреннего угла. Пусть AH – высота треугольника ABC , LH_1 – высота треугольника ABL , LH_2 – высота треугольника BCL . Так как каждая точка на биссектрисе равноудалена от сторон угла, то $LH_1 = LH_2 = h$. Получаем:

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AL \cdot BH}{LC \cdot BH} = \frac{S_{ABL}}{S_{BCL}} = \frac{AB \cdot h}{BC \cdot h} = \frac{AB}{BC}. \quad \square$$



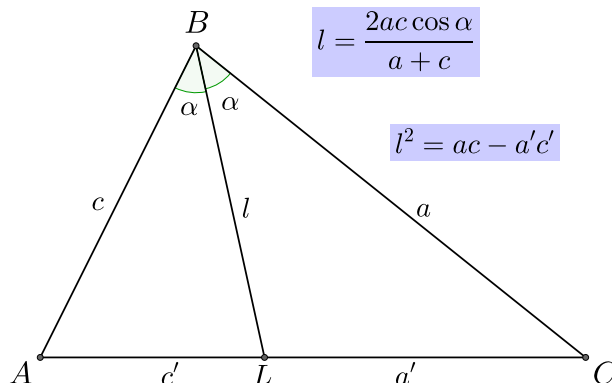
Замечание: Чтобы не путаться удобно запомнить следующее: стороны треугольника, выходящие из вершины угла из которого проведена биссектриса (не важно какая), относятся также как соответственные отрезки, выходящие из конца биссектрисы к другим вершинам.

4. Формулы нахождения длины биссектрисы треугольника:

$$l = \frac{2ac \cos \alpha}{a + c};$$

$$l^2 = ac - a'c'.$$

Доказательство: Докажем первую формулу. Вычислим площади треугольников ABL , CBL , ABC :



$$S_{ABL} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot l \cdot \sin \alpha; S_{CBL} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot l \cdot \sin \alpha; S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin 2\alpha.$$

При этом имеем: $S_{ABC} = S_{ABL} + S_{CBL}$. Значит:

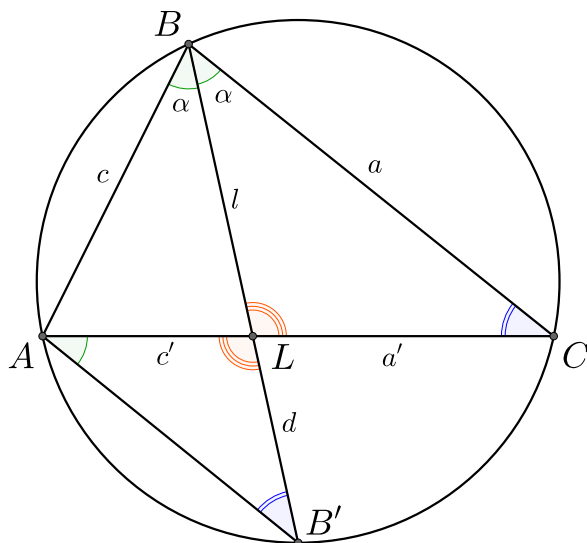
$$c \cdot l \cdot \sin \alpha + a \cdot l \cdot \sin \alpha = a \cdot c \cdot \sin 2\alpha \implies (a + c) \cdot \sin \alpha \cdot l = a \cdot c \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Таким образом:

$$l = \frac{2ac \cos \alpha}{a + c}. \quad \square$$

Докажем вторую формулу. Продлим биссектрису BL до пересечения с описанной вокруг ABC окружности (обозначим эту точку B'). $\angle LBC = \angle CAB'$, так как эти углы опираются на одну и ту же дугу, по тем же причинам $\angle BCA = \angle AB'B$, значит треугольники ALB' и BLC подобны, значит

$$\frac{l}{c'} = \frac{a'}{d} \implies ld = a'c';$$

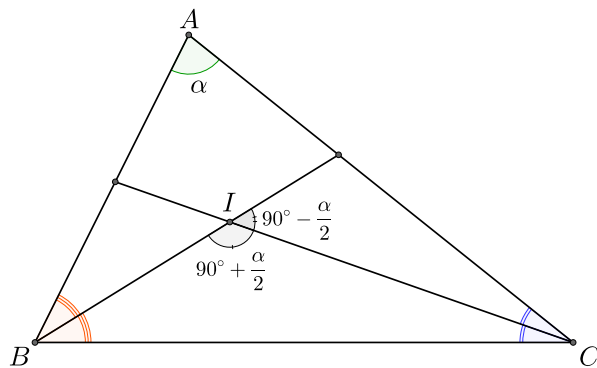


Легко видеть, что треугольники ABB' и LBC подобны, значит

$$\frac{l + d}{a} = \frac{c}{l} \implies l^2 + ld = ac \implies l^2 = ac - a'c'. \quad \square$$

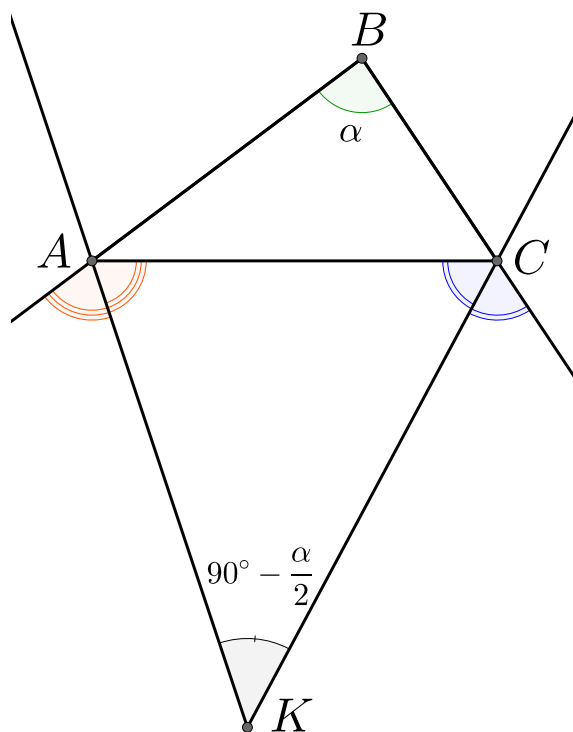
5. Угол между биссектрисами двух внутренних углов треугольника равен $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Смежный ему угол равен $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Доказательство: Пусть I точка пересечения биссектрис углов $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$. $\beta + \gamma = 180^\circ$, значит $\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle AIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, смежный ему равен $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. $\square$

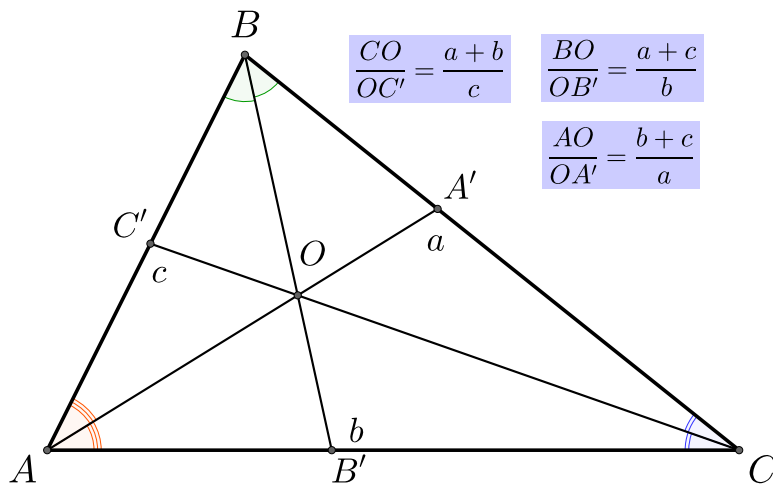


6. Угол между биссектрисами 2 внешних углов треугольника равен $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Доказательство: Мы знаем, что $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA)$, $\angle CAK = 90^\circ - \frac{\angle AKC}{2}$, $\angle ACK = 90^\circ - \frac{\angle BCA}{2}$, при этом $\angle AKC = 180^\circ - (\angle CAK + \angle ACK) = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle AKC}{2} + 90^\circ - \frac{\angle BCA}{2}\right) = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = \frac{1}{2}(180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA)) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. $\square$



8. Биссектрисы треугольника точкой биссектрис делятся следующим образом:



Доказательство: Докажем отношение $\frac{CO}{OC'} = \frac{a+b}{c}$. AO является биссектрисой треугольника $AC'C$, поэтому выполнено соотношение:

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{b}{c - C'B} = \frac{CO}{OC'};$$

CC' – биссектриса треугольника ABC , поэтому:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a} = \frac{AC'}{C'B} &\Rightarrow C'B = \frac{AC' \cdot a}{b} \Rightarrow C'B = \frac{(c - C'B) \cdot a}{b} = \frac{ac}{b} - C'B \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C'B \left(1 + \frac{a}{b}\right) = \frac{ac}{b} \Rightarrow C'B = \frac{ac}{a+b}. \end{aligned}$$

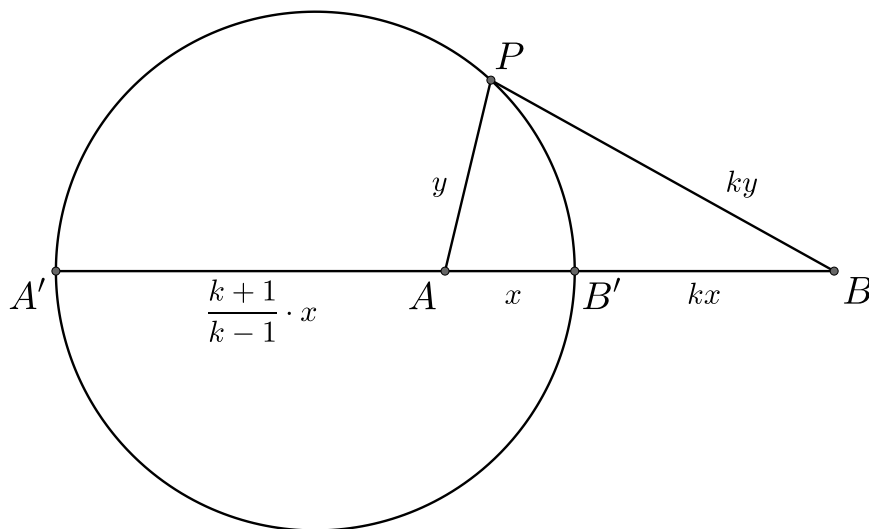
Получаем:

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{b}{c - \frac{ac}{a+b}} = \frac{a+b}{c}. \quad \square$$

9. Пусть на плоскости нам даны две точки A, B , а также $k > 0, k \neq 1$ – фиксированное число. Геометрическим множеством точек P таких, что

$$\frac{BP}{AP} = k$$

является окружность, называемая **окружностью Аполлония**.



Доказательство:

8 Средняя линия

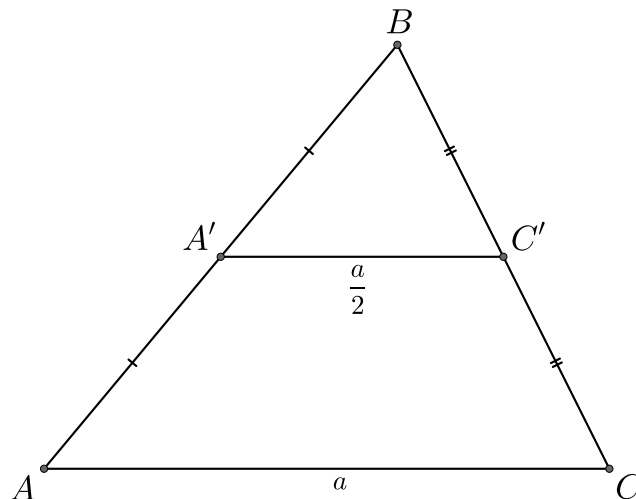
Средней линией треугольника будем называть отрезок, соединяющий середины двух сторон.

1. Средняя линия $A'C'$ треугольника ABC отсекает от него подобный треугольник $A'BC'$, причём коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$.

2. Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

Доказательство: Из обратной теоремы Фалеса следует, что отрезки AC и $A'C'$ параллельны. Угол $\angle ABC$ является общим для треугольников ABC и $A'BC'$, при этом $AB = 2A'B$, $BC = 2C'B$, значит ABC и

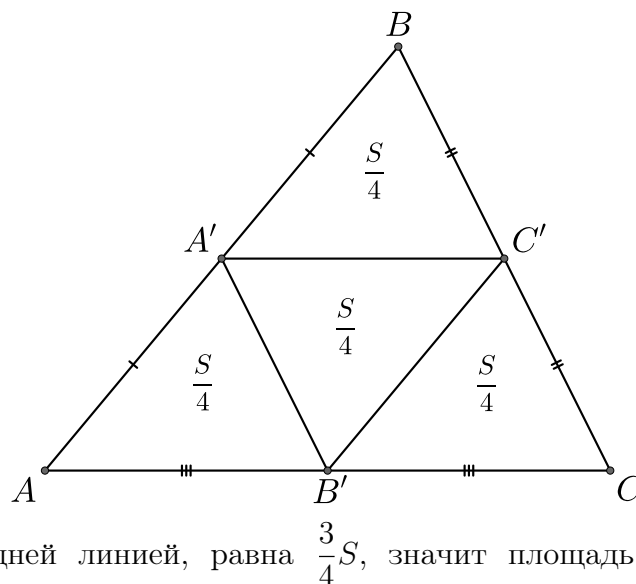
$A'BC'$ подобны по второму признаку подобия (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними) с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Также $AC = 2A'C'$, то есть средняя линия равна половине основания. $\square$



3. Средние линии делят треугольник на 4 равных треугольника площади $\frac{S}{4}$, где S – площадь исходного треугольника.

Доказательство: Мы установили, что каждая средняя линия треугольника отсекает треугольник, подобный исходному, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, значит площадь треугольника, отсекаемого средней линией, равен $\frac{S}{4}$ (так как отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия). Значит сумма

площадей треугольников, отсекаемых средней линией, равна $\frac{3}{4}S$, значит площадь оставшегося треугольника равна также $\frac{S}{4}$. $\square$

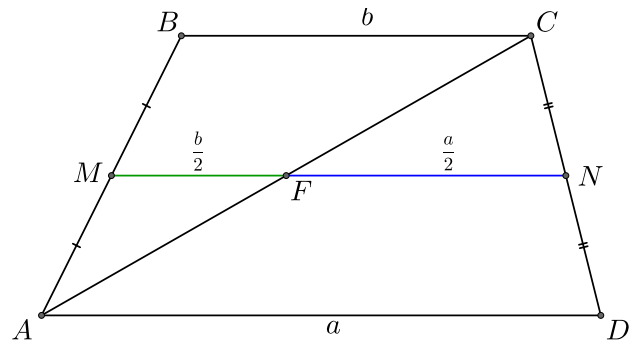
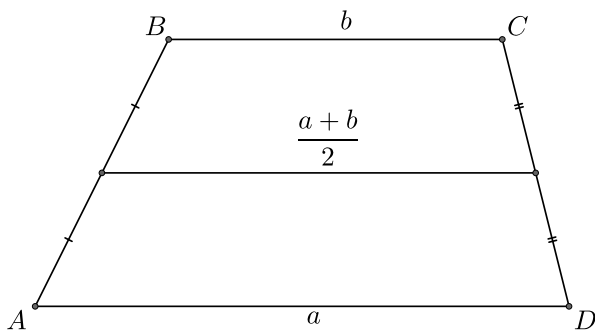


Средней линией трапеции будем называть отрезок, соединяющий середины двух боковых сторон трапеции.

4. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

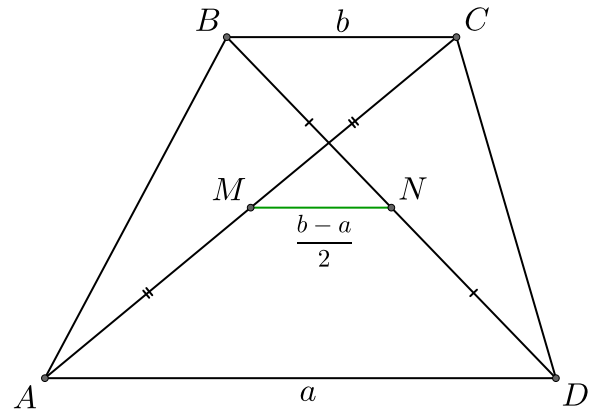
Доказательство: Пусть диагональ AC пересекает среднюю линию в точке F . Тогда MF – средняя линия треугольника ABC , значит $MF = \frac{a}{2}$, ML – средняя линия треугольника

ACL , значит $ML = \frac{b}{2}$. $ML = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$. $\square$



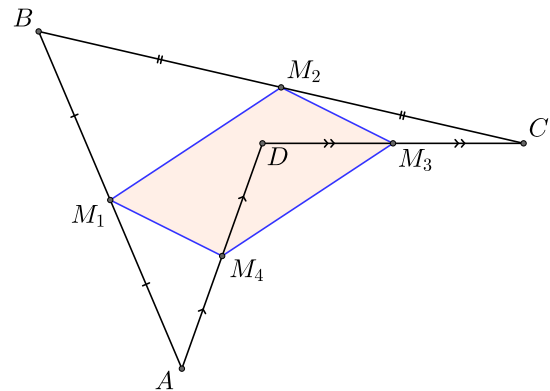
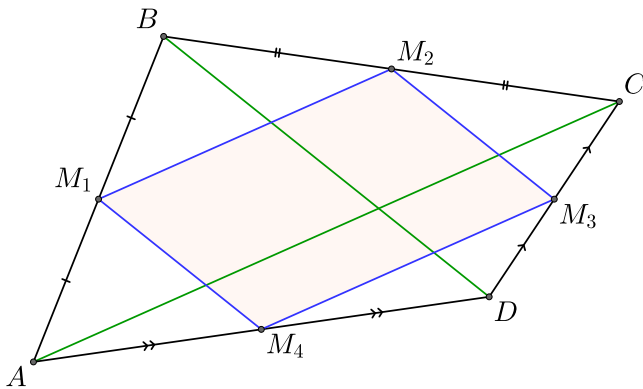
5 Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности длин оснований.

Доказательство: Пусть M и N – середины диагоналей AC и BD соответственно. Отрезок, соединяющий M с серединой боковой стороны AB , равен $\frac{b}{2}$. Отрезок, соединяющий N с серединой боковой стороны BD , равен $\frac{b}{2}$. Значит $MN = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$. $\square$



6. (Теорема Вариньона)

Четырёхугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного четырёхугольника (не обязательно выпуклого), является параллелограммом, площадь которого вдвое меньше площади четырёхугольника. Полученный параллелограмм будем называть **параллелограммом Вариньона**.



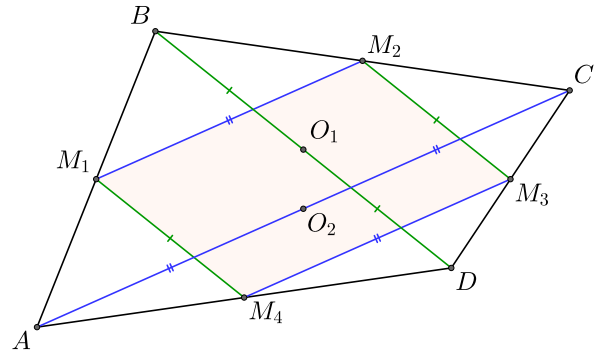
Доказательство: Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 – середины сторон AB, BC, CD, DA . Тогда M_1M_2 – средняя линия треугольника ABC , а значит отрезок M_1M_2 параллелен отрезку AC и $AC = 2M_1M_2$. M_3M_4 – средняя линия треугольника ACD , значит отрезок M_3M_4 параллелен отрезку AC и $AC = 2M_3M_4$, то есть отрезки M_1M_2 и M_3M_4 параллельны и равны. Аналогично мы можем доказать, что отрезки M_1M_4 M_2M_3 параллельны и равны. Значит четырёхугольник $M_1M_2M_3M_4$ – параллелограмм.

Докажем, что площадь $M_1M_2M_3M_4$ в два раза меньше площади $ABCD$. $S_{BM_1M_2} = \frac{1}{4}S_{ABC}$, $S_{DM_3M_4} = \frac{1}{4}S_{ACD}$, $S_{AM_1M_4} = \frac{1}{4}S_{ABD}$, $S_{CM_2M_3} = \frac{1}{4}S_{BCD}$. При этом $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD} = S_{ABCD} = S$, значит $S_{BM_1M_2} + S_{DM_3M_4} + S_{AM_1M_4} + S_{CM_2M_3} = \frac{1}{4} \cdot (S + S) = \frac{S}{2}$. Таким образом

$$S_{M_1M_2M_3M_4} = S - (S_{BM_1M_2} + S_{DM_3M_4} + S_{AM_1M_4} + S_{CM_2M_3}) = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}. \quad \square$$

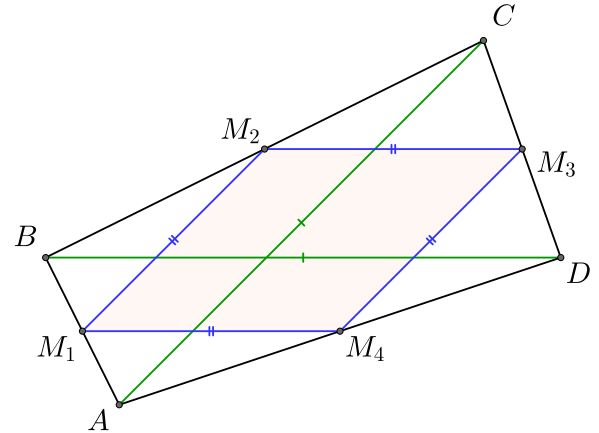
7. Стороны получившегося параллелограмма равны половинкам диагоналей исходного четырехугольника.

Доказательство: В предыдущем пункте мы доказали, что $M_1M_2 = M_3M_4 = \frac{AC}{2}$, аналогично мы можем доказать, что $M_1M_4 = M_2M_3 = \frac{BD}{2}$. $\square$



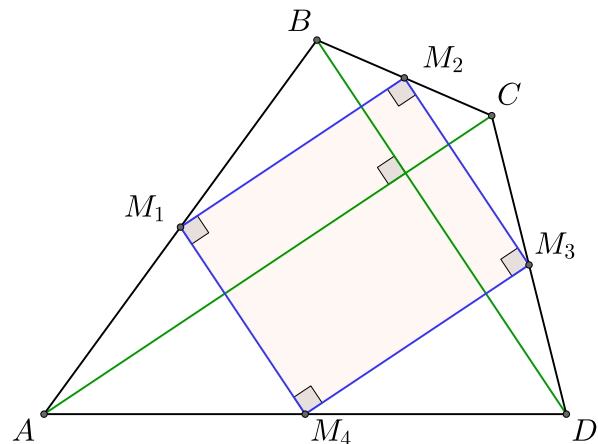
8. Если диагонали исходного четырехугольника равны, то параллелограмм Вариньона становится ромбом.

Доказательство: Если $AC = BD$, значит $M_1M_2 = M_3M_4 = \frac{AC}{2} = M_1M_4 = M_2M_3$, значит $M_1M_2M_3M_4$ – ромб.



9. Если диагонали исходного четырехугольника перпендикулярны, то параллелограмм Вариньона становится прямоугольником.

Доказательство: Отрезки M_1M_2 и M_3M_4 параллельны диагонали AC , отрезки M_1M_4 и M_2M_3 параллельны BD , значит углы между соседними сторонами параллелограмма $M_1M_2M_3M_4$ равны углу между диагоналями, значит углы $M_1M_2M_3M_4$ равны 90° . $\square$



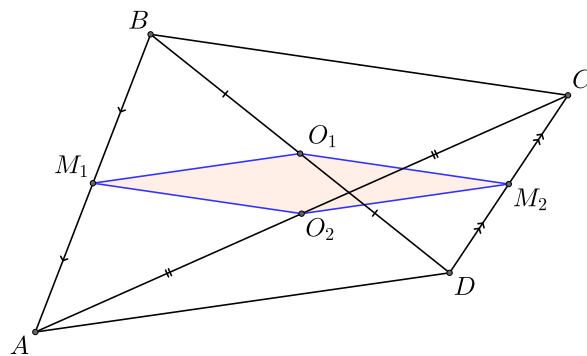
10. Четырёхугольник, вершинами которого являются середины противоположных сторон и диагоналей произвольного четырёхугольника, является параллелограммом.

Доказательство: Пусть $ABCD$ – четырёхугольник. M_1, M_2 – середины сторон AB и CD , O_1 – середина диагонали BD , O_2 – середина диагонали AC . Тогда M_1O_1 – средняя линия треугольника ABD ,

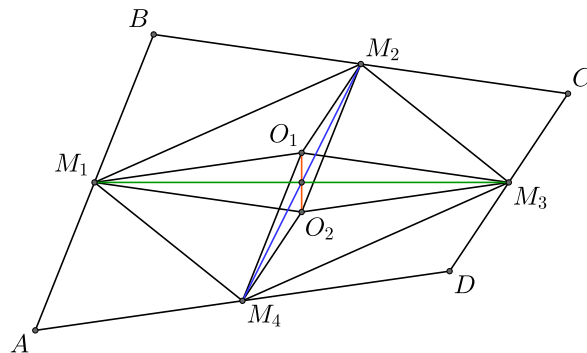
значит отрезок M_1O_1 параллелен отрезку AD и $M_1O_1 = \frac{AD}{2}$. M_2O_2 – средняя линия

треугольника ACD , значит отрезок M_2O_2 параллелен отрезку AD и $M_2O_2 = \frac{AD}{2}$,

то есть отрезки M_1O_1 и M_2O_2 параллельны и $M_1O_1 = M_2O_2$. Аналогично можно доказать, что отрезки M_1O_2 и M_2O_1 параллельны и $M_1O_2 = M_2O_1$, значит $M_1O_1M_2O_2$ – параллелограмм. $\square$

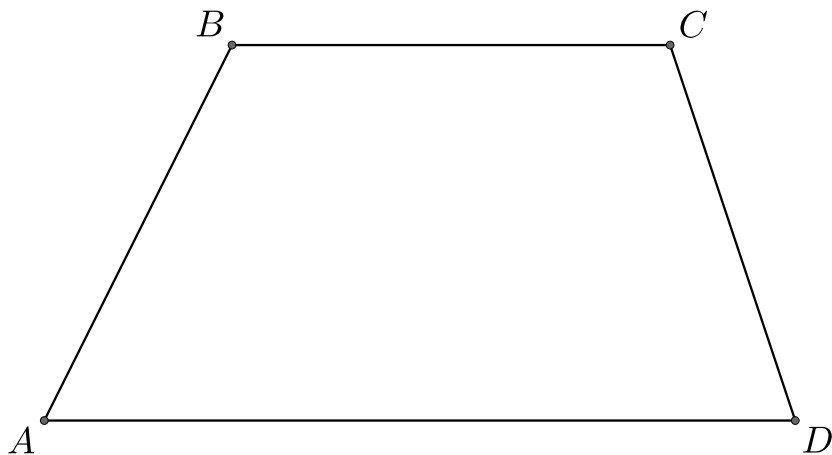


11. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 – середины сторон четырёхугольника, O_1, O_2 – середины диагоналей четырёхугольника, тогда M_1M_3 ; M_2M_4 и O_1O_2 пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения пополам.



9 Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны (они называются *основаниями*), а две другие – нет (они называются *боковыми сторонами*). Если у трапеции боковые стороны равны, то она называется *равнобедренной*.



1. Трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда углы при любом из оснований равны.

Доказательство: Докажем, что если трапеция равнобедренная, то углы при основаниях равны. Проведём высоты BH_1 , CH_2 . В прямоугольных треугольниках ABH_1 и DCH_2 равны гипотенузы AB , CD (так как трапеция равнобедренная) и равны

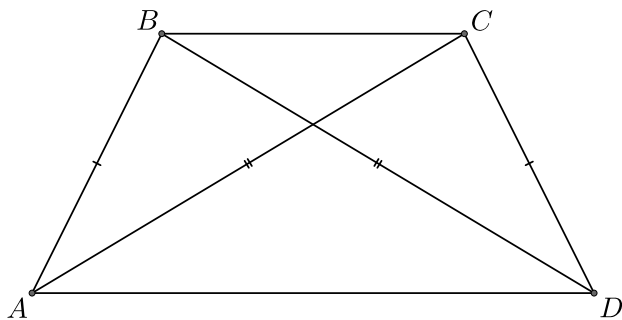
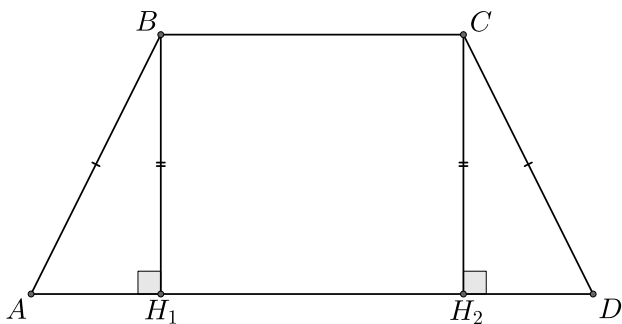
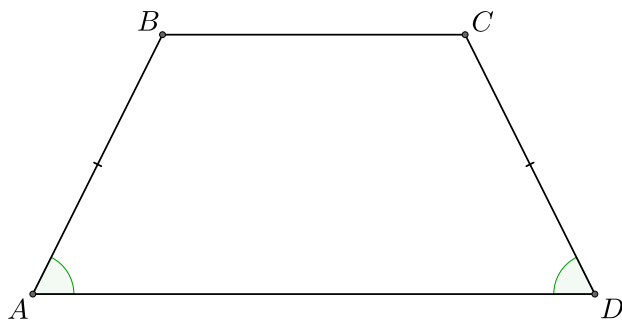
катеты BH_1 , CH_2 , значит треугольники ABH_1 и DCH_2 равны, поэтому $\angle BAD = \angle CDA$ и $\angle ABH_1 = \angle DCH_2$, при этом $\angle H_1BC = \angle H_2CB = 90^\circ$, значит $\angle ABC = \angle DCB$.

Обратно, пусть углы при основаниях равны. Проведём высоты BH_1 , CH_2 , они равны, при этом $\angle ABC = \angle CDA$, $\angle BH_1A = \angle CH_2D$, $\angle ABH_1 = \angle DCH_2$, поэтому треугольники ABH_1 и DCH_2 равны, значит $AB = CD$. $\square$

2. Трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда её диагонали равны.

Доказательство: Рассмотрим треугольники ABD и DCA .

Если $AB = CD$, то $\angle BAD = \angle ADC$, при этом сторона AD является общей для треугольников ABD и DCA , значит данные треугольники равны, поэтому $AC = BD$.



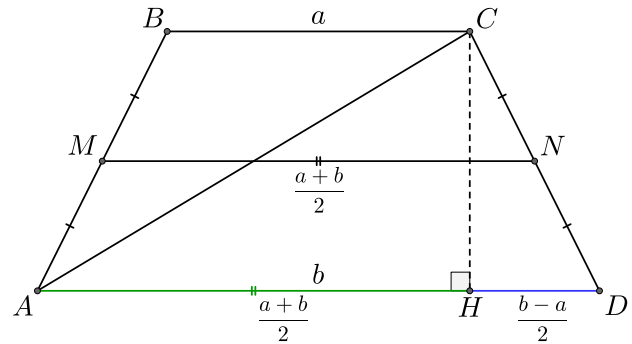
Если $\angle BAD = \angle ADC$, значит $AB = CD$, также AD является общей для треугольников ABD и DCA , значит они подобны, поэтому $AC = BD$.

3. В равнобедренной трапеции проекция диагонали на бОльшее основание равна средней линии.

4. В равнобедренной трапеции проекция боковой стороны на бОльшее основание равна полуразности длин оснований.

Доказательство: Докажем сразу оба свойства. Пусть CH – высота трапеции. Тогда $AD = b = AH + HD = a + 2HD$,

значит $HD = \frac{b-a}{2}$, $AH = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$. $\square$



5. (Замечательное свойство трапеции).

В трапеции середины оснований, точка пересечения продолжений боковых сторон и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой.

Доказательство: Пусть M, N – середины оснований BC и AD соответственно, Q_1 – точка пересечения диагонали AC и MN , Q_2 – точка пересечения диагонали BD и MN . Треугольники AQ_1N и CQ_1M подобны, значит

$$\frac{MQ_1}{Q_1N} = \frac{MC}{AN}.$$

Треугольники DQ_2N и BQ_2M подобны, значит

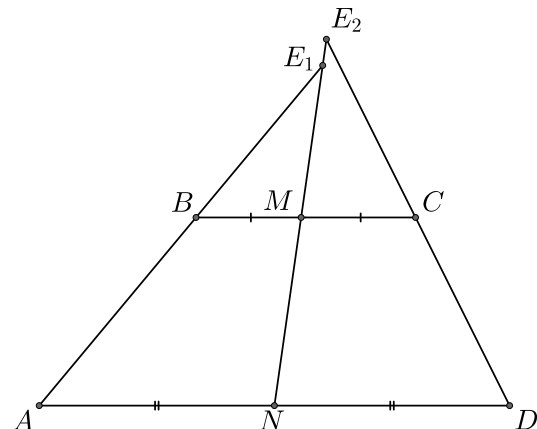
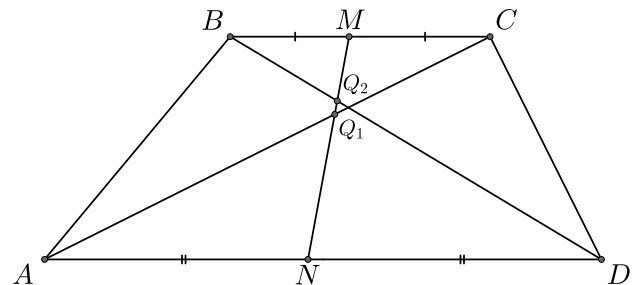
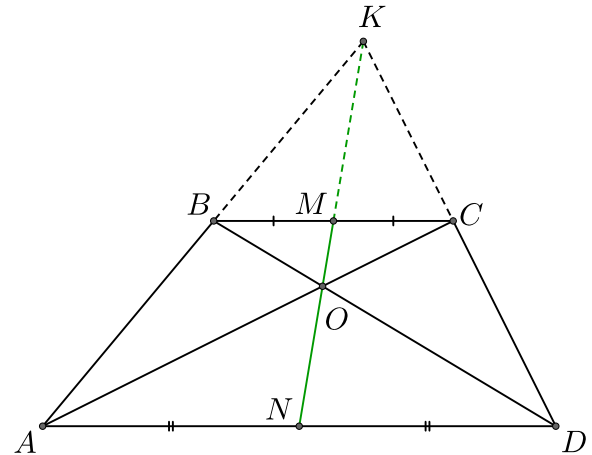
$$\frac{MQ_2}{Q_2N} = \frac{MB}{ND}.$$

При этом $MC = MB$ и $AN = ND$, значит

$$\frac{MQ_1}{Q_1N} = \frac{MQ_2}{Q_2N}.$$

То есть точки Q_1 и Q_2 делят отрезок MN в одном и том же отношении, значит эти точки совпадают, поэтому диагонали трапеции пересекаются на отрезке MN .

Далее, пусть продолжение боковой стороны AB пересекает продолжение MN в точке E_1 , продолжение стороны CD пересекает продолжение MN в точке E_2 .



Треугольники BE_1M и AE_1N подобны, значит $\frac{ME_1}{E_1N} = \frac{MB}{AN}$.

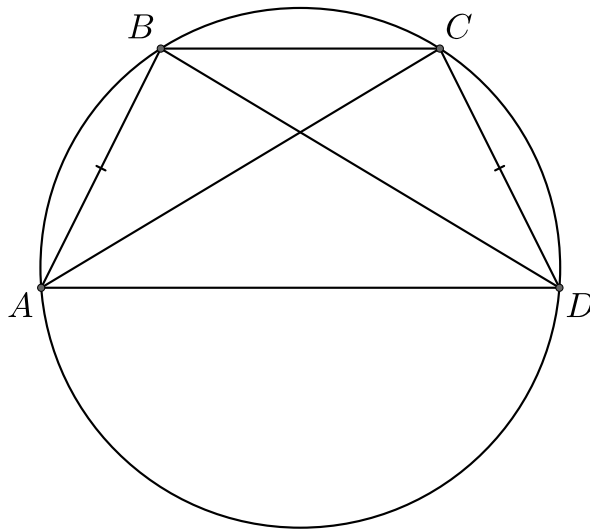
Треугольники ME_2C и NE_2ND подобны, значит $\frac{ME_2}{E_2N} = \frac{CM}{ND}$.

Так как $CM = MB$ и $AN = ND$, то $\frac{ME_1}{E_1N} = \frac{ME_2}{E_2N}$. То есть точки M_1 и M_2 делят отрезок MN в одном и том же отношении, значит эти точки совпадают, поэтому диагонали трапеции пересекаются на отрезке MN . $\square$

6. Вокруг равнобедренной трапеции можно описать окружность.

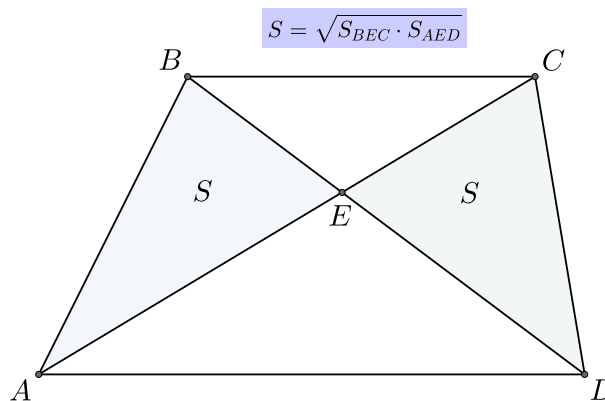
Обратно: Если вокруг трапеции можно описать окружность, то она является равнобедренной.

Доказательство: Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, тогда $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C$, при этом $\angle A + \angle B = \angle A + \angle C = 180^\circ$. Аналогично доказываем, что $\angle B + \angle D = 180^\circ$, значит вокруг $ABCD$ можно описать окружность. Пусть вокруг трапеции можно описать окружность. Тогда $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, но также верно, что $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то есть $\angle B = \angle C$, значит $ABCD$ – равнобедренная трапеция.



7. Треугольники при боковых сторонах трапеции, образованные диагоналями, равновелики. Их площади равны среднему геометрическому площадей треугольников при основаниях.

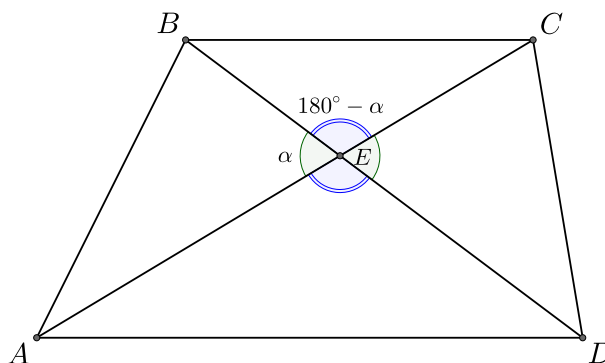
Доказательство: Для начала докажем равенство площадей треугольников. Площади треугольников ABD и ACD равны, так как они имеют общую сторону AD , а высоты, проведённые из вершин B и C к AD , являются высотой



трапеции. При этом $S_{ABD} = S_{AEB} + S_{AED}$, $S_{ACD} = S_{CED} + S_{AED}$, поэтому $S_{AEB} = S_{CED}$.

Пусть E – пересечение диагоналей трапеции, $\angle AEB = \alpha$, тогда $\angle BEC = 180^\circ - \alpha$. При этом $\angle AEB = \angle CED$, $\angle BEC = \angle AED$ и $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$.

Найдём площади треугольников S_{AEB} и S_{CED} :



$$S = S_{AEB} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin \alpha,$$

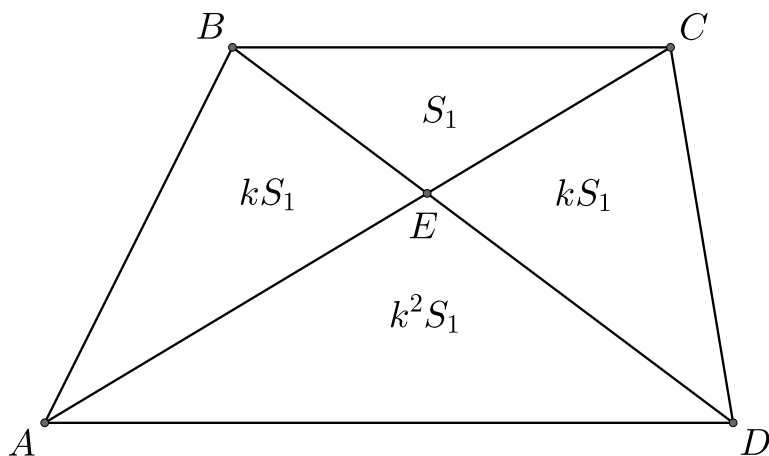
$$S = S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot ED \cdot \sin \alpha.$$

Перемножим эти равенства:

$$S^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot AE \cdot EB \cdot \sin \alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot CE \cdot ED \cdot \sin \alpha \right) = \left(\frac{1}{2} \cdot BE \cdot EC \cdot \sin (180^\circ - \alpha) \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AE \cdot ED \cdot \sin (180^\circ - \alpha) \right) = S_{BEC} \cdot S_{AED}.$$

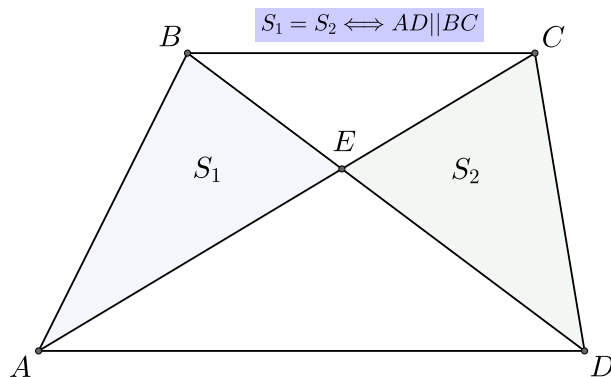
Таким образом получаем: $S = \sqrt{S_{BEC} \cdot S_{AED}}$. $\square$

Замечание: Пусть k – коэффициент подобия треугольников BEC и AED . Тогда $S_2 = k^2 S_1$, $S = k S_1$. Получаем, что $S_{ABCD} = S_1 + 2k S_1 + k^2 S_1 = (k + 1)^2 S_1$.



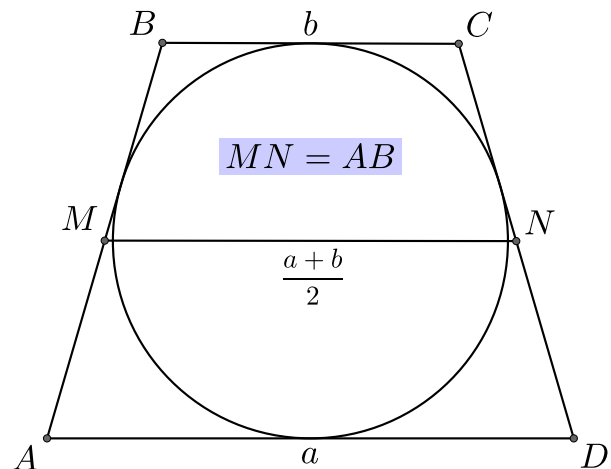
8. Если внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка O и $S_{AEB} = S_{CED}$, то $ABCD$ – трапеция.

Доказательство: Рассмотрим треугольники ABD и ACD . Они имеют общую сторону AD . Если $S_{AEB} = S_{CED}$, то $S_{ABD} = S_{ACD}$, тогда высоты, проведённые из вершин B и C к стороне AD , равны, но в таком случае отрезки AD и BC параллельны, то есть $ABCD$ – трапеция. $\square$

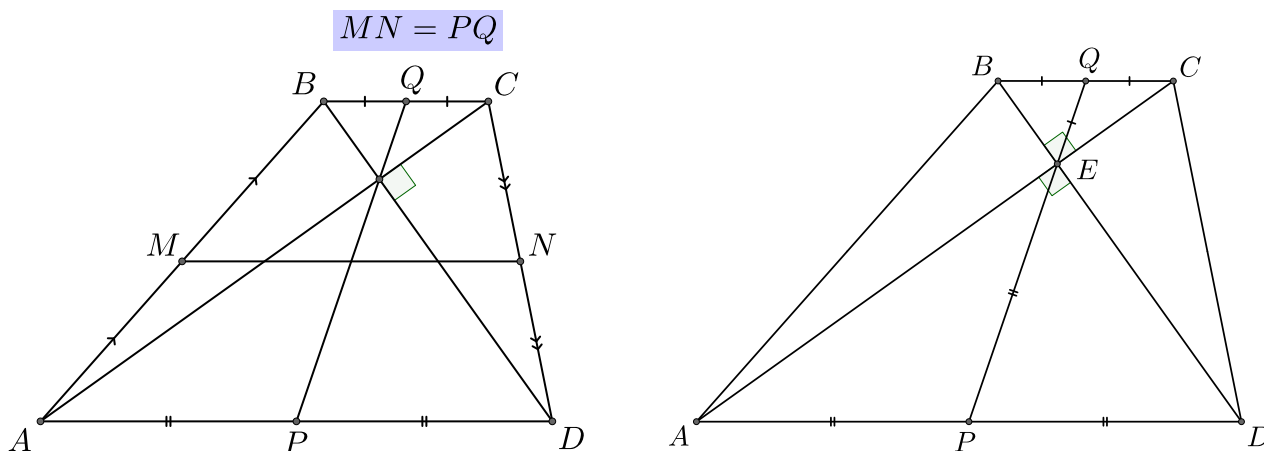


9. Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона и средняя линия этой трапеции равны.

Доказательство: Если в четырёхугольник $ABCD$ можно описать окружность, тогда $AB + CD = AD + BC$, при этом $AB = CD$, значит $2AB = AD + BC \Rightarrow AB = \frac{AD + BC}{2}$. $\square$



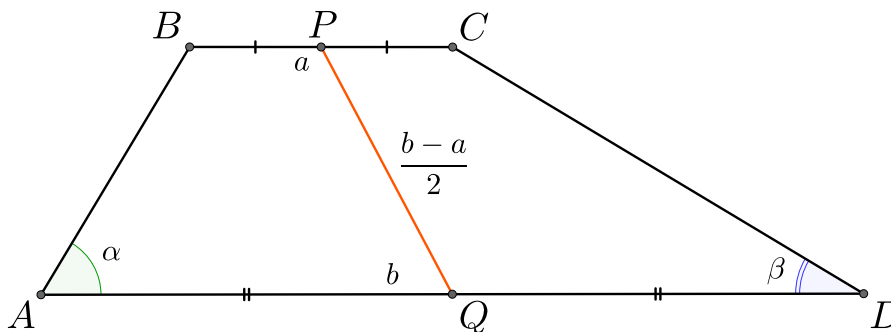
10. Если диагонали трапеции перпендикулярны, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен средней линии.



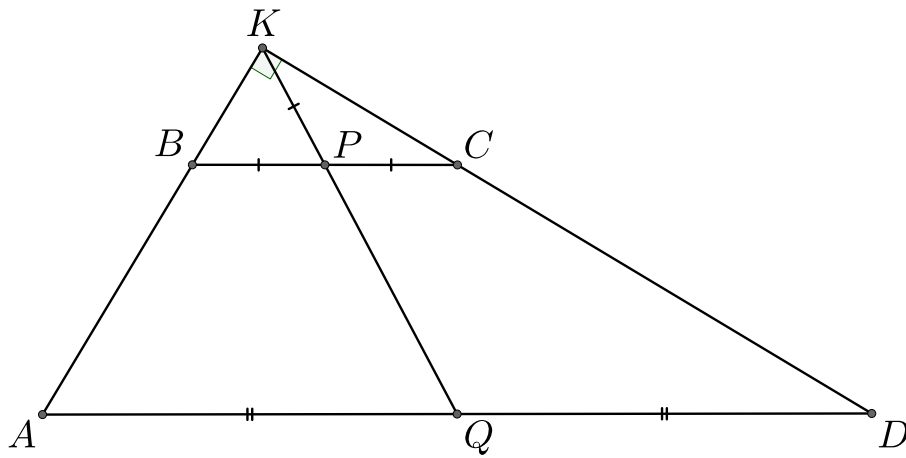
Доказательство: Пусть P, Q – середины оснований AD и BC , E – точка пересечения диагоналей $ABCD$. AED и BED – прямоугольные треугольники, при этом EP, EQ – медианы данных треугольников, проведённые к гипотенузе, поэтому $EP = \frac{AD}{2}$ и $EQ = \frac{BC}{2}$, значит $PQ = \frac{AD + BC}{2}$. $\square$

11. Если сумма углов при основании трапеции равна 90° , то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.

$$\alpha + \beta = 90^\circ \implies PQ = \frac{b - a}{2}$$

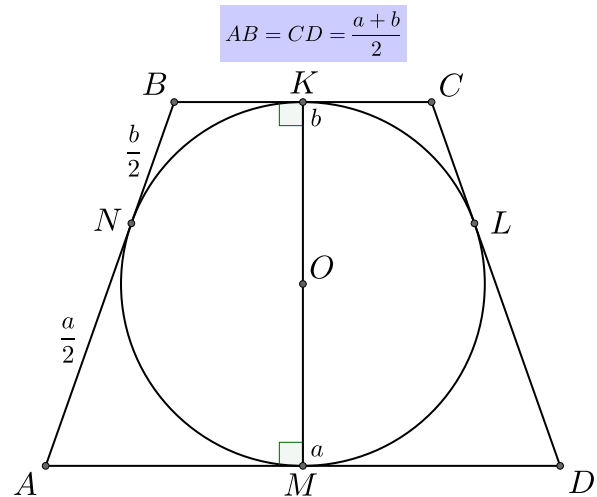


Доказательство: Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке K , $\angle KAD + \angle ADK = 90^\circ$, значит треугольник AKD – прямоугольный, а также прямоугольным является треугольник BKD (так как отрезки AD и BC параллельны). KQ и KP – медианы треугольников AKD и BKC , проведённые к гипотенузе, поэтому $KQ = \frac{AD}{2}$ и $KP = \frac{BC}{2}$, значит $PQ = \frac{AD - BC}{2}$. $\square$



12. Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то её боковые стороны равны полусумме оснований.

Доказательство: Пусть M и K – точки касания вписанной окружности с основаниями AD и BC соответственно. N и L – точки касания вписанной окружности с боковыми сторонами AB и CD соответственно. Так как OM – радиус окружности, то отрезок OM перпендикулярен основанию AD , а значит KM – высота трапеции.

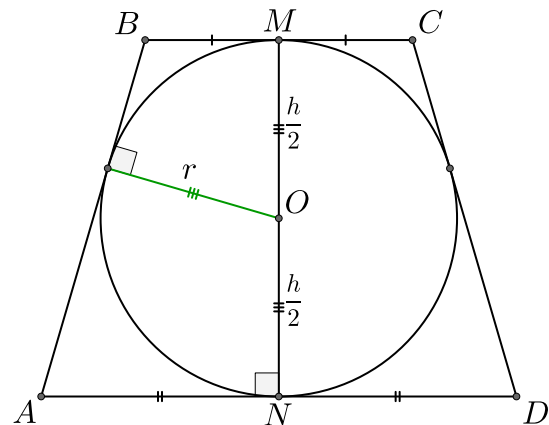


Докажем, что $AM = MD$ и $BK = KC$. В равнобедренной трапеции отрезок, соединяющий середины оснований, является высотой. Поэтому, если $AM > MD$, то $BK > KC$. При этом $AN = AM$, $DM = DL$, $BN = BK$, $CK = CL$. Получаем, что $AB = AN + NB = AM + BK > DM + CK = DL + CL = CD$, но тогда трапеция $ABCD$ не является равнобедренной. Противоречие и $AM = MD = \frac{a}{2}$, $BK = KC = \frac{b}{2}$.

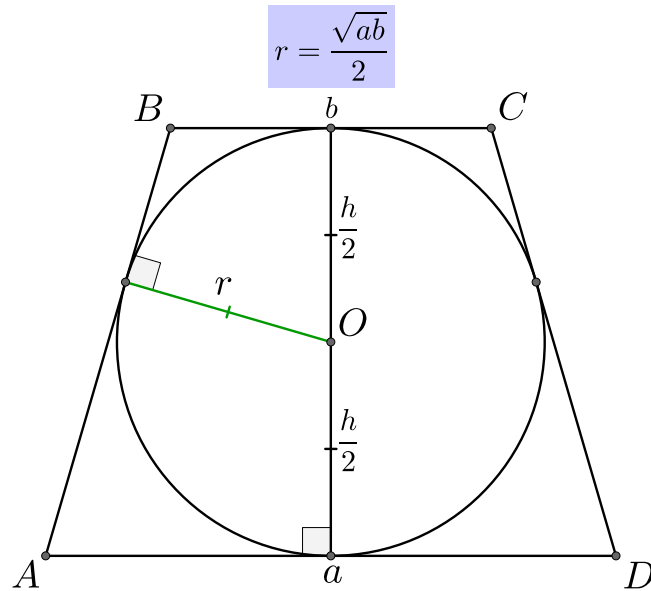
$AM = AN = \frac{a}{2}$, $BK = BN = \frac{b}{2}$, значит $AB = AN + NB = \frac{a+b}{2}$. $\square$

13. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен половине высоты этой трапеции.

Доказательство: Пусть N , M – середины оснований AD и BC соответственно. M , N являются точками касания вписанной окружности с основаниями трапеции. MO и NO – радиусы окружности, AD и BC – касательные, значит отрезок NO перпендикулярен отрезку AD , значит MN – высота трапеции. $MO = NO = r$, $MN = MO + NO = h$, значит $r = \frac{h}{2}$. $\square$

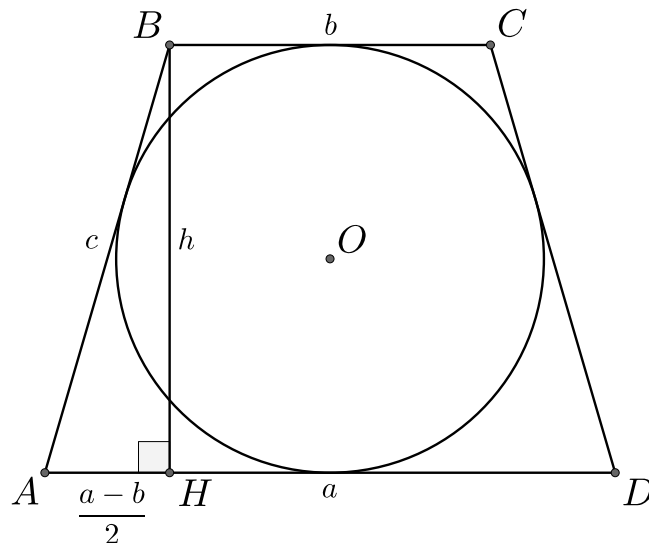


14. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен половине среднего геометрического оснований трапеции.



Доказательство: Боковая сторона равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна полусумме оснований, значит $c = \frac{a+b}{2}$. Рассмотрим высоту BH . Так как трапеция равнобедренная, то $AH = \frac{a-b}{2}$. По теореме Пифагора получаем, что $c^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2$ или $h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$. Мы знаем, что радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен половине высоты этой трапеции. Значит

$$r = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2}. \quad \square$$

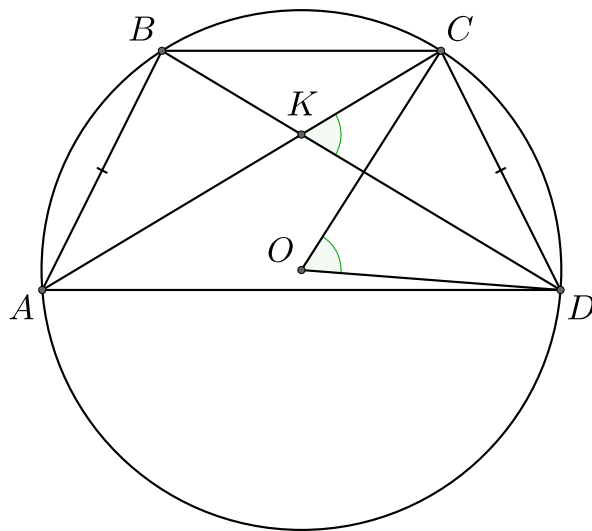


15. Угол, под которым видна боковая сторона равнобедренной трапеции из точки пересечения диагоналей, равен углу, под которым она видна из центра описанной окружности.

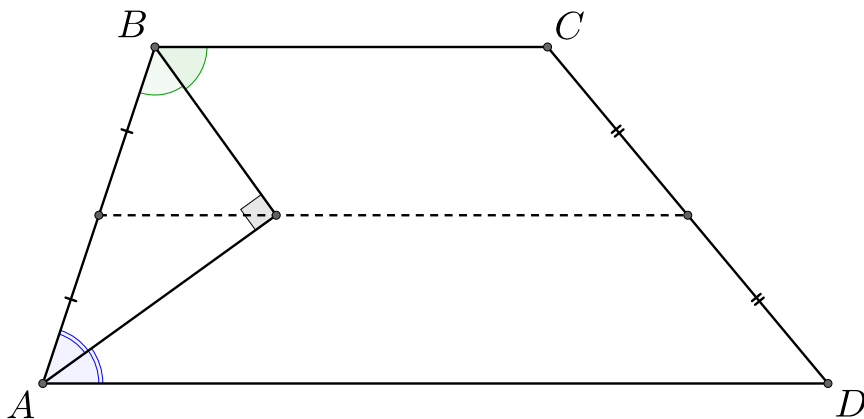
Доказательство: Обозначим $\angle CKD = \alpha$. Тогда $\angle AKD = 180^\circ - \alpha$. $ABCD$ – равнобедренная трапеция, значит AKD – равнобедренный треугольник и $\angle KAD = \angle KDA$, сумма углов треугольника равна 180° , поэтому $\angle KAD + \angle KDA = 2\angle KAD = 180^\circ - \angle AKD = \alpha$, то есть $\angle KAD = \frac{\alpha}{2}$.

Вписанный угол $\angle CAD$ опирается на

дугу $\overset{\frown}{CD}$, центральный угол $\angle COD$ также опирается на эту дугу, значит $\angle COD = \angle CAD = \alpha$. $\square$



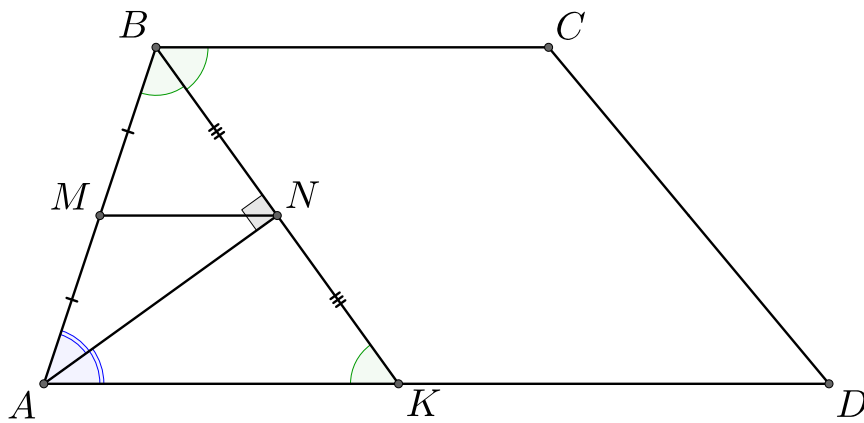
16. Биссектрисы односторонних углов трапеции пересекаются на средней линии под прямым углом.



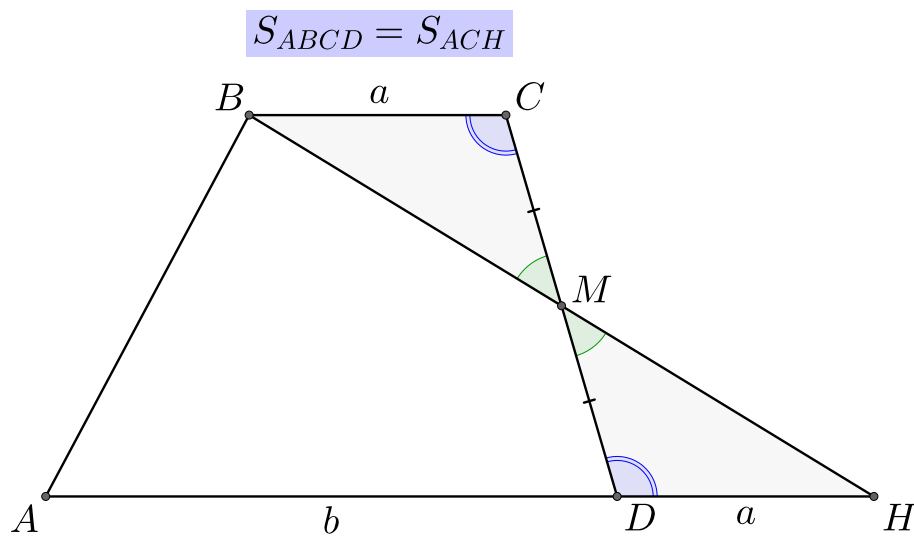
Доказательство: Ранее мы доказали, что биссектрисы односторонних внутренних углов при параллельных прямых перпендикулярны. Докажем, что в трапеции они пересекаются на средней линии.

Пусть M – середина боковой стороны AB , биссектрисы пересекаются в точке N . Продлим биссектрису BN до пересечения с основанием AD в точке K . $\angle KBC = \angle KBA$, так как они являются внутренними накрест лежащими, при этом $\angle ABK = \angle KBC$, так как BK – биссектриса угла ABC . Получаем, что $\angle ABK = \angle KBA$, то есть ABK – равнобедренный треугольник и $AB = AK$. AN – высота равнобедренного треугольника ABK , проведенная к основанию, поэтому она также является медианой, а значит $BN = NK$.

Получаем, что $AM = MB$ и $BN = NK$, поэтому по обратной теореме Фалеса отрезки MN и AK параллельны, из чего следует, что отрезок MN лежит на средней линии трапеции, а значит на ней лежит и точка N . $\square$



17. В трапеции проведём через середину M боковой стороны CD прямую BM до пересечения с прямой AD . Тогда треугольники BCM и HDM равны. Из этого следует, что



Доказательство: Докажем, что треугольники BCM и HDM равны. M – середина CD , значит $CM = MD$, углы BMC и DMH равны, так как являются вертикальными, углы BCM и MDH равны так как являются внутренними накрест лежащими углами при параллельных прямых. Из второго признака равенства треугольников следует, что BCM и HDM равны, значит $S_{BCM} = S_{HDM}$.

$S_{ABCD} = S_{ABMD} + S_{BCM}$ и $S_{ABH} = S_{ABMD} + S_{HDM}$, поэтому $S_{ABCD} = S_{ABH}$. $\square$

Замечание: Треугольники BMD и HMC также являются равными, потому что $\angle BMD = \angle CMH$, $CM = MD$ и $BM = MH$. В частности, это означает, что диагональ BD параллельна CH и $BCHD$ – параллелограмм.

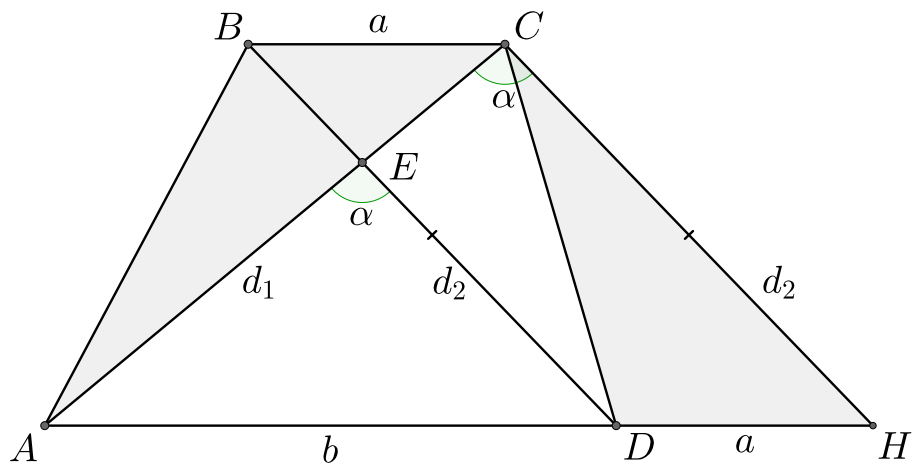
18. Заметим, что если мы знаем основания и диагонали трапеции, то в треугольнике ACH нам известны все три стороны, а значит, мы можем найти площадь трапеции и угол между её диагоналями.

Доказательство: $BCHD$ – параллелограмм, значит $S_{BDC} = S_{CDH}$. Мы знаем, что $S_{ABE} = S_{CDE}$, при этом $S_{ABC} = S_{ABE} + S_{BEC}$ и $S_{BCD} = S_{CDE} + S_{BEC}$, значит $S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDH}$. Отсюда получаем, что $S_{ABCD} = S_{ACH}$.

Мы установили равенство треугольников BCM и HDM , значит $DH = BC = a$ и $AH = a + b$ и $BD = CH = d_2$. Значит площадь треугольника ACH мы можем найти по формуле Герона.

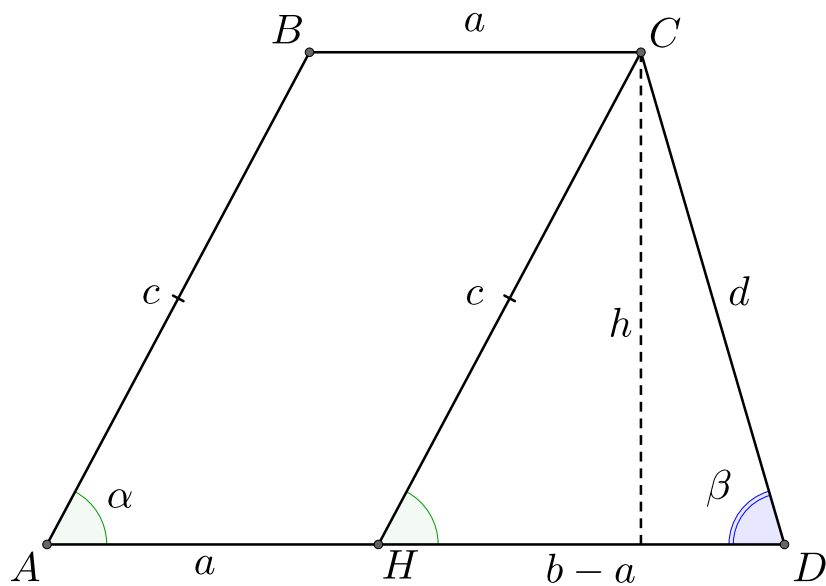
Площадь параллелограмма $ABCD$ можно найти из формулы: $S_{ABCD} = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2}$, приравняв площадь треугольника ACH к площади S_{ABCD} мы можем вразить $\sin \alpha$. $\square$

$$S_{ABCD} = S_{ACH}$$



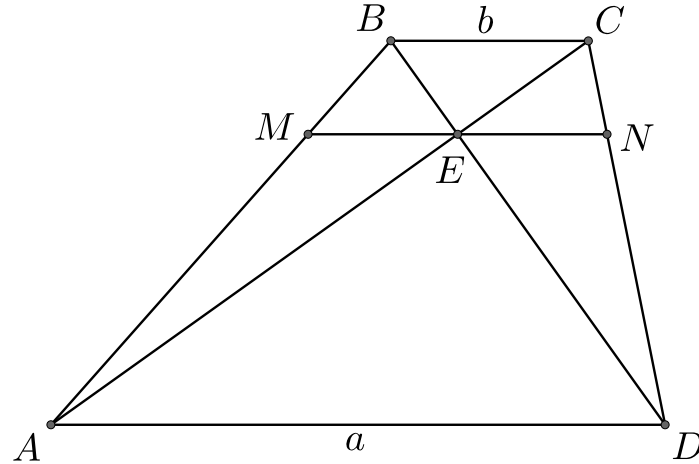
19. Через вершину C проведём отрезок CH параллельно боковой стороне AB . Тогда $ABCH$ – параллелограмм и $AH = a$, $HD = b - a$.

Заметим, что если мы знаем стороны трапеции, то мы знаем стороны треугольника CHD , поэтому мы можем найти углы α и β , а также высоту трапеции с помощью различных формул для площади треугольника.



20. Длина отрезка MN , проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно средней линии, равна среднему гармоническому длин оснований.

$$MN = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$



Доказательство: Пусть E – точка пересечения диагоналей трапеции. $\angle EAD = \angle ECB$ и $\angle EDA = \angle EBC$, так как являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых, значит треугольники ECB и EAD подобны с коэффициентом подобия $\frac{BC}{AD} = \frac{b}{a}$, значит $\frac{ED}{BE} = \frac{a}{b}$ и $ED = BE \frac{a}{b}$, $\frac{EA}{CE} = \frac{a}{b}$ и $EA = CE \frac{a}{b}$.

Треугольники BME и BAD подобны, так как отрезки ME и AD параллельны, причём их коэффициент подобия равен

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BE}{BE + ED} = \frac{BE}{\left(1 + \frac{a}{b}\right) BE} = \frac{b}{b + a}.$$

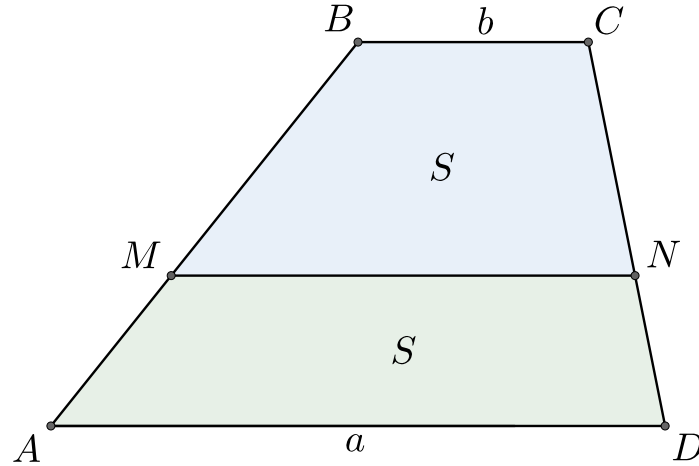
Значит $\frac{ME}{AD} = \frac{a}{b + a}$, и $ME = \frac{ab}{a + b}$.

Проводя аналогичные рассуждения для треугольников CEN и CAD мы получаем, что $EN = \frac{ab}{a + b}$.

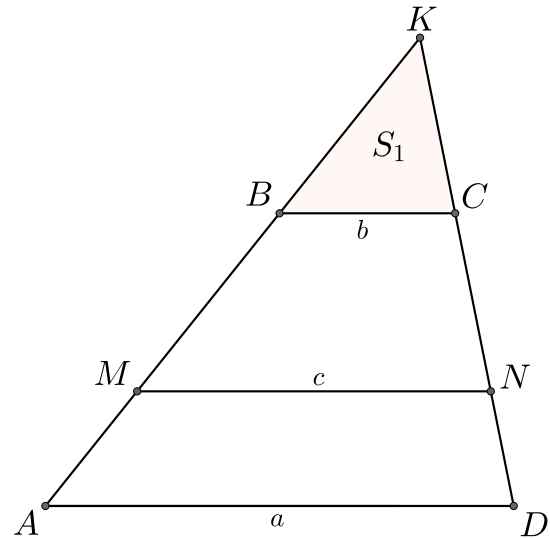
Таким образом $MN = ME + EN = \frac{2ab}{a + b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \quad \square$

21. Длина отрезка MN , проходящего параллельно средней линии и делящего трапецию на две равновеликих, равна среднему квадратическому длин оснований.

$$MN = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$



Доказательство: Пусть $MN = c$. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке K . Отрезки AD , MN и BC параллельны, поэтому треугольники MKN и BKC подобны с коэффициентом подобия $\frac{MN}{BC} = \frac{c}{b}$, а также подобны треугольники AKD и BKC с коэффициентом подобия $\frac{BC}{AD} = \frac{a}{b}$. Пусть $S_1 = S_{BKC}$, $S = S_{AMND} = S_{MBCN}$. Известно, что площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, значит:



$$\frac{S_{MKN}}{S_{BKC}} = \frac{S + S_1}{S_1} = \frac{S}{S_1} + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Rightarrow c^2 = b^2 \left(\frac{S}{S_1} + 1\right) \Rightarrow c = b\sqrt{\left(\frac{S}{S_1} + 1\right)}.$$

Аналогично получаем, что

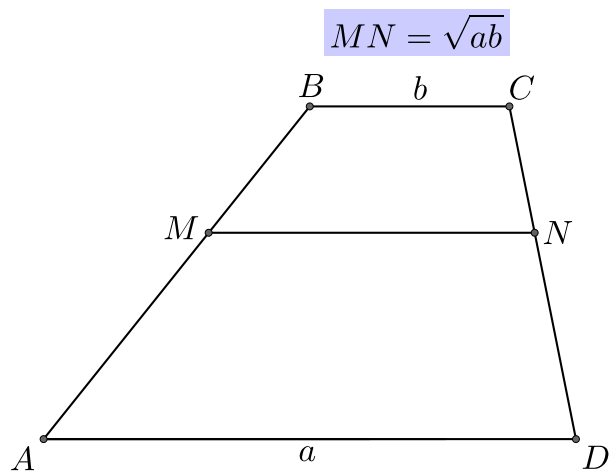
$$\frac{S_{AKD}}{S_{BKC}} = \frac{2S + S_1}{S_1} = 2\frac{S}{S_1} + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S_1} = \frac{a^2 - b^2}{2b^2}.$$

То есть

$$c = b\sqrt{\left(\frac{S}{S_1} + 1\right)} = b\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2b^2} + 1} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}. \quad \square$$

22. Длина отрезка MN , проходящего параллельно средней линии и делящего трапецию на две подобные трапеции, равна среднему геометрическому длин оснований.

Доказательство: Трапеции $MBCN$ и $AMND$ подобны, а значит $\frac{AD}{MN} = \frac{MN}{BC}$, поэтому $MN^2 = AD \cdot BC = ab$, то есть $MN = \sqrt{ab}$. $\square$



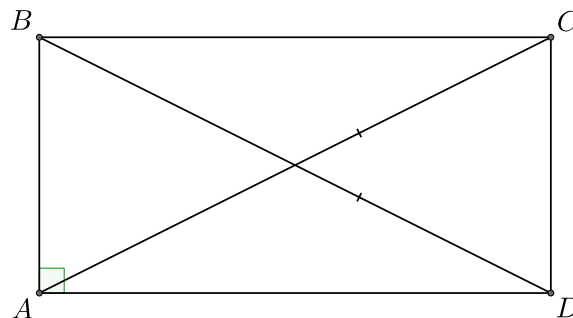
10 Основные четырёхугольники

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

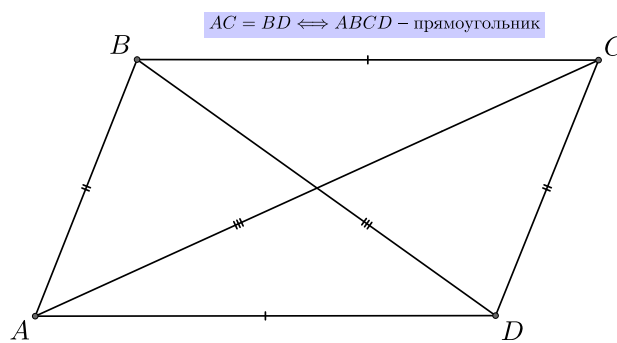
1. Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство: В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = CD$ и $AD = BC$ и $\angle BAD = \angle BCD$. Получаем, что катеты прямоугольных треугольников BAD и BCD равны, значит эти треугольники также равны, поэтому $AC = BD$. $\square$



2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.

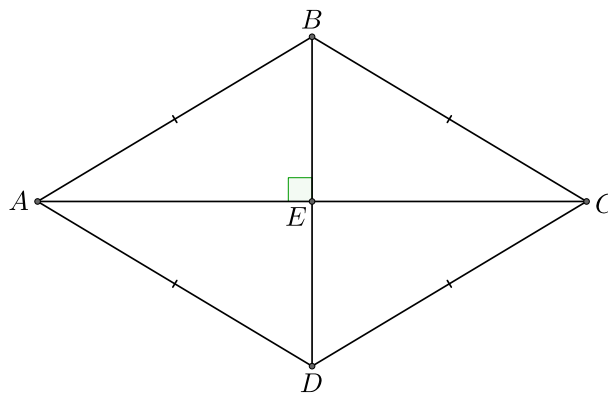
Доказательство: Пусть в параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $AD = BC$ и $AC = BD$. Тогда из третьего признака равенства треугольников следует, что треугольники ABD и DCA равны. Причём $\angle BAD = \angle ADC$, но по свойству параллелограмма верно, что $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$, значит $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, поэтому $ABCD$ – прямоугольник. $\square$



Ромбом называется параллелограмм у которого все стороны равны.

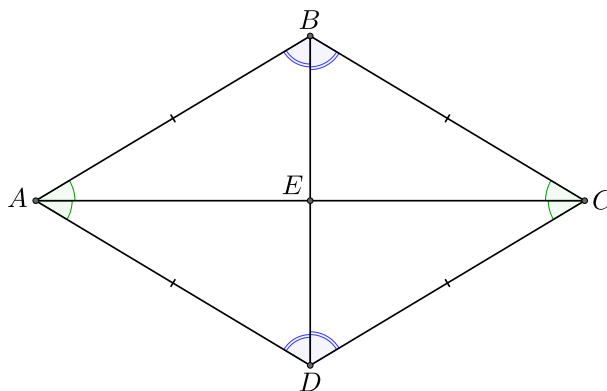
3. Диагонали ромба перпендикулярны.

Доказательство: Пусть E – точка пересечения ромба. Так как ромб является параллелограммом, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам, то есть $AE = EC$ и $BE = ED$. Треугольник ABC является равнобедренным, причём BE – медиана треугольника ABC , проведённая к основанию, а значит она также является высотой, поэтому отрезок BE перпендикулярен отрезку AC , а значит BD перпендикулярен AC . $\square$



4. Диагонали ромба делят его углы пополам.

Доказательство: Треугольники ABC , ABD , ADC , DCB являются равнобедренными, поэтому их медианы BE , AE , DE и CE также являются биссектрисами, а значит $\angle ABE = \angle CBE$, $\angle BAE = \angle DAE$, $\angle ADE = \angle CDE$ и $\angle BCE = \angle DCE$. $\square$

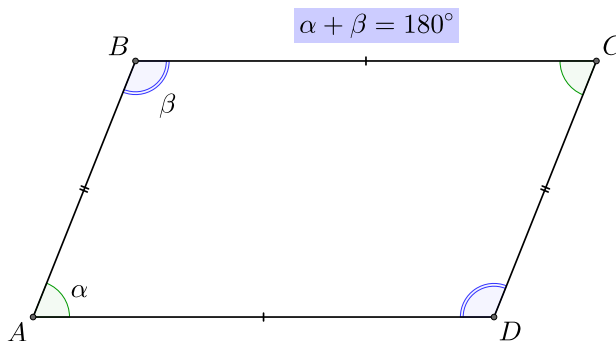


5. Сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна 180° , а противоположные углы равны.

Обратно: если в четырёхугольнике сумма любых двух соседних углов равна 180° , то этот четырёхугольник является параллелограммом

Доказательство: Углы A и B являются внутренними односторонними при параллельных прямых, поэтому $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$. По тем же причинам сумма любых двух соседних углов равна 180° , в частности, верно, что $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$. А значит $\angle ADC = 180^\circ - \angle BAD = \angle ABC$. Аналогично получим, что $\angle BAD = \angle BCD$.

Докажем обратное утверждение. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ сумма любых двух соседних углов равна 180° . Тогда $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, причём эти углы являются внутренними односторонними при прямых BC , AD и секущей AB . Отсюда получаем, что отрезки AD и BC параллельны. Аналогично можем доказать, что параллельны отрезки AB и CD . $\square$



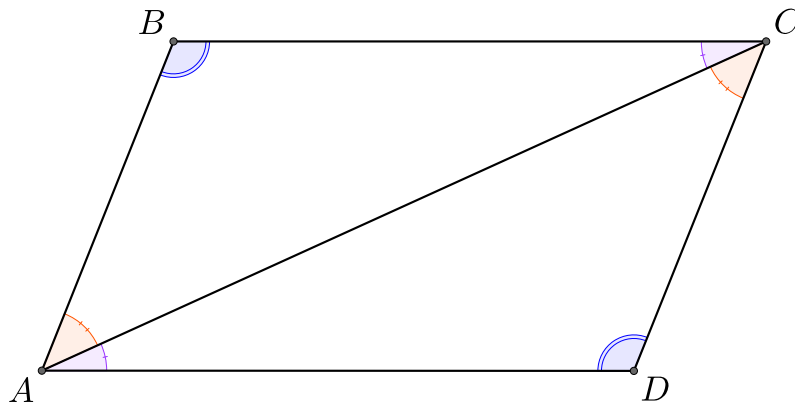
6. Если в четырёхугольнике противолежащие углы попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Доказательство: В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360^\circ$. также мы знаем, что $\angle DAB = \angle BCD$ и $\angle ABC = \angle CDA$. Отсюда следует, что $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$. Аналогично, сумма других соседних углов также равна 180° , а значит $ABCD$ – параллелограмм.

7. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

Обратно: если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Доказательство: Углы $\angle BAC$ и $\angle ACD$ являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых, поэтому $\angle BAC = \angle ACD$. Аналогично доказываем, что $\angle BCA = \angle CAD$. При этом сторона AC является общей для этих треугольников, а значит они равны по двум углам и стороне между ними. Из равенства треугольников следует, что $AB = CD$ и $AD = BC$.



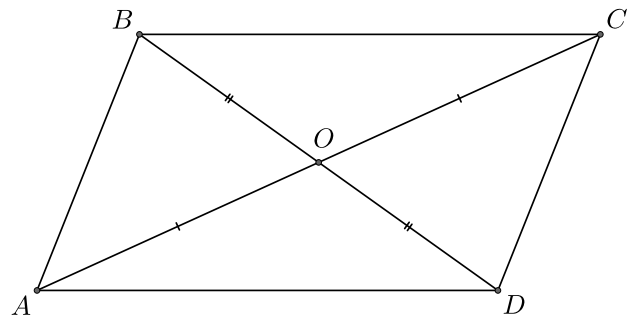
Докажем обратное утверждение. Рассмотрим треугольники ABC и CDA . Мы знаем, что $AB = CD$ и $BC = AD$, при этом AC – общая сторона для наших треугольников. Значит треугольники ABC и CDA равны по трём сторонам, поэтому $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle CAD$, то есть отрезки AB и CD , AD и BC параллельны. $\square$

8. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Доказательство: Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC попарно параллельны и равны. Рассмотрим треугольники ABC и CDA . BC и AD параллельны, а значит $\angle BCA = \angle CAD$. При этом $AD = BC$ и AC – общая сторона для данных треугольников. Из этого следует, что треугольники ABC и CDA равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AB = CD$ и значит в $ABCD$ противоположные стороны равны, то есть $ABCD$ – параллелограмм. $\square$

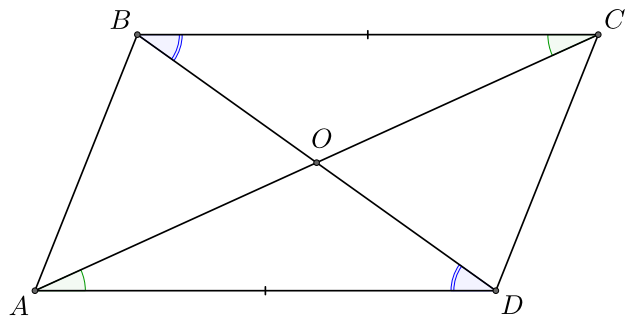
9. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Обратно: если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник – параллелограмм.



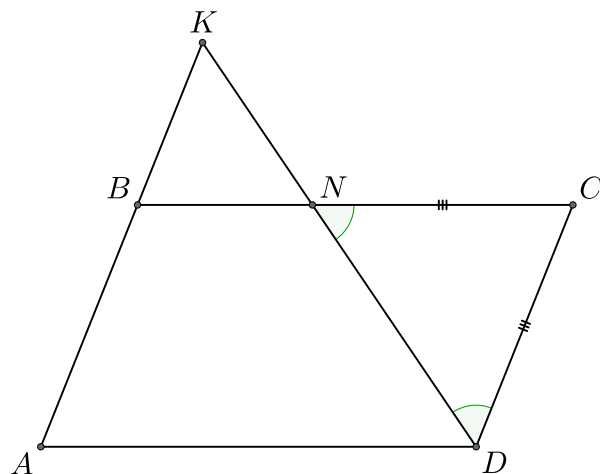
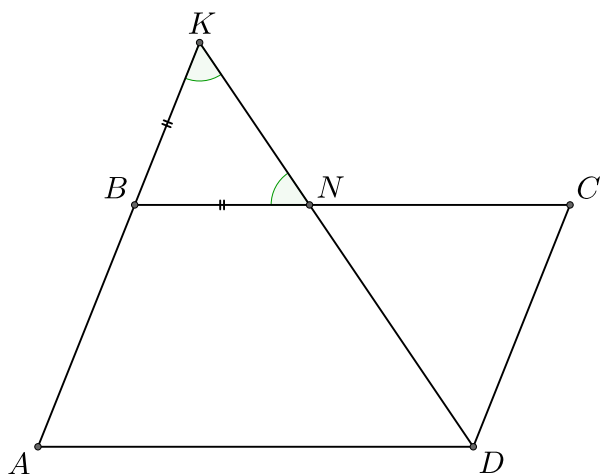
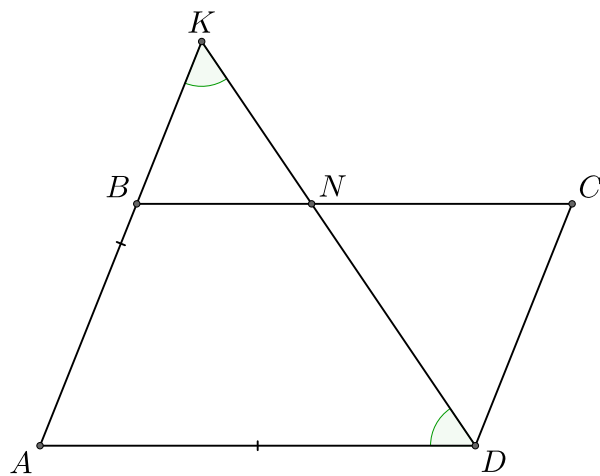
Доказательство: Рассмотрим треугольники AOD и COB . Углы $\angle OAD$ и $\angle OCB$ являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых, а значит $\angle OAD = \angle OCB$. По тем же причинам верно, что $\angle OBC = \angle ODA$. В параллелограмме противоположные стороны равны, а значит $AD = BC$. Таким образом треугольники AOD и COB равны по двум углам и стороне между ними, поэтому $AO = OC$ и $BO = OD$.

Докажем обратное утверждение. Пусть O – точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Тогда $AO = OC$ и $BO = OD$, а также $\angle AOD = \angle BOC$, так как они являются вертикальными. Получаем, что треугольники AOD и COB равны по двум сторонам и углу между ними, значит $AD = BC$ и $\angle OAD = \angle OCB$. Таким образом, отрезки AD и BC параллельны и равны, то есть $ABCD$ – параллелограмм. $\square$



12. Пусть в параллелограмме проведена биссектриса. Тогда треугольники DCN , NBK , DAK – равнобедренные.

Доказательство:



Дельтоидом называется четырёхугольник, у которого есть две пары равных соседних сторон.

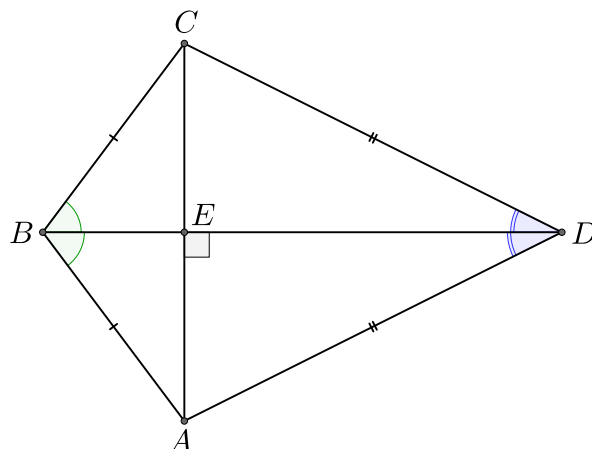
13. Одна из диагоналей дельтоида является биссектрисой двух углов дельтоида.

Доказательство: Пусть $ABCD$ – дельтоид, причём $BC = AB$ и $AD = CD$. Рассмотрим треугольники BCD и BAD . Сторона BD является общей для этих треугольников, а значит они равны по трём сторонам. Отсюда получаем, что $\angle CBD = \angle DBA$ и $\angle ADB = \angle CDB$. $\square$

14. Диагонали дельтоида перпендикулярны.

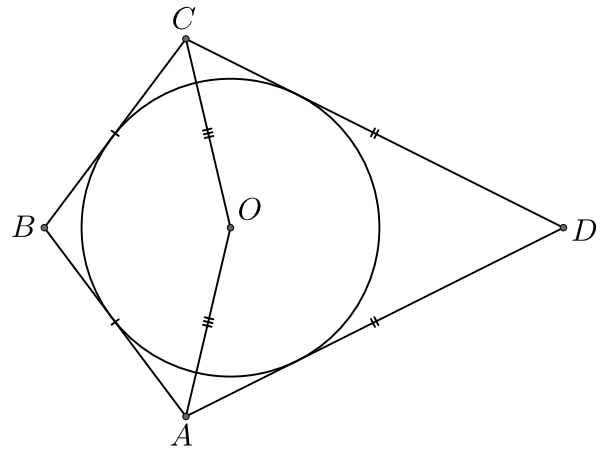
Доказательство: Пусть E – точка

пересечения диагоналей дельтоида. Тогда BE и DE – биссектрисы равнобедренных треугольников BAC и DAC соответственно. Эти биссектрисы проведены к основаниям равнобедренных треугольников, а значит они также являются высотами. $\square$



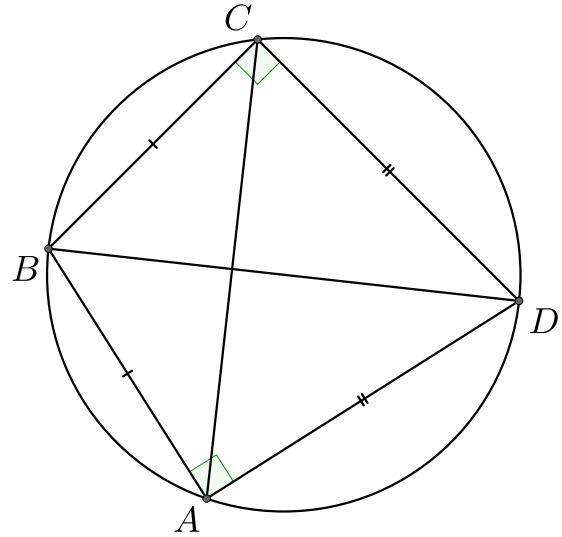
15. В дельтоид $ABCD$ можно вписать окружность. Если $AB = BC$, $AD = DC$ и O – центр вписанной окружности, тогда $CO = OA$.

Доказательство: Центр вписанной в дельтоид окружности проходит через биссектрису угла $\angle B$, то есть $\angle CBO = \angle ABO$. Рассмотрим треугольники CBO и ABO . $AB = BC$ и BO – общая сторона для этих треугольников. Тогда получаем, что данные треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, значит $CO = OA$. $\square$



16. Вокруг дельтоида можно описать окружность тогда и только тогда, когда его неравные стороны образуют углы по 90° .

Доказательство: Пусть вокруг дельтоида $ABCD$ можно описать окружность, причём $AB = BC$ и $AD = CD$. Рассмотрим треугольники BCD и BAD . Сторона BD является общей для этих треугольников, а значит они равны по трём сторонам, значит $\angle BCD = \angle BAD$. Так как данный дельтоид можно вписать в окружность, то $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$, но тогда $\angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$. $\square$

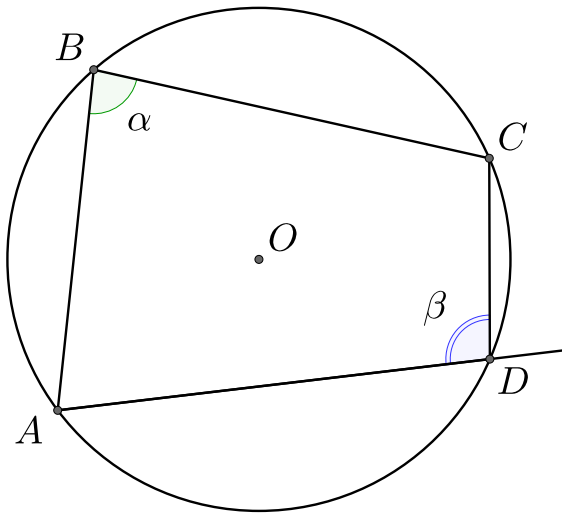


11 Вписанные и описанные четырёхугольники

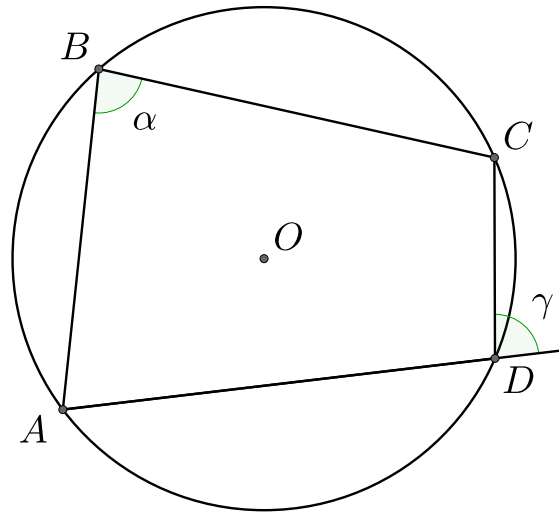
1. (**Первый признак**). Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180° .

Другая формулировка: Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, всякий угол равен смежному к своему противоположному.

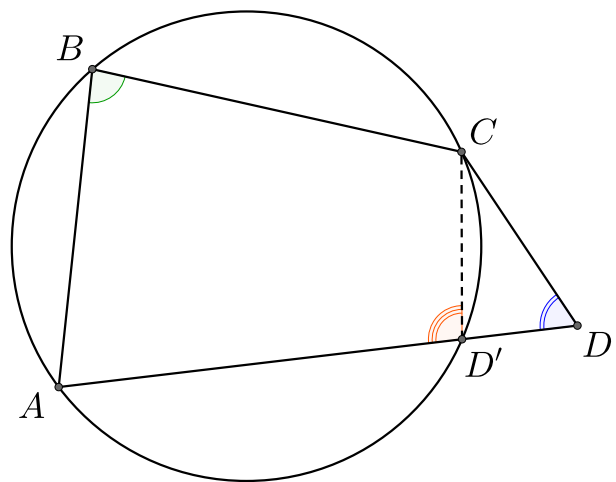
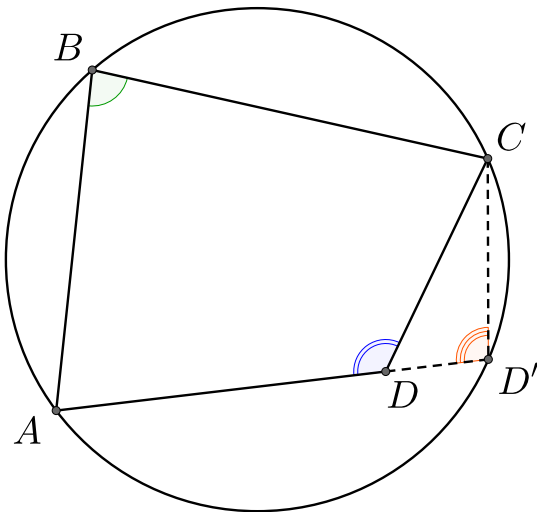
$$\alpha + \beta = 180^\circ \iff ABCD - \text{вписанный}$$



$$\alpha = \gamma \iff ABCD - \text{вписанный}$$



Доказательство: Для начала докажем первый вариант формулировки. Пусть четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность. Тогда дуги, на которые опираются углы $\angle A$ и $\angle C$ вместе образуют всю окружность, а значит сумма градусных мер этих дуг равна 360° . По теореме о вписанном угле следует, что $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Аналогично можем доказать, что $\angle B + \angle D = 180^\circ$.



Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть сумма противоположных углов четырёхугольника $ABCD$ равна 180° . Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Рассмотрим два случая.

Случай 1: Пусть точка D лежит внутри окружности. Тогда продлим отрезок AD до пересечения с окружностью в точке D' . Четырёхугольник $ABCD'$ вписан в окружность, а

значит $\angle ABC + \angle AD'C = 180^\circ$, но также мы знаем, что $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, то есть $\angle AD'C = \angle ADC$. Точки D и D' лежат на одной прямой, поэтому $\angle AD'C = \angle ADC$ только если отрезки CD и CD' параллельны, что невозможно, так как у них есть общая точка. Значит D не может лежать внутри окружности.

Случай 2: Пусть точка D лежит внутри окружности. Причём D' – точка пересечения отрезка AD с окружностью. Аналогично предыдущему случаю мы можем установить, что $\angle AD'C = \angle ADC$. Но это верно только если отрезки CD и CD' параллельны, что также невозможно. Таким образом, точка D не может лежать вне окружности, значит она лежит на дуге окружности, то есть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник.

Покажем, что вторая формулировка равносильна первой. Действительно, если $\alpha = \gamma$, то $\angle ADC + \angle ABC = (180^\circ - \alpha) + \alpha = 180^\circ$.

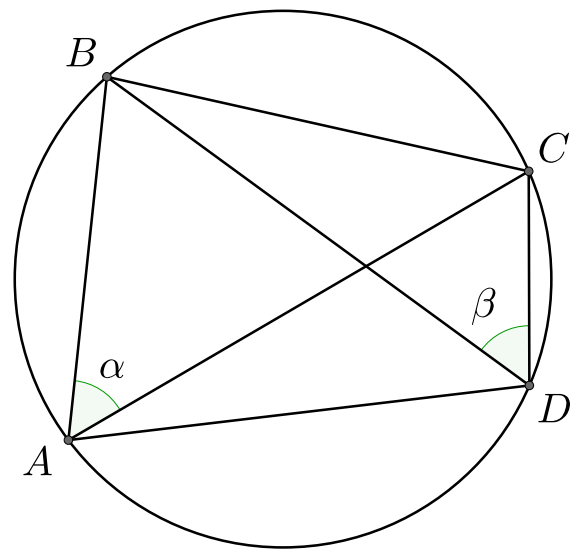
Обратно, если $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, то $\gamma = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC = \alpha$. $\square$

2. (Второй признак). Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда углы между диагональю и стороной, опирающиеся на одну сторону, равны.

Доказательство: Пусть четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность. Как известно углы, вершины которых лежат на окружности и которые опираются на одну и ту же дугу, равны. Значит $\alpha = \angle BAC = \angle CDB = \beta$.

Докажем обратное утверждение. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ верно, что $\angle BAC = \angle BDC$. Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Рассмотрим два случая

$\alpha = \beta \iff ABCD$ – вписанный



Случай 1: Точка D лежит внутри окружности. Тогда продлим стороны BD и CD до пересечения с окружностью в точках B_1 и C_1 соответственно. По теореме о вписанном угле мы знаем, что $\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$, значит $\angle BDC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$. Далее, $\angle DBC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{C_1B_1}$ и $\angle BCD = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{C_1B}$. Мы знаем, что $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{C_1B_1} + \overset{\frown}{B_1C_1} + \overset{\frown}{C_1B} = 360^\circ$, то есть

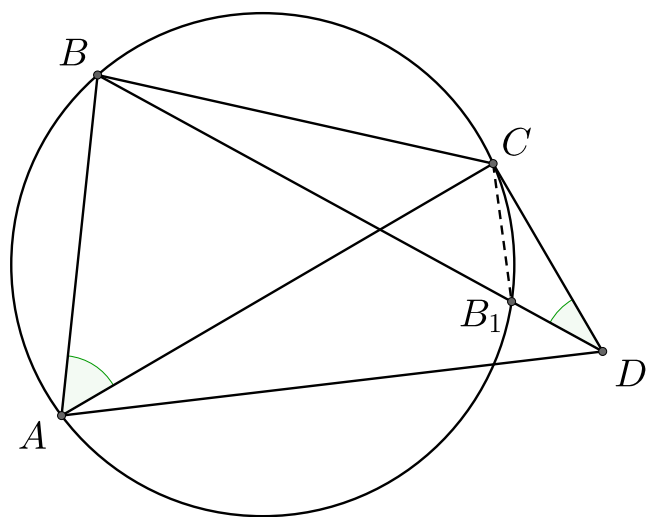
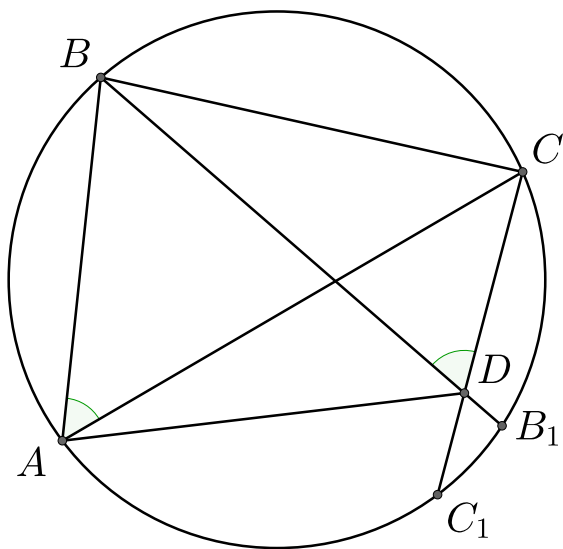
$$\angle BDC + \angle DBC + \angle BCD = 180^\circ = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2} \overset{\frown}{C_1B_1} + \frac{1}{2} \overset{\frown}{C_1B} = 180^\circ - \overset{\frown}{B_1C_1} < 180^\circ.$$

Получаем противоречие.

Случай 2: Точка D лежит вне окружности. Пусть B_1 – точка пересечения диагонали BD с окружностью. Аналогично с предыдущим случаем имеем, что $\angle BDC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{BC}$. Также $\angle DBC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{C_1B_1}$ и $\angle BCE_1 = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{B_1B}$, при этом $\angle BCD > \angle BCB_1$. Получаем, что

$$\angle BDC + \angle DBC + \angle BCD = 180^\circ > \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2} \overset{\frown}{C_1B_1} + \frac{1}{2} \overset{\frown}{C_1B} = 180^\circ.$$

Противоречие, значит точка D лежит на окружности. $\square$

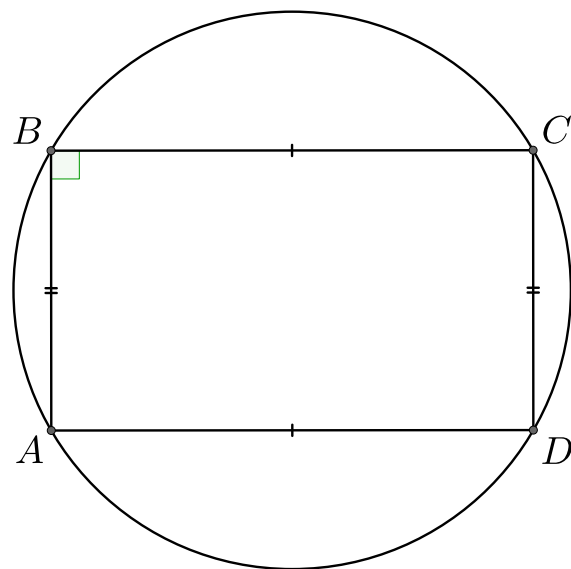


4. Окружность можно описать около параллелограмма тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником.

Доказательство: Все углы прямоугольника равны 90° , поэтому сумма его противоположных углов равна 180° , то есть вокруг прямоугольника можно описать окружность.

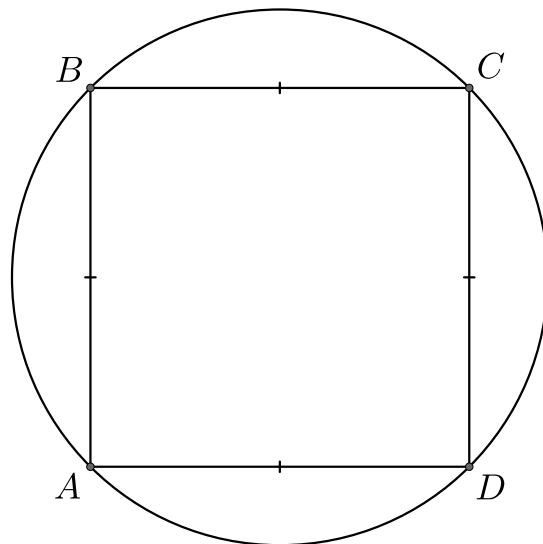
Обратно, пусть параллелограмм $ABCD$ мы можем вписать в окружность. Мы знаем, что противоположные углы параллелограмма равны: $\angle ABC = \angle ADC$. При этом, чтобы мы могли вписать его в окружность в сумме противоположные

углы должны давать 180° . Получаем, что $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. То есть $ABCD$ – прямоугольник. $\square$



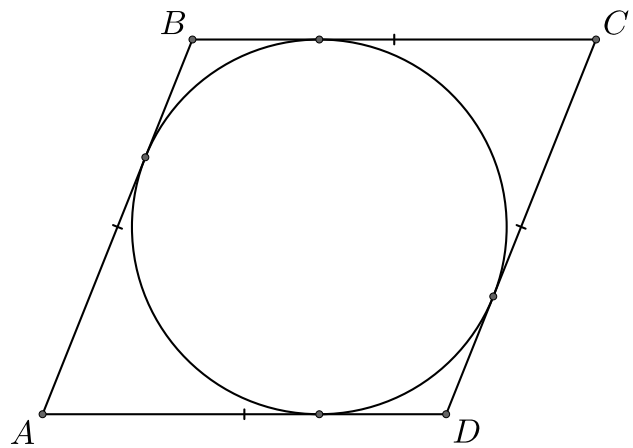
5. Окружность можно описать около ромба тогда и только тогда, когда ромб является квадратом.

Доказательство: Ромб $ABCD$ является параллелограммом, а значит вокруг него можно описать окружность, тогда и только тогда, когда $ABCD$ – прямоугольник, при этом у $ABCD$ все стороны равны, а значит $ABCD$ – квадрат. $\square$

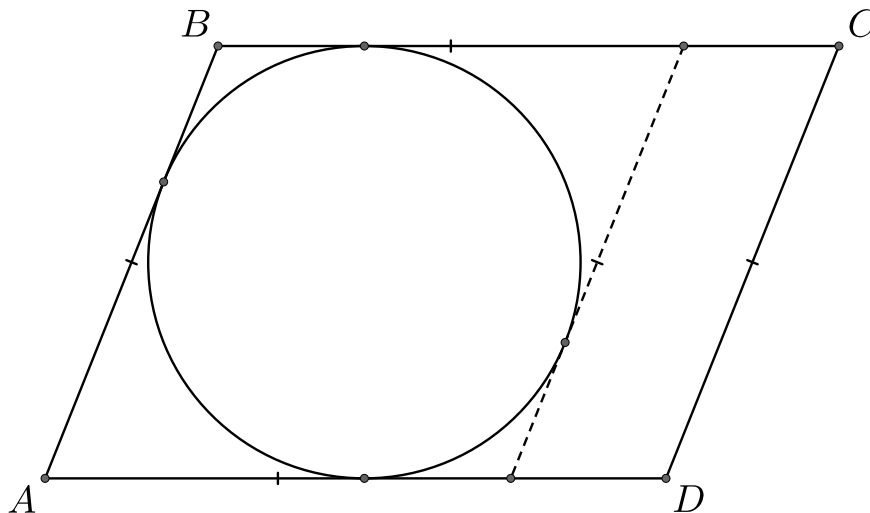


6. В любой ромб можно вписать окружность.

Доказательство: В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, если $AB + CD = AD + BC$. Так как в ромбе стороны равны, то в него можно вписать окружность. $\square$



7. В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

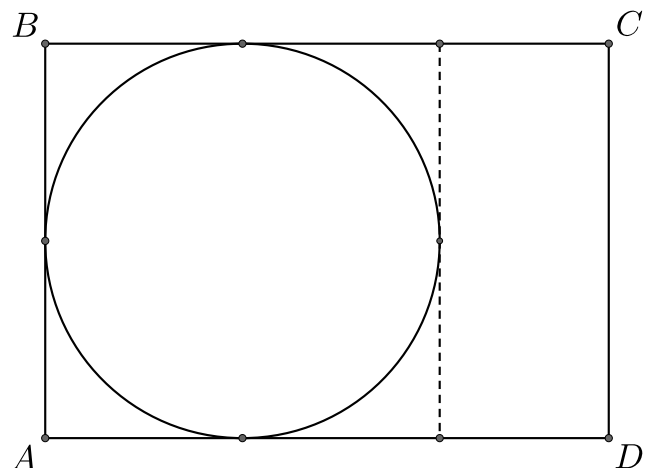


Доказательство: В любой ромб можно вписать окружность.

Обратно, пусть в параллелограмм $ABCD$ можно вписать окружность. Противоположные стороны равны параллелограмма равны. Если $AB = CD < BC = AD$, то $AB + CD < BC + AD$. Аналогично, если $AB = CD > BC = AD$, то $AB + CD > BC + AD$. Значит $AB = CD = BC = AD$. $\square$

8. В прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является квадратом.

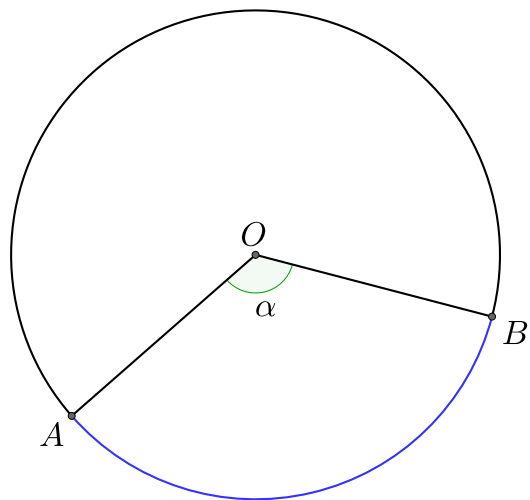
Доказательство: Прямоугольник является параллелограммом, поэтому в него можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом. Но если прямоугольник – ромб, то этот прямоугольник является квадратом. $\square$



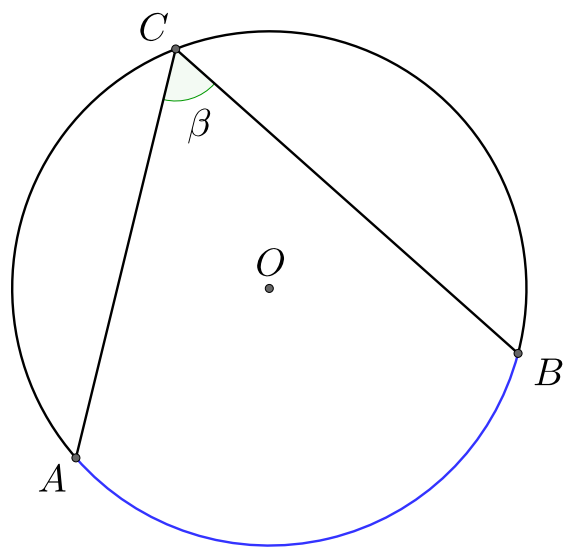
12 Центральные и вписанные углы

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным**.

$$\angle \alpha = \overset{\frown}{AB}.$$



Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность называется **вписанным**.

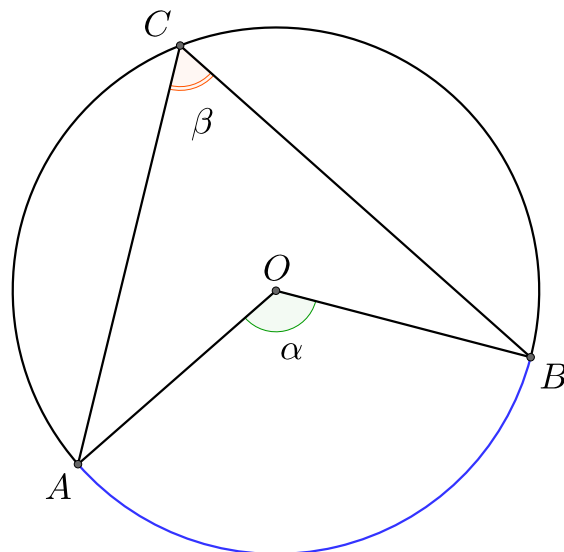


1. Вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный, равен его половине.

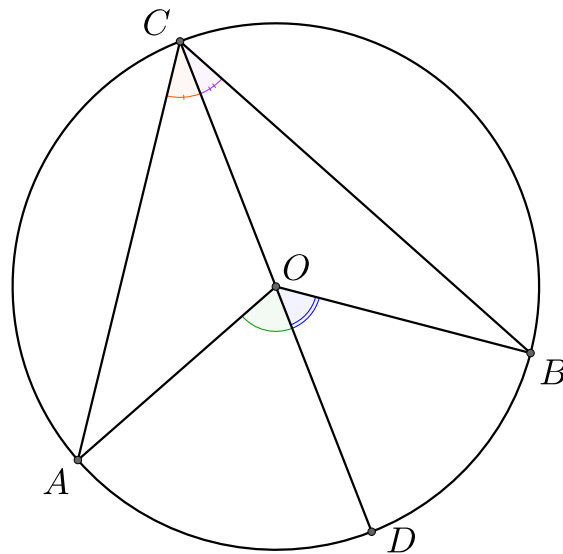
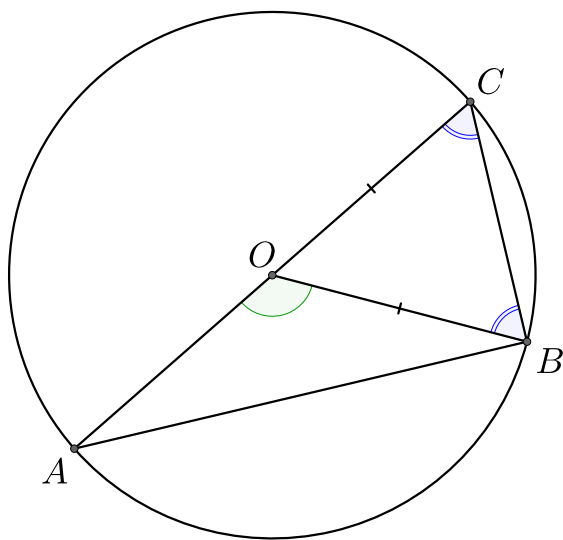
$$\angle \beta = \frac{1}{2} \alpha.$$

Доказательство: Рассмотрим 3 случая расположения точки C.

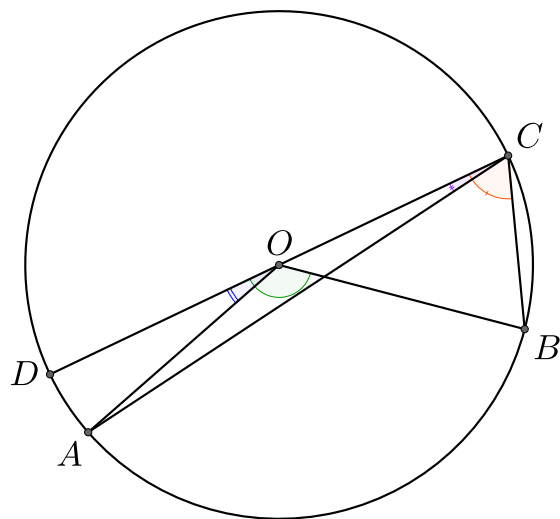
Случай 1: Пусть точка O лежит на отрезке AC. Тогда AC – диаметр и $OC = OB$, то есть треугольник COB – равнобедренный и $\angle COB = \angle BOC$. Внешний угол AOB равен сумме внутренних, не смежных с ним. Получаем, что $\angle AOB = \angle COB + \angle BOC = 2\angle COB = 2\angle ACB$.



Случай 2: Пусть точка O лежит внутри угла ACB . Продолжим прямую CO до пересечения с окружностью в точке D . Точка O лежит на отрезке CD , а значит $\angle AOD = 2\angle ACD$ и $\angle DOB = 2\angle DCB$ (см. случай 1), поэтому $\angle AOB = 2\angle ACB$.

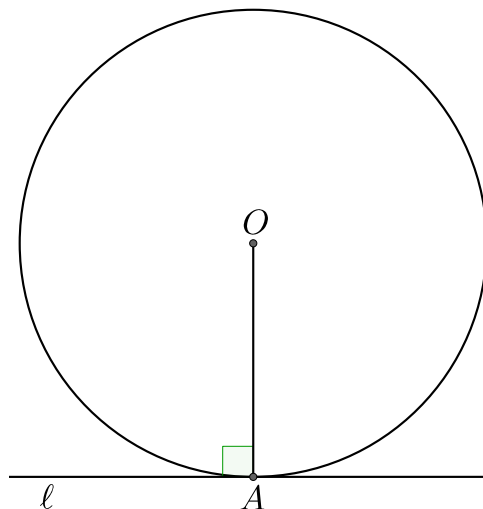


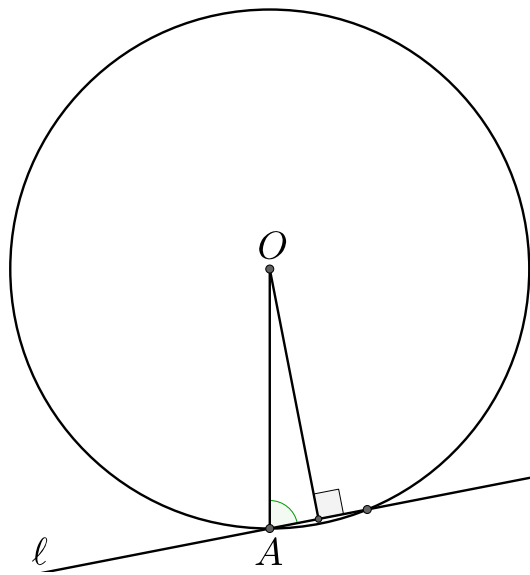
Случай 3: Пусть точка O лежит вне угла ACB . Продолжим прямую CO до пересечения с окружностью в точке D . Без ограничения общности, считаем, что точка A лежит внутри угла DCB . Тогда $\angle AOB = \angle BOD - \angle AOD = 2\angle BCD - 2\angle ACD = 2\angle ACB$. $\square$



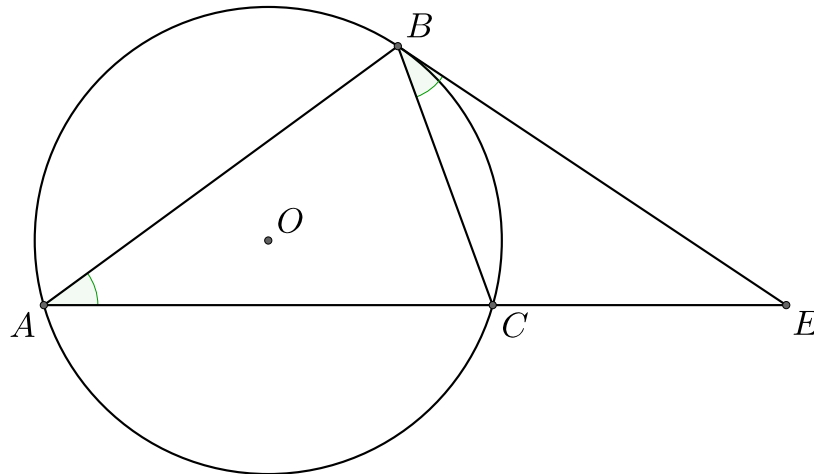
2. Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

Доказательство: Допустим, что радиус окружности, проведенный в точку касания, не перпендикулярен касательной. Тогда проведём к касательной отрезок, перпендикулярный ей. При этом радиус является наклонной к касательной, а значит расстояние от точки O до касательной меньше радиуса, поэтому касательная имеет две точки пересечения с окружностью. Противоречие.

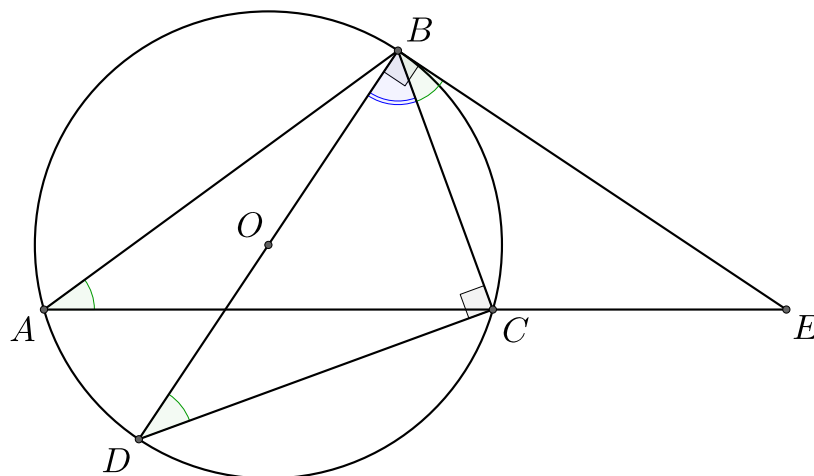




3. Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, который опирается на одну дугу с хордой.

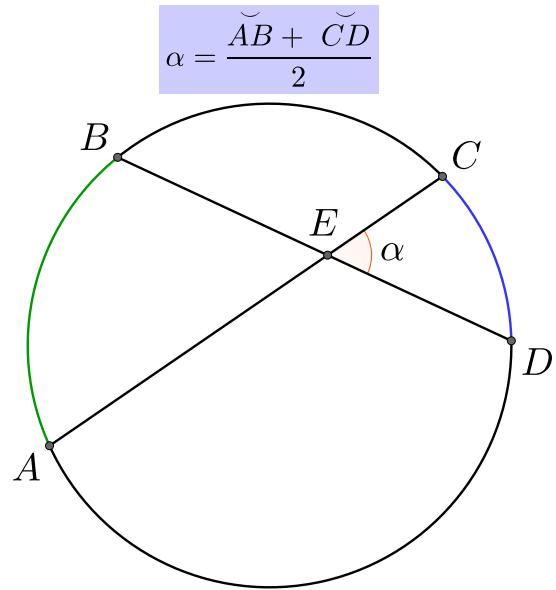


Доказательство: Продлим отрезок BO до пересечения с окружностью в точке D . Тогда по теореме о вписанном угле получаем, что $\angle BDC = \angle BAC$. Угол BCD опирается на диаметр окружности, а значит он равен 90° , поэтому $\angle CBD = 90^\circ - \angle BDC = 90^\circ - \angle BAC$. OB – радиус окружности, а значит $\angle DBE = \angle OBE = 90^\circ$. Таким образом $\angle CBE = 90^\circ - \angle CBD = 90^\circ - (90^\circ - \angle BAC) = \angle BAC$. $\square$



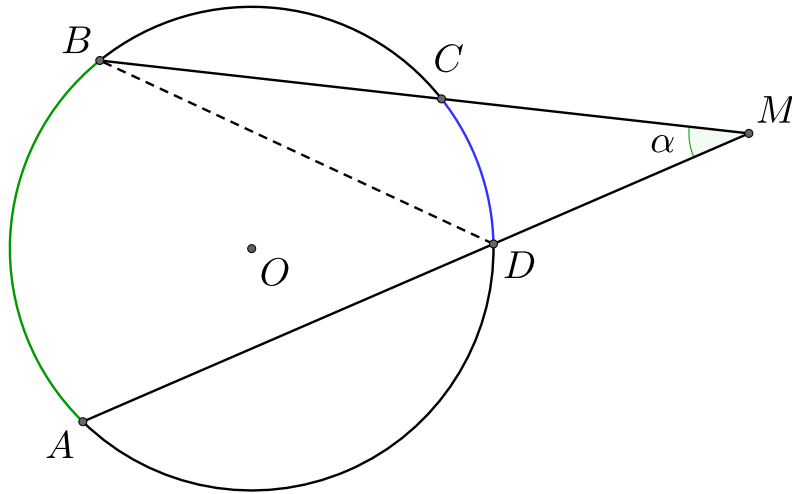
4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме высекаемых ими дуг.

Доказательство: Пусть E – точка пересечения хорд AC и BD . Рассмотрим треугольник AED . Мы знаем, что $\angle BDA = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB}$ и $\angle CAD = \frac{1}{2} \overset{\frown}{CD}$, также $\angle AED = 180^\circ - \angle BDA - \angle CAD = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$. При этом $\angle CED = 180^\circ - \angle AED = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$. $\square$



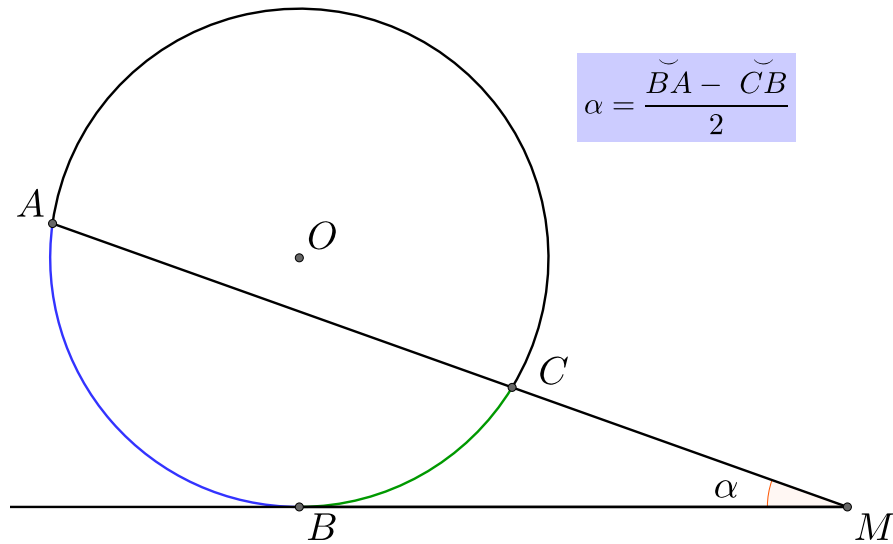
5. Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, равен полуразности градусных мер большей и меньшей высекаемых ими дуг.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

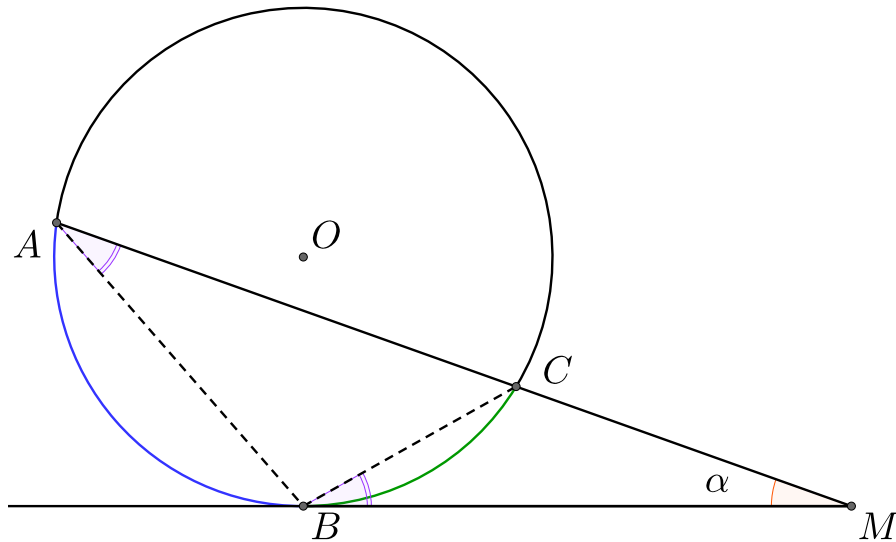


Доказательство: Рассмотрим треугольник MDB . Мы знаем, что $\angle MBD = \frac{1}{2} \overset{\frown}{CD}$ и $\angle ADB = \overset{\frown}{AB}$. Угол ADB – внешний для треугольника MDB , значит $\angle ADB = \angle DMB + \angle MBD$, то есть $\angle DMB = \angle ADB - \angle MBD = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$. $\square$

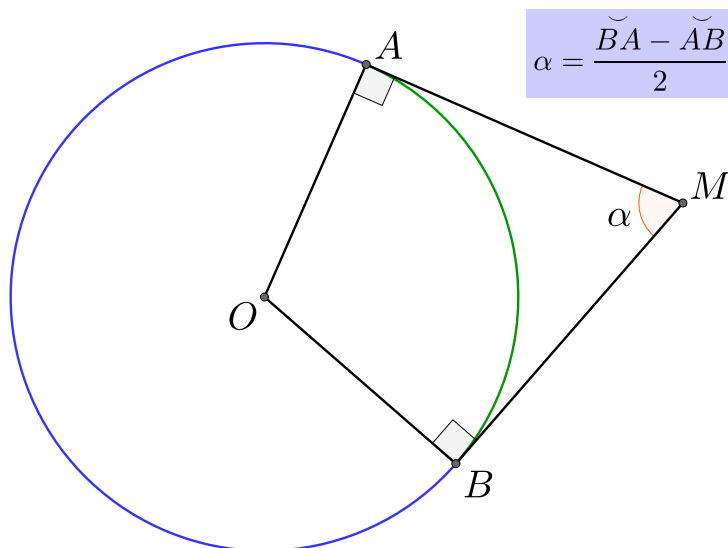
6. Угол между касательной и секущей, проведенными из одной точки, равен полуразности высекаемых ими дуг.



Доказательство: Рассмотрим треугольник ABC . По теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle BAC = \angle CBM$. По теореме о секущем угле мы знаем, что $\angle ACB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BA}$ и $\angle CMB = \angle BAC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{CB}$. Угол ACB является внешним для треугольника MBC , значит $\angle ACB = \angle CBM + \angle CMB$, то есть $\angle CMB = \angle ACB - \angle CMB = \frac{\overset{\frown}{BA} - \overset{\frown}{CB}}{2}$. $\square$



7. Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки, равен полуразности высекаемых ими дуг.

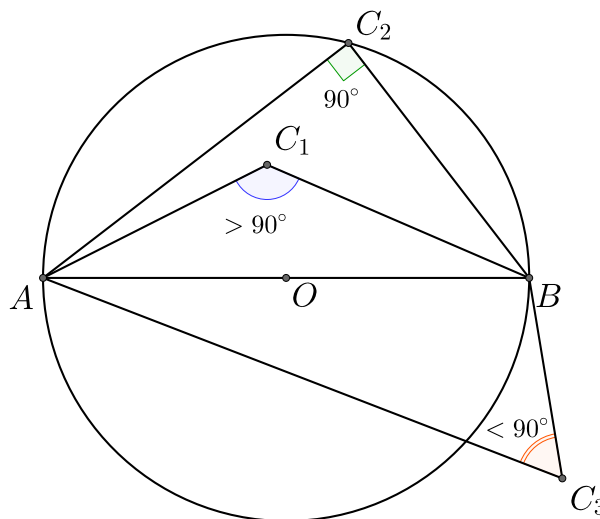


Доказательство: Четырёхугольник $AOBM$ – дельтоид, потому что AO и OB – радиусы окружности, MA и MB – касательные, проведённые из одной точки. При этом по теореме об угле между касательной и радиусом получаем, что $\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ$, значит вокруг $AOBM$ можно описать окружность и значит $\angle AOB + \angle AMB = 180^\circ$. Угол AOB – центральный, поэтому $\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$. Также мы знаем, что $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BA} = 360^\circ$, то есть $\frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BA}}{2} = 180^\circ$. Значит $\overset{\frown}{AB} + \angle AMB = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BA}}{2}$, то есть $\angle AMB = \frac{\overset{\frown}{BA} - \overset{\frown}{AB}}{2}$. $\square$

8. На отрезке AB как на диаметре построили окружность. Тогда:

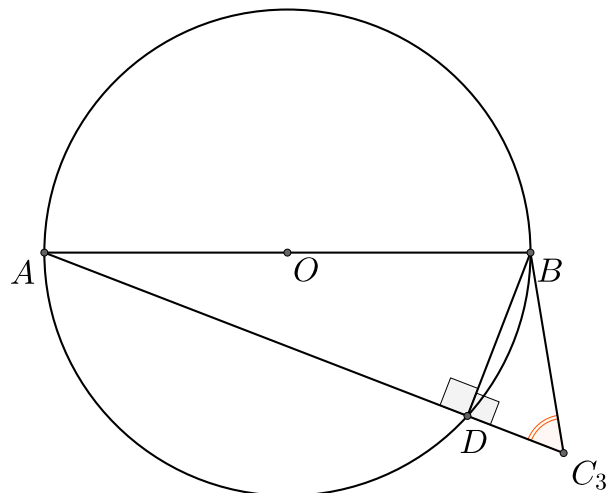
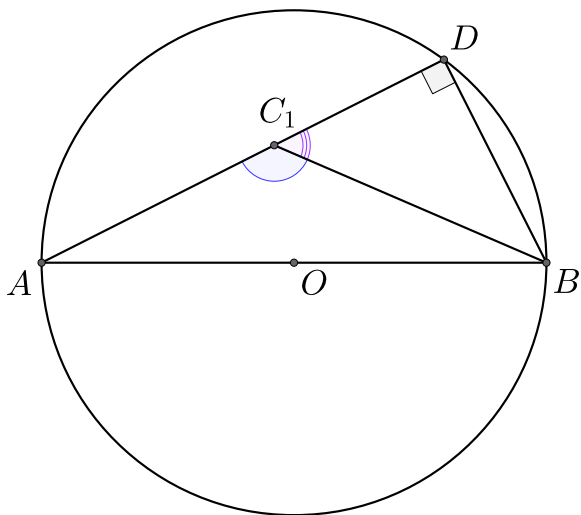
- 1) Из точек, лежащих строго внутри окружности, отрезок AB виден под тупым углом.
- 2) Из точек, лежащих на самой окружности, отрезок AB виден под прямым углом.
- 3) Из точек, лежащих вне окружности, отрезок AB виден под острым углом.

Доказательство: Для начала рассмотрим случай, когда точка C_2 лежит на окружности. Тогда угол $\angle AC_2B$ опирается на диаметр окружности, значит по теореме о вписанном угле следует, что $\angle AC_2B = 90^\circ$.



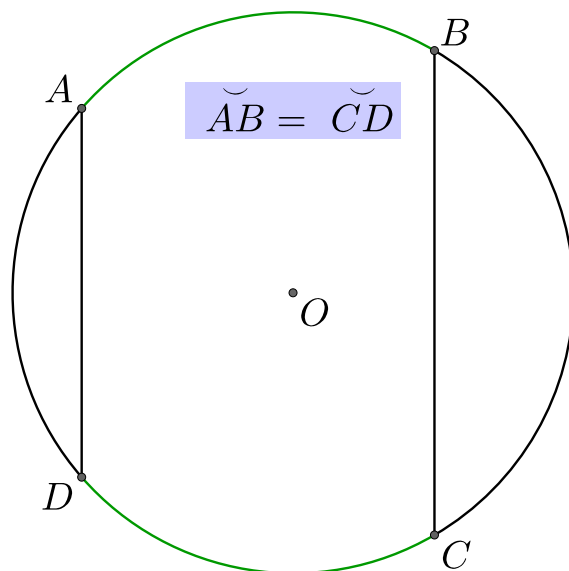
Далее рассмотрим случай 1. Пусть точка C_1 лежит внутри окружности. Продлим отрезок AC_1 до пересечения с окружностью в точке D . Тогда $\angle ADB = 90^\circ$, значит $\angle BC_1D < 90^\circ$, так как $\angle BC_1D$ – угол между катетом и гипотенузой в прямоугольном треугольнике BDC_1 . Таким образом, получаем, что $\angle AC_1B = 180^\circ - \angle BC_1D > 90^\circ$.

Рассмотрим случай 3. Пусть точка C_3 лежит вне окружности и D – точка пересечения отрезка AC_3 с окружностью. Тогда $\angle ADB = 90^\circ$, поэтому $\angle BDC_3 = 90^\circ$, значит $\angle BC_3D < 90^\circ$. $\square$



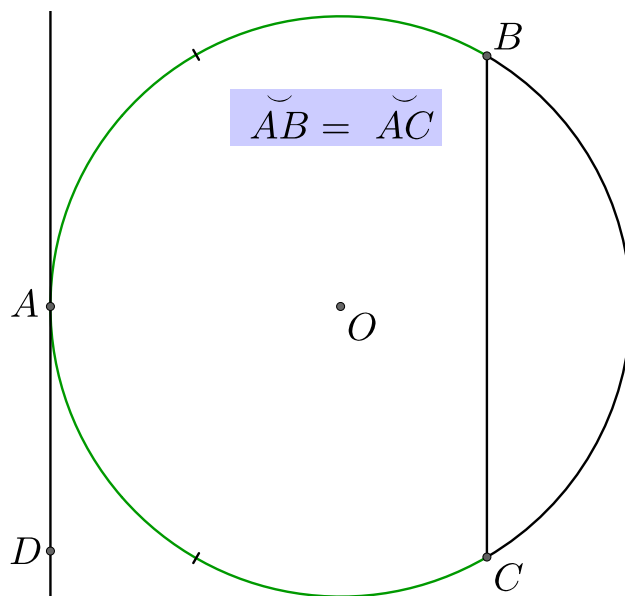
9. Дуги, заключенные между двумя параллельными хордами, равны.

Доказательство: Так как отрезки AD и BC параллельны, то углы DAC и ACB равны как внутренние накрест лежащие, значит они стягивают равные дуги. $\square$



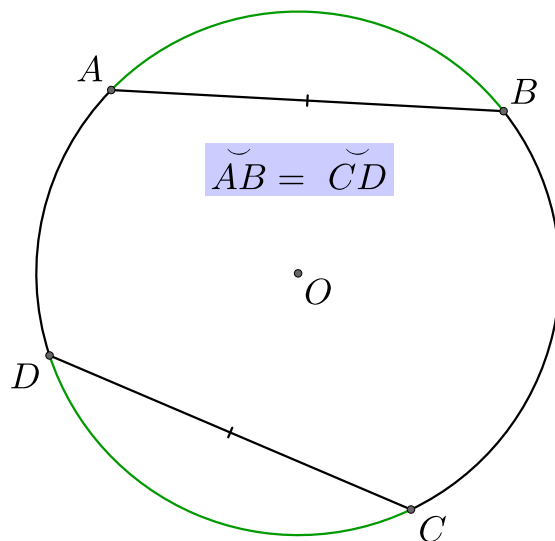
9. Дуги, заключенные между хордой и параллельной ей касательной, равны.

Доказательство: Углы CAD и ACB равны, так как они являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых. При этом по теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle CAD = \angle ABC$. Значит $\angle ACB = \angle ABC$, поэтому равны стягиваемые ими дуги. $\square$



10. Дуги, стягиваемые равными хордами, равны.

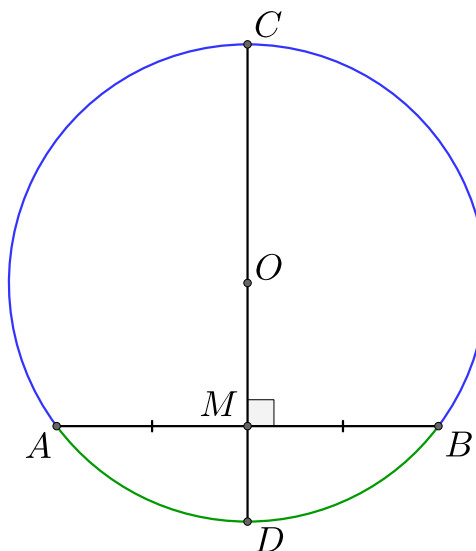
Доказательство: Рассмотрим треугольники AOB и DOC . $AO = OB = DO = OC$, так как это радиусы окружности, при этом $AB = CD$, значит треугольники AOB и DOC равны по трём сторонам, значит $\angle AOB = \angle DOC$, значит равны и стягиваемые ими дуги. $\square$



11. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит пополам саму хорду и дугу, стягиваемую ею.

Обратно, диаметр, проходящий через середину хорды, делит её пополам.

Доказательство: Пусть CD – диаметр, AB – хорда перпендикулярная CD . Рассмотрим треугольник AOB , он равнобедренный, так как OA и OB – радиусы окружности. OM – высота треугольника AOB , проведённая к основанию, значит OM также является биссектрисой, поэтому дуги, на которые опираются центральные углы AOD и BOD , равны. Аналогично доказывается, что $AC = CB$.



Обратно, если диаметр CD проходит через середину хорды AB . AOB – равнобедренный треугольник, а значит OM – медиана треугольника AOB . $\square$

12. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E , тогда

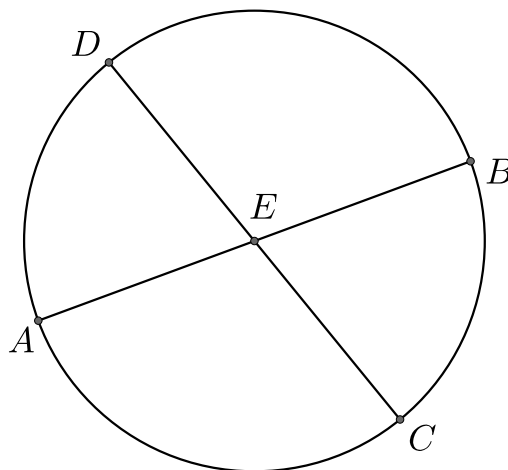
$$AE \cdot EB = DE \cdot EC.$$

Доказательство: Рассмотрим треугольники DEA и CEB . Внутренние углы ADC и ABC опираются на одну и ту же дугу, значит $\angle ADC = \angle ABC$. Аналогично получаем, что $\angle DAB = \angle DCB$, значит треугольники DEA и CEB подобны по двум углам.

Таким образом, $\frac{AE}{EC} = \frac{DE}{EB}$, значит

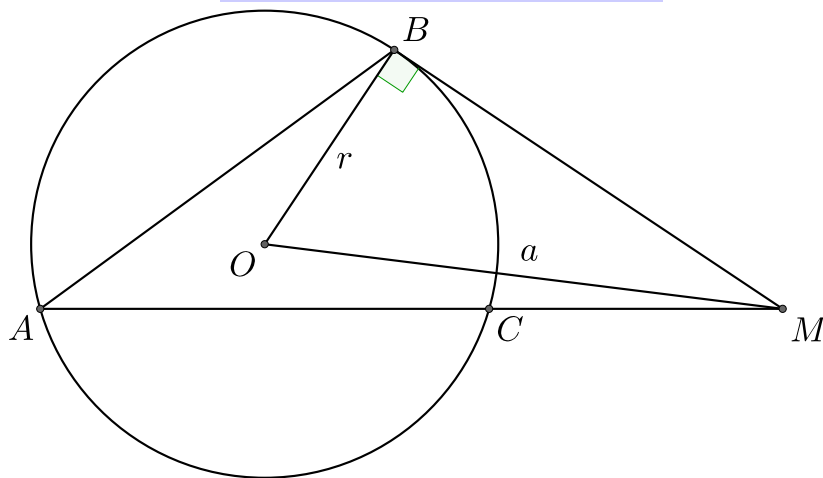
$$AE \cdot EB = DE \cdot EC. \quad \square$$

$$AE \cdot EB = DE \cdot EC$$



13. Пусть M – точка вне окружности, a – расстояние от точки M до центра окружности, r – радиус окружности. BM – касательная к окружности, секущая из точки M пересекает окружность в точках A и C , тогда

$$MB^2 = MC \cdot MA = a^2 - r^2$$



Доказательство: Рассмотрим треугольники ABM и BCM . По теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle BAC = \angle CBM$. Угол BMA общий для треугольников ABM и BCM , значит они подобны. Получаем, что:

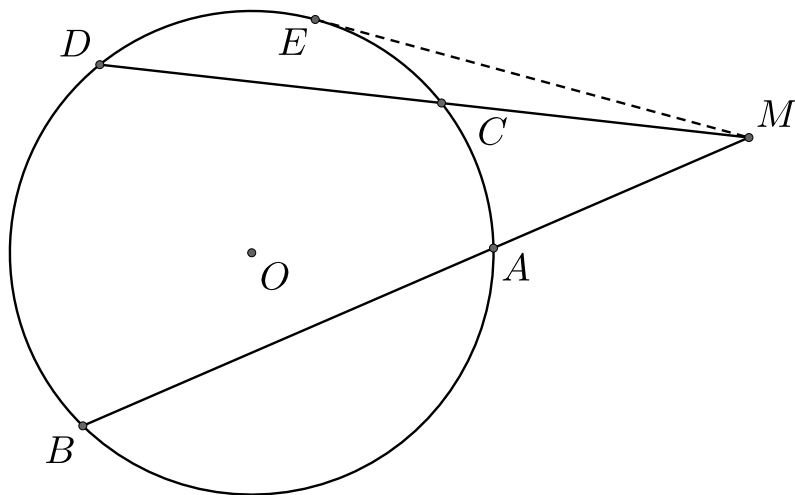
$$\frac{MB}{MA} = \frac{MC}{MB},$$

значит $MB^2 = MC \cdot MA$.

Треугольник OBM – прямоугольный, так как радиус, проведённый, к точке касания, перпендикулярен касательной. Таким образом, по теореме Пифагора получаем, что $OA^2 = OB^2 + MB^2$, значит $MB^2 = a^2 - r^2$. $\square$

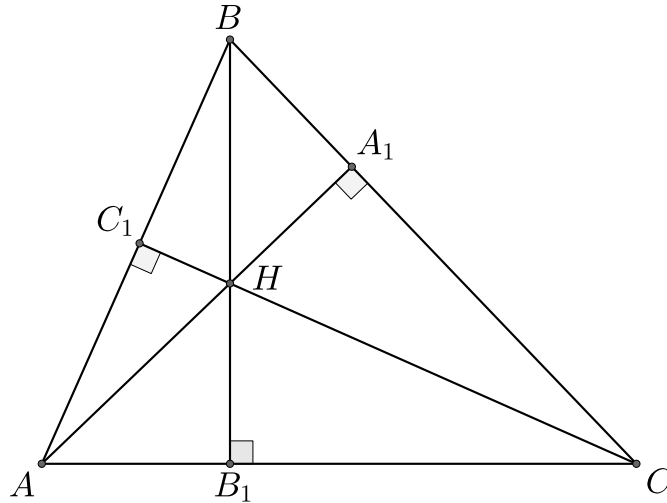
14. Пусть M – точка вне окружности. ME – касательная к окружности. Из точки M выходят две секущие: первая пересекает окружность в точках A и B , вторая – в точках C и D . Тогда:

$$ME^2 = MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



13 Свойства ортоцентра

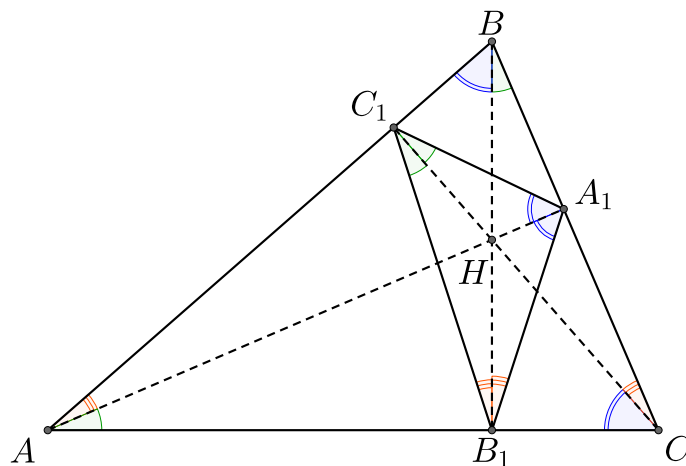
1. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Тогда вокруг четырёхугольников AC_1HB_1 , CB_1HA_1 , BC_1HA_1 и AC_1A_1C , BC_1B_1C , CB_1C_1B можно описать окружности.



Доказательство: Докажем утверждение для четырёхугольников AC_1HB_1 и AC_1A_1C . Мы знаем, что $\angle AC_1H = \angle AB_1H = 90^\circ$, поэтому $\angle AC_1H + \angle AB_1H = 180^\circ$, значит по первому признаку описанного четырёхугольника мы можем описать окружность вокруг четырёхугольника AC_1HB_1 .

В четырёхугольнике AC_1A_1C углы AC_1C и AA_1C опираются на одну и ту же сторону и равны, значит по второму признаку вписанного четырёхугольника мы можем описать окружность вокруг четырёхугольника AC_1A_1C . $\square$

2. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Треугольник $A_1B_1C_1$ называется **ортотреугольником** и высоты треугольника ABC содержат биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$.



Доказательство: Докажем, что высота AA_1 делит угол $\angle C_1A_1B_1$ пополам, для остальных углов доказательство будет аналогичным. Рассмотрим четырёхугольники AC_1HB_1 и AC_1A_1C . Вокруг AC_1HB_1 можно описать окружность, поэтому $\angle HAB_1 = \angle B_1C_1H$, так как они опираются на одну и ту же дугу. Вокруг AC_1A_1C можно описать окружность, поэтому $\angle A_1AC = \angle A_1C_1C$, причём $\angle HAB_1 = \angle A_1AC$, а значит $\angle B_1C_1H = \angle A_1C_1C$, то есть высота AA_1 делит угол $\angle C_1A_1B_1$ пополам. $\square$

3. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 , которые пересекают описанную вокруг ABC окружность в точках A_2 , B_2 , C_2 . Тогда

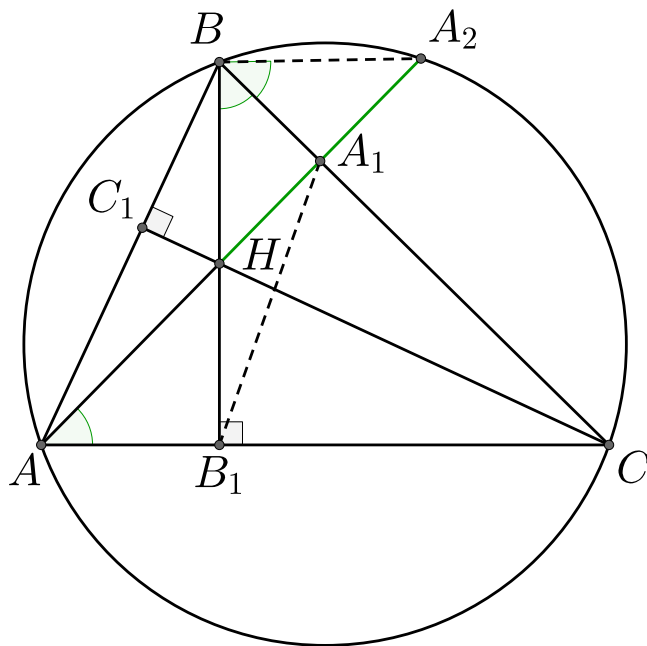
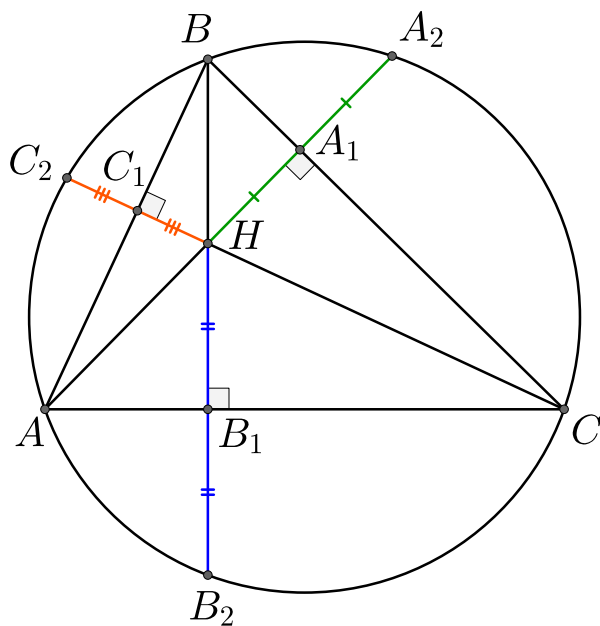
$$HA_1 = A_1A_2; \quad HB_1 = B_1B_2; \quad HC_1 = C_1C_2,$$

где H – ортоцентр треугольника.

Доказательство: Докажем, что $HA_1 = A_1A_2$, остальные равенства будут доказываться аналогично.

Вписанные углы $\angle CBA_2$ и $\angle A_2AC$ опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle CBA_2 = \angle A_2AC$. При этом вокруг четырёхугольника AB_1A_1B можно описать окружность (так как $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ$), а значит $\angle HAB_1 = \angle A_1BB_1$, причём $\angle HAB_1 = \angle CBA_2$, то есть

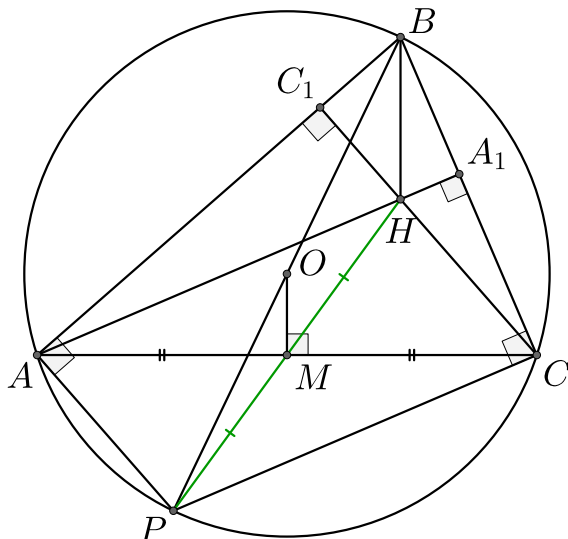
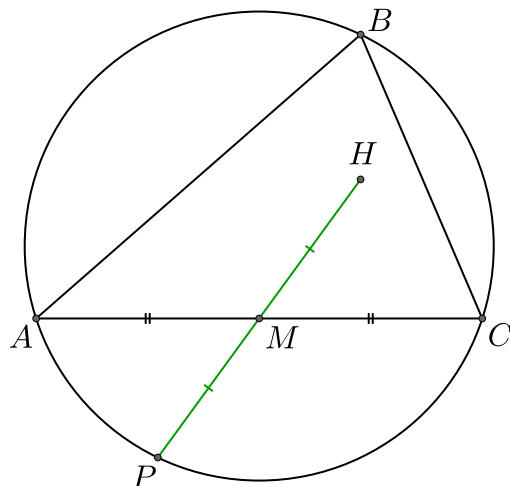
$\angle A_1BB_1 = \angle CBA_2$. Таким образом BA_1 – биссектриса треугольника HBA_2 , при этом она также является высотой этого треугольника, а значит HBA_2 – равнобедренный, поэтому BA_1 также является медианой, то есть $HA_1 = A_1A_2$. $\square$



4. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC , M – середина стороны AB , P – точка пересечения прямой HM описанной вокруг ABC окружностью, тогда $PM = MH$.

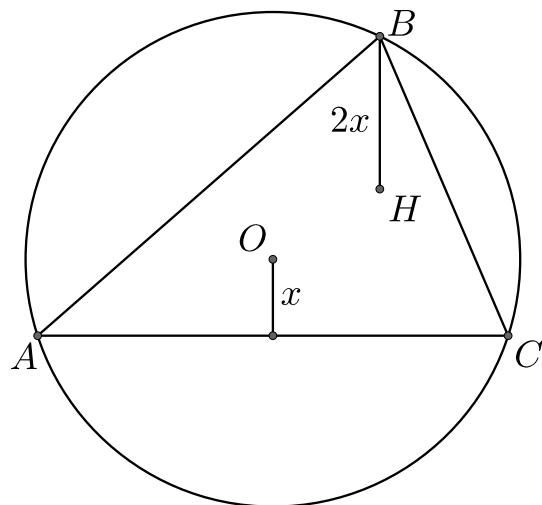
Доказательство: Отрезок OM перпендикулярен стороне AC , так как M – середина стороны AC и O является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам ABC . Пусть AA_1 и CC_1 – высоты треугольника. Проведём диагональ окружности BP . Углы $\angle PAB$ и $\angle PCB$ опираются на диагональ, поэтому $\angle PAB = \angle PCB = 90^\circ$.

$\angle AC_1C = 90^\circ$, поэтому отрезки AP и C_1C параллельны, в частности параллельны отрезки AP и HC . $\angle AA_1C = 90^\circ$, поэтому отрезки CP и A_1A параллельны, в частности параллельны отрезки CP и AH . Получаем, что в четырёхугольнике $AHPC$ противоположные стороны параллельны, а значит $AHPC$ – параллелограмм. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. $AM = MC$, значит $MH = PM$. $\square$



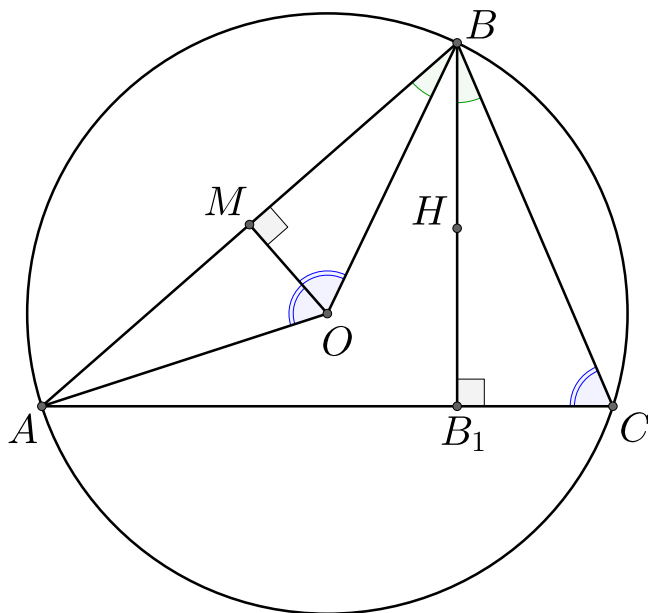
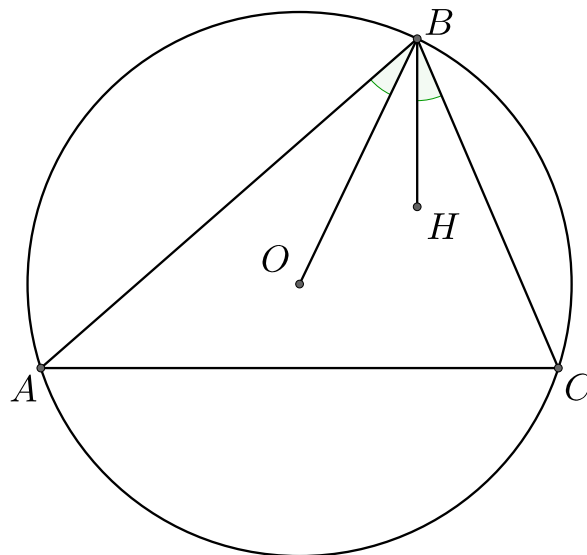
5. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC , O – центр описанной вокруг ABC окружности. Тогда расстояние от точки B до H вдвое больше, чем расстояние от точки O до стороны AC .

Доказательство: BH – часть высоты, проведённой к стороне AC , значит отрезки OM и BH параллельны, значит треугольники PBH и POM подобны с коэффициентом подобия 2, значит $OM = 2BH$. $\square$

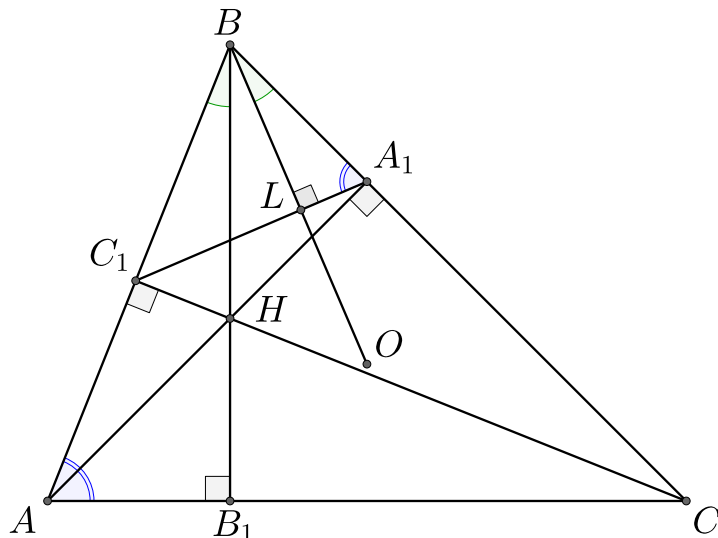


6. H – ортоцентр треугольника ABC , O – центр описанной вокруг ABC окружности, тогда $\angle ABO = \angle HBC$.

Доказательство: Рассмотрим треугольник AOB , он является равнобедренным, а значит высота OM в нём также является биссектрисой. Центральный угол $\angle AOB$ и вписанный угол $\angle ACB$ опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$. Так как OH – биссектриса угла $\angle AOB$, то $\angle MOB = \angle ACB$. Таким образом в прямоугольных треугольниках MOB и B_1CB имеем, что $\angle MOB = \angle ACB$, значит $\angle ABO = \angle B_1BC = \angle HBC$. $\square$



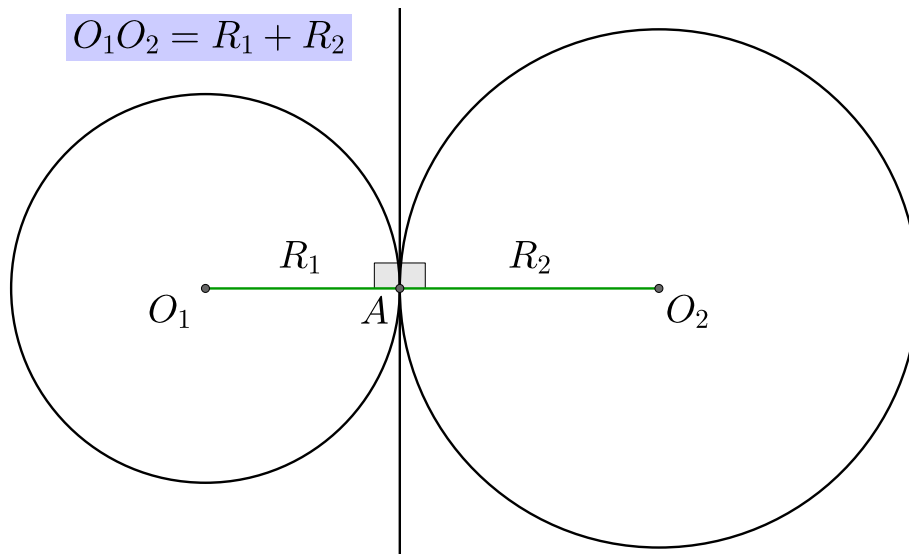
7. H – ортоцентр треугольника ABC , O – центр описанной вокруг ABC окружности, проведены высоты AA_1 и CC_1 , тогда $BO \perp A_1C_1$.



Доказательство: Пусть L – точка пересечения BO и A_1C_1 . Мы знаем, что $\angle BAB_1 = \angle BA_1C_1$, при этом $\angle ABO = \angle HBC$, значит в треугольниках ABB_1 и A_1BL совпадают два угла, значит совпадают все три: $\angle AB_1B = \angle A_1LB = 90^\circ$. $\square$

14 Конструкции и теоремы

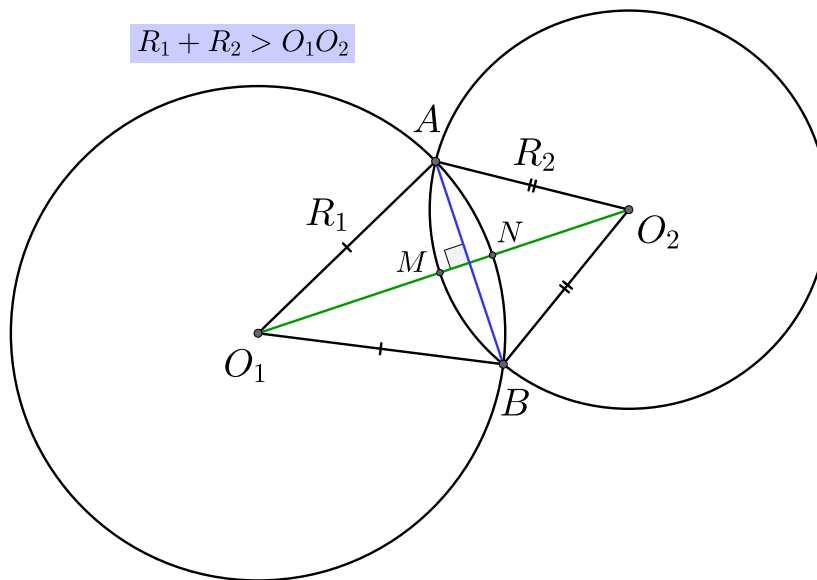
1. Если две окружности касаются внешним образом, то расстояние между их центрами равно сумме их радиусов.



Доказательство: Пусть две окружности касаются внешним образом в точке A , проведём через эту точку общую касательную. Отрезки O_1A и O_2A перпендикулярны общей касательной, а значит точки O_1AO_2 лежат на одной прямой и $O_1O_2 = O_1A + AO_2 = R_1 + R_2$. $\square$

2. Если две окружности пересекаются в двух точках, то расстояние между их центрами не превосходит суммы их радиусов.

Если O_1, O_2 – центры окружностей, A, B – точки пересечения окружностей, то четырёхугольник AO_1BO_2 – дельтоид ($O_1A = O_1B, O_2A = O_2B, AB \perp O_1O_2$).

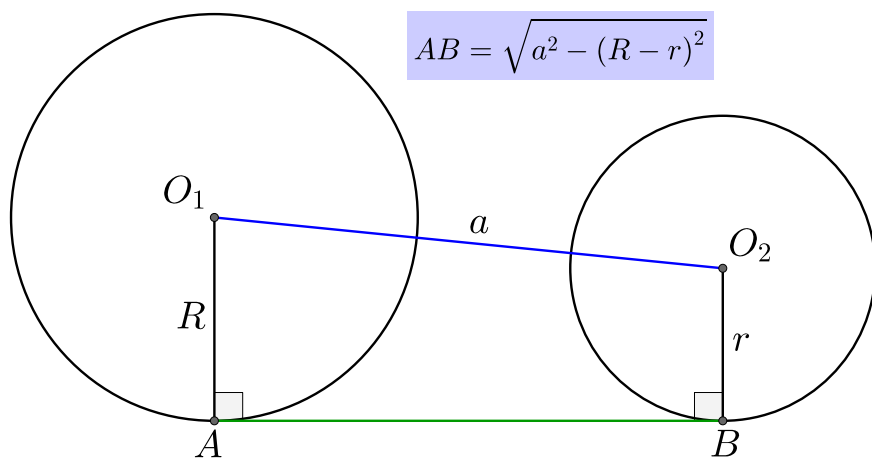


Доказательство: Пусть отрезок O_1O_2 пересекает окружности в точках M и N , но тогда $O_1N + O_2M = R_1 + R_2$, но $O_1O_2 = O_1N + O_2M - MN < O_1N + O_2M = R_1 + R_2$.

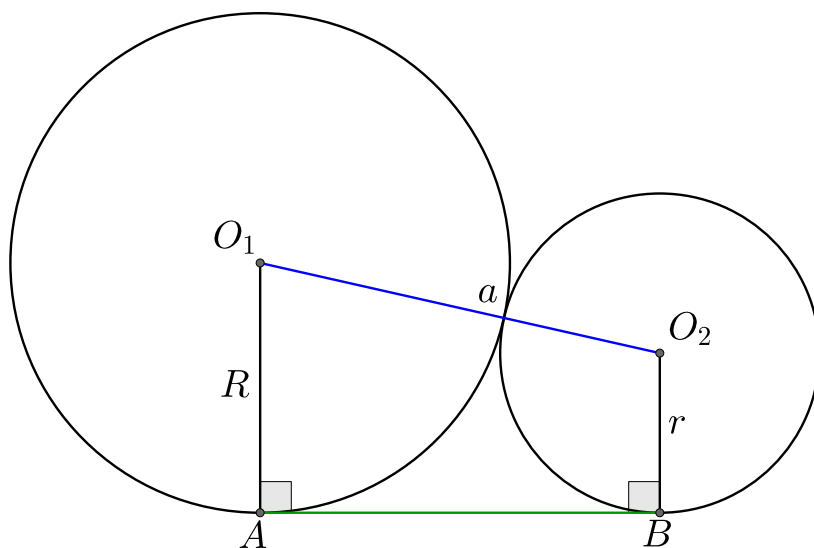
Далее, в четырёхугольнике AO_1BO_2 известно, что $O_1A = O_1B = R_1$ и $O_2A = O_2B = R_2$, значит данный четырёхугольник – дельтоид. $\square$

3. Если расстояние между центрами окружностей радиусов r и R равно a , то отрезок общей внешней касательной, заключённой между точками касания, равен $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$.

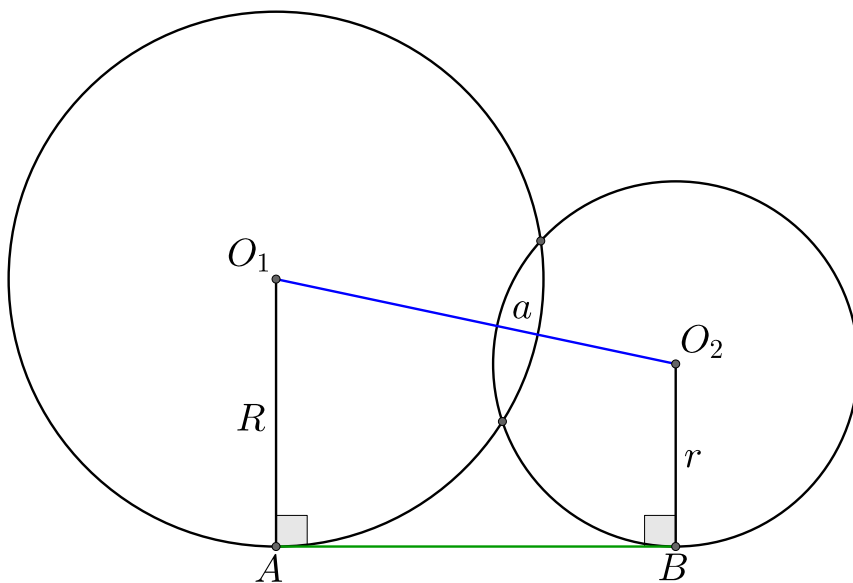
Случай 1:



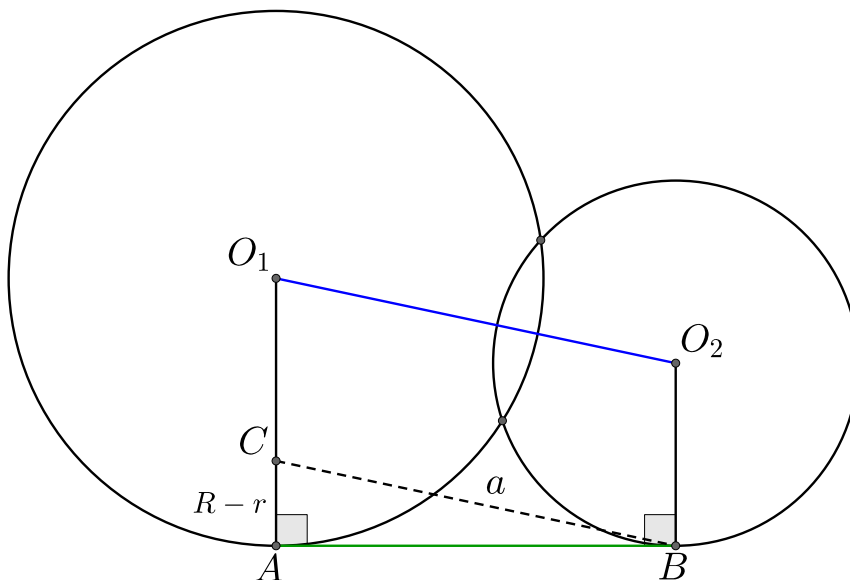
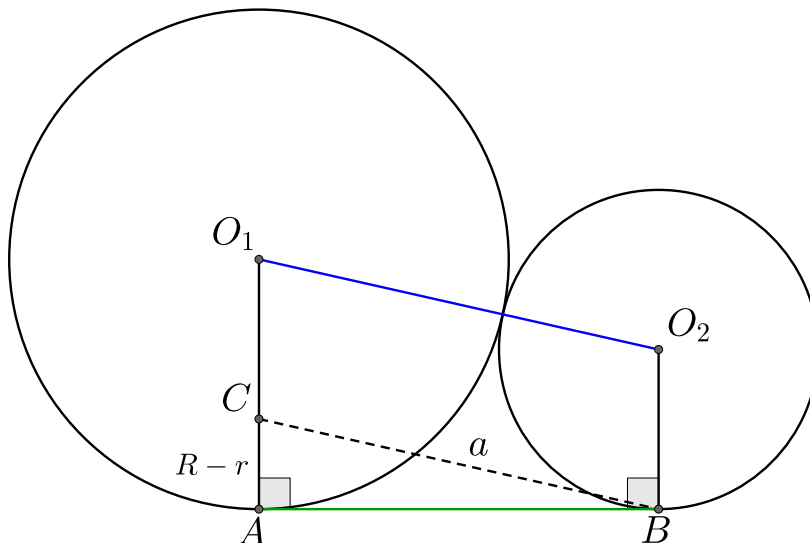
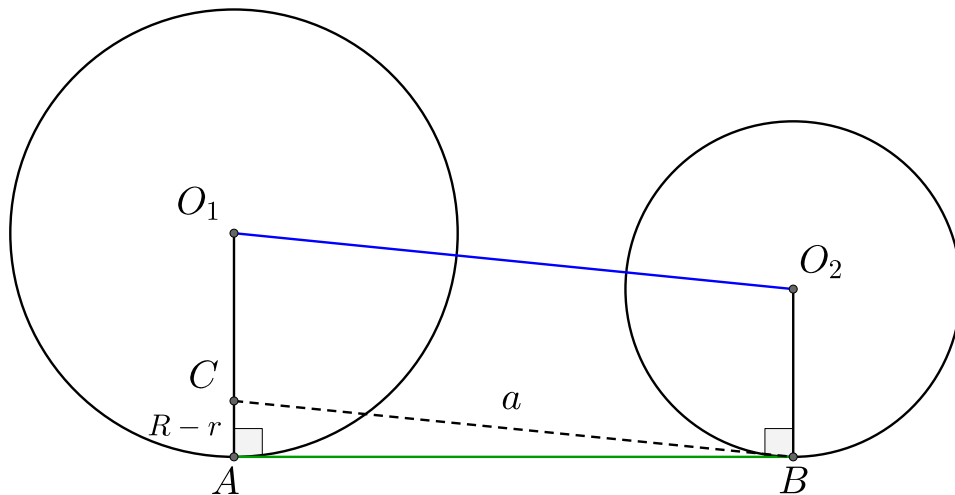
Случай 2:



Случай 3:

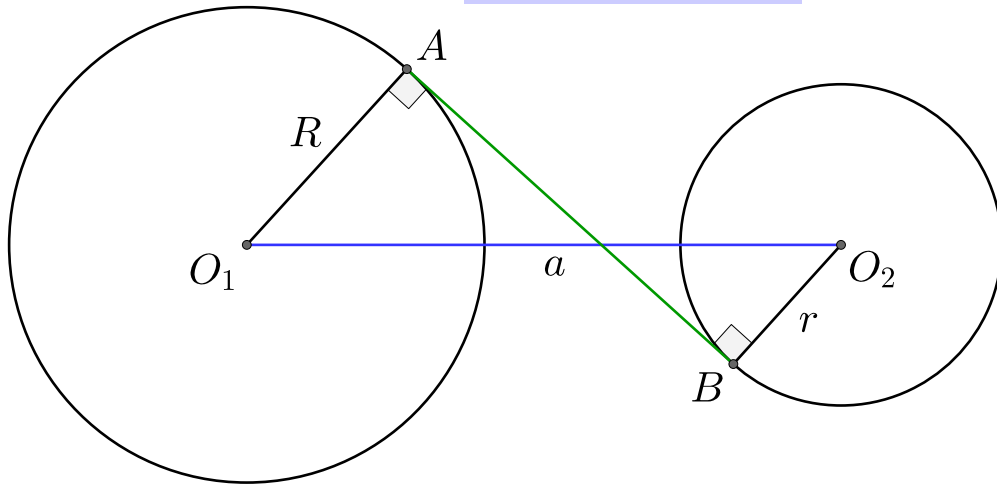


Доказательство: Пусть $R > r$, через точку B параллельно отрезку O_1O_2 проведём отрезок BC , причём точка C лежит на отрезке O_1A . Радиусы O_1A и O_2B перпендикулярны касательной AB , значит они параллельны. Получаем, что четырёхугольник AO_1O_2B – параллелограмм, а значит $CO_1 = BO_2 = r$ и $AC = R - r$. По теореме Пифагора для треугольника ABC получаем, что $a^2 = AB^2 + (R - r)^2$, то есть $AB = \sqrt{a^2 - (R - r)^2}$. $\square$

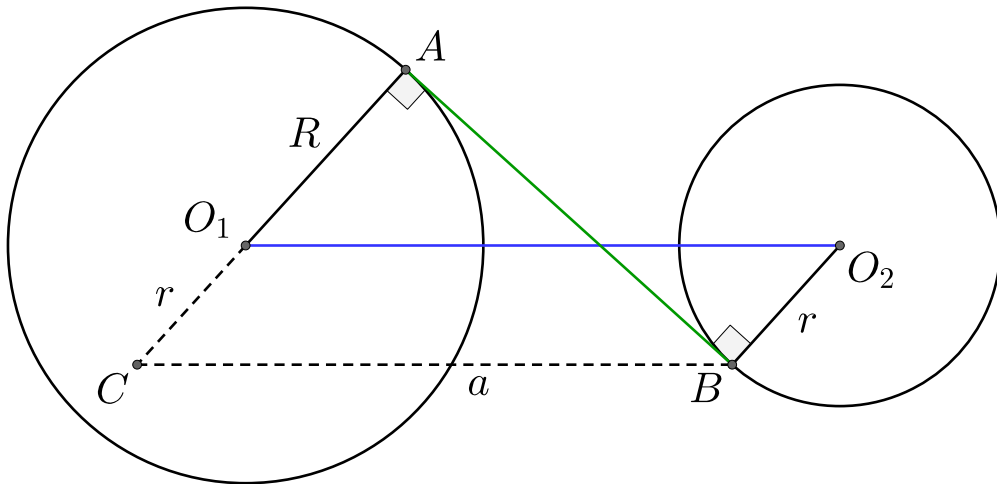


4. Если расстояние между центрами окружностей радиусов r и R равно a и $a > R + r$ (то есть окружности не пересекаются), то отрезок общей внутренней касательной, заключённый между точками касания, равен:

$$AB = \sqrt{a^2 - (R + r)^2}$$

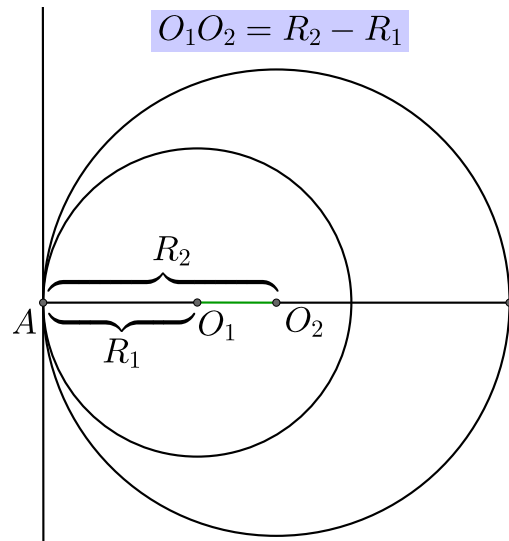


Доказательство: Пусть $R > r$, через точку B проведём прямую, параллельную отрезку O_1O_2 , которая пересекает продолжение отрезка AO_1 в точке C . Отрезки O_1A и O_2B перпендикулярны общей касательной AB , значит они параллельны, то есть в четырёхугольнике O_1CBO_2 противоположные стороны параллельны, поэтому он является параллелограммом. В параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому $O_1C = r$ и $AC = R + r$. Имеем, что треугольник CAB – прямоугольный, а значит по теореме Пифагора получаем, что $(R + r)^2 + AB^2 = a^2$, то есть $AB = \sqrt{a^2 - (R + r)^2}$. $\square$

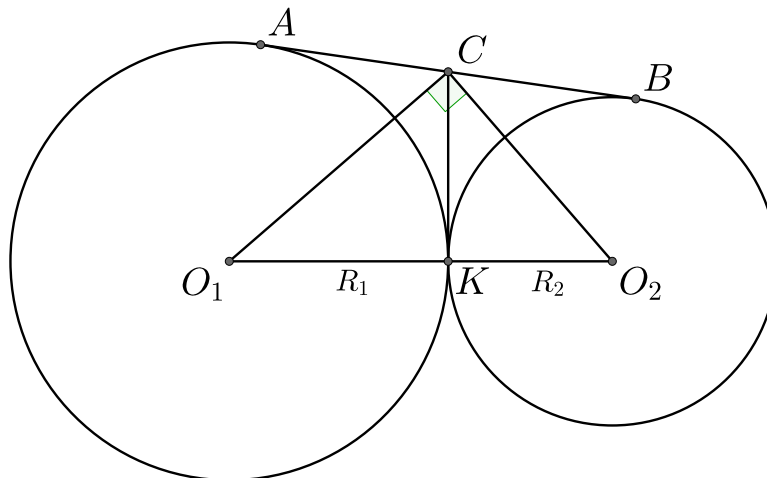
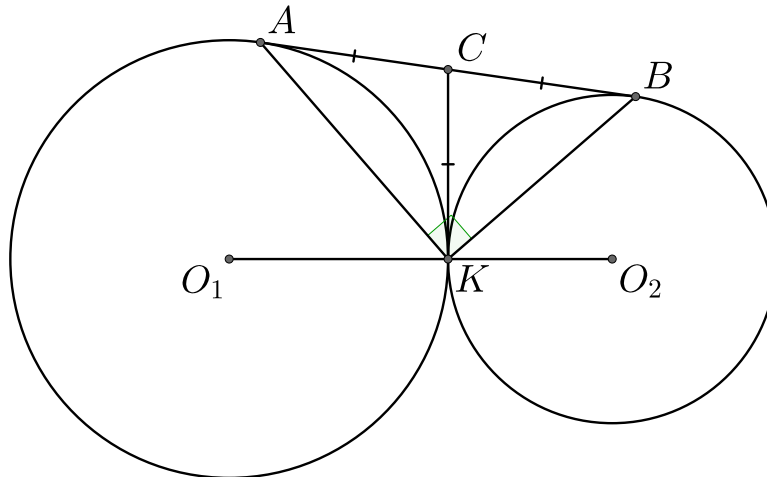


5. Если две окружности касаются внутренним образом, то расстояние между их центрами равно разности их радиусов.

Доказательство: Пусть $R_2 > R_1$, проведём через точку касания A общую касательную. Радиусы O_1A и O_2A перпендикулярны общей касательной, значит точки O_1 , O_2 , A лежат на одной прямой, тогда $O_1O_2 = O_2A - O_1A = R_2 - R_1$. $\square$



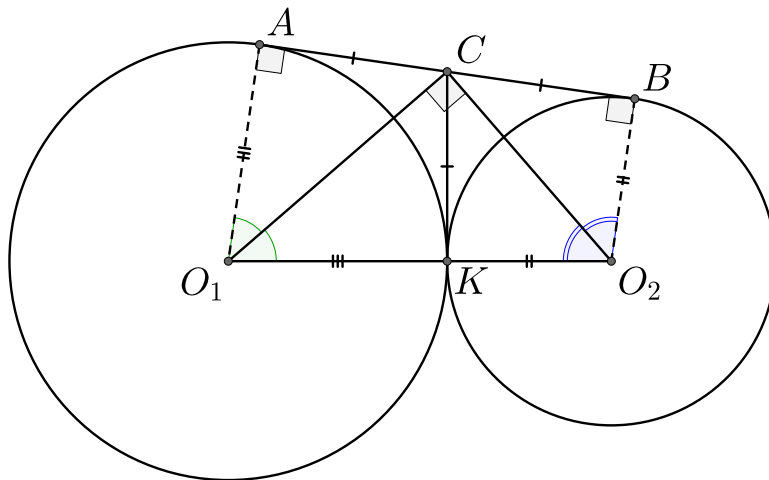
6. Если окружности радиусов R_1 и R_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K , а прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, в точке C , тогда $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$.



Доказательство: Касательные к окружности, выходящие из одной точки, равны, значит $AC = CK = CB$. Значит в треугольнике AKB медиана CK равна половине стороны, на которую она опущена. Значит треугольник AKB – прямоугольный, то есть $\angle AKB = 90^\circ$.

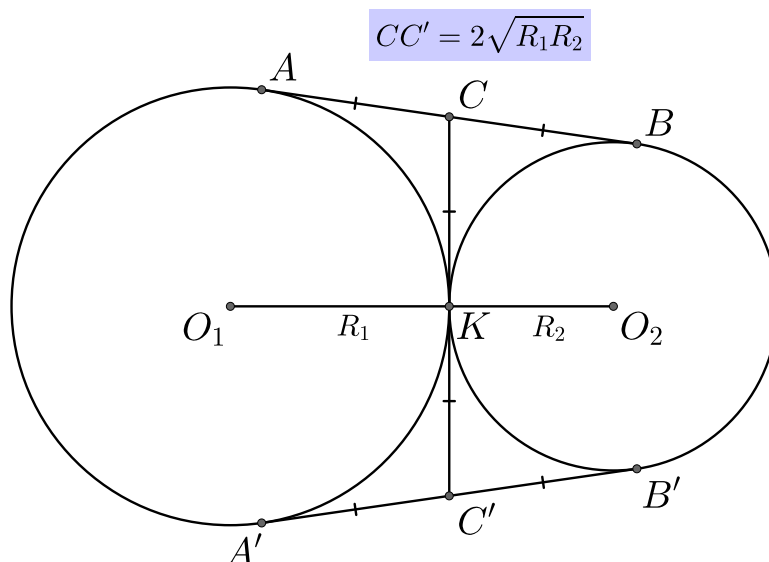
Отрезки O_1A и O_2B перпендикулярны касательной AB , значит они параллельны и четырёхугольник AO_1O_2B – трапеция с основаниями AO_1 и O_2B . Внутренние односторонние углы трапеции в сумме дают 180° .

Мы установили, что $AC = CK = CB$, также имеем, что $AO_1 = O_1K = R_1$ и $BO_2 = O_2K = R_2$, значит четырёхугольники AO_1KC и BO_2KC являются дельтоидами. Отсюда следует, что диагонали O_1C и O_2C – биссектрисы углов AO_1K и BO_2K соответственно. Таким образом получаем, что $\angle AO_1K = 2\angle CO_1O_2$, $\angle BO_2K = 2\angle CO_2O_1$ и $\angle AO_1K + \angle BO_2K = 2\angle CO_1O_2 + 2\angle CO_2O_1 = 180^\circ$, а значит $\angle CO_1O_2 + \angle CO_2O_1 = 90^\circ$, то есть $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$. $\square$



7. Общая внутренняя касательная CK окружностей делит отрезок общей внешней касательной AB пополам;

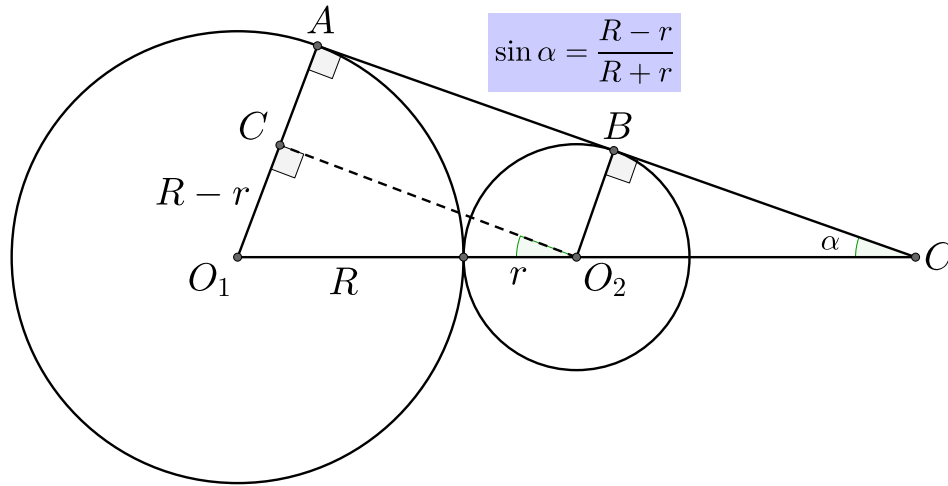
8. Отрезок AB равен отрезку CC' – общей внутренней касательной, заключённой между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{R_1R_2}$.



Доказательство: Длину общей касательной AB мы можем вычислить по формуле $AB = \sqrt{O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2} = \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2 - R_1^2 + 2R_1R_2 - R_2^2} = 2\sqrt{R_1R_2}$.

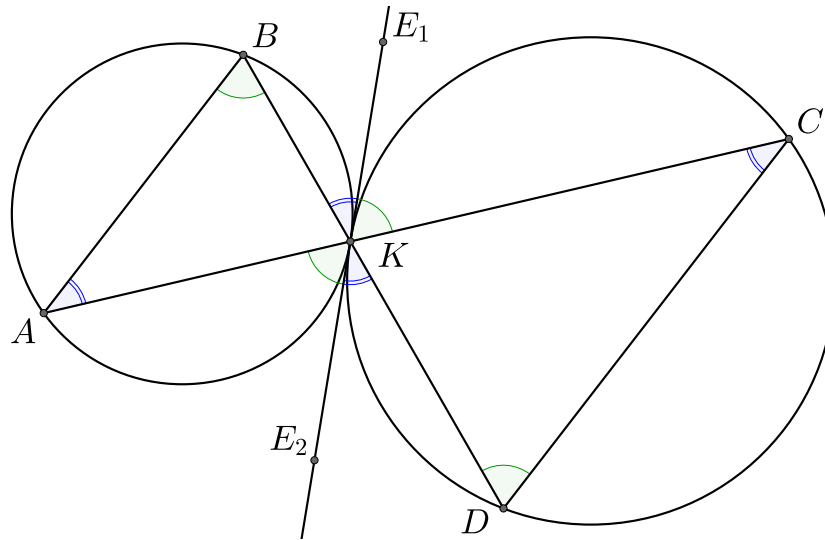
В силу симметрии получаем, что $AB = A'B'$ и $CK = C'K$. Мы установили, что $AB = 2CK$, значит $CC' = CK + KC' = 2CK = AB = 2\sqrt{R_1R_2}$. $\square$

9. Пусть две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом, AB – общая касательная двух окружностей, C – точка пересечения прямых AB и O_1O_2 . $\alpha = \angle O_1CA$, тогда



Доказательство: Пусть $R > r$, параллельно отрезку AB проведём отрезок O_2C (точка C лежит на отрезке AO_1), тогда в силу параллельности отрезок AO_1 и BO_2 имеем, что $O_1C = R - r$, причём $\angle CO_2O_1 = \angle CO_1A$ и $O_1O_2 = R + r$, значит $\sin \alpha = \frac{O_1C}{O_1O_2} = \frac{R-r}{R+r}$. $\square$

10. Пусть две окружности касаются внешним образом в точке K , через эту точку проходят две секущие. Первая секущая пересекает окружности в точках A и C , вторая в точках – B и D . Тогда треугольники AKB и CKD подобны, причём AB и CD параллельны.

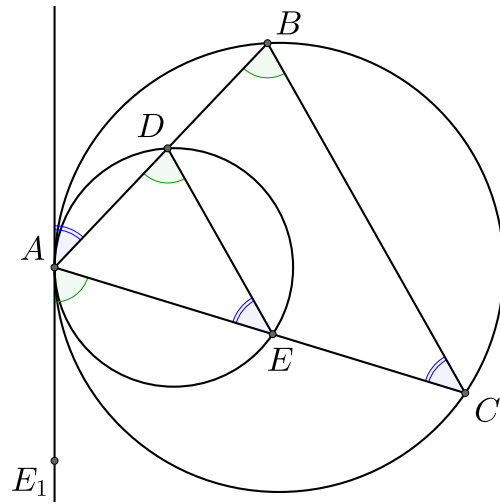


Доказательство: Углы BKA и CKD равны, так как являются вертикальными, по той же причине равны углы SKE_1 и AKE_2 . Тогда по теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle ABK = \angle AKE_2$ и $\angle KDC = \angle SKE_1$, то есть $\angle ABK = \angle KDC$. Значит треугольники AKB и CKD подобны по двум углам.

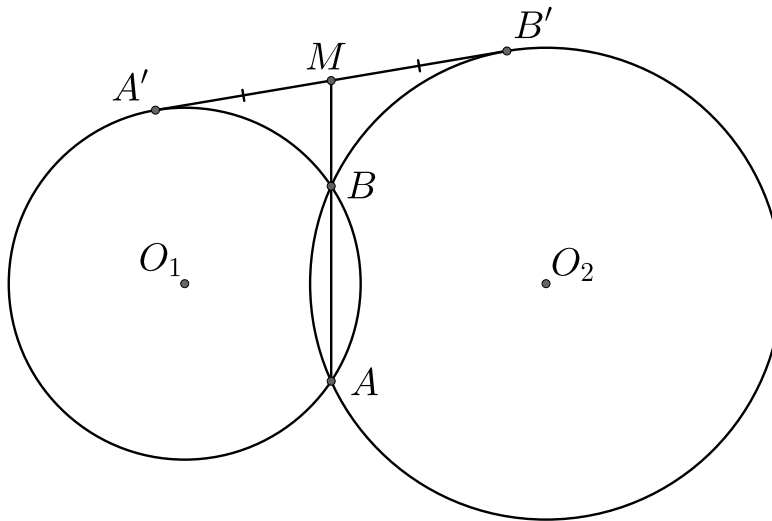
Параллельность отрезков AB и CD следует из того, что их внутренние накрест лежащие углы равны. $\square$

11. Пусть две окружности касаются внутренним образом в точке A , через эту точку проходят две секущие. Первая секущая пересекает окружности в точках D и B , вторая – в точках E и C , тогда треугольники ABC и ADE подобны.

Доказательство: Угол BAC является общим для треугольников ABC и ADE . По теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle EAE_1 = \angle ADE$ и $\angle CAE_1 = \angle ABC$, значит $\angle ADE = \angle ABC$, то есть треугольники ABC и ADE подобны по двум углам.

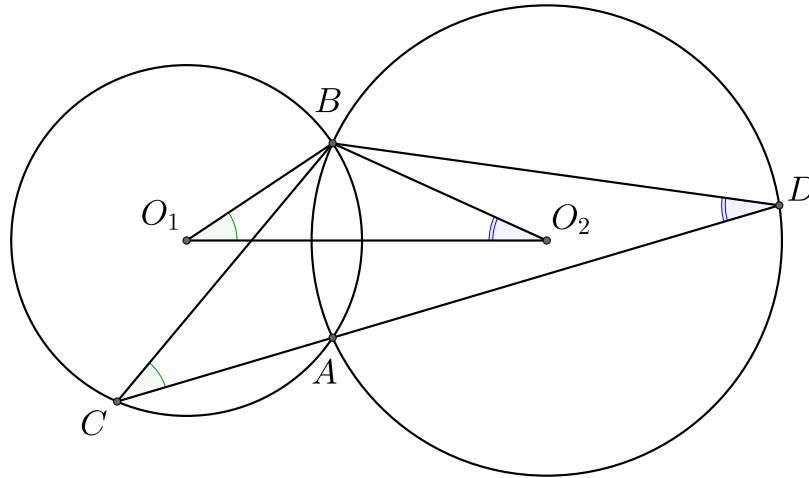


12. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит общую касательную пополам.

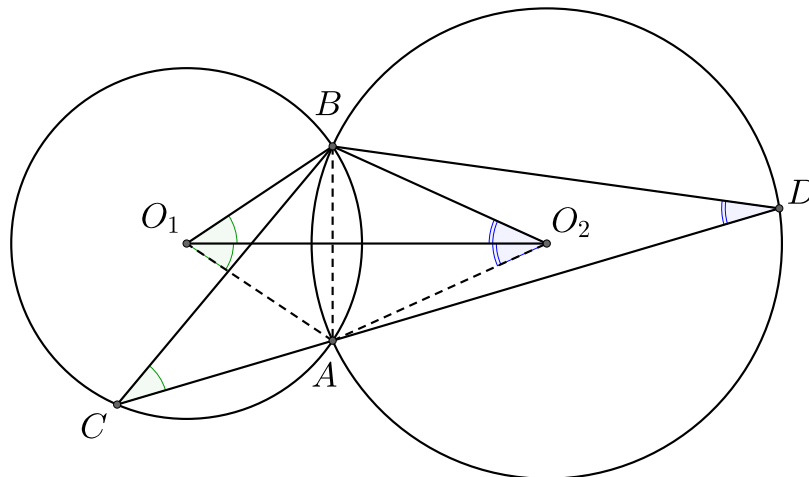


Доказательство: Пусть M – точка пересечения прямой AB и касательной $A'B'$. Тогда, с одной стороны, для окружности с центром O_1 верно, что $A'M^2 = MA \cdot MB$, с другой стороны, для окружности с центром в точке O_2 имеем, что $B'M^2 = MA \cdot MB$. Получаем, что $A'M^2 = B'M^2$ или $A'M = B'M$. $\square$

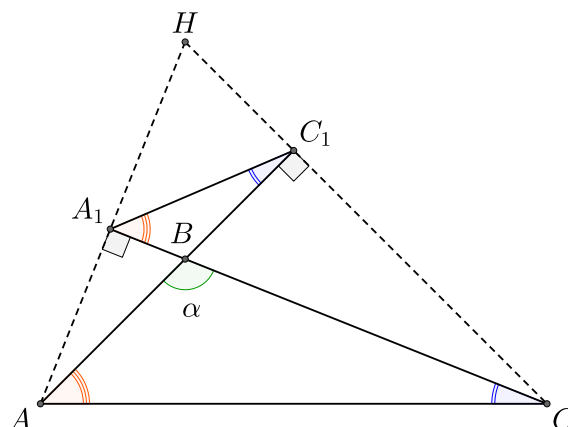
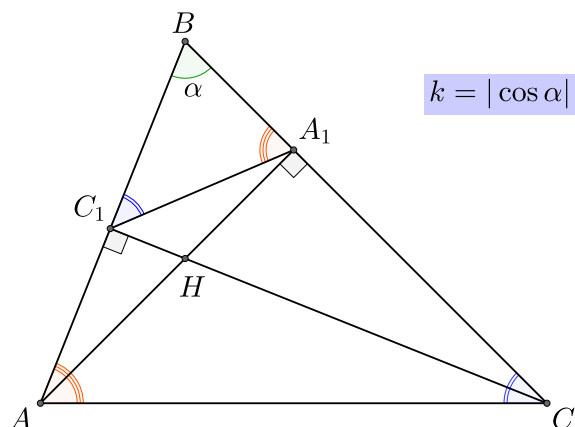
13. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Точка C лежит на первой окружности, прямая AC пересекает вторую окружность в точке D . Тогда треугольники BO_1O_2 и BOD подобны.



Доказательство: Рассмотрим углы BO_1A и BO_2A . Четырёхугольник BO_1AO_2 является дельтоидом и $O_1B = O_1A$ и $O_2B = O_2A$, поэтому диагональ O_1O_2 делит углы BO_1A и BO_2A пополам. При этом центральный угол BO_1A первой окружности опирается на ту же дугу, что и вписанный угол BCA , аналогично центральный угол второй окружности BO_2A опирается на ту же дугу, что и вписанный угол BDA . Значит $\angle BO_1A = 2\angle BCA$ и $\angle BO_2A = 2\angle BDA$, значит $\angle BO_1O_2 = \angle BCA$ и $\angle BO_2O_1 = \angle BDA$. Таким образом, треугольники BO_1O_2 и BOD подобны по двум углам. $\square$



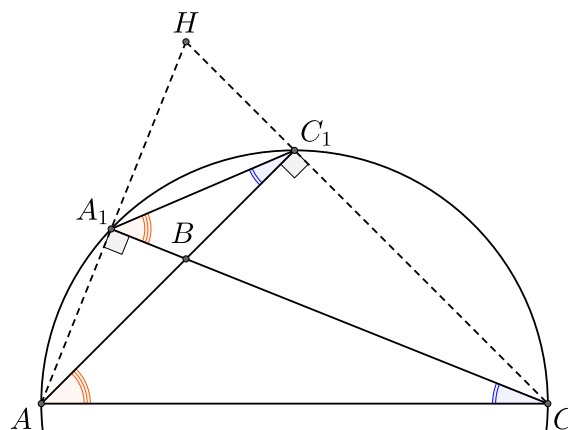
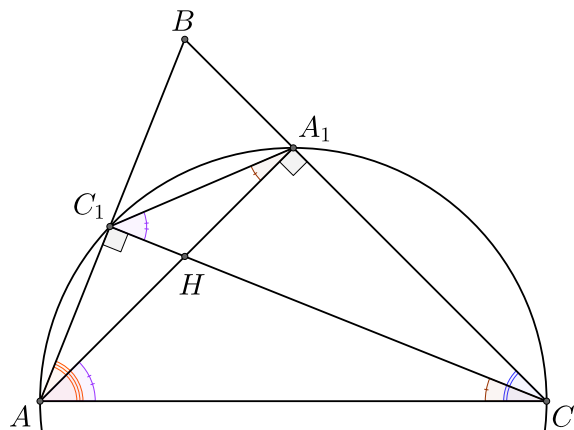
14. Пусть в треугольнике ABC проведены две высоты AA_1 и CC_1 . Тогда треугольники A_1BC_1 и ABC подобны с коэффициентом подобия $k = |\cos \alpha|$.



Доказательство:

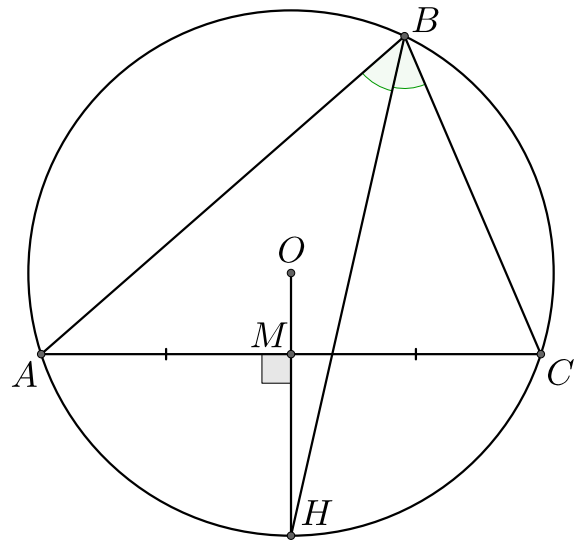
Случай 1: Пусть α – острый угол. Рассмотрим четырёхугольник AC_1A_1C . Мы можем описать вокруг него окружность, поэтому $\angle C_1A_1A = \angle C_1CA$ и $\angle A_1C_1C = \angle A_1AC$. При этом $\angle ACC_1 = 90^\circ - \angle C_1AC$ и $\angle A_1AC = 90^\circ - \angle A_1CA$. А также $\angle C_1A_1A + \angle C_1A_1B = 90^\circ$ и $\angle CC_1A_1 + \angle A_1C_1B = 90^\circ$. Получаем, что $\angle C_1A_1B = \angle C_1AC$ и $\angle A_1C_1B = \angle A_1CA$, то есть треугольники A_1BC_1 и ABC подобны по двум углам. Треугольник AA_1B – прямоугольный, значит $\cos \alpha = \frac{A_1B}{AB}$, поэтому $k = \cos \alpha$ – коэффициент подобия треугольников A_1BC_1 и ABC .

Случай 2: Пусть α – тупой угол. Тогда высоты падают на продолжения сторон AB и BC . Вокруг четырёхугольника AA_1C_1C можно описать окружность, значит $\angle C_1A_1C = \angle C_1AC$ и $\angle A_1C_1A = \angle A_1CA$, значит треугольники A_1BC_1 и ABC подобны по двум равным углам. $\angle A_1BA = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$. Треугольник AA_1B – прямоугольный, значит $\cos(\angle A_1BA) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{A_1B}{AB}$, то есть $k = -\cos \alpha$ – коэффициент подобия треугольников A_1BC_1 и ABC . $\square$



15. Биссектриса угла B треугольника ABC и серединный перпендикуляр к стороне AC пересекаются на описанной вокруг ABC окружности.

Доказательство: Пусть BH – биссектриса угла ABC , причём точка H лежит на описанной окружности. Тогда дуги $\widehat{CH}$ и $\widehat{HA}$ равны. При этом серединный перпендикуляр к отрезку AC делит дугу $\widehat{CA}$ пополам, а значит он пересекает окружность в точке H . $\square$

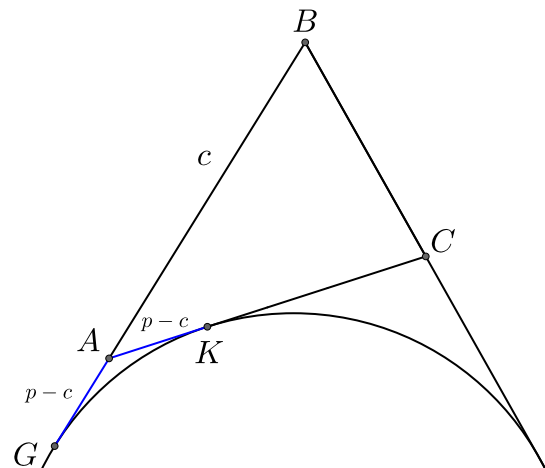
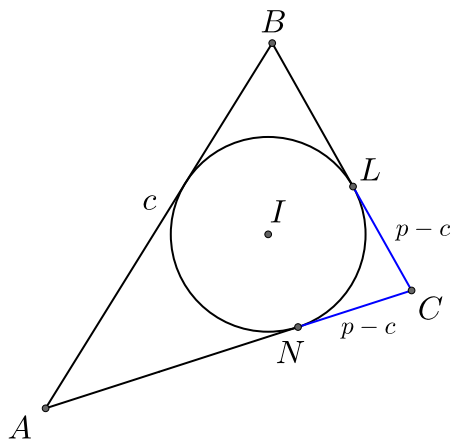
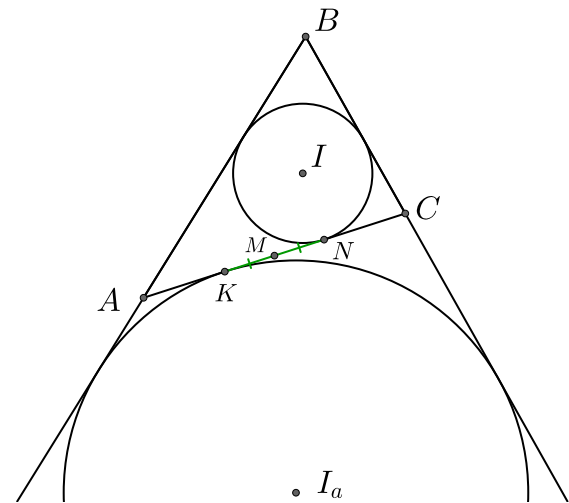


16. Пусть вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке N , внеписанная окружность касается стороны AC в точке K , тогда середина отрезка AC является серединой отрезка NK .

Доказательство: Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке L . Тогда мы знаем, что $NC = LC = p - c$, где p – полупериметр треугольника ABC и $c = AB$.

Далее, пусть внеписанная окружность касается продолжения стороны AB в точке G .

Тогда мы знаем, что $AG = AK = p - c$. Тогда $AK = NC$. Если M – середина отрезка KN , то получаем, что $AM = AK + KM = MN + NC = MC$, значит M – середина стороны AC . $\square$

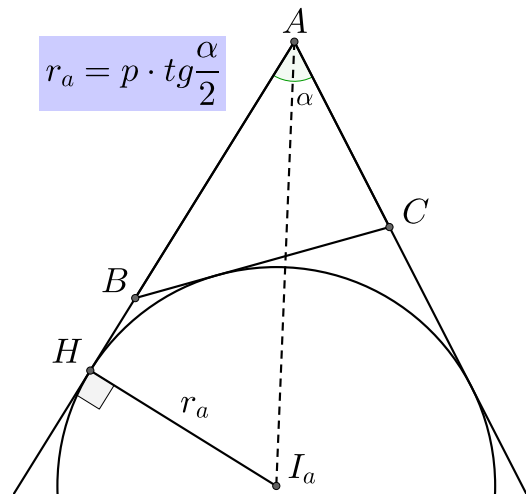


17. Радиус вневписанной окружности можно найти по формуле:

$$r_a = p \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

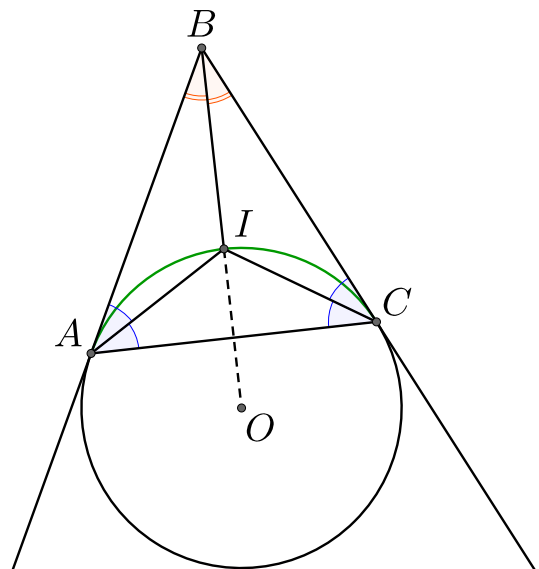
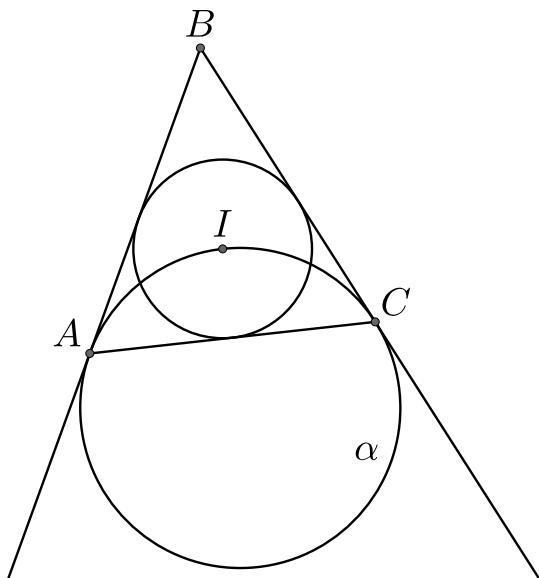
Доказательство: Центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC , лежит на биссектрисе угла BAC . Пусть H – точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны AB , значит $\angle HAI_a = \frac{\alpha}{2}$. Получаем, что AHI_a – прямоугольный треугольник, тогда $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{I_a H}{AH}$. Если p – полупериметр

треугольника ABC , r_a – радиуса вневписанной окружности, $c = AB$. Имеем, что $HB = p - c$, тогда $AH = p$. Получаем, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{p}$ или $r_a = p \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. $\square$

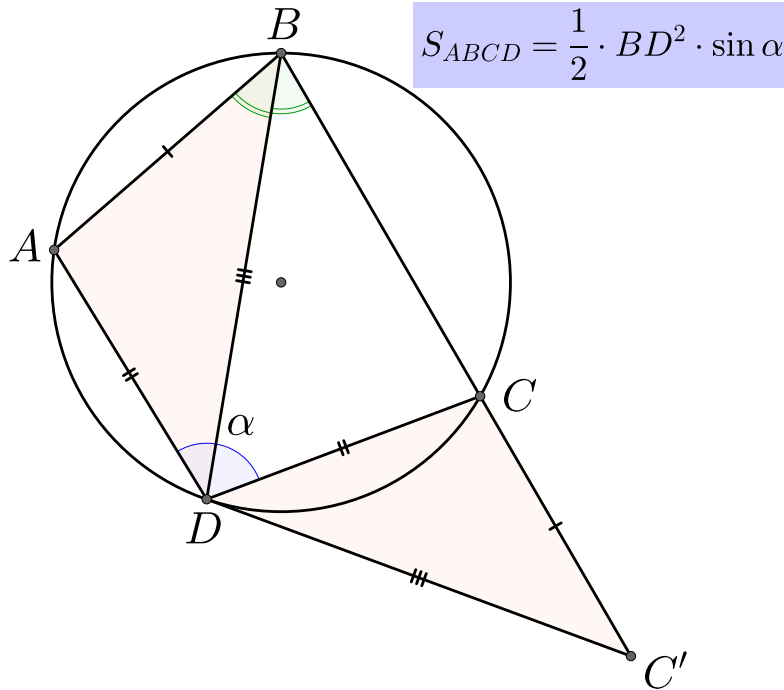


18. Центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на окружности, касающейся лучей BA и BC в точках A и C .

Доказательство: Пусть I – середина дуги $\overset{\frown}{AC}$, тогда $\angle IAC = \angle ICA$. При этом, по теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle ICA = \angle BAI = \angle IAC$. Аналогично получаем, что $\angle BCI = \angle ACI$. Таким образом, I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC , значит I – центр вписанной в ABC окружности. $\square$



19. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник, у которого диагональ является биссектрисой угла ABC , $\alpha = \angle ADC$, тогда площадь данного четырехугольника равна $S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD^2 \sin \alpha$.



Доказательство: Углы ABD и DBC равны, поэтому $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{CD}$, значит $AD = DC$, так как равные дуги стягивают равные хорды.

$ABCD$ – вписанный четырёхугольник, поэтому $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$. Продлим сторону BC за точку C до точки C' так, что $CC' = AB$. Углы BCD и $C'CD$ – смежные, поэтому $\angle C'CD = 180^\circ - \angle BCD = \angle BAD$. Получаем, что треугольники BAD и $C'CD$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит $\angle CDC' = \angle ADB$, $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = \angle CDC' + \angle BDC = \angle BDC' = \alpha$

Имеем

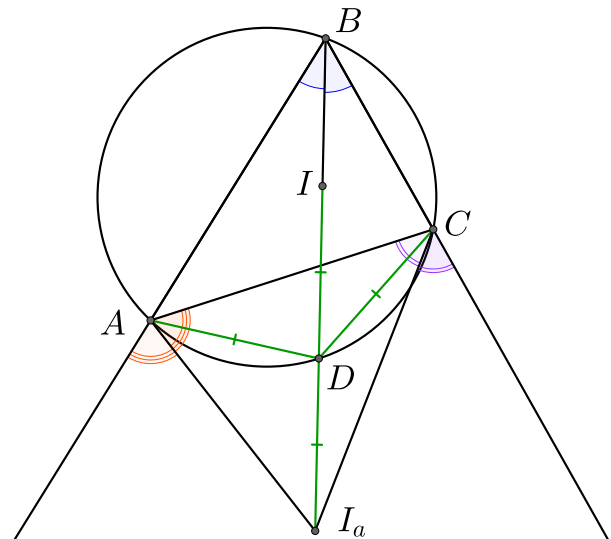
$$S_{ABCD} = S_{BAD} + S_{BDC} = S_{CC'D} + S_{BDC} = S_{BDC'} = \frac{1}{2}BD^2 \sin \alpha. \quad \square$$

20. (**Лемма о трезубце**) Пусть биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D , I – центр вписанной в ABC окружности, а I_a – центр внеписанной окружности, касающейся стороны AC , тогда

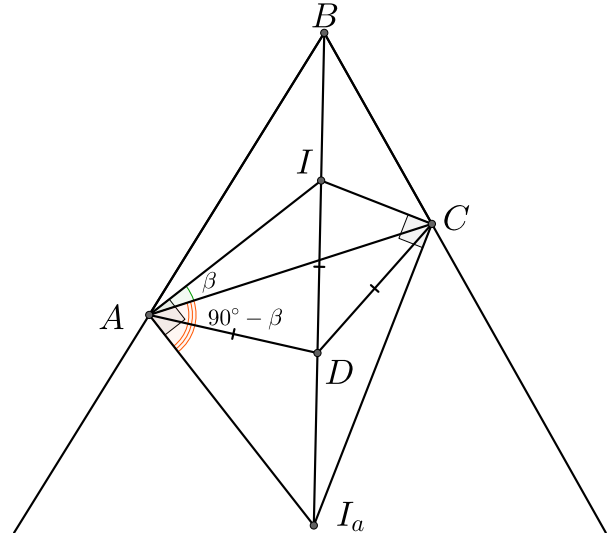
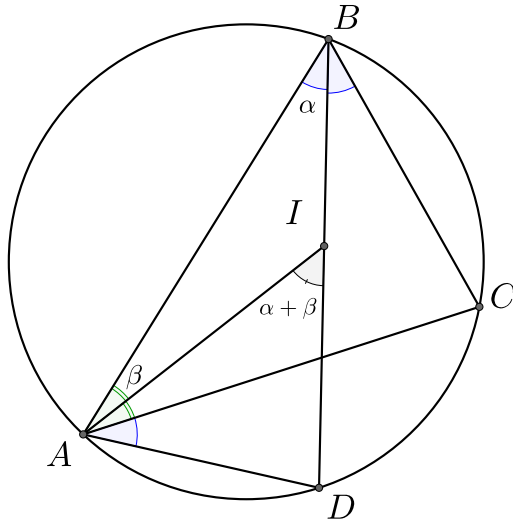
$$AD = DC = ID = I_aD.$$

Доказательство: BD – биссектриса угла ABC , поэтому дуги DA и CD равны, а значит равны и хорды, которые на них опираются: $AD = DC$. I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC , значит $\angle BAI = \angle IAC$.

Внешний угол треугольника равен сумме не смежных с ним углов, значит $\angle AID = \alpha + \beta$. Углы CAD и DBC опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle CAD = \angle DBC$, а значит

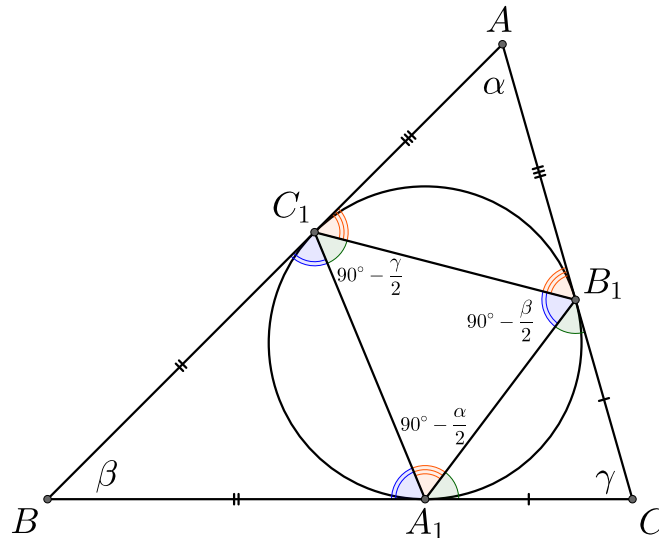


$\angle IAD = \alpha + \beta$, то есть треугольник IAD – равнобедренный и $AD = ID$.



AI_a – биссектриса угла, смежного углу BAC , значит $\angle CAI_a = 90^\circ - \beta$, при этом $\angle IAC = \beta$, значит $\angle IAI_a = 90^\circ$. По тем же причинам $\angle ICI_a = 90^\circ$. Получаем, что сумма противоположных углов четырёхугольника IAI_aC равна 180° , а значит вокруг него можно описать окружность, причём II_a – диагональ этой окружности. Мы уже установили, что $AD = DC = ID$, значит D – центр, описанной вокруг четырёхугольника IAI_aC , окружности, а значит I_aD – радиус этой окружности, поэтому $I_aD = ID$. $\square$

21. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, A_1 , B_1 , C_1 – точки касания вписанной в треугольник окружности (A_1 лежит напротив A , B_1 лежит напротив B , C_1 лежит напротив C). Тогда в треугольнике $A_1B_1C_1$ имеем, что $\angle A_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle B_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, $\angle C_1 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.



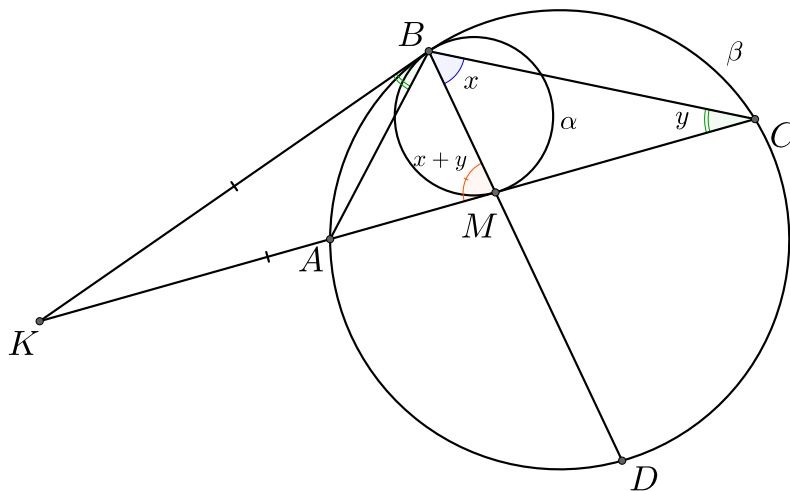
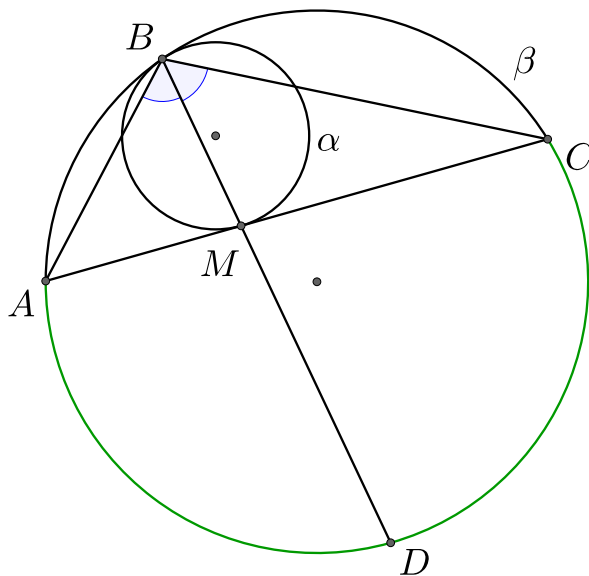
Доказательство: Касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны. Значит $AC_1 = B_1$, $BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1$, то есть треугольники AB_1C_1 , BA_1C_1 и CA_1B_1 являются равнобедренными. Имеем: $\angle AC_1B_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle BA_1C_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ и $\angle CA_1B_1 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Тогда по теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle A_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle B_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, $\angle C_1 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. $\square$

22. (**Лемма Архимеда**) Окружности α и β касаются в точке B , окружность α касается хорды AC окружности β в точке M , BM пересекает окружность β в точке D . Тогда прямая BM является биссектрисой угла ABC , а точка D делит дугу CA пополам.

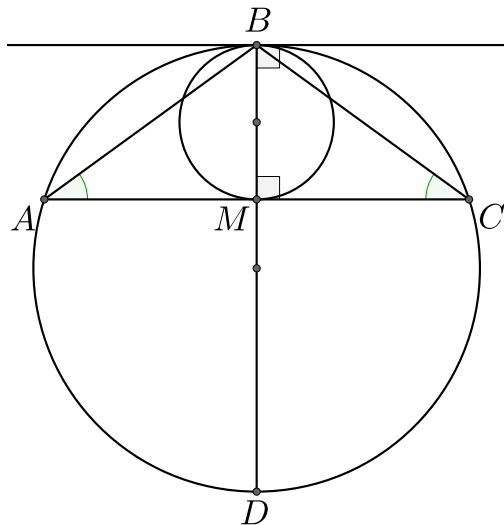
Доказательство: Проведём общую касательную к окружностям в точке B . Рассмотрим два случая.

Случай 1: Касательная не параллельна отрезку AC . Пусть K – точка пересечения касательной с прямой AC . Без ограничения общности считаем, что $AK < CK$. Пусть $\angle DBC = x$, $\angle BCA = y$. Угол AMB

является внешним углом треугольника BCM , значит $\angle AMB = x + y$. По теореме об угле между касательной и хордой получаем, что $\angle KBA = y$. KM и KB – касательные, проведённые из одной точки к окружности α , значит $KM = KB$, то есть треугольник BKM – равнобедренный, значит $\angle KBM = \angle KMB = x + y$, значит $\angle ABD = x$, то есть ABD – биссектриса. $\square$



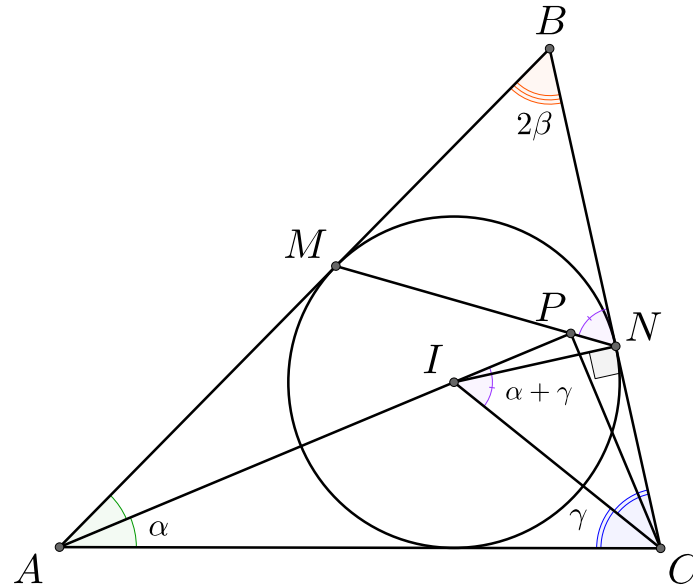
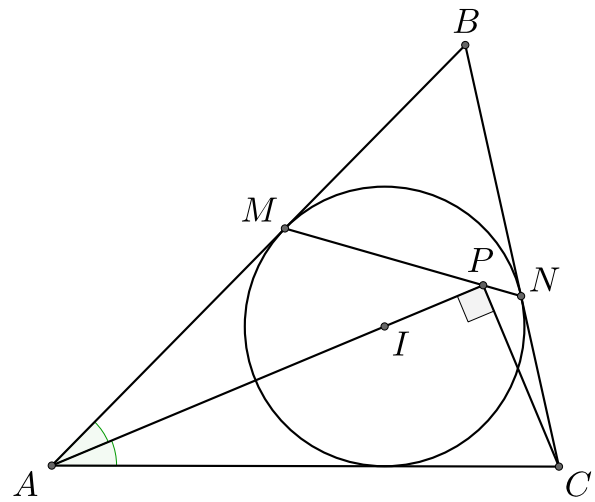
Случай 2: Касательная параллельна отрезку AC . В этом случае дуги $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$ равны, то есть треугольник ABC – равнобедренный. Отрезок BM перпендикулярен касательной, значит BM перпендикулярен AC , значит BM – высота треугольника. Так как ABC – равнобедренный, то BM – биссектриса угла ABC . $\square$



23. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках M и N соответственно, а биссектриса угла BAC пересекает отрезок MN в точке P . Тогда $\angle APC = 90^\circ$.

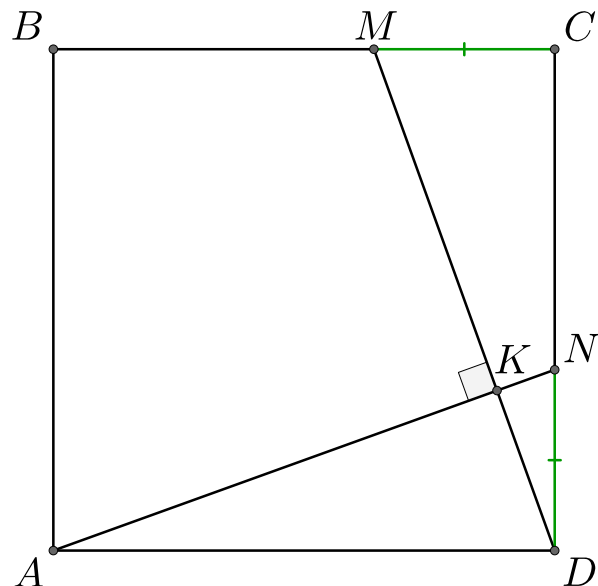
Доказательство: IN – радиус вписанной окружности, значит $\angle INC = 90^\circ$. Угол BIC является внешним углом треугольника AIC , значит $\angle PIC = \alpha + \gamma$. Мы знаем, что $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, поэтому $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ или $\alpha + \gamma = 90^\circ - \beta$. BM и BN – касательные к окружности, поэтому $BM = BN$, значит

MBN – равнобедренный треугольник, поэтому $\angle BMN = \angle BNM = 90^\circ - \beta = \alpha + \gamma$, поэтому вокруг четырёхугольника $PNCI$ можно описать окружность. Углы INC и IPC опираются на одну и ту же дугу, значит $\angle IPC = \angle INC = 90^\circ$. $\square$



24. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отметили точки M и N соответственно, так что $MC = ND$, тогда $AN \perp DM$.

Доказательство: Прямоугольные треугольники ADN и CMD равны, так как $AD = CD$ и $ND = MC$, значит $\angle NAD = \angle MDC$ и $\angle AND = \angle DMC$. Имеем: $\angle MDC + \angle AND = \angle MDC + \angle DMC = 90^\circ$, значит $\angle DKN = 90^\circ$. $\square$



25. $ABCD$ – четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями тогда и только тогда когда

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

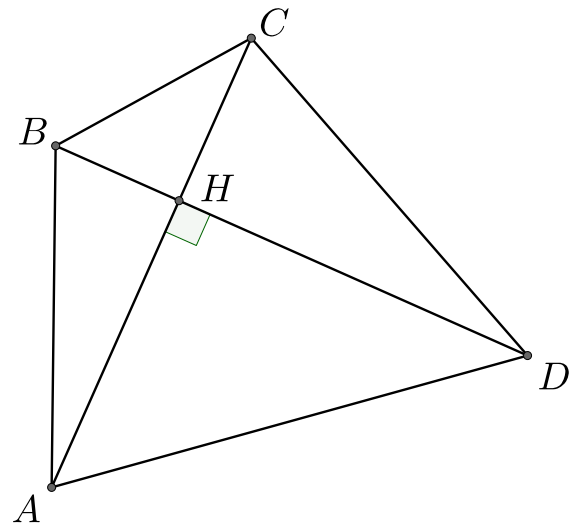
Доказательство: По теореме Пифагора получаем:

$$AH^2 + HB^2 = AB^2; \quad HD^2 + HC^2 = CD^2;$$

$$AH^2 + HD^2 = AD^2; \quad HC^2 + HB^2 = BC^2$$

Вычтем из первых двух равенств два других:

$$AH^2 + HB^2 + HD^2 + HC^2 - (AH^2 + HD^2 + HC^2 + HB^2) = AB^2 + CD^2 - (AD^2 + BC^2) \implies AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$



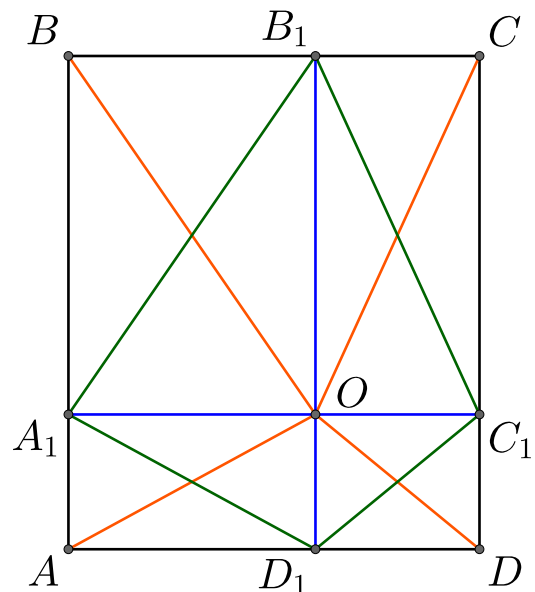
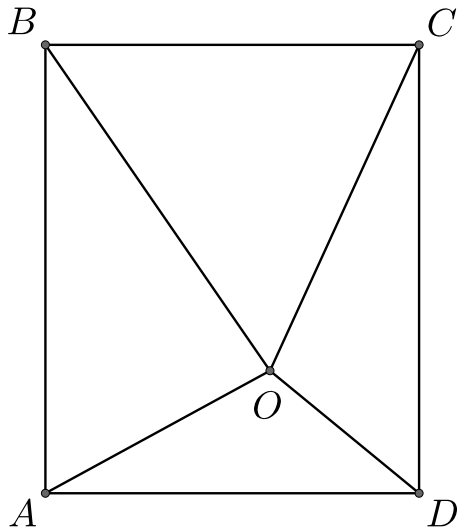
26. $ABCD$ – прямоугольник, точка O лежит внутри данного прямоугольника, тогда

$$AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2.$$

Доказательство: Проведём через точку O перпендикулярные прямые. Четырёхугольник $A'B'C'D'$ имеет перпендикулярные диагонали, поэтому $A_1B_1^2 + C_1D_1^2 = A_1D_1^2 + B_1C_1^2$. $A_1B_1 = BO$, так как это диагонали в прямоугольнике A_1BB_1O . По тем же причинам $D_1C_1 = OD$, $B_1C_1 = OC$, $A_1D_1 = AO$. Отсюда и получаем

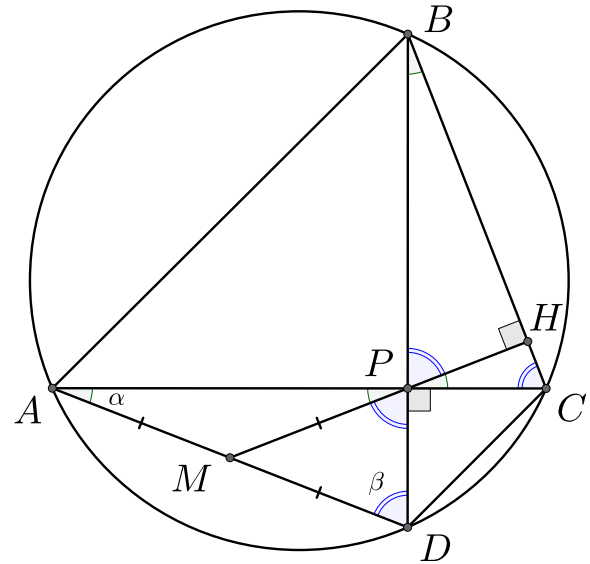
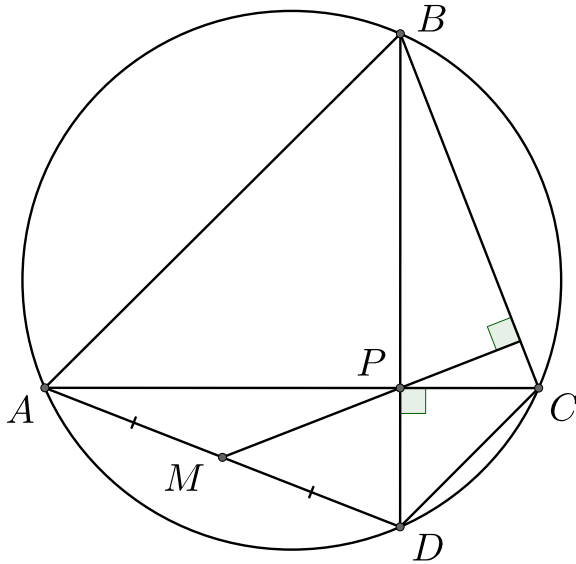
$$AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2. \quad \square$$

$$AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$$



27. $ABCD$ – вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями, тогда прямая, проходящая через середину одной из сторон четырёхугольника, перпендикулярна противоположной ей стороне.

Доказательство: APD – прямоугольный треугольник, поэтому $AM = MD = MP$ (см. 5 из раздела 3), значит $\angle DPM = \alpha$. Вертикальные углы равны, поэтому $\angle BPH = \alpha$. Углы $\angle DAC$ и $\angle DBC$ равны, так как они опираются на одну и ту же дугу, то есть $\angle DBC = \alpha$. $\angle DBC + \angle BPH = \alpha + \beta = 90^\circ$, значит $\angle BHP = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$. $\square$



28. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром O , тогда расстояние от точки O до стороны AB вдвое меньше стороны CD .

$$CD = 2 \cdot OH$$

Доказательство: Пусть $\angle DAP = \alpha$ и $\angle ADP = \beta$, причём $\alpha + \beta = 90^\circ$, так как треугольник APD – прямоугольный. Значит $\sin \beta = \cos \alpha$. Треугольник AOB является равнобедренным, поэтому высота OH , также является медианой, значит $AB = 2BH$. По теореме синусов для треугольника ABD получаем, что

$$\frac{AB}{\sin \beta} = 2R \iff BH = R \sin \beta = R \cos \alpha.$$

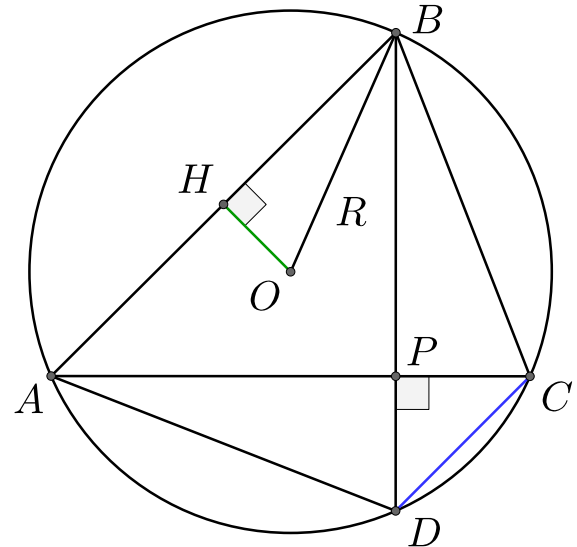
По теореме синусов для треугольника DAC получаем, что

$$\frac{CD}{\sin \alpha} = 2R \iff CD = 2R \sin \alpha.$$

Треугольник OBH является прямоугольным, значит по теореме Пифагора имеем

$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \iff OH = R^2 - R^2 \cos^2 \alpha = R^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = R^2 \cdot \sin^2 \alpha.$$

Значит $OB = R \sin \alpha$ и $CD = 2R \sin \alpha$, значит $CD = 2OB$. $\square$



29. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром O , тогда

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2.$$

Доказательство: Треугольники ABP и APD являются прямоугольными. Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$, $\angle ABD = \alpha_1$ и $\angle BAC = \beta_1$. Причём $\alpha + \beta = 90^\circ$ и $\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$, поэтому $\sin \beta = \cos \alpha$ и $\sin \beta_1 = \cos \alpha$.

По теореме синусов для треугольника ABD получаем, что

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AD}{\sin \alpha_1} = 2R.$$

Значит

$$AB = 2R \sin \beta = 2R \cos \alpha \text{ и } AD = 2R \sin \alpha_1.$$

Далее, по теореме синусов для треугольника ACD получаем, что

$$\frac{CD}{\sin \alpha} = 2R \iff CD = 2R \sin \alpha.$$

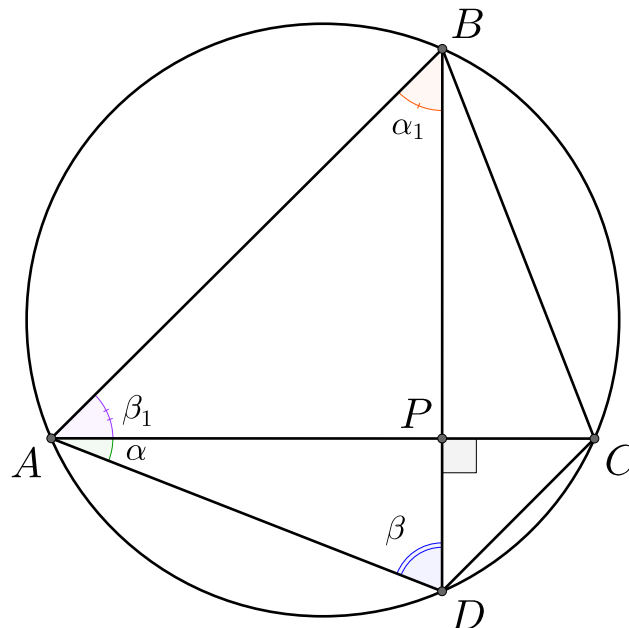
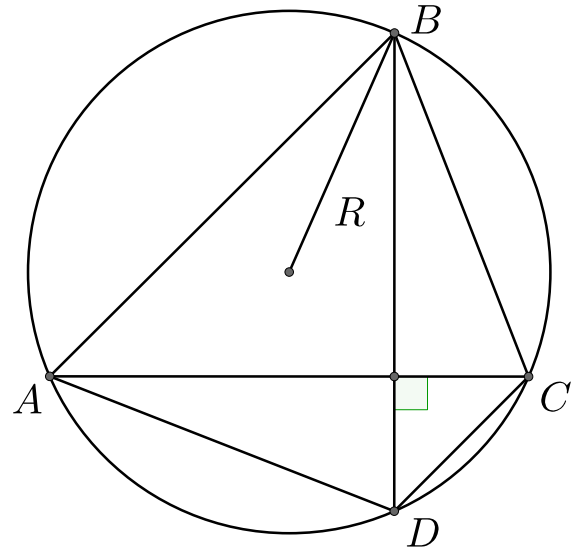
Аналогично для треугольника ABC имеем:

$$\frac{BC}{\sin \beta_1} = \frac{AC}{\cos \alpha_1} = 2R \iff BC = 2R \cos \alpha_1.$$

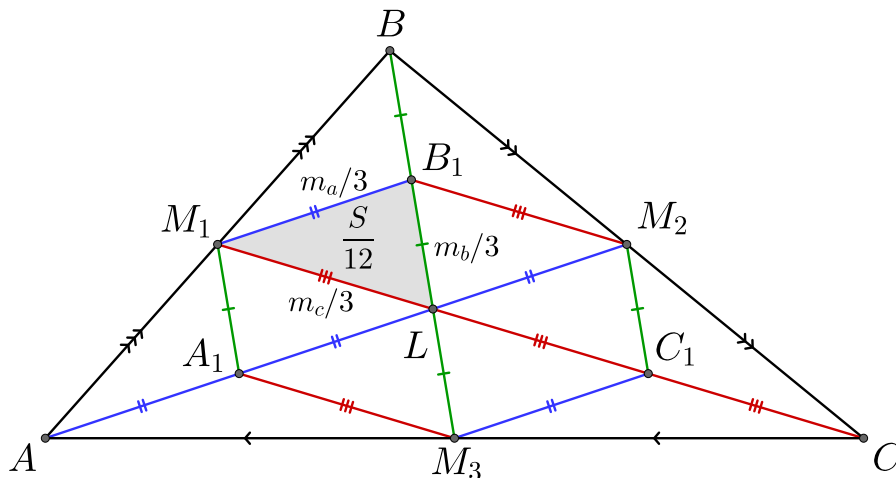
Получаем

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 \cos^2 \alpha_1 + 4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha_1 = 4R^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 4R^2(\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) = 8R^2. \quad \square$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2$$



30. Пусть L – точка пересечения медиан треугольника ABC (M_1, M_2, M_3 – середины сторон треугольника), A_1, B_1, C_1 – середины отрезков AL, BL, CL . Тогда треугольник ABC делится на 12 равновеликих треугольников следующим образом:

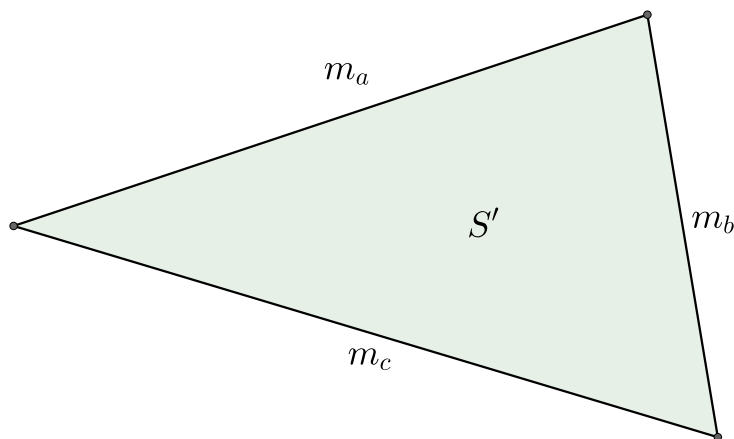


Доказательство: Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины, то получаем, что $AA_1 = A_1L = LM_3 = \frac{m_a}{3}$, $BB_1 = B_1L = LM_3 = \frac{m_b}{3}$ и $CC_1 = C_1L = LM_1 = \frac{m_c}{3}$. Рассмотрим треугольник ALC , мы знаем, что A_1, M_3 и C_1 – середины сторон AL, AC и LC соответственно. Отсюда получаем, что A_1M_3 и C_1M_3 – средние линии данного треугольника, значит $A_1M_3 = \frac{LC}{2} = \frac{m_c}{3}$ и $C_1M_3 = \frac{AL}{2} = \frac{m_a}{3}$. Аналогично, рассматривая треугольники BLC и ALB получаем, что $B_1M_2 = \frac{m_c}{3}$, $C_1M_2 = \frac{m_b}{3}$, $A_1M_1 = \frac{m_b}{3}$ и $B_1M_1 = \frac{m_a}{3}$. Таким образом получаем, что треугольники $M_1B_1L, M_1A_1L, M_2B_1L, M_2C_1L, M_3A_1L$ и M_3C_1L равны, а значит равны их площади. Пусть площадь этих треугольников равна $\frac{S}{12}$.

Далее, рассмотрим треугольник M_1LB . M_1B_1 – медиана данного треугольника, значит $S_{M_1B_1L} = S_{M_1B_1B} = \frac{S}{12}$. Аналогично, рассматривая треугольники $M_1AL, M_2BL, M_2CL, M_3AL$ и M_3CL , получим, что $S_{M_1A_1A} = S_{M_2B_1B} = S_{M_2C_1C} = S_{M_3A_1A} = S_{M_3C_1C} = \frac{S}{12}$. $\square$

31. Построим треугольник со сторонами, равными длинам медиан треугольника ABC (m_a, m_b, m_c – длины этих медиан, $m = (m_a + m_b + m_c)/2$). По формуле Герона данный треугольник имеет площадь:

$$S' = \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$$



Отсюда следует, что площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{4}{3} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}.$$

Доказательство: Рассмотрим треугольник M_1LB_1 . Его стороны равны $\frac{m_a}{3}$, $\frac{m_b}{3}$ и $\frac{m_c}{3}$, значит он подобен треугольнику, длины сторон которого равны длинам медиан ABC , с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$. Значит $S_{M_1LB_1} = \frac{S'}{9}$, при этом $S_{M_1LB_1} = \frac{S}{12}$, значит $\frac{S}{12} = \frac{S'}{9}$, то есть $S = \frac{4S'}{3} = \frac{4}{3} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$. $\square$

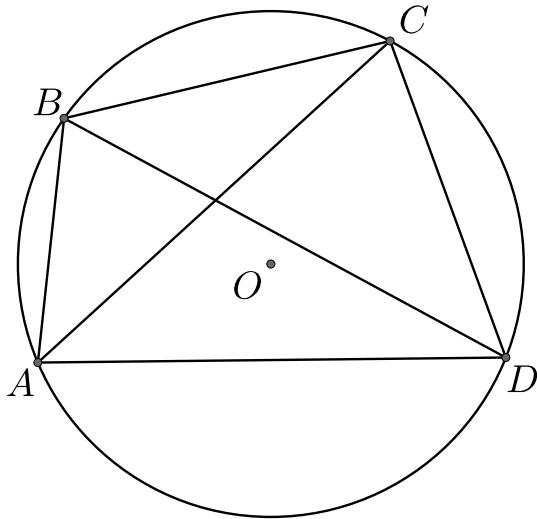
32. (Теорема Птолемея). Выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

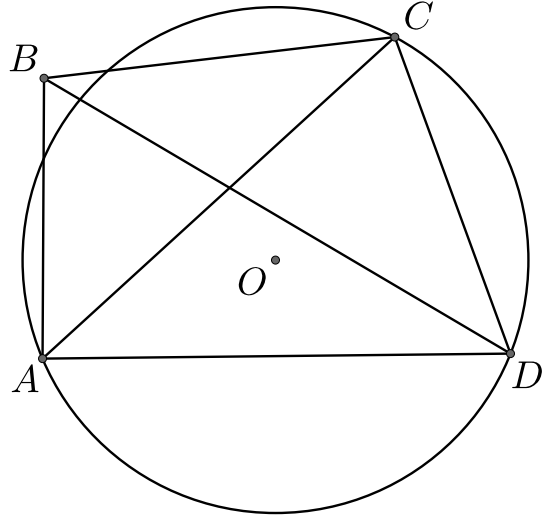
(Неравенство Птолемея). Если же четырёхугольник не является вписанным, то выполнено неравенство

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD.$$

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD$$



Доказательство: На лучах AB , AC и AD отметим точки B_1 , C_1 и D_1 соответственно, такие, что $AB_1 = \frac{1}{AB}$, $AC_1 = \frac{1}{AC}$ и $AD_1 = \frac{1}{AD}$. Тогда

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{AB \cdot AC} = \frac{AC'}{AB},$$

значит треугольники AB_1C_1 и ACB подобны. Аналогично получаем, что подобны треугольники AD_1C_1 и ACD . Отсюда получаем, что $\angle B_1C_1A = \angle ABC$ и $\angle AC_1D_1 = \angle CDA$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{B_1C_1}{BC} &= \frac{AB_1}{AC} \iff B_1C_1 = \frac{BC}{AB \cdot AC} \\ \frac{C_1D_1}{CD} &= \frac{AD_1}{AC} \iff C_1D_1 = \frac{CD}{AD \cdot AC}. \end{aligned}$$

Далее, $\frac{AB_1}{AD} = \frac{1}{AB \cdot AD} = \frac{AD_1}{AB}$, значит треугольники AB_1D_1 и ABD подобны,

следовательно,

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{AB_1}{AD}, \Leftrightarrow B_1D_1 = \frac{BD}{AD \cdot AB}.$$

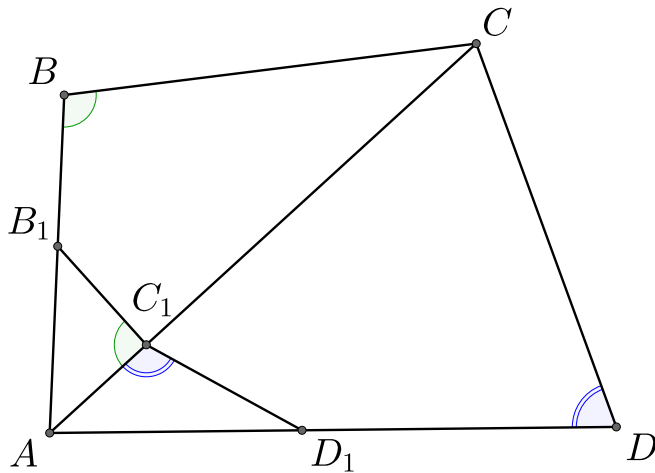
По неравенству треугольника получаем, что $B_1C_1 + C_1D_1 \geq B_1D_1$, значит

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AD \cdot AC} \geq \frac{BD}{AD \cdot AB},$$

следовательно,

$$AD \cdot BC + CD \cdot AB \geq AC \cdot BD.$$

Равенство достигается в том случае, когда точки B_1 , C_1 и D_1 лежат на одной прямой. Значит $\angle B_1C_1A + \angle AC_1D_1 = 180^\circ$. Тогда $\angle ABC + \angle ADC = \angle B_1C_1A + \angle AC_1D_1 = 180^\circ$, значит вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. $\square$

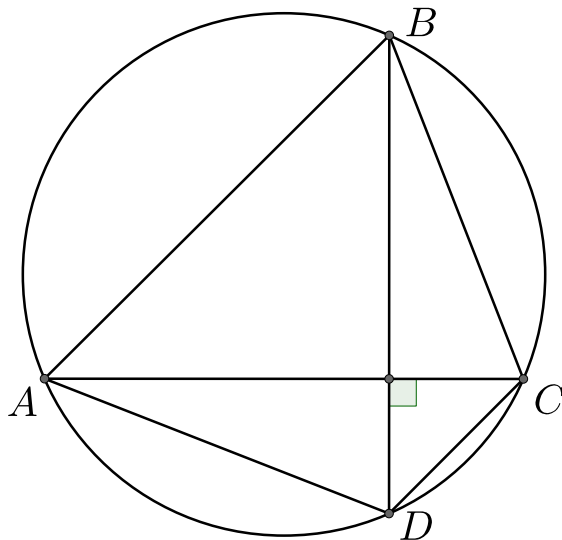


33. (Следствие из теоремы Птолемея). Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром O , тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC).$$

Причём для любого другого четырёхугольника $ABCD$ с теми же сторонами площадь меньше, чем $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$$



Доказательство: Площадь четырёхугольника $ABCD$ можно найти по формуле $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$, где α – угол между диагоналями четырёхугольника. Если диагонали $ABCD$ перпендикулярны, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. Если вокруг $ABCD$ можно описать окружность, то по теореме Птолемея получаем, что

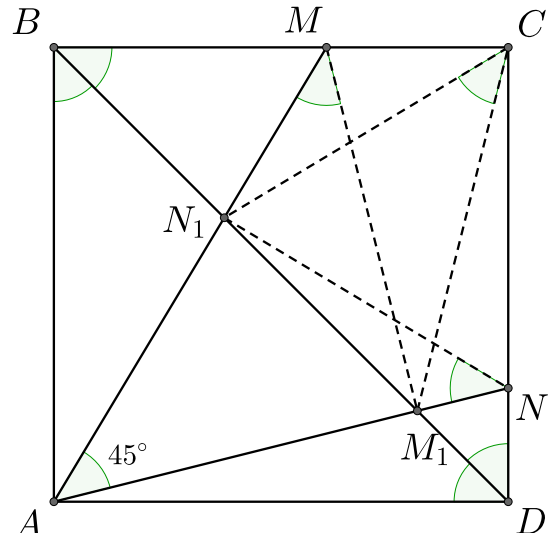
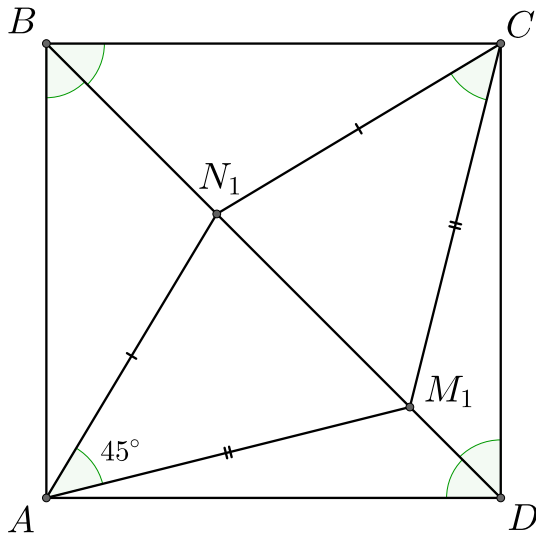
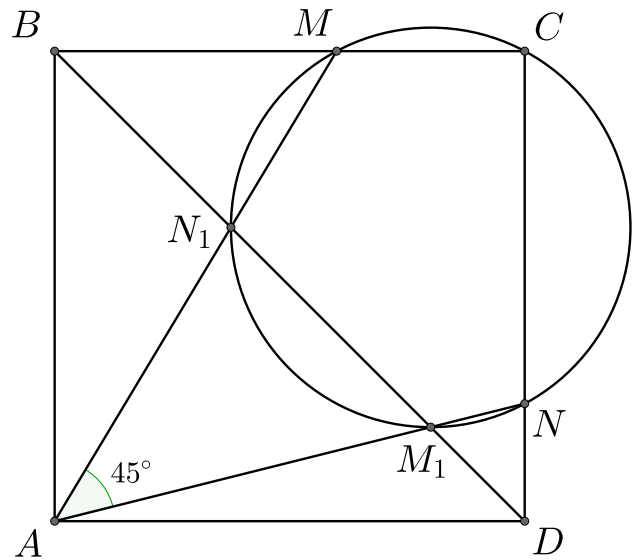
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC).$$

Если диагонали четырёхугольника не перпендикулярны, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \alpha < \frac{1}{2}AC \cdot BD$. По неравенству Птолемея имеем $\frac{1}{2}AC \cdot BD \leq \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$. Если диагонали четырёхугольника перпендикулярны, но вокруг него нельзя описать окружность, то по неравенству Птолемея получаем, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD < \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC). \quad \square$$

34. $ABCD$ – квадрат, точка M – лежит на стороне BC , N – лежит на стороне CD , $\angle MAN = 45^\circ$, диагональ BD пересекает отрезки AM и AN в точках N_1 и M_1 соответственно, тогда через точки M, M_1, N, N_1, C можно провести окружность.

Доказательство: Для начала покажем, что $\angle N_1CM_1 = 45^\circ$. Действительно, BD – диагональ квадрата, поэтому $\angle ADM_1 = \angle CDM_1$. $AD = CD$ и сторона M_1D является общей для треугольников AM_1D и CM_1D , значит они равны по двум сторонами и углу между ними, поэтому $CM_1 = AM_1$. Аналогично доказывается, что $AN_1 = CN_1$. Получаем, что в треугольниках CN_1M_1 и AN_1M_1 равны три стороны (N_1M_1 – общая), значит эти треугольники равны и $\angle N_1CM_1 = \angle N_1AM_1 = 45^\circ$.



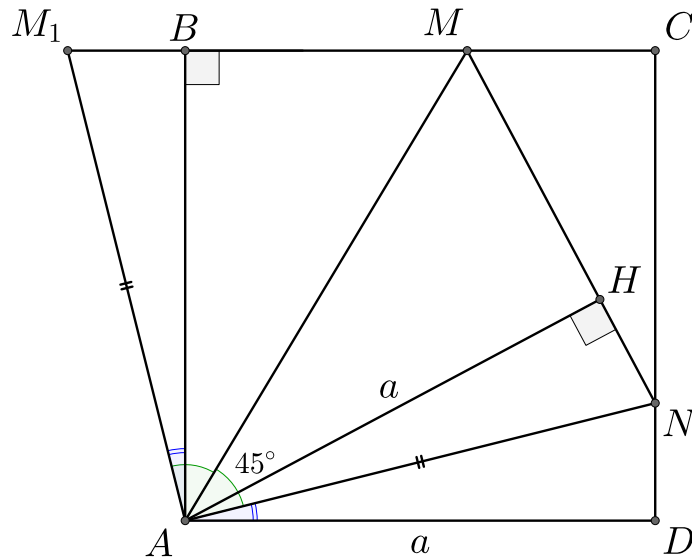
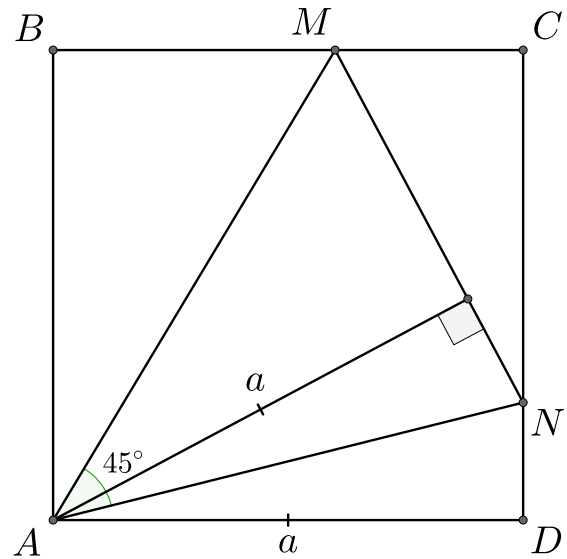
Далее, имеем, что $\angle N_1DN = \angle N_1AM_1 = 45^\circ$, значит вокруг четырёхугольника $ADNN_1$ можно описать окружность. Получаем, что $\angle N_1NA = \angle N_1DA = 45^\circ$.

Аналогично, получаем, что вокруг четырёхугольника $ABMM_1$ можно описать окружность и поэтому $\angle M_1BM = \angle N_1MM_1 = 45^\circ$.

Так как углы N_1MM_1 , N_1CM_1 и N_1NM_1 опираются на отрезок M_1N_1 и равны 45° , то по вокруг пятиугольника N_1MCNM_1 можно описать окружность. $\square$

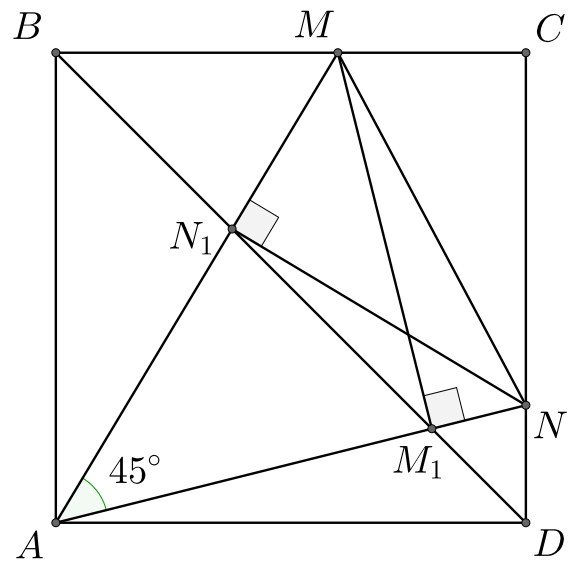
35. Расстояние от точки A до прямой MN равно стороне квадрата.

Доказательство: Построим треугольник ABM_1 , где точка M_1 лежит на продолжении стороны CB за точку M , причём $M_1B = ND$. Также $AD = AB$, значит прямоугольные треугольники ADN и ABM_1 равны, значит $AN = AM_1$. Также $\angle NAD = \angle M_1AB$, $\angle BAM + \angle MAN + \angle NAD = \angle BAM + 45^\circ + \angle M_1AB = 90^\circ$, значит $\angle BAM + \angle M_1AB = \angle M_1AM = 45^\circ$. Получаем, что треугольники M_1AM и NAM равны по двум сторонам и углу между ними. AB – высота треугольника M_1AM , значит $AB = AH$. $\square$



36. Прямые MM' и NN' являются высотами треугольника AMN .

Доказательство: Вокруг пятиугольника N_1MCNM_1 можно описать окружность. $\angle MCN = 90^\circ$, значит MN – диаметр окружности. Значит углы MN_1N и NM_1M опираются на диаметр окружности, значит $\angle MN_1N = \angle NM_1M = 90^\circ$. $\square$

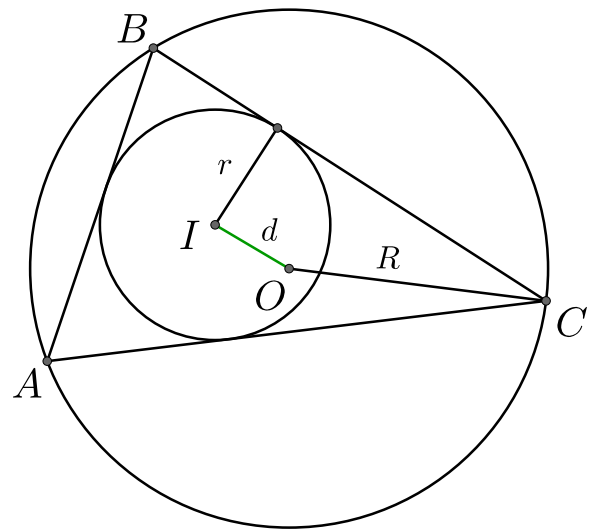


37. Пусть r – радиус вписанной в треугольник окружности, R – радиус описанной вокруг треугольника окружности, d – расстояние между центрами этих окружностей, тогда выполняется равенство:

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Доказательство: Проведём диаметр MN описанной окружности, проведённой через центр вписанной окружности. Тогда $MI = MO - IO = R - d$, $IN = ON + IO = R + d$. Пусть биссектриса угла ABC пересекает окружность в точке L , причём BL проходит через точку I . Пусть IH – радиус

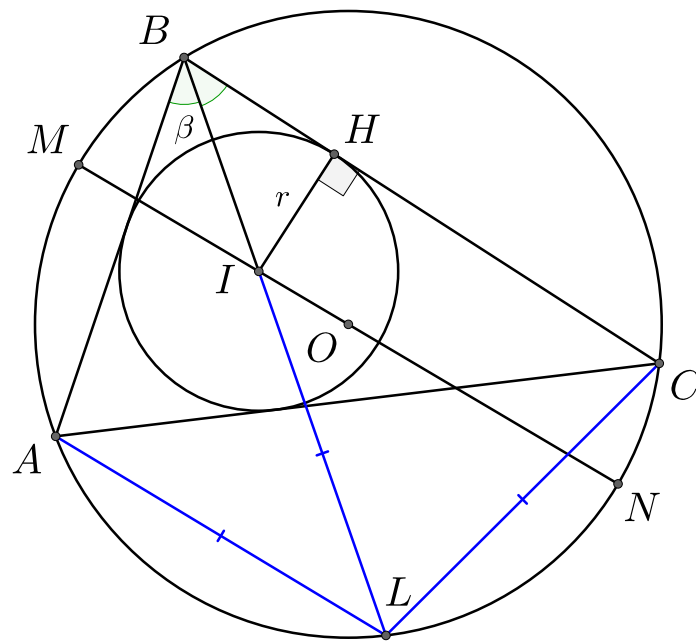
$$d^2 = R^2 - 2Rr$$



вписанной окружности, проведённый к стороне BC . Треугольник IHB – прямоугольный, поэтому $BI = \frac{r}{\sin \beta}$. Далее, по лемме о трезубце, получаем, что $AL = OL = LC$. По теореме

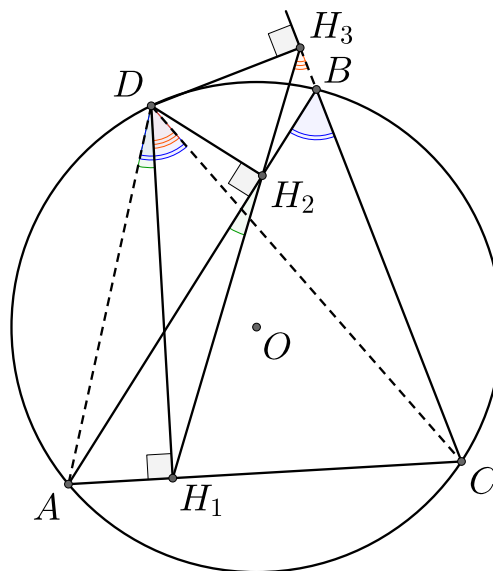
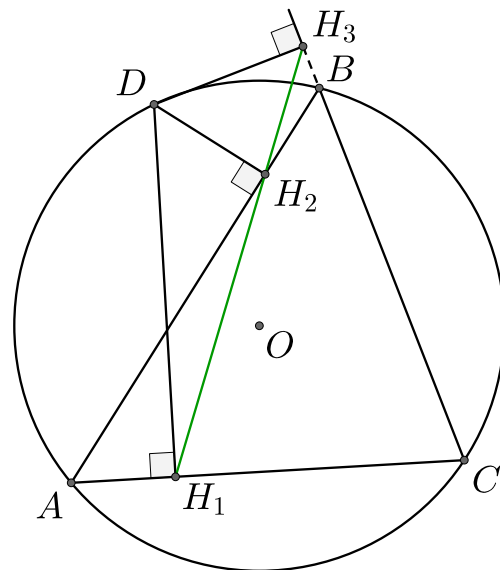
синусов для треугольника BLC получаем, что $\frac{LC}{\sin \beta} = 2R$, значит $LC = IL = 2R \sin \beta$.

Хорды BL и MN описанной окружности пересекаются в точке I , поэтому $MI \cdot IN = BI \cdot IL$, следовательно $(R - d) \cdot (R + d) = R^2 - d^2 = \frac{r}{\sin \beta} \cdot 2R \sin \beta = 2Rr$, значит $d^2 = R^2 - 2Rr$. $\square$



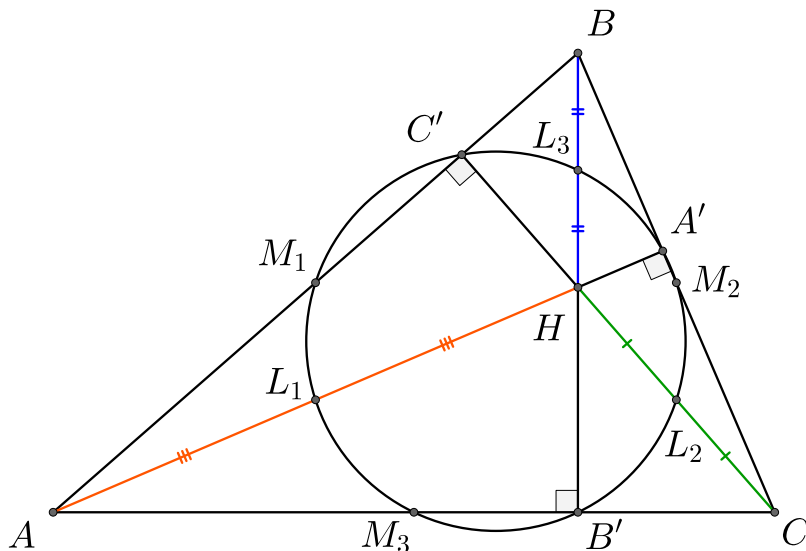
38. Основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности треугольника ABC на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой. Эта прямая называется **прямой Симсона**.

Доказательство: Докажем, что углы AH_2H_1 и H_3H_2B – вертикальные. $\angle AH_1D = \angle AH_2D = 90^\circ$, поэтому вокруг четырёхугольника AH_1H_2D можно описать окружность, значит $\angle ADH_1 = \angle AH_2H_1$. Аналогично, мы можем описать окружность вокруг четырёхугольника H_1DH_3C , значит $\angle H_1DC = \angle H_1H_3C$. Четырёхугольник



$ADBC$ можно описать окружность, значит $\angle ADC = \angle ABC$. Угол ABC является внешним для треугольника H_2H_3B , значит $\angle H_3H_2B = \angle ABC - \angle H_1H_3C = \angle ADC - \angle H_3DC = \angle ADH_1 = \angle AH_2H_1$, то есть углы AH_2H_1 и H_3H_2B , значит точки H_1 , H_2 и H_3 лежат на одной прямой. $\square$

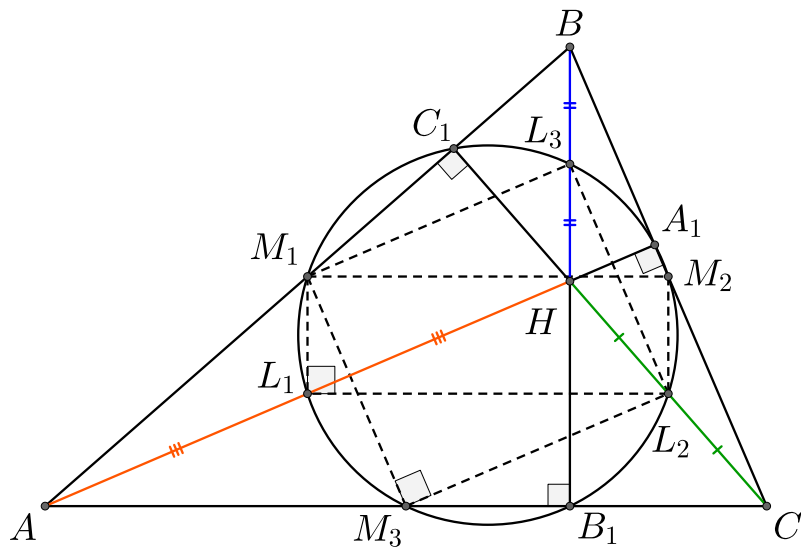
39. (Окружность девяти точек). Пусть H – ортоцентр треугольника ABC ; A' , B' , C' – точки пересечения высот со сторонами треугольника; M_1 , M_2 , M_3 – середины сторон треугольника; L_1 , L_2 , L_3 – середины отрезков AH , CH , BH соответственно. Тогда через точки A' , B' , C' , M_1 , M_2 , M_3 , L_1 , L_2 , L_3 можно провести окружность.



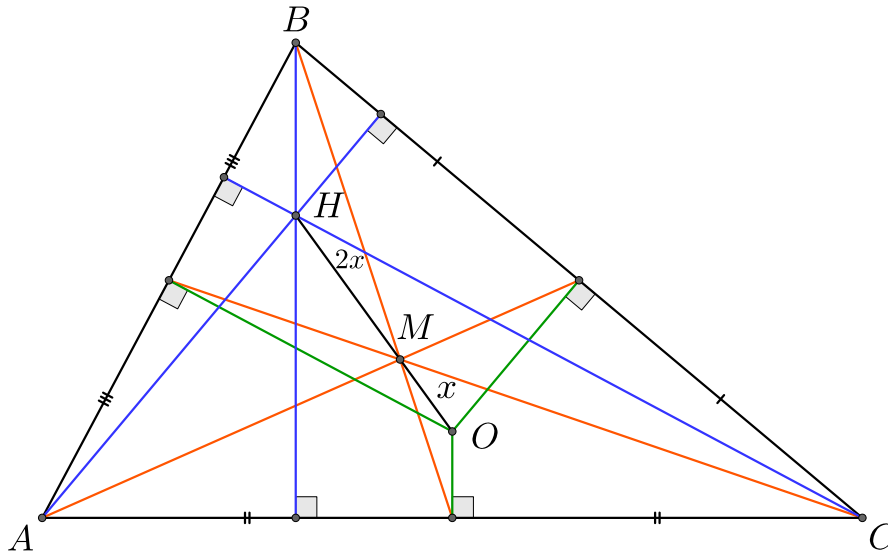
Доказательство: Отрезок M_1M_2 является средней линией треугольника ABC , значит он параллелен AC и равен его половине. Отрезок L_1L_2 является средней линией треугольника AHC , значит он параллелен AC и равен его половине. Таким образом, отрезки M_1M_2 и L_1L_2 параллельны и равны. Отрезки L_1M_1 и L_2M_2 являются средними линиями треугольников ABH и CBH , значит эти отрезки параллельны отрезку BH и равны его половине. Таким образом, $M_1M_2L_2L_1$ – параллелограмм, причём отрезки AC и BB_1 перпендикулярны, значит $M_1M_2L_2L_1$ – прямоугольник, поэтому вокруг него можно описать окружность α .

Отрезок M_1M_3 является средней линией треугольника ABC , значит он параллелен BC и равен его половине. Отрезок L_2L_3 является средней линией треугольника BHC , значит он параллелен BC и равен его половине. Таким образом, отрезки M_1M_3 и L_2L_3 параллельны и равны. Отрезки M_3L_2 и M_1L_3 являются средними линиями треугольников AHC и AHB , значит они параллельны отрезку AH и равны его половине. Таким образом, $M_1M_3L_2L_3$ – параллелограмм, причём отрезки BC и AA_1 перпендикулярны, значит $M_1M_3L_2L_3$ – прямоугольник, поэтому вокруг него можно описать окружность. Так как вершины M_1 и L_2 являются общими для прямоугольников $M_1M_2L_2L_1$ и $M_1M_3L_2L_3$, значит точки M_1 , M_2 , M_3 , L_1 , L_2 и L_3 лежат на одной окружности.

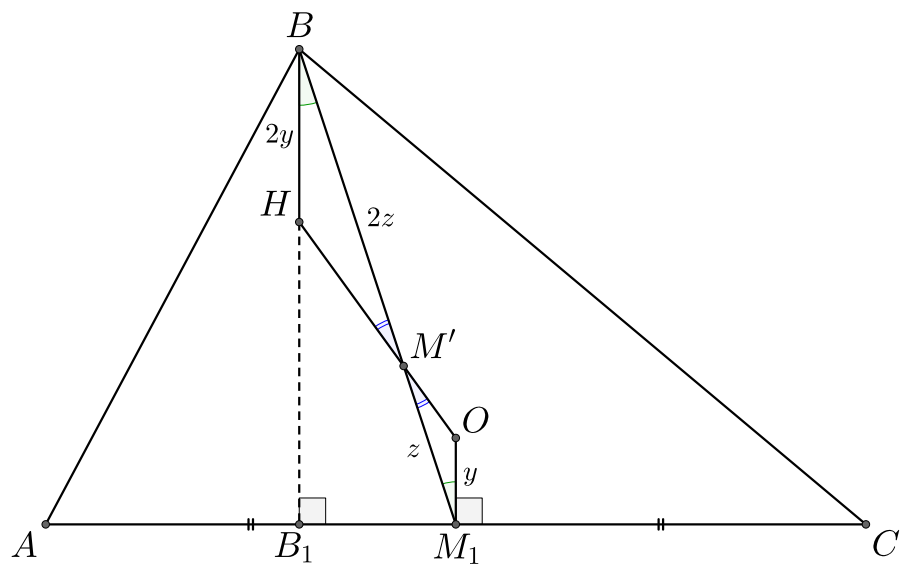
Хорды M_1L_2 , M_2L_1 и M_3L_3 опираются на прямые углы, значит они являются диаметрами. Мы знаем, что $\angle M_3B_1L_3 = \angle L_1A_1M_2 = \angle L_2C_1M_1 = 90^\circ$, значит точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на окружности α . $\square$



40. (**Прямая Эйлера**). Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC , M – центроид треугольника, H – ортоцентр треугольника, тогда точки O , M , H лежат на одной прямой и $OM : MH = 1 : 2$.



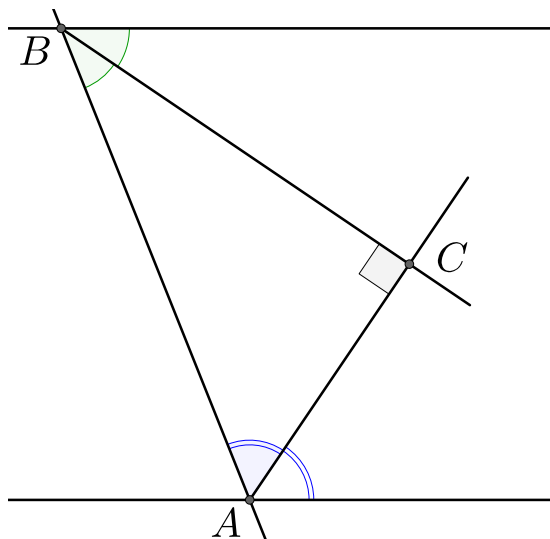
Доказательство: Пусть M' – точка пересечения отрезка OH и BM_1 , M_1 – середина отрезка AC , BB_1 – высота треугольника. Рассмотрим треугольники HBM' и OM_1M' . Углы $HM'B$ и $M_1M'O$ являются вертикальными, поэтому равны. Отрезки BB_1 и OM_1 перпендикулярны отрезку AC , поэтому они параллельны, значит $\angle HBM' = \angle OM_1M'$, так как они являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых. Следовательно, треугольники HBM' и OM_1M' подобны по двум углам. Мы знаем, что $BH = 2OM_1$, значит $BM' = 2M'M_1$, точка пересечения медиан треугольника делит медиану в отношении $2 : 1$ считая от вершины, значит $M = M'$. Помимо этого из подобия треугольников HBM и OM_1M следует, что $HM = 2OM$. $\square$



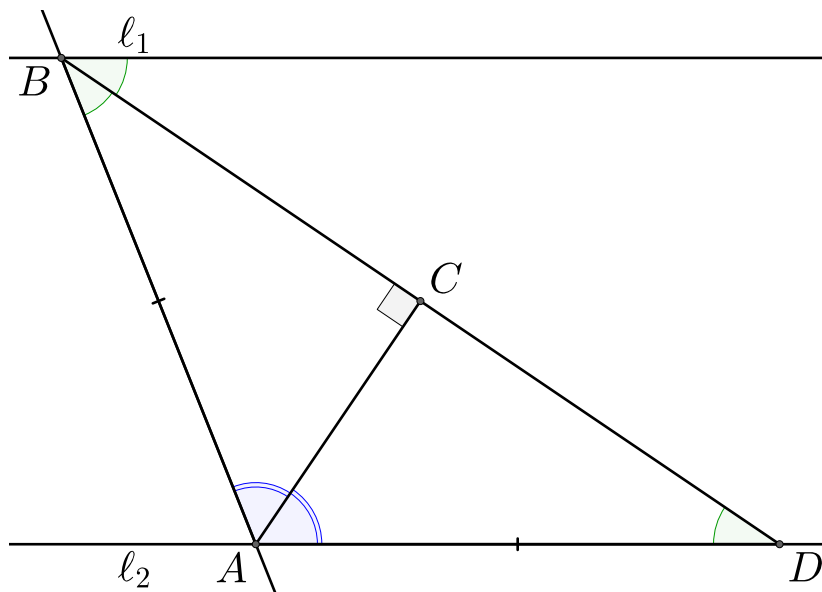
15 Доказательства

15.1 Углы

5. *Доказательство 1.* Углы $\angle A$ и $\angle B$ – внутренние односторонние, поэтому $\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180° , поэтому $\angle ACB = 180^\circ - (\angle ABC + \angle BAC) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. $\square$



Доказательство 2. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 две параллельные прямые, на которых лежат точки B и A соответственно. Точка D – пересечение биссектрисы угла B с прямой ℓ_2 . Угол между прямыми ℓ_2 и BD равен углу между ℓ_1 и BD (так как эти углы являются накрест лежащими), при этом BD – биссектриса угла B , поэтому угол между AB и BD равен углу между ℓ_1 и BD . Отсюда следует, что $\angle ADB = \angle DBA$, значит треугольник ABD – равнобедренный, а значит биссектриса угла A также является высотой, поэтому биссектрисы углов A и B перпендикулярны.



15.2 Треугольники общего вида

10. *Доказательство:* Сумма углов треугольника равна 180° , то есть $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \implies \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$. Так как сумма смежных углов равна 180° , то угол, смежный углу $\angle C$ нашего треугольника, равен $\angle A + \angle B$. $\square$

