МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

федеральное государственное бюджетное научное учреждение

Достижение метапредметных результатов в рамках изучения предметов математического блока

(ОСНОВНОЕ ОБЩЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ)

Методические рекомендации

Москва
2023

УДК 372.8
ББК 74.262.21
Д70

Авторский коллектив:

Л. О. Рослова, кандидат педагогических наук, зав. лабораторией математического общего образования ФГБНУ «Институт стратегии развития образования»

Е. Е. Алексеева, кандидат педагогических наук, доцент, старший. научный сотрудник лаборатории математического общего образования ФГБНУ «Институт стратегии развития образования»

Е. В. Буцко, научный сотрудник лаборатории математического общего образования ФГБНУ «Институт стратегии развития образования»

Под редакцией:

Л. О. Рословой

Рецензенты:

Н. Ф. Виноградова, доктор педагогических наук

О. А. Рыдзе, кандидат педагогических наук

Д70 **Достижение метапредметных результатов в рамках изучения предметов математического блока (основное общее образование)** : методические рекомендации / Л. О. Рослова, Е. Е. Алексеева, Е. В. Буцко ; под ред. Л. О. Рословой. – М. : ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2023.– 73 с. : ил.
ISBN 978-5-6050561-7-1

В методическом пособии отражены основные нововведения, связанные с требованиями ФГОС ООО к метапредметным результатам обучения учебному предмету «Математика». Содержание методического пособия соответствует федеральным рабочим программам основного общего образования по учебному предмету «Математика» на базовом и углубленном уровнях изучения математических учебных курсов.

В пособии рассматривается вклад математического образования в надпрофессиональные навыки профессий будущего и метапредметные результаты обучения, конкретизируются метапредметные результаты обучения учебному предмету «Математика» в соответствии с требованиями ФГОС ООО. В материалах даны методические рекомендации в направлении достижения метапредметных результатов в рамках изучения предметов математического блока, представлены примеры учебно-познавательных задач, способствующие формированию и развитию познавательных, регулятивных и коммуникативных УУД.

Методическое пособие разработано в рамках государственного задания ФГБНУ «Институт стратегии развития образования» на 2023 г. «Обновление содержания общего образования».

Материалы представляют интерес для широкого круга специалистов в области математического образования: учителей, преподавателей педагогических вузов, методистов системы повышения квалификации учителей, разработчиков материалов для оценки качества образования, студентов и аспирантов педагогических вузов.

УДК 372.8
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-6050561-7-1

© ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2023
Все права защищены

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА 1. МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА» НА УРОВНЕ ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ 7

1.1. Вклад математического образования в надпрофессиональные навыки профессий будущего и метапредметные результаты обучения 7

1.2. Планируемые метапредметные результаты обучения учебному предмету «Математика» при реализации ФГОС ООО 9

1.2.1. Требования основных нормативных документов к метапредметным результатам обучения математике 9

1.2.2. Конкретизация метапредметных результатов обучения учебному предмету «Математика» 11

1.3. Требования ФОП ООО к оцениванию метапредметных результатов обучения учебному предмету «Математика» 14

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДОСТИЖЕНИЮ МЕТАПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В РАМКАХ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДМЕТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО БЛОКА 18

2.1. Рекомендации по формированию познавательных универсальных учебных действий при обучении математике 18

2.1.1. Учебно-познавательные задачи как средство формирования и развития познавательных УУД 18

2.1.2. Формирование познавательных УУД при решении учебно-познавательных задач 22

2.2. Рекомендации по формированию регулятивных универсальных учебных действий при обучении математике 36

2.2.1. Регулятивные УУД как основа саморегуляции при изучении математики 36

2.2.2. Формирование регулятивных УУД при изучении предметов математического блока 39

2.3. Рекомендации по формированию коммуникативных универсальных учебных действий при обучении математике 53

2.3.1. Коммуникативные УУД как основа социальных навыков обучающихся 53

2.3.2. Учебное сотрудничество и совместная деятельность учителя и обучающихся при изучении математики 55

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 65

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ 66

ВВЕДЕНИЕ

Изменения школьного математического образования, происходящие на основе модернизации основного общего образования в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования (ФГОС ООО, Стандарт), ориентированы «на создание условий для максимально полного обеспечения образовательных потребностей и интересов обучающихся в рамках единого образовательного пространства на территории Российской Федерации» [1, с. 4].

Это нашло отражение в федеральных рабочих программах основного общего образования учебного предмета «Математика» (ФРП ООО), в которых сформулированы планируемые результаты обучения в направлении личностного развития обучающихся, в предметном и метапредметном освоении учебных курсов на базовом и углублённом уровнях [7, 8]. В рамках метапредметных результатов обучения ставится задача формирования познавательных, регулятивных и коммуникативных универсальных учебных действий (УУД) и междисциплинарных понятий. Решение этой задачи влияет на цели и содержание процесса обучения математике, которая «лежит в основе всех современных технологий и научных исследований, является необходимым компонентом экономики, построенной на знании», что отмечено в Концепции развития математического образования в Российской Федерации (Концепция) [12, с. 6]. Согласно Концепции, «изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека, в том числе к логическому мышлению, влияя на преподавание других дисциплин» [12, с.1]. В связи с этим одной из основных целей изучения учебного предмета «Математика» становится «развитие интеллектуальных и творческих способностей обучающихся, познавательной активности, исследовательских умений, критичности мышления; формирование функциональной математической грамотности» [7; 8].

Поэтому организация процесса изучения математики должна быть ориентирована не только на освоение теоретического материала и формирование умений его применения при решении математических задач, но и на обеспечение активной учебно-познавательной деятельности обучающихся и на создание

условий для формирования, развития и совершенствования метапредметных результатов обучения, в том числе и универсальных учебных действий.

Содержание методического пособия соответствует ФРП ООО по учебному предмету «Математика» на базовом и углубленном уровне изучения математических учебных курсов.

Пособие содержит две главы, отражающие теоретическую и практическую составляющие формирования метапредметных результатов в рамках изучения предметов математического блока.

В *первой главе* представлен вклад математического образования в надпрофессиональные навыки профессий будущего и метапредметные результаты обучения; отражены требования к метапредметным результатам, зафиксированные в нормативных документах; конкретизированы планируемые метапредметные результаты на основе ФРП ООО по математике базового и углублённого уровней обучения; рассмотрен вопрос об оценивании метапредметных результатов обучения математике и отмечено, что оценивание метапредметных результатов обучения математике базируется на выявлении выполненных действий и их качества в процессе анализа результата деятельности.

Во *второй главе* даны методические рекомендации по организации деятельности обучающихся в направлении формирования познавательных, регулятивных и коммуникативных УУД, приведены примеры реализации при изучении различных учебных курсов. Для иллюстрации организации деятельности обучающихся в направлении формирования метапредметных результатов использовались условия задач из пособий:

1) Дорофеев Г. В., Шарыгин И. Ф., Суворова С. Б. и др. Математика. 5 класс;

2) Дорофеев Г. В., Шарыгин И. Ф., Суворова С. Б. и др. Математика. 6 класс;

3) Мордкович А. Г. Задачник по алгебре. 7–9 классы;

4) Высоцкий И. Р., Ященко И. В. Теория вероятностей и статистика. 7–9 классы;

5) Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф, Кадомцев С. Б. и др. Геометрия. 7–9 классы.

Материалы второй главы содержат различные схемы, предписания, которые учитель может использовать в практической деятельности.

Сокращения, используемые в пособии

ООО – основное общее образование

ФГОС ООО, Стандарт – федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования

ФОП ООО – федеральная общеобразовательная программа основного общего образования

ФРП, рабочая программа – федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика» (базовый и углубленный уровни)

УУД – универсальные учебные действия

ПУУД – познавательные универсальные учебные действия

ПЛУУД – познавательные логические универсальные учебные действия

ПИУУД – познавательные исследовательские универсальные учебные действия

ПРИУУД – познавательные универсальные учебные действия: работа с информацией

РУУД – регулятивные универсальные учебные действия

КУУД – коммуникативные универсальные учебные действия

УИ – учебная информация

УПД – учебно-познавательная деятельность

ГЛАВА 1. МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА» НА УРОВНЕ ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

1.1. Вклад математического образования в надпрофессиональные навыки профессий будущего и метапредметные результаты обучения

Математика занимает особое место во всех сферах её проявления и использования, начиная от покорения космического пространства и морских глубин как составляющих научно-технического прогресса и завершая решением задач реальных жизненных ситуаций. Развитие нашей страны во всех направлениях зависит от уровня математики как науки и наиболее результативного использования математических методов в других областях науки; от качества математического образования на всех уровнях и функциональной математической грамотности всего населения. В наши дни увеличивается количество профессий, связанных с применением математики. Такая тенденция также наблюдается в содержании надпрофессиональных навыков, часто называемых навыками XXI века. Навыки позволят специалистам работать эффективнее, переходить из одной отрасли в другую и сохранять при этом востребованность. В настоящее время в различных направлениях развития страны требуются специалисты, разбирающиеся одновременно в нескольких отраслях, способные применять свои знания и транспортировать технологические решения в смежные отрасли. Еще более это будет востребовано через десять–пятнадцать лет.

В систему надпрофессиональных навыков профессий будущего, представленных в Атласе новых профессий [30], включены, например:

– умения работать в условиях высокой неопределённости и быстрой смены условий задач;

– умения программирования ИТ-решений, управления сложными автоматизированными комплексами и работа с искусственным интеллектом;

– умения мыслить системно, включая умения понимать, как устроены сложные системы, видеть причинно-следственные связи, переводить свои мысли и идеи на язык, понятный коллегам из других отраслей;

– навыки бережливого производства, включая оптимизацию производства;

– критическое мышление в работе с информацией;

– осознанность выполнения действий.

Представленные навыки связаны с математической грамотностью специалистов, а именно – с предметными знаниями и умениями их применения в различных сферах деятельности и метапредметной составляющей математики. Следовательно, эти навыки должны быть обеспечены качественными метапредметными и предметными результатами обучения математике. Таким образом, круг школьников, для которых математическое образование становится значимым для успешной личностной реализации в современном обществе, расширяется и будет продолжать расширяться.

В быстро изменяющемся современном обществе с большим объёмом информации и уровнем неопределённости всё более важным становится математический стиль мышления, проявляющийся в определённых умственных навыках. Характеристическими особенностями математического мышления являются: форма познания математики и её применения в других науках; использование математических методов для познания реальной действительности; изучение объектов, которые лишены вещественности, но объединены отношениями, которые можно описать математическим языком.

В процессе изучения математики в деятельность человека естественным образом включаются *методы познания действительности* и *приёмы работы*: анализ и синтез, индукция и дедукция, абстрагирование и аналогия, конкретизация и обобщение, классификация и систематизация. Изучение математических объектов, с одной стороны, лишенных вещественности, а с другой – являющихся моделями реальных объектов с отношениями, которые можно описать математическим языком, представление этого процесса с помощью логически верно построенных утверждений способствуют развитию *логического мышления*. Это обосновано тем, что деятельность направлена на выработку умения выявлять и формулировать проблему; выдвигать, подтверждать или опровергать гипотезу; обосновывать и доказывать суждения, в которых утверждается или отрицается отношение между объектами.

Большое значение для решения прикладных задач в разных сферах деятельности человека имеет видение проблемы и выявление стратегий их решения, отбор наиболее результативной тактики и решение на основе мыслительной схемы, что относится к алгоритмическому мышлению. В процессе решения математических и контекстных задач используются

действия и приёмы, которые соответствуют известному алгоритму, или составляется новый алгоритм. Таким образом, решение задач в процессе изучения математики способствует формированию *алгоритмического мышления* и развитию умений действовать по заданным алгоритмам. Через решение контекстных задач, связанных с описанием реальных жизненных ситуаций, раскрывается прикладное значение математики, что способствует формированию *прикладного мышления*.

Формирование навыков использования методов познания действительности, перечисленных и других видов мышления базируется на формировании и развитии метапредметных результатов обучения математике. Кроме этого, изучение математики является системообразующей базой общего образования, так как сформированность умений применения методов познания действительности и всех видов мышления оказывает влияние и на освоение обучающимися других школьных дисциплин.

Таким образом, математическое образование, в частности на уровне основного общего образования, вносит существенный вклад в формирование надпрофессиональных навыков профессий будущего и метапредметные результаты обучения всем школьным дисциплинам.

1.2. Планируемые метапредметные результаты обучения учебному предмету «Математика» при реализации ФГОС ООО

1.2.1. Требования основных нормативных документов к метапредметным результатам обучения математике

ФГОС ООО (2021) [5] выдвигает требования к результатам освоения обучающимися программ основного общего образования, в частности по учебному предмету «Математика». Структура требований характеризуется преемственностью в личностных, метапредметных и предметных результатах освоения программ.

Метапредметные результаты обучения математике включают освоение обучающимися межпредметных понятий и универсальных учебных действий; способность использования метапредметных результатов в учебной деятельности и социальной практике; готовность к осуществлению планомерной и целенаправленной учебной деятельности при взаимодействии

и сотрудничестве со сверстниками и педагогами; овладение навыками работы с информацией. Метапредметные результаты представлены системой познавательных, коммуникативных и регулятивных универсальных учебных действий и междисциплинарными понятиями.

Познавательные универсальные учебные действия (ПУУД) направлены на овладение базовыми логическими и исследовательскими действиями и действиями работы с информацией. Познавательные УУД ориентированы на использование знаково-символических средств, таких как замещение, моделирование, кодирование и декодирование информации, выполнение логических операций. Универсальные познавательные действия обеспечивают сформированность у обучающихся когнитивных навыков, т. е. способностей, связанных с самостоятельным приобретением знаний, решением различных задач, с обработкой информации об окружающем мире.

Коммуникативные универсальные учебные действия (КУУД) направлены на освоение действий общения и совместной деятельности, способствуют осуществлению коммуникации и сотрудничества. Коммуникативные универсальные учебные действия обеспечивают сформированность социальных навыков и эмоционального интеллекта.

Регулятивные универсальные учебные действия (РУУД) направлены на освоение действий самоорганизации и самоконтроля, эмоционального интеллекта, принятия себя и других. Эти действия способствуют успешному планированию деятельности и выполнению поставленных задач, оцениванию выполненной деятельности и её результатов. РУУД обеспечивают формирование внутренней позиции личности и жизненных навыков личности.

Сформированность метапредметных результатов освоения программы по математике является одной из основ формирования функциональной грамотности обучающихся, т. е. способности решать учебные задачи и проблемные жизненные ситуации.

Федеральная образовательная программа основного общего образования (ФОП ООО, 2023) базируется на принципах, т. е. положениях, характеризующих стратегию решения задач, стоящих перед основным общим образованием. Одним из основных является ***принцип учета ФГОС ООО*** [6, 7]. Поэтому в ФОП ООО сохраняется целостность системы метапредметных результатов обучения в направлении познавательных, коммуникативных и регулятивных универсальных учебных действий и междисциплинарных понятий.

К основным относятся также принципы, ориентированные на организацию процесса обучения. ***Принцип учёта ведущей деятельности*** обучающегося ориентирован на организацию образовательного процесса на основе всех компонентов учебной деятельности (мотив, цель, учебная задача, учебные операции, контроль и самоконтроль). ***Принцип индивидуализации обучения*** направлен на организацию процесса обучения детей с особыми способностями, потребностями и интересами. ***Системно-деятельностный подход*** предполагает организацию обучения на основе активной учебно-познавательной деятельности обучающегося.

Таким образом, в нормативных документах метапредметные результаты рассматриваются как сформировавшаяся в образовательном процессе система универсальных учебных действий, ориентированная на успешное освоение предметной составляющей предусмотренной в результатах и обеспечивающая применение знаний для решения задач и проблем в реальной жизни. Поэтому организация процесса освоения программ учебных курсов учебного предмета «Математика» на уровне основного общего образования должна быть ориентирована на выполнение требований ФГОС ООО, в частности к метапредметным результатам обучения, и строиться на основе принципов, отраженных в ФОП ООО.

1.2.2. Конкретизация метапредметных результатов обучения учебному предмету «Математика»

В соответствии требованиям ФГОС ООО к структуре и общему содержанию метапредметных результатов освоения программ основного общего образования в ФРП по учебному предмету «Математика» метапредметные результаты обучения конкретизируются с учетом специфики учебного предмета и уровня изучения математики [7, 8].

Метапредметные результаты обучения учебным курсам «Математика» в 5–6 классах, «Алгебра», «Геометрия» и «Вероятность и статистика» в 7–9 классах представлены как единая целостная система метапредметных результатов. Метапредметные результаты освоения программы учебного предмета «Математика» характеризуются овладением познавательными, коммуникативными и регулятивными универсальными учебными действиями (рис. 1).

Овладение *познавательными УУД* при обучении математике ориентировано на обеспечение формирования базовых когнитивных процессов обучающихся, т. е. освоение методов познания окружающего мира; применение логических и исследовательских операций, умений работать с информацией. Поэтому формирование познавательных УУД, во-первых, непосредственно связано с самостоятельным приобретением обучающимися теоретических знаний по математике, во-вторых, с формированием умений их применения для решения учебно-познавательных и математических задач, в-третьих, ориентировано на готовность применения результатов обучения математике как при решении повседневных привычных или знакомых задач, так и незнакомых, нестандартных задач реальной жизни.

Рис. 1. Структура планируемых результатов обучения математике

Овладение *регулятивными УУД* при обучении математике ориентировано на обеспечение формирования смысловых установок и жизненных навыков личности. Формирование регулятивных УУД направлено на освоение действий самоорганизации и самоконтроля, эмоционального интеллекта, принятия себя и других. Эти действия способствуют успешному планированию и выполнению деятельности, оцениванию выполненной деятельности и её результатов.

Овладение *коммуникативными УУД* при обучении математике ориентировано на обеспечение формирования социальных навыков обучающихся. Формирование коммуникативных УУД связано с организацией совместной учебной деятельности обучающихся (парная, групповая или бригадная работа), с сотрудничеством с одноклассниками и учителем.

Отметим, что одной из важных целей обучения математике является формирование функциональной математической грамотности. Сегодня под функциональной математической грамотностью понимается способность обучающихся и выпускников на уровне основного общего образования использовать приобретённые предметные теоретические знания, сформированные умения решения математических задач, метапредметные результаты, включающие УУД, для решения различных учебных задач и проблем в реальных жизненных ситуациях, в том числе и нестандартных, т. е. задач в различных сферах деятельности. Следовательно, функциональная математическая грамотность базируется на метапредметных результатах обучения предмету, что подчеркивает важность их формирования в процессе обучения математике.

Таким образом, метапредметные результаты изучения математики на базовом и углублённом уровне основного общего образования соответствуют друг другу, а их содержание обеспечивает преемственность между метапредметными результатами освоения программ учебного предмета «Математика» на уровне начального и среднего общего образования, ориентировано на создание базы для функциональной математической грамотности.

1.3. Требования ФОП ООО к оцениванию метапредметных результатов обучения учебному предмету «Математика»

В ФОП ООО отмечается, что оценка образовательных результатов реализуется на комплексном подходе через оценку предметных и метапредметных результатов [5, п. 18.10, с. 13]. Так как метапредметные результаты обучения математике представляют целостную систему УУД и межпредметных понятий, то основными объектами оценивания этих результатов являются познавательные, коммуникативные и регулятивные УУД (табл. 1) [5, п. 18.17, с. 14–15].

Оценивание метапредметных результатов базируется на уровневом подходе, ориентированном на фиксацию сформированности результатов на базовом уровне и уровней выше и ниже базового и осуществляется в ходе оценки процесса и результатов выполнения учебных исследований и проектов [5, п. 18.9, 18.19, с. 13, 15].

Поэтому оценивание метапредметных результатов обучения математике должно быть направлено на выявление сформированности познавательных, коммуникативных и регулятивных УУД и межпредметных понятий. Формирование и оценивание метапредметных результатов обучения математике невозможно без целенаправленно организованной деятельности обучающихся в этих взаимосвязанных направлениях (табл. 1).

Таблица 1

Основные объекты оценки метапредметных результатов (ФОП ООО)

Универсальные учебные действия		
Познавательные	*Коммуникативные*	*Регулятивные*
Замещение, моделирование, кодирование и декодирование информации, логические операции, включая общие	Приобретение умения учитывать позицию собеседника, организовывать и осуществлять сотрудничество, взаимодействие с педагогическими работниками	Способность принимать и сохранять учебную цель и задачу, планировать ее реализацию, контролировать и оценивать свои действия, вносить соответствующие коррективы в их

приемы решения задач	и со сверстниками, адекватно передавать информацию и отображать предметное содержание и условия деятельности и речи, учитывать разные мнения и интересы, аргументировать и обосновывать свою позицию, задавать вопросы, необходимые для организации собственной деятельности и сотрудничества с партнером	выполнение, ставить новые учебные задачи, проявлять познавательную инициативу в учебном сотрудничестве, осуществлять констатирующий и предвосхищающий контроль по результату и способу действия, актуальный контроль на уровне произвольного внимания

Формирование и оценивание метапредметных результатов в процессе обучения математике должно осуществляться с использованием средств обучения, соответствующих специфике математики как школьного предмета. Так как основным средством обучения математике являются задачи, то целостная система задач, включающая математические, учебно-познавательные, практико-ориентированные, контекстные задачи, ориентированная на формирование метапредметных результатов обучения математике, помогает учителю в организации целенаправленной деятельности обучающихся в рамках урочной и внеурочной деятельности (табл. 2).

Таблица 2

Общая характеристика задач системы, ориентированной на формирование метапредметных результатов

Вид задач, входящих в систему	Математическая, учебно-познавательная, практико-ориентированная, контекстная
Формируемая составляющая	Познавательные УУД; регулятивные УУД; коммуникативные УУД; функциональная математическая грамотность

Контекст задачи: информация, содержащаяся в задаче, связана:	*Личный*: с личной жизнью обучающегося. *Общественный*: с жизнью местного, национального общества или с жизнью всего мира. *Профессиональный*: со школьной или трудовой деятельностью обучающихся. *Научный:* с применением математики в других областях науки или к технологии
Область математического содержания	Соответствует основным содержательным линиям учебных курсов, изучаемых на уровне основного общего образования, в частности: числа и вычисления; алгебраические выражения; зависимости и неопределённость; пространство и форма
Когнитивная деятельность	Формулировать; применять; рассуждать и интерпретировать; оценивать
Уровень сложности	Низкий, повышенный, высокий
Проверяются знания/умения	1) выявлять необходимую информацию; 2) сравнивать и анализировать единицы информации; 3) применять математические знания; 4) интерпретировать полученный результат
Вид ответа	1) закрытый; 2) открытый

Процесс формирования метапредметных результатов обучения математике базового уровня ориентирован на использование задач базового уровня сложности и типовые задачи, а повышенного и высокого (выше базового) уровня – задач повышенного и высокого уровня сложности. Сформированность метапредметных результатов на базовом уровне обеспечивает успешное обучение математике на базовом уровне и способствует усвоению последующего учебного материала на повышенном и высоком уровнях.

Таким образом, оценивание метапредметных результатов обучения математике базируется на выявлении выполненных действий и их качестве в процессе анализа результата деятельности. Критериями оценивания могут выступать, например:

– количество найденных путей (способов, вариантов) решения одной задачи;

– количество составленных задач, обратных данной;

– количество составленных задач на основе одного задачного текста;

– количество действий, теорем для обоснования действий, необходимых для решения составленной задачи на основе задачного текста;

– корректность записи решения задачи;

– верность построения логической цепочки рассуждений;

– полнота записи решения задачи.

Сформированность метапредметных результатов обучения математике характеризует индивидуальные образовательные достижения обучающихся в изучении всех учебных курсов учебного предмета «Математика», а переход от одного уровня сформированности метапредметных результатов к другому, как было отмечено выше, отражает динамику развития умений выполнения универсальных учебных действий и применения межпредметных понятий.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДОСТИЖЕНИЮ МЕТАПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В РАМКАХ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДМЕТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО БЛОКА

Формирование и оценивание метапредметных результатов обучения математике может происходить только при специально организованной деятельности обучающихся. Для организации такой деятельности на уроках математики требуется: расширение содержания учебных заданий; расширение системы задач специально сконструированными задачами и заданиями; изменение подходов к работе с учебными заданиями и задачами; развитие и совершенствование форм деятельности школьников. Рассмотрим примеры, отразив возможную организацию деятельности обучающихся при их решении, способствующую достижению планируемых метапредметных результатов в рамках изучения предметов математического блока.

2.1. Рекомендации по формированию познавательных универсальных учебных действий при обучении математике

2.1.1. Учебно-познавательные задачи как средство формирования и развития познавательных УУД

Познавательные действия, как было отмечено выше, обеспечивают когнитивные процессы обучающихся, т. е. освоение методов познания окружающего мира; применение логических и исследовательских операций, умение работать с информацией. Трудности формирования познавательных УУД при обучении математике на уровне основного общего образования, в частности в 5 классах, могут быть связаны, во-первых, с недостаточным уровнем их сформированности в начальной школе для освоения новой учебной информации, во-вторых, с возрастанием объёма учебной информации для познания. Поэтому для организации более результативного процесса формирования познавательных УУД в единстве с освоением учебной информации требуется конструирование специальных учебно-познавательных задач и заданий. Ориентация на содержание познавательных УУД, релевантных предмету «Математика» (табл. 3), позволяет сконструировать соответствующие учебные задачи и задания (табл. 4), которые помогут учителю математики в организации деятельности обучающихся в направлении формирования и развития познавательных УУД.

Таблица 3

Познавательные УУД при изучении учебного предмета «Математика» на базовом и углублённом уровнях ООО

Базовые логические действия
• Выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями; формулировать определения понятий; устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа; • воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие; условные; • выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях; предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий; • делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии; • разбирать доказательства математических утверждений (прямые и от противного), проводить самостоятельно доказательства математических фактов, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, применять метод математической индукции; обосновывать собственные рассуждения; • выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев)
Базовые исследовательские действия
• Использовать вопросы как исследовательский инструмент познания; формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, самостоятельно устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение; • проводить по самостоятельно составленному плану эксперимент, исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой;

• самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, эксперимента, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений; • прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях
Работа с информацией
• Выявлять недостаточность и избыточность информации, данных, необходимых для решения задачи; • выбирать, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления; • выбирать форму представления информации и иллюстрировать решаемые задачи схемами, диаграммами, иной графикой и их комбинациями; • оценивать надёжность информации по критериям, предложенным или сформулированным самостоятельно

Включение таких заданий в образовательный процесс необходимо проводить с первых уроков математики в пятых классах. Выполнение заданий может быть организовано в форме индивидуальной, парной или групповой работы. Организация парной и групповой работы, а также поэтапное фронтальное обсуждение хода решения, представление и обсуждение результата выполнения заданий и решения задач также будет способствовать формированию коммуникативных УУД.

Таблица 4

Способы и формы формирования и развития познавательных УУД

Составляющие	Базовые логические действия; базовые исследовательские действия; работа с информацией
Учебно-познавательные задачи и задания	
Примеры заданий • Выявить общие признаки математических объектов и сформулировать определение понятия. • Выявить существенные признаки математических объектов и составить логическую модель (схему) определения понятия.	

- Установить существенный признак объектов и составить классификационную схему взаимосвязи понятий.
- Сформулировать критерии для выявления закономерностей и признаков и составить предписание для подведения объекта под понятие.
- Выявить причинно-следственные связи и составить предписание для решения задач определённого типа.
- Сравнить и проанализировать варианты решения задачи и выбрать наиболее результативный или рациональный вариант решения.
- Сформулировать вопросы, отражающие взаимосвязь между реальной ситуацией, описываемой в условии задачи, и планируемой, содержащейся в требовании задачи.
- Провести исследование описываемых ситуаций и составить схему поиска пути решения задачи и решения задачи.
- Сформулировать гипотезу, подтвердить или опровергнуть её.
- Перевести информацию, представленную в одной форме, в другую (формы представления информации: словесная, геометрическая, аналитическая, символьная)

Примеры задач

- Сформулировать определение понятия.
- Составить логическую модель определения понятия.
- Составить набор объектов для подведения под понятие.
- Составить классификационную или систематизационную схему понятия.
- Составить схему поиска решения (доказательства) задачи.
- Составить информационную схему.
- Составить предписание для решения задач определённого типа.
- Составить математическую задачу.
- Проанализировать текст задачи; геометрический объект.
- Сравнить объекты и обобщить результаты сравнения.
- Подвести объект под понятие.
- Вывести следствия из условия (требования) задачи.
- Последовательно вывести следствия из условия и требования задачи.
- Составить графическую модель к задаче: схема, рисунок, чертеж.
- Выявить и устранить недостаточность и избыточность информации в графической модели задачи

2.1.2. Формирование познавательных УУД при решении учебно-познавательных задач

В рамках изучения в 5–9 классах учебных курсов предмета «Математика» рассмотрим некоторые учебно-познавательные задачи, при решении которых формируются и используются познавательные универсальные учебные действия.

Учебно-познавательная задача
«Сформулировать определение понятия»

Деятельность обучающихся при выполнении учебно-познавательной задачи «Сформулировать определение понятия» направлена на формирование:

– *логических действий*: сравнивать и анализировать объекты; выявлять существенные признаки; обобщать результаты сравнения и анализа; делать выводы с использованием законов логики;

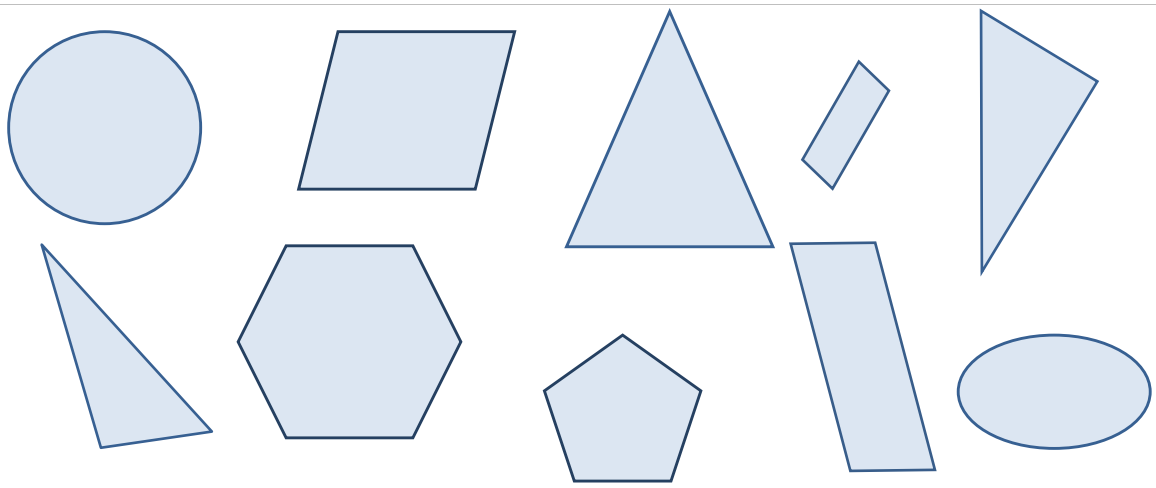
– *исследовательских действий*: проводить исследование по установлению особенностей математического объекта; выявлять зависимости объектов между собой;

– *действия работы с информацией*: анализировать и интерпретировать информацию, представленную на изображениях математических объектов.

В процессе выполнения этого задания перед обучающимися постепенно раскрывается математическое понятие, что позволяет им самостоятельно сформулировать его определение.

Учитель для организации деятельности обучающихся в зависимости от изучаемой темы и учебного курса использует наборы различных объектов, например, математических выражений или геометрических фигур.

Примеры объектов для формулирования определения понятия		
«Уравнение»		
$2x + 5 = 11$	$3x - 5 > 10$	$2x - 26 = 50$
$15x \bullet 2y$	$21 - 5x = 6$	$13x = 5$

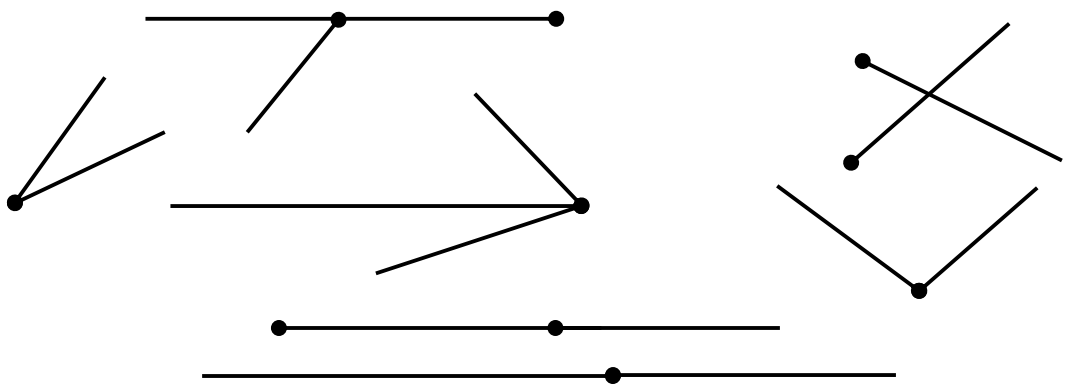
«Параллелограмм»


Учитель руководит деятельностью обучающихся, например, задавая наводящие вопросы, предоставляя руководства-предписания, отражающие пошаговые действия работы с объектами.

Предписание для решения учебно-познавательной задачи «Сформулировать определение понятия»
1. Выявить сравнимость объектов. 2. Охарактеризовать свойства (признаки) сравниваемых объектов. 3. Установить общие свойства сравниваемых объектов. 4. Установить существенные и несущественные свойства (признаки) для сравнения. 5. Выбрать одно из существенных свойств (признаков) в качестве основания для сравнения. 6. Сравнить объекты по выбранному существенному свойству (признаку). 7. Обобщить результаты сравнения. 8. Сформулировать выводы в форме определения понятия.

Пример 1. Математика. 5 класс. На уроке математики в 5 классе при изучении темы «Наглядная геометрия. Линии на плоскости» учитель организует формулирование определения понятия «угол». Для этого он предоставляет обучающимся карточку с изображением геометрических объектов, которые необходимо сравнить.

Карточка «Объекты для формулирования определения понятия "угол"»



Учитель руководит деятельностью обучающихся: обращает внимание учеников на то, что все объекты на рисунке сравнимы; предлагает рассмотреть объекты и в процессе наблюдения выявить существенные свойства, которые станут основой для сравнения и распределения их по группам.

Обучающимся уже знакомо понятие «луч». Поэтому они могут выявить количество лучей и их взаимное расположение на рисунке. Они выполняют действия в соответствии с предписанием: выбирают основание для сравнения, например, количество лучей и наличие общей точки; сопоставляют объекты по этому основанию.

Рассуждения обучающихся в процессе сравнение объектов:

1) изображены лучи;

2) общее свойство – два луча, различное свойство – три луча;

3) существенный признак – выходят из одной точки.

Далее обучающиеся формулируют выводы по результатам сравнения в ходе наблюдения, дают свое название понятию и формулируют его определение: «*Угол – геометрическая фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки»*.

Затем учитель предлагает сравнить термин и определение понятия, сформулированное обучающимися самостоятельно, с формулировкой, данной в учебнике, и при необходимости скорректировать его.

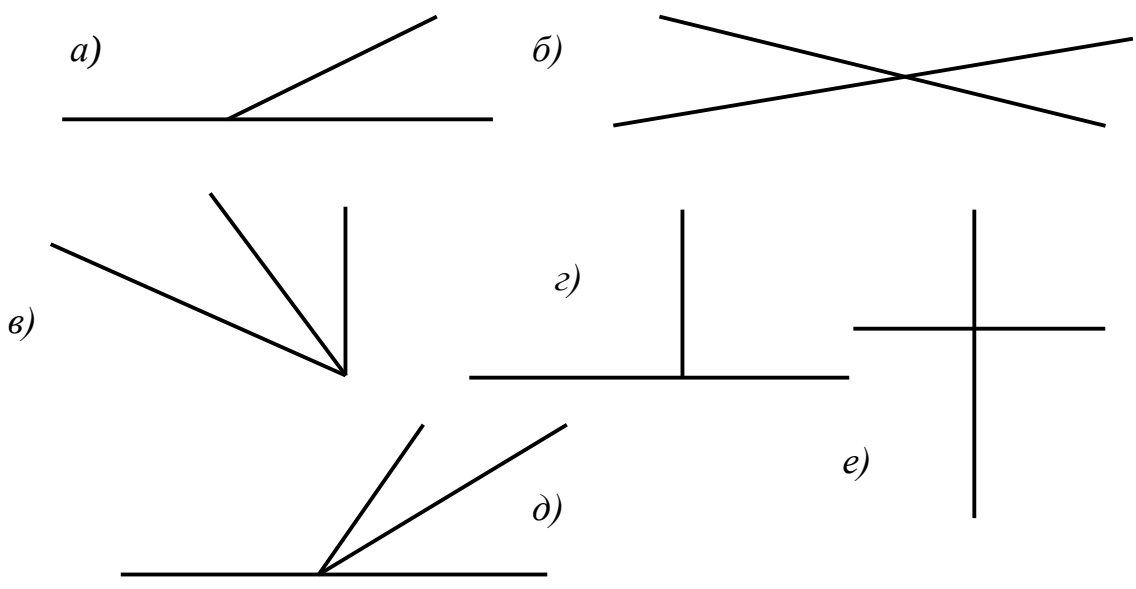
Так как задание предлагается в 5 классе, то учитель может говорить о существенных свойствах, называя их особыми и важными, что ближе к восприятию и пониманию пятиклассниками. В 7 классе при изучении первых

тем геометрии учитель может вернуться к этому заданию, подчеркнув, что особые свойства, которые были выявлены в 5 классе, являются существенными признаками.

Пример 2. Геометрия. 7 класс. На уроке по теме «Смежные и вертикальные углы» учитель предоставляет обучающимся карточку с геометрическими объектами и ставит учебную задачу: сформулировать определения понятий, выявить и сформулировать свойства данных геометрических фигур. Таким образом, происходит интеграция двух учебно-познавательных задач: «Сформулировать определение понятия» и «Сформулировать свойства математических объектов».

Обучающиеся сравнивают геометрические объекты, выделяют свойства сравниваемых объектов, выделяют общие и различные свойства. На основании выделенных существенных признаков: *стороны продолжают друг друга, общая сторона* – делят объекты на три группы: 1) а и г; 2) б и е; 3) другие.

Карточка «Объекты для формулирования понятий “смежные и вертикальные углы” и открытия их свойств»



После работы с карточкой обучающиеся под руководством учителя формулируют определения понятий смежных и вертикальных углов, сравнивают свои формулировки с формулировками понятий, данными в учебнике, корректируют их при необходимости. Опираясь на конструктивные особенности расположения углов, формулируют свойства смежных и вертикальных углов.

Результатом решения учебно-познавательной задачи «Сформулировать определение понятия» является формулировка определения математического понятия. Поэтому выполнение этого задания целесообразно организовывать на уроках открытия новых знаний в рамках первого этапа изучения темы.

Учебно-познавательная задача
«Составить логическую модель определения понятия»

Деятельность обучающихся при выполнении учебно-познавательной задачи «Составить логическую модель определения понятия» направлена на формирование:

– *логических действий*: воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения; выявлять математические закономерности и взаимосвязи в утверждениях; анализировать математические утверждения;

– *исследовательских действий*: самостоятельно исследовать информацию о математическом объекте;

– *действий работы с информацией*: анализировать и интерпретировать информацию; структурировать информацию и представлять её в другой форме.

Решение учебно-познавательной задачи «Составить логическую модель определения понятия» логически связано с задачей «Сформулировать определение понятия», так как в процессе составления логической модели определения понятия обучающиеся работают непосредственно с определением понятия. Поэтому задача на составление логической модели определения понятия может быть, во-первых, использована для организации деятельности обучающихся сразу после самостоятельного формулирования ими определения понятия, во-вторых, для организации деятельности обучающихся в направлении формирования познавательных УУД в рамках последующего оценивания сформированных знаний о математическом понятии и познавательных УУД.

В школьном курсе математики большинство определений понятий сформулировано через ближайший род и видовые отличия. Поэтому в процессе работы с определением понятия обучающиеся выявляют существенные признаки понятия, один из которых является ближайшим родовым понятием, а другие – видовыми отличиями. Таким образом, в процессе выполнения задания перед обучающимися раскрывается взаимосвязь понятий математических

объектов, что обеспечивает возможность составления логической модели понятия.

Учитель при организации деятельности обучающихся при составлении логической модели учитывает не только этап включения этого задания в обучение теме, но и уровень сформированности метапредметных результатов и уровень изучения обучающимися математики. Поэтому, если составление логической модели организовано в рамках урока включения в систему знания или их обобщения, то учитель для создания ситуации успешности, повышения мотивации к выполнению задания, включения каждого ученика в деятельность может оказать помощь обучающимся в виде определения понятий в рамках работы с учебником, предписания для решения учебной задачи.

Предписание для решения учебно-познавательной задачи «Составить логическую модель определения понятия»

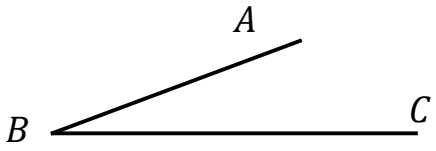
1. Назвать имя понятия – термин и записать его в первой строке модели.
2. Сформулировать определение понятия, выявить вид определения понятия: если понятие определено через ближайший род и видовые отличия, то перейти к п. 3; если нет, то к п. 6.
3. Выявить существенный признак, являющийся ближайшим родовым понятием, и записать во второй строке модели.
4. Выявить признаки понятия, являющиеся видовыми отличиями, и записать в следующих строках модели.
5. Записать обозначение понятия и выполнить, если возможно, его изображение.
6. Выбрать другую форму представления логической модели.

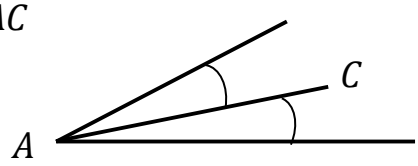
Если выполнение задания планируется на заключительном этапе изучения темы, то помощь отсутствует или ее уровень заметно снижается, например, менее успешным ученикам предоставляется только предписание.

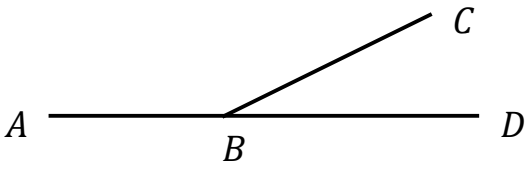
Пример 3. Геометрия. 7 класс. По окончании изучения темы «Начальные геометрические сведения» учитель проводит оценивание сформированности предметных знаний и сформированных познавательных действий при изучении темы в форме теоретического зачета. В систему вопросов целесообразно включить задания на составление логических моделей изученных в теме

определений геометрических понятий, таких как «угол», «биссектриса угла», «середина отрезка», «смежные углы», «вертикальные углы», «перпендикулярные прямые».

Обучающиеся работают самостоятельно: во-первых, вспоминают и формулируют во внутренней речи определение понятия, фиксируют выявленные признаки и важные для себя моменты на черновиках. Затем сравнивают и анализируют признаки и выявляют, какой из них является ближайшим родовым понятием, а какие видовыми отличиями. На основании результатов выполненной деятельности обучающиеся составляют логические модели определений геометрических объектов.

Угол	
1) геометрическая фигура **И** 2) два луча **И** 3) выходят из одной точки	*Обозначение*: $\angle ABC$ или $\angle B$ 

Биссектриса угла	
1) луч **И** 2) начало луча – вершина угла **И** 3) делит угол пополам	*Обозначение*: луч AC 

Смежные углы	
1) два угла **И** 2) одна сторона общая **И** 3) две другие продолжают друг друга	*Обозначение*: $\angle ABC$и $\angle CBD$– смежные 

После зачета учитель анализирует составленные обучающимися модели и оценивает не только знание определения понятия, но и умение оперировать понятием в части связи с другими понятиями на уровне существенных

признаков. Верно составленная модель характеризует не только знание понятия, но и применение логически-последовательных рассуждений в процессе анализа определения понятия.

Учебно-познавательная задача

«Составить классификационную или систематизационную схему родового понятия»

Деятельность обучающихся при выполнении учебной задачи «Составить классификационную или систематизационную схему родового понятия» направлена на формирование:

– *логических действий*: сравнить и проанализировать объекты; установить критерии (основания) для классификации или систематизации объектов; выявить существенные признаки; обобщить результаты сравнения и анализа;

– *исследовательских действий*: самостоятельно формулировать выводы сравнения и анализа в ходе исследования; оценивать достоверность выполненной классификации или систематизации объектов;

– *действий работы с информацией*: выбирать форму представления информации; структурировать и представлять информацию.

В процессе выполнения этого задания обучающиеся выявляют объем понятия, базируясь на существенных признаках, выявляют связи между видовыми понятиями, перед обучающимися постепенно раскрывается объем математического понятия. Это способствует более осознанному восприятию понятия и его характеристических свойств. В предписании к этому заданию появляется цикличность действий (если да, то к одному пункту, если нет, то к другому), зависящая от условия наличия видовых (подвидовых) отличий.

Предписание для решения учебно-познавательной задачи «Составить классификационную схему родового понятия»
1. Определить род понятия.
2. Выяснить, можно ли, разделить его на группы: а) выявить существенные признаки понятия; б) выявить существование объектов, входящих в объем понятия, имеющих видовые отличия: если да, то к п. 3; если нет, то к п. 9.
3. Выбрать основание для распределения объектов, входящих в объем понятия, на видовые группы.
4. Распределить объекты на видовые группы по выбранному основанию.
5. Выяснить, можно ли разделить получившиеся видовые группы на подгруппы: а) выявить существенные признаки видового понятия;

б) выявить существование объектов, входящих в объем видового понятия, имеющих подвидовые отличия; если да, то к п. 6; если нет, то п. 9.

6. Выбрать основание для разбиения видовых групп на подвидовые группы.
7. Распределить объекты на подвидовые группы по выбранному основанию.
8. Проверить, выполняются ли требования к классификации: а) деление по одному основанию; б) объединение всех объектов составляет объем понятия; в) пересечение – пустое множество.
9. Сформулировать вывод (классификация невозможна или завершена).

Цель включения этого учебно-познавательного задания в изучение конкретной темы обусловливает организацию деятельности по его выполнению на основе разных подходов. При первом подходе на уроке открытия новых знаний в начале изучения темы учитель представляет информационную схему, отражающую только термин математического родового понятия. Постепенно в процессе изучения математических объектов, входящих в родовое понятие, перед обучающимися будет раскрываться объем родового понятия. Незаполненная классификационная схема при таком подходе служит своеобразным средством отражения объема неизученной учебной информации по теме и мотивации к ее изучению. При втором подходе учитель организует выполнение задания после изучения темы. В этом случае задача на составление классификационной схемы является средством обобщения и систематизации знаний.

Учебно-познавательную задачу «Составить классификационную или систематизационную схему родового понятия» можно включать в обучение математике начиная с первых уроков математики в 5 классах.

Пример 4. Математика. 5 класс. При изучении темы «Измерение углов» в 5 классе учитель сначала организует работу обучающихся с учебником. Школьники из текста выявляют информацию о названиях углов, о соответствующих величинах углов. Затем учитель предлагает обучающимся распределить величины углов на группы, выбрав основание для распределения.

$$34^0, 113^0, 89^0, 100^0, 171^0, 18^0, 77^0, 146^0$$

Обратим внимание, что обучающиеся могут предложить несколько оснований распределения величин углов на группы, например: а) величина угла записана двухзначным или трехзначным числом; б) величина угла записана четным или нечетным числом; в) величины острых и тупых углов. Необходимо организовать фронтальное обсуждение каждого предложенного основания

распределения величин на группы, при этом желательно выслушать мнение каждого школьника об основании распределения величин углов на группы. Результатом фронтального обсуждения должно стать обоснование выбора основания, соответствующего теме.

После этого учитель организует наблюдение обучающихся за величиной и изменением угла между часовой и минутной стрелкой.

Наблюдаем

А) Чему равен угол между часовой и минутной стрелками, если часы показывают 1 ч? 3 ч? 4 ч? 11ч 30 мин?

Б) На сколько градусов поворачивается минутная стрелка часов за 15 мин, 30 мин, 1 ч? Часовая стрелка за 1ч, 30 мин, 10 мин?

В) Представьте, что часы показывают 10 ч. На сколько градусов изменится величина угла между стрелками через 1 ч?

После ответов на вопросы учитель организует групповую работу обучающихся. В первой части работы предлагается составить аналогичные вопросы, во второй – составить классификационную схему углов. Пример результата деятельности обучающихся представлен на рисунке 2.

Примерные вопросы и классификационная схема углов

1) Какой угол образуют стрелки в 18 ч?

2) Сколько часов показывают часы, если развернутый угол, между часовой и минутной стрелками?

3) Сколько раз в сутки между часовой и минутной стрелками прямой угол?

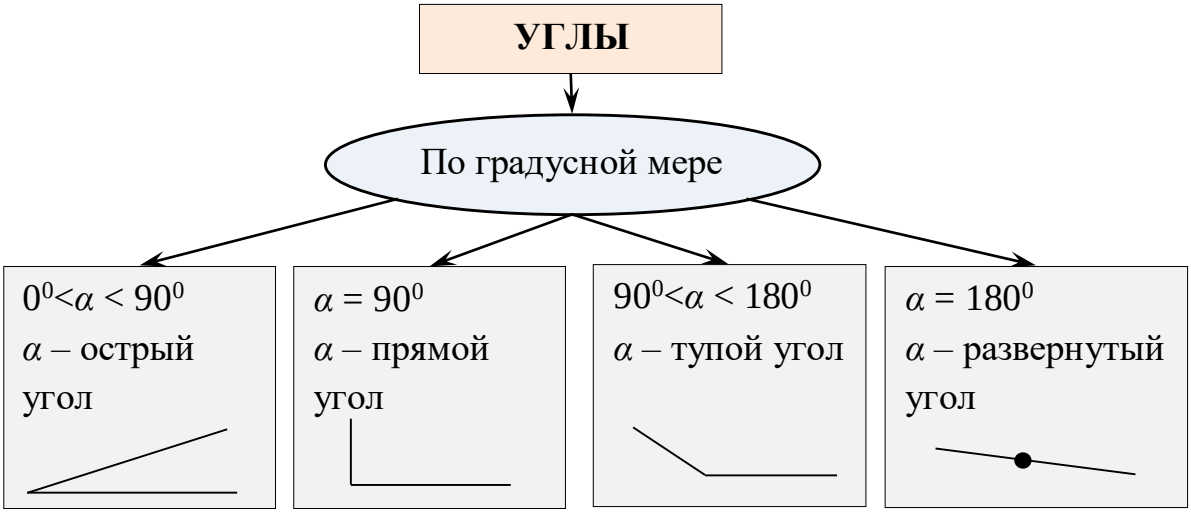


Рис. 2. Классификационная схема углов

Пример 5. Геометрия. 7–9 классы. Классификационные и систематизационные схемы могут отражать не только виды математических объектов. Основой для построения классификационной схемы могут быть и математические отношения равенства, подобия, пересечения, принадлежности между геометрическими фигурами. Например, при изучении геометрии учитель организует деятельность обучающихся по составлению систематизационных схем, отражающих взаимное расположение двух прямых или прямой и окружности на плоскости (рис. 3, 4).

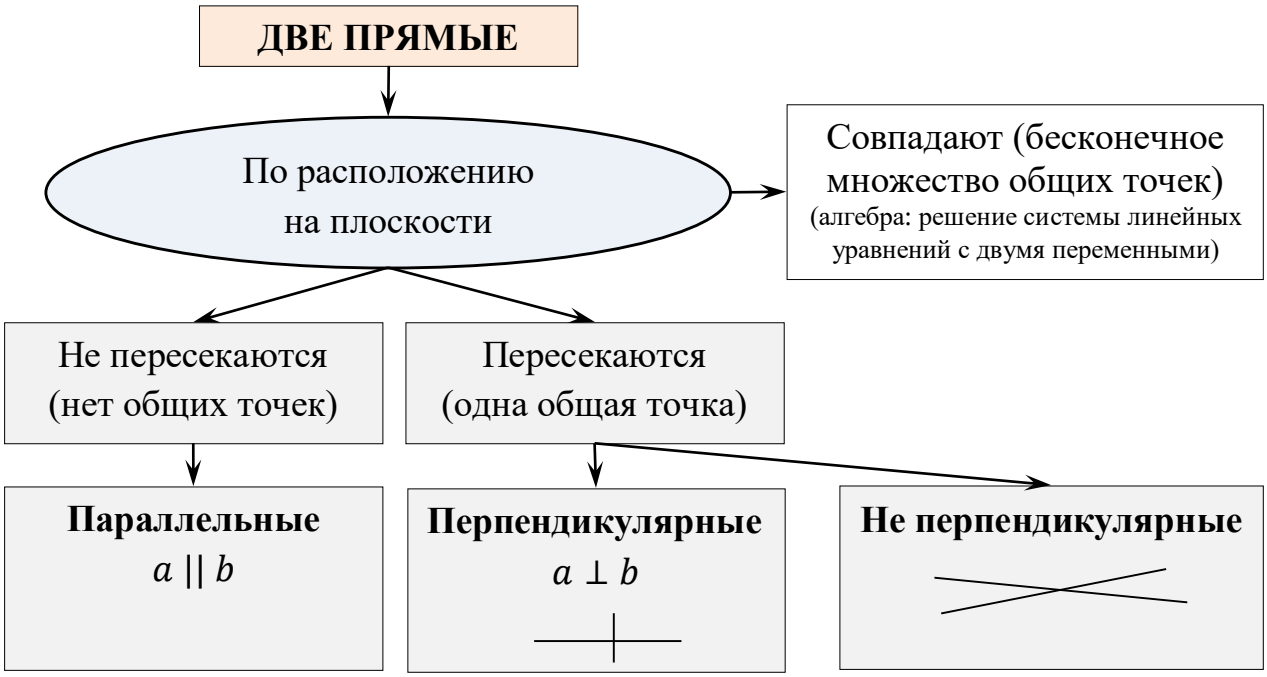


Рис. 3. Систематизационная схема расположения прямых на плоскости

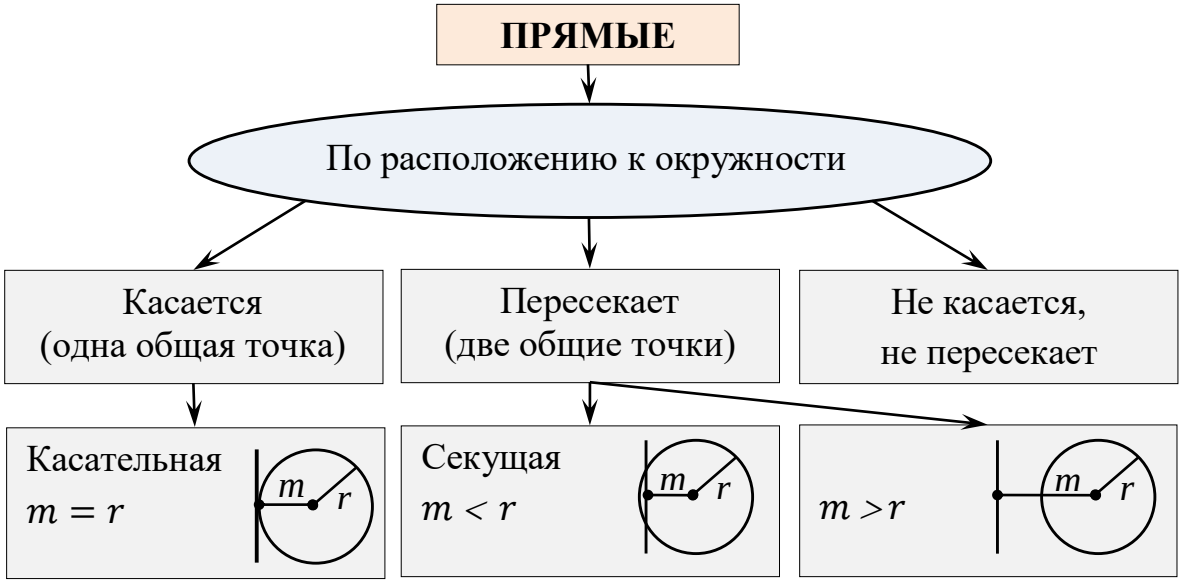


Рис. 4. Систематизационная схема взаимного расположения прямой и окружности

Учебно-познавательная задача

«Составить математическую задачу»

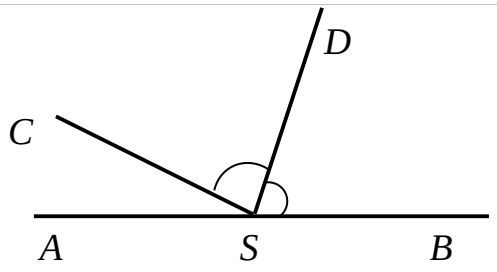
Используя задачный материал всех учебных курсов, учитель может организовать деятельность обучающихся по составлению математической задачи. Например, при изучении математики в 5–6 классах, алгебры и геометрии в 7–9 классах учитель на основе текстовых задач конструирует учебно-познавательные задачи, направленные на формирование УУД при составлении и решении математических задач, в частности геометрических. При этом основой для составления математической задачи в традиционном понимании этого понятия (условие и требование) может быть любая структурная компонента: условие, решение, обоснование или требование.

В начале формирования умений составления задач, в частности геометрических, используются тексты, достаточно понятные обучающимся. Постепенно тексты усложняются. Это отражается не только в их представлении, но и в содержании в них математических отношений между геометрическими объектами. Приведем примеры составления задач в зависимости от этапа включения этой учебно-познавательной задачи в процесс изучения геометрии.

Пример 6. Геометрия. 7 класс. Тема ««Смежные и вертикальные углы».

Используется текст: условие, представленное в геометрической форме (чертеж) и требование, записанное в символьной форме.

Учитель создает проблемную ситуацию и формулирует проблему: составить геометрическую задачу по готовому чертежу и требованию.

Текст для составления геометрической задачи
 Найти: $\angle ASD$, если $\angle CSB = 148^0$.

Обучающиеся выполняют анализ чертежа. Их рассуждения сводятся к следующему: 1) на чертеже две основные фигуры: $\angle ASC$ и $\angle CSB$; 2) эти углы связаны свойством смежных углов; 3) луч SD – биссектриса$\angle CSB$.

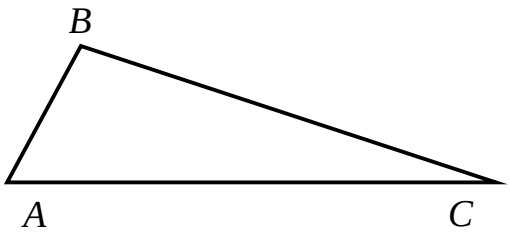
Затем обучающиеся формулируют задачу в словесной форме: *величина одного из смежных углов равна* 148^0. *Найти величину угла, образованного биссектрисой данного угла и стороной другого смежного угла.*

Пример 7. Геометрия. 7 класс. Тема «Треугольник. Первый признак равенства треугольников». Используется текст, состоящий из условия, представленного в символьной форме.

Учитель ставит перед обучающимися учебную задачу: составить геометрическую задачу по данному условию:

Текст для составления геометрической задачи
Сторона AB треугольника ABC равна 17 см, сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC.

Обучающиеся выполняют действия в соответствии с приемом составления задачи по условию: 1) переводят словесное условие на язык чертежа и символьное условие; 2) выделяют основную фигуру – треугольник; 3) известна длина одной стороны, а длины двух других сторон связаны между собой и с известной длиной; 4) выводят следствия из условия: $AC = 34$ см, $BC = 24$ см; 5) определяют, что с помощью известных данных можно найти периметр треугольника.



Дано: ΔABC; $AB = 17$ см,
$AC = 2AB$, $BC = AC - 10$ см.

Затем обучающиеся формулируют задачу и выполняют её проверку, решив полученную задачу.

Пример 8. Геометрия. 7 класс. Тема «Параллельные прямые». Используется текст, представляющий требование в словесной форме.

Учитель создает проблемную ситуацию, предоставляя обучающимся следующий текст: *докажите, что прямые параллельны*.

Текст для составления геометрической задачи
Докажите, что прямые параллельны.

Обучающиеся проводят анализ: 1) текст по содержанию соответствует требованию; 2) нет условия. Они самостоятельно выделяют познавательную цель и формулируют проблему: составить геометрическую задачу на доказательство, используя прием составления задачи по требованию.

Обучающиеся выполняют действия в соответствии с приемом составления задач по требованию: 1) анализируя требование, делают вывод, что главными

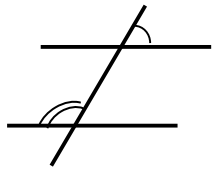
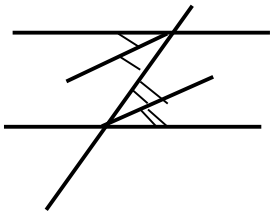
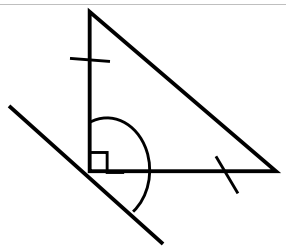
фигурами являются прямые, параллельность которых нужно доказать; 2) изображают две непересекающиеся прямые. Затем определяют поисковую область понятия «параллельные прямые», связанного выявленным математическим отношением: прямые параллельны, если они: а) не имеют общих точек; б) перпендикулярны к третьей прямой; в) при пересечении их третьей прямой накрест лежащие или соответственные углы равны; г) при пересечении их третьей прямой сумма односторонних углов равна 180^0.

Далее обучающиеся в зависимости от степени обученности: 1) достраивают чертеж на основании выявленных отношений; 2) составляют условие задачи; 3) формулируют задачи в соответствии с выявленным условием и данным требованием (табл. 5).

После формулировки задач обучающиеся выполняют проверку составленных задач их решением, при необходимости корректируя её. Отметим, что задача должна быть корректно составлена, т. е. в задаче должно содержаться необходимое и достаточное количество условий для выполнения требования: нахождения величины и доказательства математических отношений.

Таблица 5

Возможные формулировки составленных задач и чертежи к ним

Составленные задачи		
Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*
		
По данным рисунка докажите, что прямые a и b параллельны.	При пересечении двух прямых секущей биссектрисы накрест лежащих углов параллельны. Докажите, что прямые параллельны.	Угол между прямой, проведенной через вершину равнобедренного прямоугольного треугольника, и катетом равен 135^0. Докажите, что данная прямая параллельна прямой, содержащей гипотенузу.

Таким образом, в процессе составления задачи используются познавательные УУД: самостоятельное выделение познавательной цели, знаково-символические действия, построение речевых высказываний в устной и письменной формах; анализ, сравнение, выведение следствий из условия; установление причинно-следственных связей; построение логической цепи рассуждений; выдвижение гипотез (что можно найти или доказать).

2.2. Рекомендации по формированию регулятивных универсальных учебных действий при обучении математике

2.2.1. Регулятивные УУД как основа саморегуляции при изучении математики

Овладение регулятивными универсальными учебными действиями при обучении математике обеспечивает формирование смысловых установок и жизненных навыков личности [8, 9]. Формирование регулятивных УУД направлено на освоение действий самоорганизации и самоконтроля, эмоционального интеллекта, принятия себя и других [5, с. 51]. Согласно планируемым метапредметным результатам обучения математике, зафиксированным в ФРП ООО, к регулятивным УУД относятся умения (табл. 6), которые можно сформулировать в обобщенной форме, ориентируясь на этапы решения выявленной проблемы: 1) формулировка цели и постановка задач; 2) поиск путей решения проблемы, учитывающих имеющиеся ресурсы; 3) выбор пути и планирование решения проблемы на основе собственных возможностей; 4) оценивание результата деятельности и выявление его соответствия поставленной цели и условиям.

Формирование *умений выявления проблем, постановки цели и формулировки задач в направлении ее достижения* базируется на общей цели и уровне изучения математики обучающимися. Уровневый подход к сформированности результатов обучения помогает учителю в выборе способов и формы организации деятельности обучающихся и постановке учебных задач. В практике обучения учитель, учитывая базовый уровень и уровни выше и ниже базового, которые зафиксированы в ФОП ООО, при определении уровней ориентируется на вид деятельности, выполняемой на каждом уровне. Целесообразно выделить I уровень – репродуктивный, II уровень – продуктивный, III уровень – эвристический.

Обучающиеся под руководством учителя (I уровень), с небольшой помощью (II уровень) или самостоятельно (III уровень) оценивают поставленные учебные задачи, соотносят учебную информацию, собственные знания и умения, необходимые для решения задачи, и выбирают учебно-познавательную или математическую задачу соответствующего уровня. Такой подход способствует успешному выявлению проблем не только в учебных, но и в реальных жизненных ситуациях; постановке цели и формулировке задач в направлении ее достижения.

Таблица 6

Регулятивные УУД при изучении учебного предмета «Математика» на базовом и углублённом уровне ООО

Самоорганизация
• выявлять проблемы для решения в жизненных и учебных ситуациях; • ориентироваться в различных подходах принятия решений (индивидуальное, групповое); • самостоятельно составлять план, алгоритм решения задачи (или его часть); • выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей; • аргументировать и корректировать варианты решений с учётом новой информации
Самоконтроль
• владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения учебной и математической задачи; • предвидеть трудности, которые могут возникнуть при решении задачи; • вносить коррективы в деятельность на основе новых обстоятельств, найденных ошибок, выявленных трудностей; • оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели и условиям; • объяснять причины достижения или недостижения цели, находить ошибку, давать оценку приобретённому опыту

В процессе формирования *умений поиска путей решения проблем, учитывающих имеющиеся ресурсы*, учитель организует деятельность

обучающихся в направлении конкретизации теоретического материала, соответствующего поставленной учебно-познавательной или математической задаче, выявления действий, необходимых для ее решения. При формировании *умений выбора пути и планирования решения проблемы на основе собственных возможностей* учитель организует оценивание обучающимися предложенных учителем или самостоятельно найденных средств, способов и путей решения задачи. Обучающиеся оценивают свои знания и умения их применения для решения задачи; анализируют предложенные учителем или найденные самостоятельно способы и пути решения задачи, выбирают наиболее приемлемый и рациональный, с их точки зрения, вариант решения поставленной задачи. На первоначальном этапе формирования этих умений учитель организует анализ путей решения задачи в форме фронтального обсуждения. Важно, чтобы обучающиеся не только выразили свое отношение к варианту решения, но и обосновали его выбор на основе соотнесения с изученным материалом и возможностью его использования для решения задачи. Такой подход способствует формированию понимания и осознания уровневого подхода как имеющегося ресурса для конструирования индивидуальной образовательной траектории, что характеризует личностную ценность регулятивных УУД.

Формирование *умений оценивания результата деятельности и выявления его соответствия поставленной цели и условиям*, учитывая логическую последовательность, учитель организует после решения учебной задачи. Оценивание результата решения задачи и выполненной деятельности при решении базируется на критериальном подходе. При этом критерии в зависимости от уровня сформированности *умения выявления и формулирования критериев* могут быть составлены самими обучающимися или заданы учителем.

В процессе развития действий оценивания они становятся *умениями оценивания*, что позволяет учителю от внешнего оценивания перейти к организации *самопроверки и самоконтроля, взаимопроверки и взаимоконтроля* процесса и результата решения учебно-познавательной и математической задачи. При оценивании знаний и умений, используемых при решении учебной задачи, обучающиеся самостоятельно или под руководством учителя фиксируют результаты оценивания, выявляют динамику обучения теме учебного курса.

Такой подход к формированию регулятивных УУД при обучении математике позволяет характеризовать их как основу саморегуляции

обучающимися собственной учебно-познавательной деятельности при изучении теоретического материала и решении задач как основного средства обучения математике.

2.2.2. Формирование регулятивных УУД при изучении предметов математического блока

Достижение планируемых результатов формирования регулятивных УУД (табл. 6) невозможно без специально организованной деятельности с использованием соответствующих средств обучения. Содержание планируемых регулятивных УУД обусловливает способы и формы организации деятельности обучающихся в этом направлении и позволяет сформулировать релевантные задания, которые могут быть использованы как средства формирования и развития регулятивных УУД, а в последующем и как средства саморегуляции деятельности (табл. 7).

Саморегуляция, включающая самоорганизацию, самопроверку и самоконтроль, взаимопроверку и взаимоконтроль процесса и результата решения учебно-познавательной и математической задачи при освоении учебной информации и решении учебных задач, невозможна без познавательных УУД. Поэтому процесс формирования регулятивных УУД осуществляется в единстве с использованием познавательных УУД.

Таблица 7

Способы и формы формирования и развития регулятивных УУД

Составляющие	Самоорганизация. Самоконтроль
Способы и формы организации деятельности обучающихся	
• Проблемная ситуация. • Постановка цели деятельности и задач в направлении решения проблемы. • Соотнесение собственных знаний и умений с изучаемой учебной информацией. • Постановка учебной цели в процессе освоения учебной информации. • Составление и реализация плана деятельности при решении задач в направлении устранения проблемы или освоения учебной информации.	

• Взаимодиагностика, в том числе взаимоконтроль и взаимооценка выполняемой деятельности и ее результатов. • Самодиагностика, включающая самоконтроль и самооценку деятельности и ее результата. • Корректировка деятельности на основании результатов взаимодиагностики и самодиагностики.
Учебные задания и задачи
Примеры заданий • Спрогнозировать результат выполнения деятельности, решения задачи. • Составить поэтапный план деятельности. • Проконтролировать и оценить результаты, полученные на каждом шаге или этапе деятельности. • Скорректировать дальнейшую деятельность с учетом оценки пошаговых (поэтапных) результатов деятельности. • Оценить результат деятельности и соотнести его с прогнозируемым результатом. • Задания, содержащие элементы исследовательской деятельности.
Примеры задач • Составить алгоритм или предписание для решения типовых учебно-познавательных задач. • Составить схему анализа текста задачи. • Составить схему поиска пути решения учебно-познавательной задачи. • Составить схему поиска пути решения математической задачи. • Составить план решения задачи. • Сформулировать критерии оценивания деятельности и ее результата.

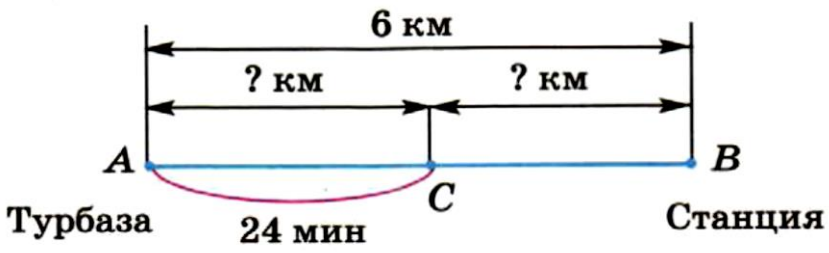
Учебно-познавательные задачи, используемые для формирования познавательных УУД, могут быть использованы и для формирования регулятивных УУД, но при этом акцентируется внимание на регуляции деятельности. Например, учебная задача «Составить алгоритм или предписание для решения типовых учебно-познавательных задач» ориентирована на составление предписаний для решения таких задач, как «Сформулировать определение понятия», «Составить логическую

модель определения понятия», «Составить классификационную схему родового понятия», рассмотренных выше, и др. Приведем примеры организации деятельности обучающихся в направлении формирования регулятивных УУД.

На первых этапах формирования учитель постоянно руководит деятельностью обучающихся – задает вопросы, предоставляет предписания для выполнения действий. Учитель организует работу обучающихся 5–6 классов, используя готовые схемы, отражающие условие задачи, план решения, образцы условия задачи, записанного в другой форме, например, символьной или графической. Постепенно степень руководства деятельностью обучающихся уменьшается, они начинают самостоятельно регулировать свою деятельность. Приведем примеры формирования регулятивных УУД.

Пример 9. Математика. 5 класс. Тема «Натуральные числа. Действия с натуральными числами». Учитель предлагает обучающимся решить текстовую задачу на движение (Математика, 5 класс, № 218).

Задача 1. Велосипедист выехал с туристической базы на станцию, расстояние до которой 6 км. Какое расстояние останется ему проехать через 24 минуты, если он будет ехать со скоростью 12 км/ч?



План решения

1) Рассмотрите рисунок, на котором схематически изображено условие задачи. Какой отрезок изображает все расстояние? Расстояние, которое проехал велосипедист за 24 мин? Расстояние, которое осталось проехать?

2) Узнайте, сколько метров проезжает турист за одну минуту.

3) Определите, сколько метров проехал велосипедист за 24 минуты.

4) Определите расстояние (в метрах), которое ему осталось проехать, и выразите его в километрах и метрах.

Учитель ставит перед обучающимися учебную задачу: проанализируйте предложенный план решения задачи и выявите его соответствие текстовой задаче. Обучающиеся в процессе действий в рамках первого пункта соотносят условие задачи с изображением на рисунке и выявляют, что информация на рисунке соответствует тексту задачи, при этом на схеме отображено условие и требование задачи, а также промежуточное требование (расстояние, которое проехал за 24 минуты). При работе в рамках второго пункта плана обучающиеся выявляют, что единицы измерения времени и скорости не соответствуют друг другу и требуется скорректировать единицы измерения этих величин. Третий и четвертый пункты плана направлены на выполнение арифметических действий с натуральными числами.

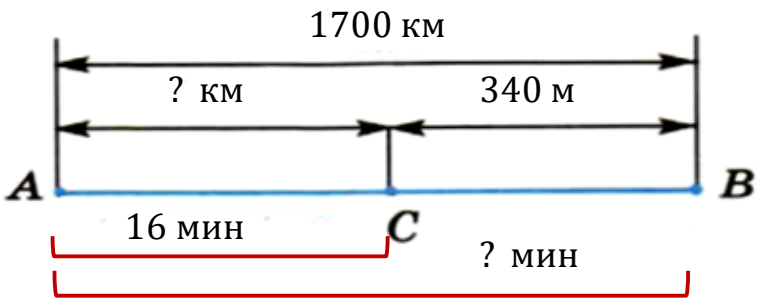
Под руководством учителя школьники устанавливают факт и формулируют вывод о том, что план действий соответствует предложенной задаче. После этого обучающиеся решают задачу, выполняя действия в соответствии с планом. На следующем этапе учитель предлагает обучающимся решить задачу, аналогичную следующей задаче (Математика, 5 класс, № 219).

Изобразите схематически с помощью рисунка условие задачи, спланируйте ход её решения и решите ее:
Задача 2 Петр идет от дома до станции метро, расстояние до которой равно 1 км 700 м. Через 16 мин после выхода ему остается пройти 340 м. Сколько минут занимает у Петра весь путь от дома до метро?
Задача 3 Андрей идет от дома до станции метро. Через 8 мин после выхода остается пройти 560 м, через 12 мин – 240 м. Сколько минут занимает у Андрея вся дорога и чему равно расстояние от дома до станции?

Учитель организует работу по вариантам, разрешая консультационное сотрудничество с одноклассниками. Обучающиеся сравнивают предложенные задачи с задачей 1 и выявляют, что в задаче 1 был представлен готовый план, а в задачах 2 и 3 необходимо составить план решения. Поэтому используют информацию, содержащуюся в плане по решению задачи 1, схему условия

в качестве образца. Обучающиеся переводят текст задачи в графическую форму, изображая схему. Затем, анализируя схему, составляют план решения.

Задача 2



План решения. Обозначим дом буквой А, а станцию метро буквой В.

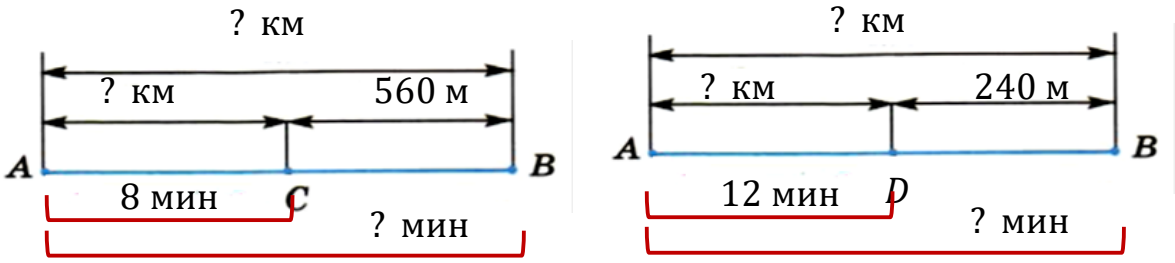
1) Какой отрезок изображает все расстояние? Расстояние, которое прошел велосипедист за 16 мин? Расстояние, которое осталось пройти?

2) Определить, сколько метров прошел Петр за 16 минут.

3) Определить, сколько метров проходит Петр за одну минуту.

4) Определить, сколько минут занимает у Петра весь путь от дома до метро.

Задача 3



Учитель обращает внимание обучающихся, что третья задача отличается от предыдущих, так как содержит два временных отрезка от момента выхода Андрея, что нужно учесть и при составлении плана решения.

Пример 10. Математика. 5 класс. Тема «Натуральные числа. Действия с натуральными числами». На последующих уроках учитель продолжает формирование регулятивных действий, используя текстовые задачи. При этом

сама деятельность носит более сложный характер. Учитель организовывает деятельность обучающихся, используя сразу несколько задач.

Задача 1	***Задача 2***	***Задача 3***
Условие. Расфасовали 12 кг 600 г конфет в коробки, по 300 г в каждую. Сколько коробок конфет получилось?	*Условие.* Для отделки одного бального платья нужно 1 м 25 см кружев. Сколько метров кружев понадобится для отделки 24 таких платьев?	*Условие.* Для отделки одного бального платья нужно 1 м 25 см кружев. Хватит ли 7 м кружев для отделки 6 таких платьев?

На первом этапе деятельности учитель с помощью задач создает проблемную ситуацию, предлагая обучающимся выдвинуть гипотезы по результату решения задач и подтвердить или опровергнуть их. Учитель руководит деятельностью, задавая вопросы, организует сравнение и анализ текстов задач. Примеры вопросов: 1) какова структура текста; 2) можем ли выполнить действия с данными величинами; 3) можем ли выполнить требование задачи?

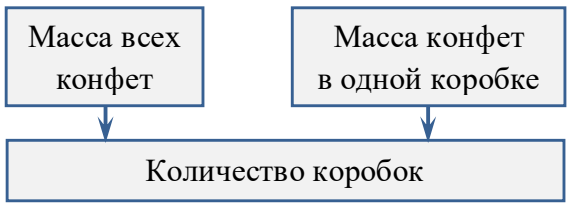
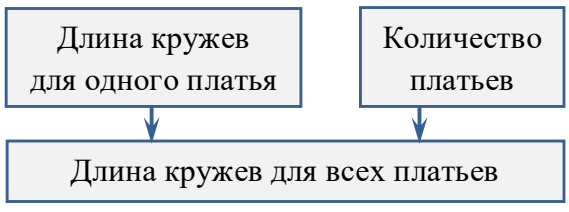
Обучающиеся работают с текстами задач, используя познавательные УУД. Выявляют вид задач, выделяют условие и требование задач, уточняют, о каких величинах идет речь в условии и требовании задачи, в каких единицах измерения даны величины; структурируют текст, выполняя краткую запись текста. Уточняют возможность выполнения действий с величинами в указанных единицах измерения. Результатом деятельности обучающихся на этом этапе является сформулированная гипотеза, например: «Сможем выполнить требование задачи, выполнив соответствующие арифметические действия с натуральными числами».

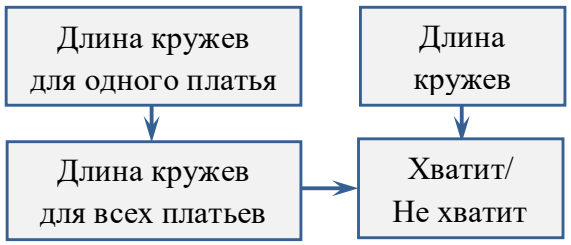
Для работы с задачей на следующем этапе учитель предлагает школьникам оценить задачи и выбрать одну, соответствующую их уровню изучения темы. Обучающиеся оценивают свои знания и выбирают одну из предложенных задач. Затем учитель организует парную или индивидуальную работу обучающихся в зависимости от уровня сформированности познавательных и регулятивных умений.

Обучающиеся анализируют условие и требование задачи. Результатом рассуждений в процессе анализа является план решения задачи как один из путей достижения цели подтверждения или опровержения гипотезы (табл. 8). Важно, чтобы учитель в процессе составления плана решения задачи организовал конкретизацию теоретического материала, например знания единиц измерения длины, арифметических действий с натуральными числами, акцентировал внимание обучающихся на оценивании найденного пути решения задачи.

Таблица 8

План решения задач и рассуждения обучающихся при его составлении

<table>
<tr><th colspan="2">Задача 1</th></tr>
<tr><td>Условие.
Расфасовали 12 кг 600 г конфет в коробки, по 300 г в каждую. Сколько коробок конфет получилось?</td><td> 
</td></tr>
<tr><th>Рассуждения обучающихся</th><th>План решения</th></tr>
<tr><td>1) так как величины записаны в разных единицах измерения, то …
2) так как известна масса всех конфет и масса конфет в одной коробке, то …
3) так как задача связана с реальной ситуацией, то …
4) если будет несоответствие условиям, то …
5) если не будет несоответствия, то …</td><td>1) записать величины в одинаковых единицах измерения;
2) найти количество коробок, выполнив деление;
3) оценить соответствие полученного результата условию и требованию задачи;
4) скорректировать решение;
5) записать ответ</td></tr>
<tr><th colspan="2">Задача 2</th></tr>
<tr><td>Условие.
Для отделки одного бального платья нужно 1 м 25 см кружев. Сколько метров кружев понадобится для отделки 24 таких платьев?</td><td> 
</td></tr>
</table>

Рассуждения обучающихся	***План решения***
1) так как длина кружев для одного платья записана в разных единицах измерения, то … 2) так как известны длина кружев для одного платья и количество всех платьев, то … 3) так как задача связана с реальной ситуацией, то … 4) если будет несоответствие условию или требованию, то … 5) если не будет несоответствия, то ...	1) записать эту величину в одной единице измерения, например в сантиметрах; 2) найти длину кружев для всех платьев, выполнив умножение; 3) оценить соответствие полученного результата условию и требованию задачи; 4) скорректировать решение или запись найденной величины в требуемых единицах измерения; 5) записать ответ
Задача 3	
Условие. Для отделки одного бального платья нужно 1 м 25 см кружев. Хватит ли 7 м кружев для отделки 6 таких платьев?	
Рассуждения обучающихся	***План решения***
1) так как длина кружев для одного платья записана в разных единицах измерения, то … 2) так как известно количество платьев, то … 3) так как требуется сравнить две величины в разных единицах измерения, то … 4) так как требуется выявить конкретную характеристику, то	1) записать эту величину в одной единице измерения, например в сантиметрах; 2) найти длину кружев для всех платьев, выполнив умножение; 3) записать сравниваемые величины в одной единице измерения, например в см, и сравнить эти величины; 4) сформулировать выводы сравнения;

5) так как задача связана с реальной ситуацией, то … 6) если будет несоответствие условию или требованию, то … 7) если не будет несоответствия, то …	5) оценить соответствие результата условию и требованию задачи; 6) скорректировать решение или формулировку вывода; 7) записать ответ

Затем обучающиеся решают задачи в соответствии с составленным планом (табл. 9).

Таблица 9

Задача 1	***Задача 2***	***Задача 3***
Решение 1) 12 кг 600 г = 12600 г – конфет расфасовали в коробки 2) 12600: 300 = 42 (шт.) – коробки получилось	*Решение* 1) 1 м 25 см = 125 см – нужно для отделки одного платья 2) 125 • 24 = 3000 (см) – понадобится для отделки 24 таких платьев 3) т. к. 3000 см = 30 м, то потребуется 30 м кружев	*Решение* 1) 1 м 25 см = 125 см – нужно для отделки одного платья 2) 125 • 6 = 750 (см) – понадобится для отделки шести платьев 3) 7 м = 700 см 4) т.к. 750 см < 700 см, то 7 м кружев не хватит для отделки 6 таких платьев
Ответ: 42 коробки	*Ответ*: 30 м кружев	*Ответ*: не хватит

После решения задач учитель организует оценивание обучающимися выполненной деятельности и её результата, при этом может включить элементы самооценивания и взаимооценивания.

В рассматриваемом примере представлена организация деятельности пятиклассников при изучении первой темы курса математики. Поэтому учителю целесообразно для этого этапа задачи подбирать так, чтобы они были достаточно близки по действиям, которые требуется выполнить в рамках деятельности при решении задачи. Это позволит учителю после решения задачи организовать обобщение деятельности обучающихся по уровням и выявление общих

уровневых действий решения этих задач. Уровень сложности задач характеризуется количеством действий и качественными характеристиками деятельности.

Такой подход к организации обучения решению текстовых задач начиная с пятого класса способствует формированию познавательных и регулятивных УУД и более осознанному применению этих действий.

При обучении геометрии учитель организовывает деятельность обучающихся в направлении формирования регулятивных УУД, используя геометрические понятия и их определения, теоремы, а также геометрические задачи, которые являются основным средством освоения школьного курса геометрии. Для достижения сформированности регулятивных УУД учитель может подбирать задачи разного уровня сложности (одну задачу), которые имеют несколько путей решения, базирующиеся на разном теоретическом материале, ранее изученном школьниками. Это позволяет выявить уровень освоения обучающимися изученного материала и соотнести его с причинами затруднений или ошибок, если такие будут, организовать самооценивание личностных знаний и построение индивидуальной траектории дальнейшего обучения.

Пример 11. Геометрия. 8 класс. Тема «Четырехугольники».

Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если $\angle BAC$ равен $\angle DCA$, $\angle BCA$ равен $\angle DAC$ (Геометрия, 8 класс, № 371).

Учитель ставит перед обучающимися учебную задачу «Составить схему поиска пути решения задачи». Он организовывает деятельность обучающихся, ориентируясь на предписание составления схемы поиска решения задачи, с которым школьники уже знакомы.

Предписание для составления схемы поиска решения задачи
1. Использовать приёмы работы с задачей, выполняя познавательные УУД. 2. Фиксировать процесс поиска решения задачи с помощью стрелок, указывающих направление рассуждений. 3. Использовать какие-либо знаки для теоретических фактов или величин, например, для известных знак «+», для неизвестных – знак «–». 4. Уточнить последовательность выполненных рассуждений и составить план, указав номер действия.

На первом этапе обучающиеся, анализируя задачу с использованием базовых логических УУД, выявляют условие и требование задачи, уточняют, о каких геометрических фигурах идет речь в задаче, какими свойствами обладают эти фигуры и какими математическими отношениями они связаны между собой; используя действия работы с информацией, переводят условие задачи в символьную и графическую формы.

Дано:

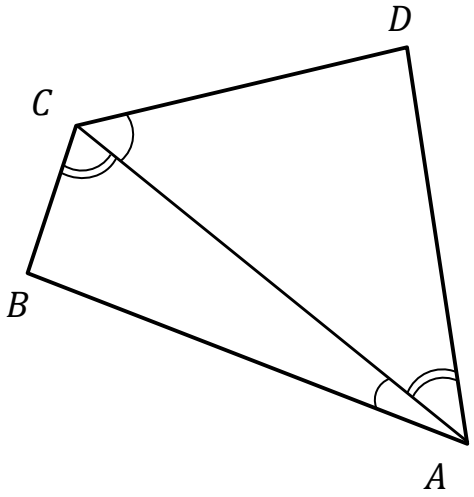
$ABCD$ – выпуклый четырехугольник;

$\angle BAC = \angle DCA$,

$\angle BCA = \angle DAC$

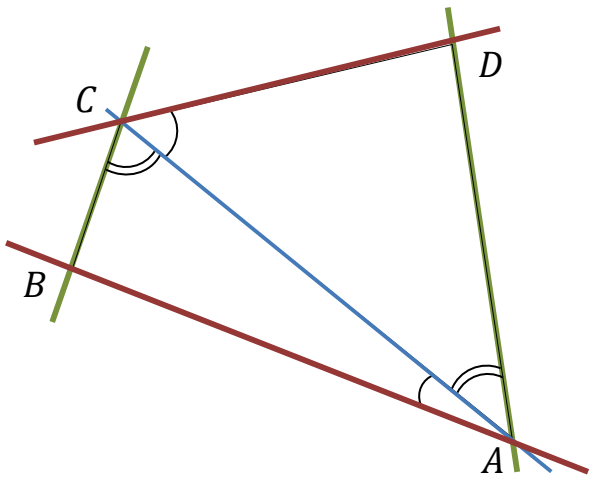
Доказать:

$ABCD$ – параллелограмм.



На следующем этапе учитель организовывает составление схемы поиска решения задачи в форме парной или групповой работы. Обучающиеся, используя приём выведения следствий из условия, составляют схемы поиска решения задачи. В зависимости от теоретических фактов и полученных промежуточных выводов могут быть составлены разные схемы (рис. 5, 6).

1-й вариант



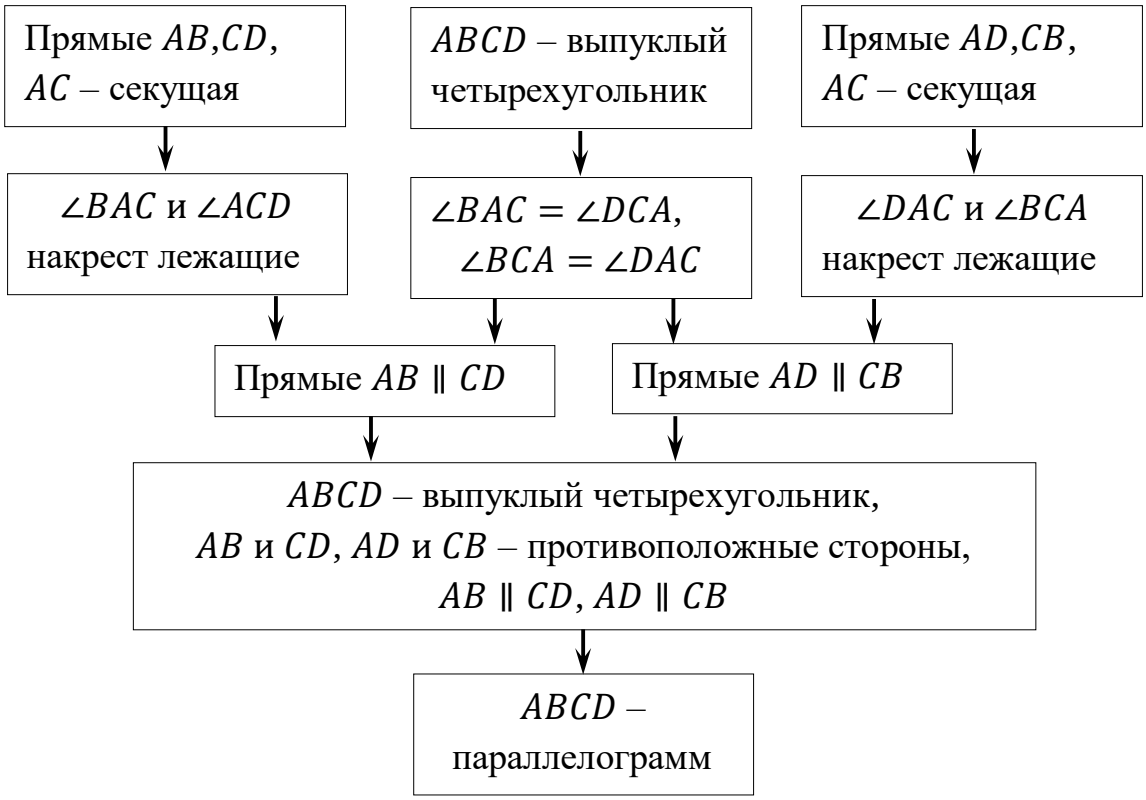
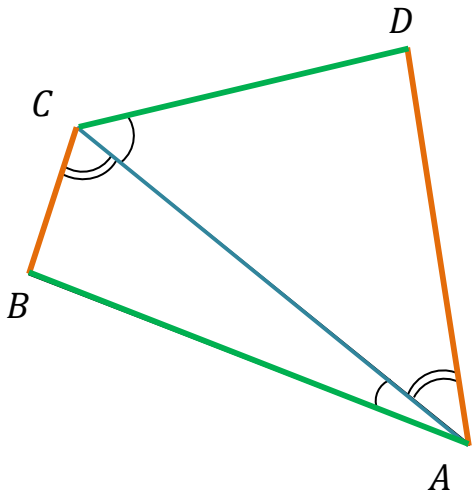


Рис. 5. Схема поиска пути решения задачи

Например, обучающиеся первой группы (пары) доказали требуемый факт на основе определения параллелограмма, а во второй и третьей на основе признаков параллелограмма (стороны четырехугольника попарно равны; две стороны четырехугольника равны и параллельны).

2-й вариант



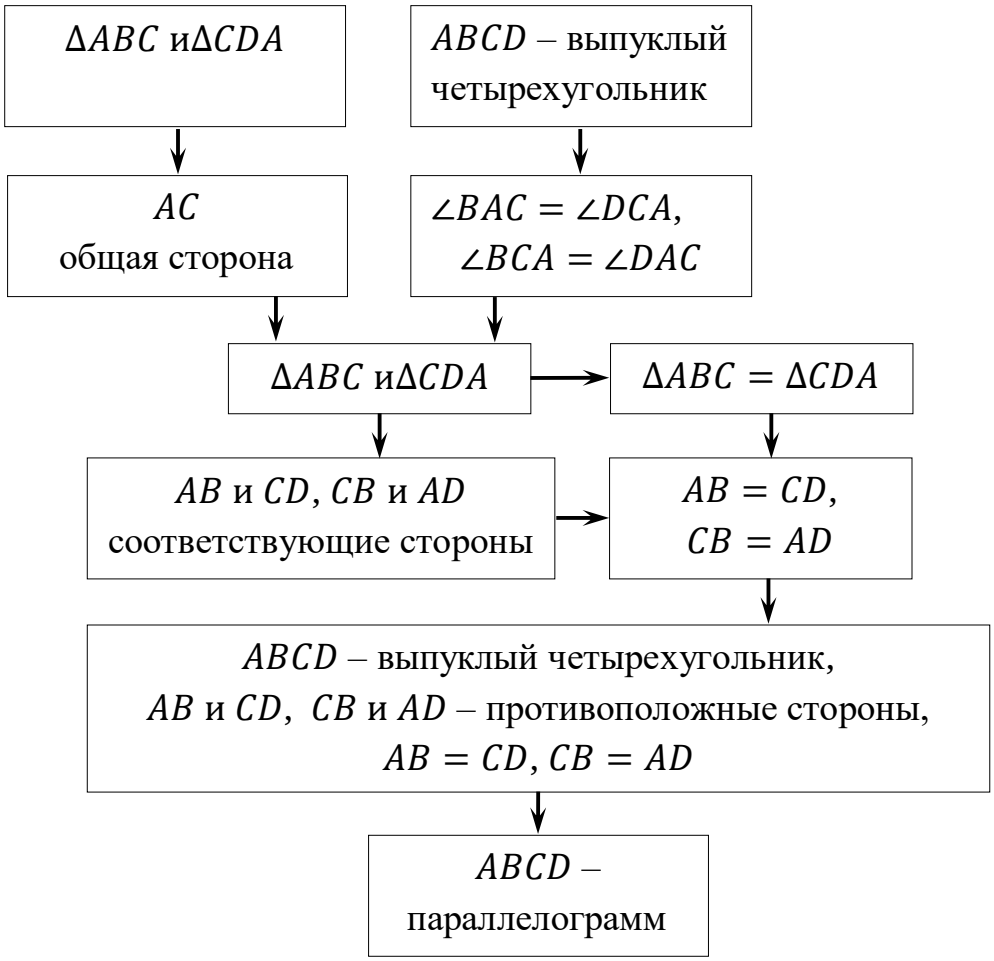


Рис. 6. Схема поиска пути решения задачи

После составления схем целесообразно организовать представление каждой группой своего варианта схемы. В процессе фронтального обсуждения каждой схемы, сравнения и анализа путей решения задачи выявляются: группа, нашедшая наибольшее количество путей, самый короткий вариант решения, наиболее рациональный вариант решения.

Такой подход помогает учителю в оценивании и выявлении уровня сформированности метапредметных результатов обучения.

Таким образом, учителем была организована деятельность обучающихся в направлении регулятивных УУД на основе учебной задачи «Составить схему поиска решения геометрической задачи». В процессе работы обучающиеся использовали познавательные УУД. Часть деятельности была организована в форме парной работы школьников, что способствовало формированию коммуникативных УУД. Все это раскрывает возможности математики как учебного предмета в организации процесса формирования метапредметных результатов обучения в их единстве средствами, релевантными разным учебным курсам.

Пример 12. Теория вероятностей и статистика. 7 класс. Тема «Таблицы». Большую возможность для организации деятельности в направлении формировании регулятивных УУД имеют задачи по теории вероятностей. Например, на уроке по теме «Таблицы» учитель создает проблемную ситуацию, предложив обучающимся «отправиться» в путешествие из Москвы в Санкт-Петербург. При этом создается ситуация неопределенности, связанная с реальной жизнью, так как обучающимся не предлагается готовый план поездки. Для выхода из ситуации неопределенности обучающимся, в частности, необходимо составить поэтапный план поездки: 1) проанализировать и выбрать время отправления из Москвы в зависимости от необходимого времени прибытия; 2) рассчитать расходы на путешествие (табл. 10).

Таблица 10

<table>
<tr><th colspan="6">Планируем и прогнозируем</th></tr>
<tr><td colspan="6">Расписание движения поездов из Москвы в Санкт-Петербург (фрагмент)</td></tr>
<tr><td>Название поезда и номер</td><td>Время отправления</td><td>Время прибытия</td><td>Время в пути</td><td>Ежедневно</td><td>Цена, руб.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Мегаполис 020У</td><td rowspan="2">00:20</td><td rowspan="2">08:53</td><td rowspan="2">8 ч 33 мин</td><td rowspan="2">Ежедневно</td><td>Плацкарт –</td></tr>
<tr><td>Купе от 5650</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Арктика 016А</td><td rowspan="2">00:41</td><td rowspan="2">09:13</td><td rowspan="2">8 ч 32 мин</td><td rowspan="2">Ежедневно</td><td>Плацкарт от 3992</td></tr>
<tr><td>Купе от 5592</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Волга 060*Г</td><td rowspan="2">00:42</td><td rowspan="2">10:05</td><td rowspan="2">9 ч 33 мин</td><td rowspan="2">Ежедневно</td><td>Плацкарт от 3992</td></tr>
<tr><td>Купе от 6518</td></tr>
</table>

В результате такого подхода у обучающихся формируются умения составления поэтапного плана деятельности, прогнозирования результата, выхода из проблемной ситуации и ситуации неопределенности.

2.3. Рекомендации по формированию коммуникативных универсальных учебных действий при обучении математике

2.3.1. Коммуникативные УУД как основа социальных навыков обучающихся

В ФРП ООО в соответствии с требованиями ФГОС ООО к результатам обучения в рамках метапредметных результатов обучения математике конкретизированы планируемые результаты формирования коммуникативных УУД на базовом и углубленном уровнях изучения предмета (табл. 11). Отмечается, что коммуникативные УУД, сформированные при обучении математике, направлены на обеспечение социальных навыков обучающихся [7, 8].

Коммуникативные УУД занимают особое место в системе УУД и имеют свои отличительные особенности. Они, с одной стороны, условно «не связаны» с непосредственным изучением теоретического материала, а с другой стороны, характеризуются способностью верно и осознанно воспринимать информацию, в том числе и учебную, формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения.

От качества общения, которое заключено в ясности, точности и грамотности выражения своих мыслей в устной и письменной формах, осознанностью восприятия учебной информации, зависит успешность изучения математики. Через совместное обсуждение математических задач и хода их решения, обоснование выбранного пути и способа решения обучающиеся готовятся сотрудничать в социуме, приобретают умения участвовать в обсуждении проблемы, связанной с реальной жизнью, точно формулировать свои цели и идеи в направлении решения жизненных проблем, обосновывать собственное мнение, принимать мнения других людей. Все это позволяет рассматривать коммуникативные УУД как специфичные учебные действия, направленные на обеспечение социальных навыков обучающихся.

Таблица 11

Коммуникативные УУД при изучении учебного предмета «Математика» на базовом и углублённом уровнях ООО

Общение
• воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения; • ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат; • в ходе обсуждения задавать вопросы при обсуждении темы, проблемы, решаемой задачи, высказывать идеи, нацеленные на поиск решения; • сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, обнаруживать различие и сходство позиций; • в корректной форме формулировать разногласия, свои возражения; • представлять результаты решения задачи, эксперимента, исследования; • самостоятельно выбирать формат выступления с учётом задач презентации и особенностей аудитории
Сотрудничество
• понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных и математических задач; • принимать цель совместной деятельности, планировать организацию совместной работы, распределять виды работ, договариваться, обсуждать процесс и результат работы; • обобщать мнения нескольких людей; • участвовать в групповых формах работы; • выполнять свою часть работы и координировать свои действия с другими членами команды; • оценивать качество своего вклада в общий продукт по критериям, сформулированным участниками взаимодействия

2.3.2. Учебное сотрудничество и совместная деятельность учителя и обучающихся при изучении математики

Коммуникативные УУД связаны с общением в рамках совместной учебной деятельности обучающихся и сотрудничеством с одноклассниками и учителем при изучении математики. Формирование коммуникативных УУД базируется на подходах к организации групповой работы, методах организации сотрудничества в учебно-познавательной деятельности, приемах коммуникации в образовательном процессе. Формирование коммуникативных УУД может быть организовано на всех этапах УПД, что отражено в структуре учебного сотрудничества и совместной деятельности при групповой работе (табл. 12).

Таблица 12

Структура учебного сотрудничества и совместной деятельности учителя и обучающихся при групповой работе

Этапы учебного сотрудничества	*Деятельность учителя при сотрудничестве*	*Коммуникативная деятельность обучающихся*
1) Постановка учебной задачи, способствующей возникновению потребности в сотрудничестве и совместной деятельности	Ставит учебные задачи, отражающие необходимость формирования УУД, при необходимости конкретизируя их	Определяют необходимость группового решения поставленных задач. Обучающиеся объединяются в группы. Определяют свою роль и степень своего участия в работе группы
2) Создание проблемной ситуации с помощью постановки учебной задачи	Ставит одну учебную или учебно-познавательную задачу для всех групп или даёт каждой группе своё задание	В результате анализа задачи формулируют проблему; выдвигают гипотезы по её решению и обсуждают их; обобщают и выявляют основную для решения
3) Перевод педагогически организованной	Подводит обучающихся к противоречию и предлагает	Осознают противоречие, формулируют общую цель совместной деятельности

проблемной ситуации в психологическую ситуацию	самостоятельно найти средство его разрешения	на основе результатов обсуждения гипотез; начинают искать пути решения проблемы
4) Поиск путей решения проблемы внутри группы на основе выполнения определённых заданий	Наблюдает за поиском пути решения проблемы, при необходимости оказывая помощь группе	Обучающиеся самостоятельно в группе выдвигают различные пути решения проблемы; обсуждают пути решения; оказывают взаимопомощь членам группы
5) Планирование совместной учебно-познавательной деятельности	Наблюдает за планированием деятельности в группах, при необходимости оказывая помощь группе	Обобщение и систематизация результатов обсуждения путей решения проблемы; выбор рационального пути решения; распределение ролей и обязанностей между членами группы
6) Реализация совместной УПД	Наблюдает за реализацией совместной УПД	Совместная деятельность
7) Обсуждение результатов выполнения совместной УПД в *группах*	Организует в каждой группе обобщение результатов совместной деятельности и их подготовку к представлению	Обсуждают результаты деятельности. Оформляют общий результат групповой деятельности различными способами (таблица, схема и др.)
8) Обсуждение результатов выполнения совместной УПД в *классе*	Организует общее обсуждение результатов совместной деятельности	Группы представляют результаты совместной деятельности. Одноклассники сравнивают, рецензируют, высказывают и обосновывают своё мнение

9) Оценка достигнутых результатов совместной УПД	Оценивает результаты выполнения задания группой и каждым учеником. Подводит итоги групповой работы, учитывая степень участия обучающихся в работе группы	Самооценка и взаимооценка результатов, учитывающая вклад каждого члена группы в полученный результат, качество работы, эрудицию, подготовку дома, активность работы при выполнении групповой работы
10) Подведение итогов групповой работы		

Учитель организовывает совместную деятельность обучающихся (п. 6) в зависимости от сложности и объемности процесса решения учебной задачи, например: 1) все ученики в группе решают учебную задачу; 2) каждый член группы выполняет только отдельный фрагмент учебной задачи; 3) каждый член группы выполняет последующий этап учебной задачи. От подхода к организации совместной деятельности зависит деятельность обучающихся на последующих этапах групповой работы (п. 7 и п. 8). Так, на этапе «Обсуждение результатов выполнения совместной УПД в группах» (п. 7) обсуждение происходит, например, так: 1) каждый член группы представляет группе выполненное задание, результаты сравниваются, выявляется оптимальный способ решения учебной задачи, обобщаются результаты деятельности; 2) члены группы объясняют всей группе результаты выполнения фрагмента учебной задачи, части синтезируются, образуя общий результат выполнения задания; 3) члены группы объясняют результаты поэтапного выполнения задания. На этапе «Обсуждение результатов выполнения совместной УПД в классе» (п. 8) учитель организует общее обсуждение результатов групповой работы, учитывая, что группы выполняли одну или разные учебные задачи. Поэтому в процессе обсуждения может: 1) выступать представитель одной группы с отчётом по результатам работы группы, а члены этой группы (при необходимости) уточняют выступление; члены других групп сравнивают свой результат с отчётом; 2) выступать представители всех групп с результатами групповой работы. На каждом этапе учебного сотрудничества и совместной деятельности при групповой работе учитель оказывает при необходимости помощь.

При организации процесса формирования коммуникативных УУД учитель ориентируется, с одной стороны, на общие методы обучения, с другой – конкретизирует возможность приема в направлении организации общения и сотрудничества (табл. 13).

Таблица 13

Методы и приемы организации процесса формирования коммуникативных УУД при обучении математике

Методы обучения	*Приемы организации общения и сотрудничества*
Источник знаний а) рассказ; б) беседа; в) эвристическая беседа; г) дискуссия	а) Обсуждение информации, представленной учителем или обучающимся в форме рассказа, как образца выражения своих мыслей, без прерывания вопросами. б) Система вопросов, направленная на понимание нового материала, выявление уровня усвоения изученного. в) Система вопросов, направленная на открытие знаний, формулирование выводов, определений понятий математических терминов и свойств объектов. г) обмен мнениями по решению проблемы, сформулированными выводами; аргументация, доказательство и обоснование своей точки зрения
Наглядность а) метод иллюстраций; б) метод демонстраций	а) Обсуждение и сравнение информации, представленной в разных формах, в том числе схемы, таблицы, рисунки; перенос информации из одной формы представления в другую. б) Просмотр и обсуждение видеоролика, презентации
Практические методы а) практические задания; б) упражнения; в) учебные задачи	Обсуждение и постановка цели деятельности, формулирование выводов о результатах выполненной деятельности; анализ сообщений обучающихся. Создание презентаций, конструирование системы вопросов к изученной теме, составление таблиц, схем, карт. Комментированное решение задач

Методы и приемы организации процесса формирования коммуникативных УУД при обучении математике определяют форму организации обучения в направлении формирования и развития коммуникативных УУД (табл. 14).

Таблица 14

Способы и формы формирования и развития коммуникативных УУД

Составляющие	Общение Совместная учебная деятельность Сотрудничество с одноклассниками и учителем
Способы и формы организации деятельности обучающихся	
• Парная, бригадная и групповая работа • Взаимопомощь • Взаимоконтроль и взаимопроверка на всех этапах УПД • Оформление и представление результата групповой деятельности • Рецензирование ответов одноклассников • Фронтальное обсуждение решения задачи, проблемы • Комментированное решение задач	
Учебно-познавательные задания и задачи	
Примеры заданий • Подготовьте сообщение по изучаемой теме, по результатам эксперимента, исследования или проекта и публично представьте сообщение. • Задайте вопросы одноклассникам по изучаемой (представленной теме). • Обсудите в группе информацию и представьте ее в тезисах. • Оцените результаты совместной деятельности и индивидуальный вклад в эти результаты.	

Общение и сотрудничество при решении учебно-познавательных и математических задач, связанных с формированием и использованием познавательных и регулятивных УУД, характеризует целостность учебно-познавательной деятельности при обучении математике в направлении формирования метапредметных результатов.

Приведем примеры организации деятельности обучающихся в направлении формирования коммуникативных УУД.

Пример 13. Математика. 5 класс. Тема «Натуральные числа. Сравнение натуральных чисел».

После изучения пятиклассниками теоретического материала по теме «Сравнение натуральных чисел» целесообразно организовать на уроке парную или групповую исследовательскую деятельность обучающихся, используя **метод дискуссии** в направлении решения проблемы, поставленной в форме вопроса, например: «Можно ли сравнить числа, в которых некоторые цифры заменены звездочками?»

- На *первом этапе* дискуссии учитель предлагает в группах обсудить вопрос и, используя знания правил сравнения чисел и не видя числа, сделать предположение (сформулировать гипотезу) о возможности выполнения или невыполнения сравнения чисел, зашифрованных таким способом, зафиксировать вариант предположения, данный группой, и наметить пути проверки предположения.
- На *втором этапе* учитель предлагает каждой группе карточки с набором чисел, в которых некоторые цифры заменены звездочками.

Карточка «Набор чисел»		
Дискутируем. Можно ли сравнить числа, в которых некоторые цифры заменены звездочками:		
а) 18*** и 20***;	в) 9*4*4 и 8*4*4;	д) *071 и 6*4;
б) 3***4 и 3***7;	г) **111 и *1111;	е) **9 и 1***9?

Деятельность обучающихся в зависимости от уровня изучения материала и сформированности умений работать в команде может быть организована в трех вариантах.

Вариант 1. Учитель непосредственно участвует в исследовании – руководит деятельностью обучающихся, становится членом группы на время обсуждения:

– вспомните, большее или меньшее число появляется раньше в натуральном ряду;
– сравните числа и выявите количество цифр в записи чисел;
– выявите позиции известных цифр в записи чисел;
– сравните известные цифры в записи чисел, стоящие на одной позиции.

Вариант 2. Учитель опосредованно участвует в деятельности – руководит деятельностью обучающихся, используя систему вопросов.

Приведем примеры вопросов для дискуссии:

– большее или меньшее число появляется раньше в натуральном ряду?
– если число больше, то всегда ли количество цифр, используемое для его записи, больше, чем в записи меньшего числа?
– если при записи двух чисел используется одинаковое количество цифр, то всегда ли в старшей позиции меньшего числа цифра меньше чем в старшей позиции большего числа?

Вариант 3. Без непосредственного участия учителя: предоставляется обучающимся время на самостоятельное исследование.

- На *третьем этапе* учитель организует обмен мнениями по решению проблемы. Группы представляют результат работы, а остальные участвуют во фронтальном обсуждении результатов.

Важно, чтобы независимо от варианта организации деятельности каждый член группы участвовал в дискуссии: задавал вопросы и отвечал на них, в процессе сравнения и анализа высказал свое мнение, участвовал в обсуждении и фиксации результатов сравнения.

Пример 14. Алгебра. 7 класс. Тема «Уравнения и неравенства».

При формировании умений решения рациональных уравнений целесообразно организовать **эвристическую беседу**. Например, при изучении темы «Уравнения и неравенства» учитель может организовать эвристическую беседу в интеграции с методом демонстрации.

Учитель организует фронтальное обсуждение решения уравнения, используя систему вопросов, направленную на анализ и сравнение вариантов решения и способствующую открытию обучающимися правил решения рациональных уравнений. Приведем примеры вопросов для беседы:

– Какого вида уравнения представлены?
– Какую структуру имеет это уравнение?
– Какое правило обеспечило переход от исходного уравнения (строка 1) к другому уравнению (строка 2)?
– Какие действия выполнены в процессе решения уравнения в каждом варианте?
– Можно ли перенести все действия, выполненные при решении уравнений данного вида, на другие уравнения?

Целесообразно обсудить все преобразования, которые выполнены при решении уравнения, выявить одинаковые уравнения в разных столбцах и строках, сравнить корни уравнения, полученные во всех трех вариантах.

Карточка «Решение уравнений»			
Рассуждаем и открываем			
	Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*
1	$\frac{7x-3}{6}=\frac{5x+1}{2}$,	$\frac{7x-3}{6}=\frac{5x+1}{2}$,	$\frac{7x-3}{6}=\frac{5x+1}{2}$,
2	$\frac{7x-3}{6}-\frac{5x+1}{2}=0$,	$2(7x-3)=6(5x+1)$,	$7x-3=3(5x+1)$,
3	$\frac{7x-3}{6}-\frac{3(5x+1)}{3\cdot 2}=0$,	$14x-6=30x+6$,	$7x-3=15\,x+3$,
4	$\frac{7x-3-15x-3}{6}=0$,	$14x-30x=6+6$,	$7x-15x=3+3$,
5	$\frac{-8x-6}{6}=0$,	$-16x=12$,	$-8x=6$,
6	$-8x-6=0$,	$x=12:(-16)$,	$x=6:(-8)$,
7	$-8x=6$,	$x=-0{,}75$.	$x=-0{,}75$.
8	$x=-\frac{6}{8}$,		
9	$x=-\frac{3}{4}$.		
	Ответ: $-\frac{3}{4}$	*Ответ*: $-0{,}75$	*Ответ*: $-0{,}75$

Рекомендуется эвристическую беседу, построенную на решении учебно-познавательной или математической задачи, разделить на отдельные шаги, связанные с этапами решения задачи. С учетом этого разделения учитель выявляет полноту системы вопросов и необходимость ее расширения дополнительными вопросами. Целесообразно при подготовке к эвристической беседе продумать возможность переформулирования вопросов, их уточнения и конкретизации.

На последнем этапе изучения темы учитель может организовать групповую работу по модели «перевернутого класса», в процессе которой обучающиеся будут не только совместно решать задачи, но и обсуждать различные варианты решения, самостоятельно составлять систему вопросов.

Пример 15. Математика 6 класс. Вероятность и статистика. 7–8 классы. Тема «Представление информации».

При изучении темы «Представление информации» в рамках учебных курсов «Математика» в 6 классе и «Вероятность и статистика» в 7–8 классах учитель может сконструировать задачи и задания, используя информацию, размещенную на официальном сайте Федеральной службы государственной статистики (https://rosstat.gov.ru/). Например, информация о 2022 годе, объявленном в России годом народного искусства и нематериального культурного наследия народов России, представлена в форме инфографики, на которой есть круговые и столбчатые диаграммы (рис. 7).

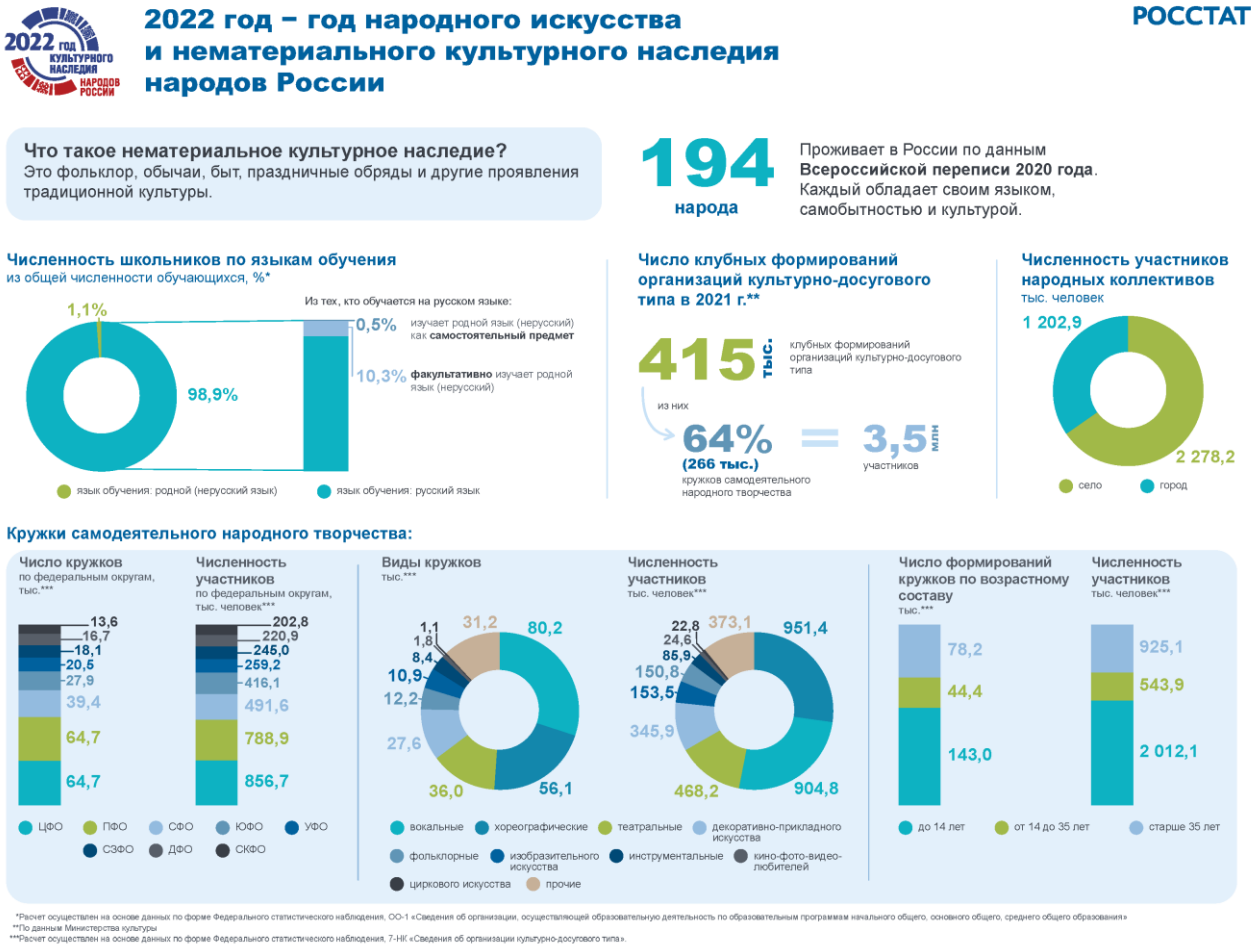


Рис. 7. Пример инфографики для организации беседы

Использование информации, представленной в виде инфографики и таблиц, позволяет учителю организовать беседу и практическую деятельность обучающихся в направлении формирования познавательных УУД: выявлять взаимосвязи в фактах; делать выводы; выстраивать аргументацию;

формулировать вопросы и использовать вопросы как инструмент; анализировать информацию; систематизировать и интерпретировать ее. Практическая деятельность в форме парной (групповой) работы будет способствовать формированию коммуникативных УУД.

Приведем примеры вопросов для практической деятельности:

– В каких федеральных округах наибольшая и наименьшая численность участников кружков?
– Вычислите среднюю численность участников кружков в нашей стране.
– Вычислите размах числового набора, отражающего численность участников различных кружков.
– Представьте информацию с инфографики в другой форме, например в таблице.

Рекомендуется, используя аналогичную информацию, организовать на уроке деятельность в направлении гражданско-патриотического воспитания обучающихся, что будет способствовать формированию личностных результатов при обучении математике.

Примеры вопросов и заданий:

– Что такое, по вашему мнению, культурное наследие?
– Что такое, по вашему мнению, нематериальное культурное наследие?
– Приведите примеры культурного наследия в вашем городе.

Используя достоверную информацию РОССТАТ, рекомендуется поговорить с обучающимися о применении математики в различных сферах, в том числе в аналитике и обработке статистических данных, и важности этой работы для развития страны.

Примеры, рассмотренные во второй главе, подчеркивают большие возможности учебных курсов учебного предмета «Математика» в достижении планируемых метапредметных результатов обучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достижение планируемых метапредметных результатов в рамках изучения предметов математического блока, включающих универсальные учебные действия и междисциплинарные понятия, может быть осуществлено только при специально организованной деятельности обучающихся.

Процесс формирования универсальных учебных действий должен соответствовать принципу ведущей деятельности и базироваться на системно-деятельностном и уровневом подходах.

Для организации процесса формирования универсальных учебных действий используется система задач, включающая учебно-познавательные задачи, математические, контекстные и другие задачи.

Решение рассмотренных учебно-познавательных задач и аналогичных им ориентировано на активную целенаправленную деятельность обучающихся, что обеспечивает ориентацию формирования метапредметных результатов средствами математики на принцип ведущей деятельности (мотив, цель, учебная задача, учебные операции, контроль и самоконтроль).

Формирование универсальных учебных действий возможно при изучении всех тем учебных курсов учебного предмета «Математика» на уровне основного общего образования. Это обеспечивает достижение метапредметных результатов в рамках изучения предметов математического блока на основе системно-деятельностного подхода.

Организация деятельности обучающихся по решению задач разного уровня сложности ориентирована на уровневый подход в формировании метапредметных результатов обучения математике.

Таким образом, изменение подходов к работе с учебными заданиями и задачами, математическими задачами, развитие и совершенствование форм деятельности школьников способствует достижению более качественных результатов обучения математике.

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Нормативные и методические документы[1]

1. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» (Зарегистрирован Минюстом России 05.07.2021 № 64101).
2. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 18.07.2022 № 568 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования, утвержденный приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г. № 287» (Зарегистрирован Минюстом России 17.08.2022 № 69675).
3. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» (Зарегистрирован Минюстом России 7 июня 2012 г. № 24480).
4. Приказ Министерства просвещения РФ от 12 августа 2022 г. № 732 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413» (Зарегистрирован Минюстом России 12.09.2022 № 70034).
5. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 16.11.2022 № 993 «Об утверждении федеральной образовательной программы основного общего образования» (Зарегистрирован Минюстом России 12 июля 2023 № 74223).
6. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 18 мая 2023 № 371 «Об утверждении федеральной образовательной программы среднего общего образования» (Зарегистрирован Минюстом России 12 июля 2023 № 74228).
7. Федеральная рабочая программа основного общего образования по учебному предмету «Математика». Базовый уровень. – М., 2023.

[1] Нормативные и методические документы. – Единое содержание общего образования. – [Электронный ресурс]. – URL: https://edsoo.ru/ (дата обращения 19.12.2023).

8. Федеральная рабочая программа основного общего образования по учебному предмету «Математика». Углублённый уровень. – М., 2023.
9. Федеральная рабочая программа среднего общего образования по учебному предмету «Математика». Базовый уровень. – М., 2023.
10. Федеральная рабочая программа среднего общего образования по учебному предмету «Математика». Углублённый уровень. – М., 2023.
11. «О стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017–2030 годы». Указ Президента Российской Федерации от 09.05.2017 г. № 203.
12. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р.
13. Национальная программа «Цифровая экономика Российской Федерации». Утверждена Протоколом заседания президиума Совета при Президенте Российской Федерации по стратегическому развитию и национальным проектам от 4 июня 2019 г. № 7.
14. Федеральный проект «Цифровая образовательная среда» Минпросвещения России.

Пособия для организации образовательного процесса

15. Алексеева Е.Е. Методика формирования функциональной грамотности учащихся в обучении математике / Е.Е. Алексеева // Проблемы современного педагогического образования. Сборник научных трудов. – Ялта : РИО ГПА, 2020. – Вып. 66. – Ч. 2. – 353 с. – С. 10–15.
16. Алексеева Е.Е. Методические особенности формирования математической грамотности учащихся как составляющей функциональной грамотности / Е.Е. Алексеева // Мир науки, культуры, образования. – 2020. – № 4 (83). – г. Горно-Алтайск, 2020. – 508 с. – С. 214–218.
17. Алексеева Е.Е. Диверсификация содержания математического образования как средство развития учащихся / Е.Е. Алексеева // Сборник статей международной научно-практической конференции «Образование – 2030. Дорожная карта», 15 июня 2021 г. – М. : Издательство Перо, 2021. – 287 с. – С. 187–191.

18. Алексеева Е.Е. Интерактивные лабораторно-практические работы. Учебный предмет «Математика». Углублённый уровень. 10–11 классы: методические рекомендации для учителей / Е.Е. Алексеева. – М. : ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2023.
19. Математическая грамотность. Сборник эталонных заданий. Выпуск 1 : учебное пособие. В 2-х ч. Ч. 1 / [Г.С. Ковалёва и др.] ; под ред. Г.С. Ковалёвой, Л.О. Рословой. – М. ; СПб. : Просвещение, 2021. (Функциональная грамотность. Учимся для жизни).
20. Математическая грамотность. Сборник эталонных заданий. Выпуск 2 : учебное пособие. В 2-х ч. Ч. 1 / [Г.С. Ковалёва и др.] ; под ред. Г.С. Ковалёвой, Л.О. Рословой. – М. ; СПб. : Просвещение, 2021. (Функциональная грамотность. Учимся для жизни).
21. Рослова Л.О. В поиске путей развития математической грамотности учащихся / Л.О. Рослова // Педагогические измерения. – 2017. – № 2.– С. 63–68.
22. Рослова Л.О. Используем открытые задания исследования PISA / Л.О. Рослова // Математика. – 2020. – № 2. – С. 8–13.
23. Рослова Л.О. О формировании функциональной математической грамотности младших школьников / Л.О. Рослова // Начальное образование. – 2018. – № 2 (85). – С. 10–16.
24. Рослова Л.О. Проблема обновления содержания общего образования: от частных случаев к созданию комплексной модели / Л.О. Рослова // Вестник образования. – 2017. – № 10. – С. 27–33.
25. Рослова Л.О. Формирование метапредметных результатов обучения средствами практико-ориентированных заданий с математическим содержанием / Л.О. Рослова // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2017. – Т. 2. – № 5 (44). – С. 69–78.
26. Рослова Л.О. Функциональная математическая грамотность: что под этим понимать и как формировать / Л.О. Рослова // Педагогика. – 2018. – № 10. – С.48–55.
27. Рослова Л.О., Алексеева Е.Е., Буцко Е.В., Карамова И.И. Математика (углублённый уровень). Реализация требований ФГОС основного общего образования : методическое пособие для учителя / Л.О. Рослова,

Е.Е. Алексеева, Е.В. Буцко и др. ; под ред. Л.О. Рословой. – М. : ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО», 2022.

28. Рослова Л.О., Алексеева Е.Е., Буцко Е.В. Математика. Реализация требований ФГОС основного общего образования : методическое пособие для учителя / Л.О. Рослова, Е.Е. Алексеева, Е.В. Буцко ; под ред. Л.О. Рословой. – М. : ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2022. – 264 с.

Электронные ресурсы

29. Math.ru – [Электронный ресурс]. – URL: https://math.ru (дата обращения: 19.12.2023).
30. Атлас новых профессий 3.0. / Под ред. Д. Варламовой, Д. Судакова. – М. : Альпина ПРО, 2021. – 472 с. – URL: https://new.atlas100.ru/ (дата обращения: 19.12.2023).
31. Банк заданий для формирования и оценки функциональной грамотности обучающихся основной школы (5–9 классы). – [Электронный ресурс]. – URL: http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/ (дата обращения 19.12.2023).
32. Виртуальные лабораторные и практические работы на углубленном уровне основного общего образования. – ФГБНУ «ИСРО». – [Электронный ресурс]. – URL: https://content.edsoo.ru/lab/ (дата обращения: 19.12.2023).
33. Виртуальные лабораторные и практические работы на углубленном уровне среднего общего образования. – ФГБНУ «ИСРО». – [Электронный ресурс]. – URL: https://content.edsoo.ru/lab/ (дата обращения: 19.12.2023).
34. Журнал «Математика». – [Электронный ресурс]. – URL: https://raum.math.ru/node/179 (дата обращения: 19.12.2023).
35. Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии». – [Электронный ресурс]. – URL: https://zadachi.mccme.ru/2012/local.html (дата обращения: 19.12.2023).
36. Компьютер на уроке: создание современной информационно-образовательной среды. – [Электронный ресурс]. – URL: http://seninvg07.narod.ru/index.htm (дата обращения 19.12.2023).
37. Методические кейсы по математике. – ФГБНУ «ИСРО». – URL: https://content.edsoo.ru/case/subject/6/ (дата обращения: 19.12.2023).

38. Образовательный центр «Сириус». – [Электронный ресурс]. – URL: https://sochisirius.ru/ (дата обращения: 19.12.2023).
39. Портал «Единое содержание общего образования». – [Электронный ресурс]. – URL: https://edsoo.ru/ (дата обращения: 19.12.2023).
40. Примеры заданий по математической грамотности, которые использовались в исследовании PISA в 2003–2012 годах. – [Электронный ресурс]. – URL: http://www.centeroko.ru/pisa15/pisa15_pub.html (дата обращения 19.12.2023).
41. Российская электронная школа. – [Электронный ресурс]. – URL: https://resh.edu.ru/ (дата обращения: 19.12.2023).
42. Семинары «Методическая поддержка учителей математики при введении и реализации обновлённых ФГОС ООО и СОО». – ФГБОУ «ИСРО». – [Электронный ресурс]. – URL: https://edsoo.ru/ (дата обращения: 19.12.2023).

Книги и методические пособия

43. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М. : Просвещение, 2008.
44. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М. : Просвещение, 2009.
45. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. – М. : МЦНМО, 2019.
46. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М. : Просвещение, 2011.
47. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М. : Просвещение, 2013.
48. Адельшин А.В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г.П. Кукина. Омск, 2007–2009. – М. : МЦНМО, 2011.
49. Андреева А.Н., Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады. 1950/51–1994/95. – 2-е изд. исправленное и дополненное. – М. : МЦНМО, 2013.
50. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М. : Наука, 1975.

51. Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006–2013. – М. : МЦНМО, 2014.
52. Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998–2006. – М. : МЦНМО, 2014.
53. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров : Аса, 1994.
54. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – 3-е изд., стереотип. – М. : МЦНМО, 2013.
55. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. – 5-е изд., стереотипное. – М. : МЦНМО, 2012.
56. Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. – 6-е изд., стереотипное. – М. : МЦНМО, 2011.
57. Зив Б.Г. Задачи по геометрии. 7–11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский. – М. : Просвещение, 2019. – 271 с.
58. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – 8-е изд., стереотипное. – М. : МЦНМО, 2014.
59. Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – 3-е изд., стереотипное. – М. : МЦНМО, 2014.
60. Козлова Е.Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка). – 7-е изд., стереотипное. – М. : МЦНМО, 2013.
61. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М. : ГИФМЛ, 1958. – 576 с.
62. Прасолов В.В. Решение задач повышенной сложности по геометрии. 7–9 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В.В. Прасолов. – М. : Просвещение, 2019. – 239 с.
63. Раскина И.В., Шноль Д.Э. Логические задачи. – М. : МЦНМО, 2014.
64. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др. ; под ред. М.И. Сканави. – М. : ООО «Издательство «Мир и Образование» ; ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2013. – 608 с.

Циклы статей учителей ведущих математических школ в журнале «Математика»

Статьи учителей Президентского физико-математического лицея № 239 (г. Санкт-Петербург)

65. Карачинский Е.О. О президентском физико-математическом лицее // Математика (МЦНМО). – 2021. – № 10. – С. 8–10.

66. Михеев Д. Законы сложения и умножения для пятиклассников из школ
с углубленным изучением математики // Математика (МЦНМО). – 2021. – № 10. – С. 11–12.

67. Шагай М. Наблюдения из геометрии 5 класса // Математика (МЦНМО). –2021. – № 10. – С. 13–14, 59.

68. Александрова А. Уравнение прямой // Математика (МЦНМО). – 2021. –
№ 10. – С. 15–20.

69. Житомирский М. Комбинаторика // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 1.

70. Франк В. Задачи, в которых выгодно применять метод координат // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 1.

71. Лейбсон К. Кубическая функция. Решение кубических уравнений // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 2.

72. Карачинский Е. Графический способ решения задач с параметрами на плоскости *Oxa* // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 3.

73. Тыртов Н. Поэтапные вычислительные навыки учащихся 5 класса // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 4.

Статьи учителей лицея «Вторая школа» (г. Москва)

74. Бибиков П. На уроках алгебры в лицее «Вторая школа» // Математика (МЦНМО). – 2020. – № 5. – С. 4–12.

75. Бибиков П., Козеренко К., Малахов А. Уроки геометрии в лицее «Вторая школа» // Математика (МЦНМО). – 2020. – № 6. – С. 4–9.

Научное издание

Л. О. Рослова, Е. Е. Алексеева, Е. В. Буцко

ДОСТИЖЕНИЕ МЕТАПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В РАМКАХ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДМЕТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО БЛОКА

(ОСНОВНОЕ ОБЩЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ)

Методические рекомендации

Под редакцией Л. О. Рословой

101000, г. Москва, ул. Жуковского, д. 16
ФГБНУ «Институт стратегии развития образования»
Тел. +7(495)621–33–74
info@instrao.ru
https://instrao.ru

Подготовлено к изданию 19.12.2023.
Формат 60×90 1/8.
Усл. печ. л. 4,6.

ISBN 978-5-6050561-7-1