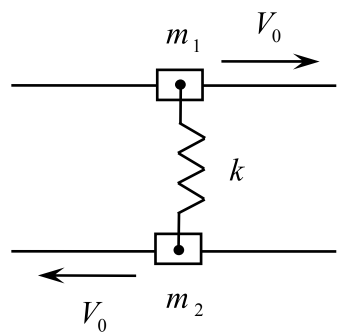
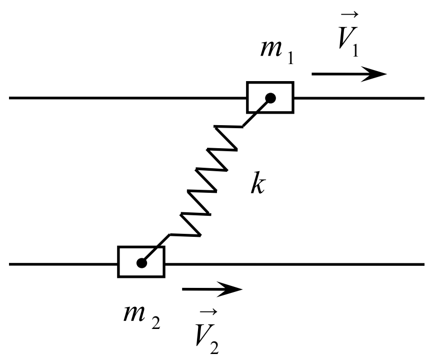
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2023

Отборочный этап. 10 класс

Задача 1 / 1. Два длинных параллельных стержня закреплены в горизонтальной плоскости. По стержням могут скользить без трения грузы 1 и 2 массами $m_1 = 0{,}15$ кг и $m_2 = 0{,}09$ кг. Грузы соединены невесомой пружиной жёсткостью $k = 75$ Н/м. Пружина может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к грузам. В некоторый момент времени, когда расстояние между грузами минимально, пружина растянута и скорости грузов $V_0 = 0{,}3$ м/с одинаковы по абсолютной величине и направлены в противоположные стороны. Удлинение пружины в этом положении $x_0 = 1{,}5$ см. Найдите максимальное удлинение пружины x при дальнейшем движении. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.



Возможное решение



Обозначим через $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$ скорости грузов в некотором произвольном положении. Введём относительную скорость грузов $\vec{V}_{\text{отн}}$:

$$\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V_1} - \vec{V_2}\,.$$

Эта скорость направлена вдоль стержней. Максимальное и минимальное значения длины пружины реализуются в случаях, когда проекция относительной скорости на направление пружины обращается в нуль. Когда длина пружины максимальна, это направление образует со стержнями угол, отличный от прямого. Поэтому в этом случае относительная скорость равна нулю и скорости грузов совпадают. Обозначим эти скорости через $\vec{V}$:

$$\vec{V}_{\text{отн}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{V_1} = \vec{V_2} \equiv \vec{V}\,.$$

Так как грузы движутся без трения, их суммарный импульс сохраняется:

$$m_1V_0 - m_2V_0 = m_1V + m_2V \quad \longrightarrow \quad V = \frac{(m_1 - m_2)\,V_0}{m_1 + m_2}\,.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1V_0^2}{2} + \frac{m_2V_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{m_1V^2}{2} + \frac{m_2V^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \quad \longrightarrow \quad (m_1 + m_2)\,V_0^2 + kx_0^2 = (m_1 + m_2)\,V^2 + kx^2\,.$$

Подставляя в это уравнение выражение для V, находим максимальное удлинение пружины x:

$$(m_1 + m_2)\,V_0^2 + kx_0^2 = (m_1 + m_2)\cdot\frac{(m_1 - m_2)^2\,V_0^2}{(m_1 + m_2)^2} + kx^2\,,$$

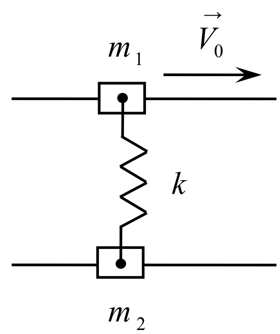
$$kx^2 = kx_0^2 + \frac{V_0^2}{m_1 + m_2}\,\left[\,(m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2\,\right] = kx_0^2 + \frac{4m_1\,m_2\,V_0^2}{m_1 + m_2}\,,$$

$$x = \sqrt{x_0^2\; + \frac{4m_1\,m_2\,V_0^2}{(\,m_1 + m_2\,)\,k}} = 2{,}2\ \text{см}\,.$$

Ответ:

$$x = \sqrt{x_0^2\; + \frac{4m_1\,m_2\,V_0^2}{(\,m_1 + m_2\,)\,k}} = 2{,}2\ \text{см}\,.$$

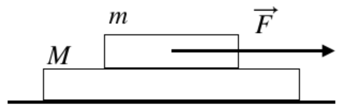
Задача 1 / 2. Два длинных параллельных стержня закреплены в горизонтальной плоскости. По стержням могут скользить без трения грузы 1 и 2 массами $m_1 = 0{,}25$ кг и $m_2 = 0{,}1$ кг. Грузы соединены невесомой пружиной жёсткостью $k = 50$ Н/м. Пружина может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к грузам. В некоторый момент времени, когда расстояние между грузами минимально, пружина растянута, скорость груза 1 равна $V_0 = 0{,}8$ м/с, а скорость груза 2 равна нулю. Удлинение пружины в этом положении $x_0 = 2{,}5$ см. Найдите максимальное удлинение пружины x при дальнейшем движении. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.



Ответ:

$$x = \sqrt{x_0^2\; + \frac{m_1\,m_2\,V_0^2}{(\,m_1 + m_2\,)\,k}} = 3{,}9\ \text{см}\,.$$

Задача 2 / 1. Два бруска размещены на поверхности стола так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между поверхностью стола и бруском массой $M = 0{,}6$ кг равен $\mu_1 = 0{,}25$. Коэффициент трения между бруском массой $m = 0{,}4$ кг и поверхностью бруска массой M равен $\mu_2 = 1{,}0$. К бруску m приложили горизонтальную силу $\vec{F} = 3{,}4$ Н, как показано на рисунке. Найти величину силы трения $F_{\text{тр}}$, действующую на брусок m, в случае, когда оба бруска движутся с одинаковыми ускорениями. Ускорение свободного падения примите равным 10 м/с^2, ответ округлите до сотых.



Возможное решение

Напишем второй закон Ньютона для верхнего и нижнего брусков в проекции на направление действия силы $\vec{F}$:

$$ma_1 = F - F_{\text{тр}},$$
$$Ma_2 = F_{\text{тр}} - \mu_1(M+m)g,$$

где a_1 – ускорение верхнего бруска, a_2 – ускорение нижнего бруска. Условием сцепленного движения брусков будет равенство ускорений $a_1 = a_2$. При этом нужно учитывать, что сила трения $F_{\text{тр}}$ может принимать значения на отрезке $[0, \mu_2 mg]$. Напишем условие сцепленного движения:

$$\frac{F - F_{\text{тр}}}{m} = \frac{F_{\text{тр}} - \mu_1(M+m)g}{M}.$$

Отсюда выражаем искомое значение силы трения:

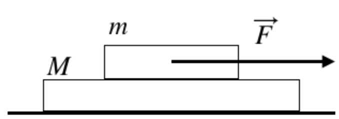
$$F_{\text{тр}} = \frac{M}{M+m}F + \mu_1 mg = 3{,}04 \text{ Н}$$

Ответ:

$$F_{\text{тр}} = 3{,}04 \text{ Н}.$$

.

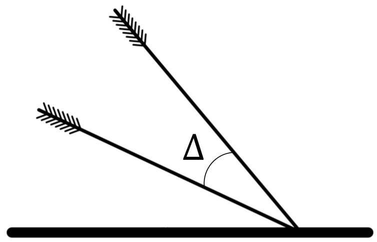
Задача 2 / 2. Два бруска размещены на поверхности стола так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между поверхностью стола и бруском массой $M = 0{,}9$ кг равен $\mu_1 = 0{,}2$. Коэффициент трения между бруском массой $m = 0{,}3$ кг и поверхностью бруска массой M равен $\mu_2 = 2{,}0$. К бруску m приложили горизонтальную силу $\vec{F} = 5$ Н, как показано на рисунке. Найти величину силы трения $F_{\text{тр}}$, действующую на брусок m, в случае, когда оба бруска движутся с одинаковыми ускорениями. Ускорение свободного падения примите равным 10 м/с^2, ответ округлите до сотых.



Ответ:

$$F_{\text{тр}} = 4{,}35 \text{ Н}.$$

Задача 3 / 1 . Выстрелив дважды из английского лука, Робин Гуд сумел попасть обеими стрелами в одну точку, стреляя в одной плоскости под разными углами к горизонту. Оказалось, что угол между стрелами в земле составил $\Delta = 40°$. Под какими углами к горизонту в плоскости траектории полета стрелы попали в землю, если обе стрелы были выпущены с одинаковой силой? Сила натяжения английского лука при выстреле равна 140 Н. Считайте, что Робин Гуд тренируется на равнине в безветренную погоду. Ответ выразите в градусах. Примечание: формула синуса двойного угла: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.



Возможное решение

Покажем, что в данной задаче нам не понадобится знать силу натяжения английского лука, достаточно лишь значения угла между стрелами. Пусть скорость, с которой выпущена первая стрела равна v, угол под которым она воткнулась в землю α. Тогда время полета стрелы можно найти как:

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

Умножая на горизонтальную составляющую скорости можно найти дистанцию, на которой приземлилась стрела:

$$s_1 = v\cos\alpha\, t = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Тогда обозначая второй угол за β, получим аналогичное выражение для дальности полёта второй стрелы. Поскольку стрелы выпускают с одинаковой силой, начальные скорости будут равны по модулю в обоих случаях:

$$s_2 = v\cos\beta\, t = \frac{2v^2}{g}\sin\beta\cos\beta.$$

По условию дальности полёта стрел равны, что приводит нас к следующему уравнению:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta\cos\beta \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 2\beta.$$

Нас не интересует решение $\alpha = \beta$, также нам интересны лишь углы, лежащие в пределах 90 градусов. Перепишем уравнение, используя, например, формулы приведения:

$$\cos(2\alpha - 90°) = \cos(90° - 2\beta) \Rightarrow 2\alpha - 90° = 90° - 2\beta \Rightarrow \alpha = 90° - \beta.$$

Разность углов равна: $\Delta = \beta - \alpha = 40°$. Решая систему уравнений, получаем искомые углы: $\alpha = 25°, \quad \beta = 65°$.

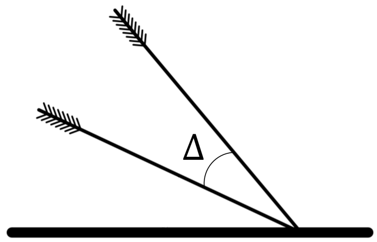
Ответ:

$$\alpha = 25°, \quad \beta = 65°.$$

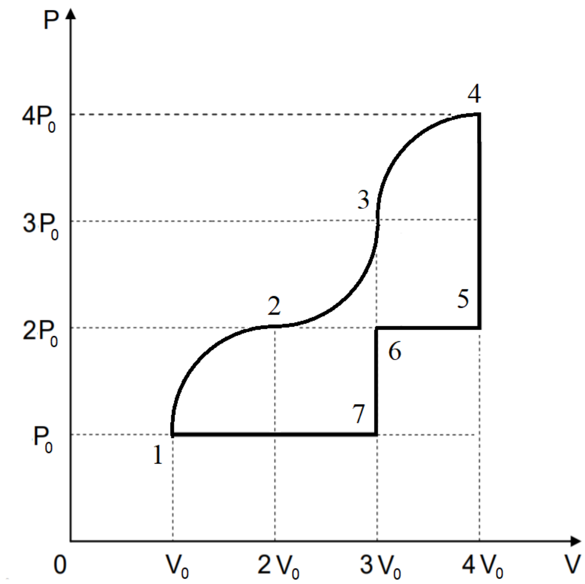
Задача 3 / 2. Выстрелив дважды из английского лука, Робин Гуд сумел попасть обеими стрелами в одну точку, стреляя в одной плоскости под разными углами к горизонту. Оказалось, что угол между стрелами в земле составил $\Delta = 20°$. Под какими углами к горизонту в плоскости траектории полета стрелы попали в землю, если обе стрелы были выпущены с одинаковой силой? Сила натяжения английского лука при выстреле равна 150 Н. Считайте, что Робин Гуд тренируется на равнине в безветренную погоду. Ответ выразите в градусах. Примечание: формула синуса двойного угла: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Ответ:

$$\alpha = 35°, \quad \beta = 55°.$$



Задача 4. Одноатомным идеальным газом совершается циклический процесс, который состоит из 7 участков. Циклический процесс изображен на диаграмме $P-V$. Процессы 1–2, 2–3 и 3–4 представляют собой четверти эллипса, процессы 4–5 и 6–7 — изохорические, 5–6 и 7–1 — изобарические. Найдите КПД цикла. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение

КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{A}{|Q_{\text{х}}| + A},$$

где Q — тепло, полученное газом за цикл, $Q_{\text{х}}$ — тепло, отданное газом за цикл, A — работа газа за цикл. Работа газа за цикл A численно будет равна площади внутри цикла:

$$A = 3P_0V_0 + \frac{1}{4}\pi P_0V_0 = P_0V_0(\frac{\pi}{4} + 3),$$

Газ отдаёт тепло на участках 4–5, 5–6, 6–7, 7–1:

$$Q_{4-5} = \frac{3}{2}(P_4V_4 - P_5V_5) = \frac{3}{2}(16P_0V_0 - 8PV) = 12P_0V_0,$$

$$Q_{5-6} = \frac{3}{2}\Delta U_{5-6} + A_{5-6} = \frac{5}{2}A_{5-6} = \frac{5}{2} \cdot 2P_0V_0 = 5P_0V_0,$$

$$Q_{6-7} = \frac{3}{2}(P_6V_6 - P_7V_7) = \frac{3}{2}(6P_0V_0 - 3P_0V_0) = 4{,}5P_0V_0,$$

$$Q_{7-1} = \frac{3}{2}\Delta U_{7-1} + A_{7-1} = \frac{5}{2}A_{7-1} = \frac{5}{2} \cdot 2P_0V_0 = 5P_0V_0.$$

Следовательно,

$$Q_{\text{х}} = P_0V_0(12 + 4{,}5 + 5 + 5) = 26{,}5P_0V_0.$$

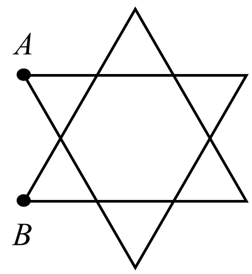
Получим КПД цикла:

$$\eta = \frac{P_0V_0(\frac{\pi}{4} + 3)}{26{,}5P_0V_0 + P_0V_0(\frac{\pi}{4} + 3)} \approx 0{,}12.$$

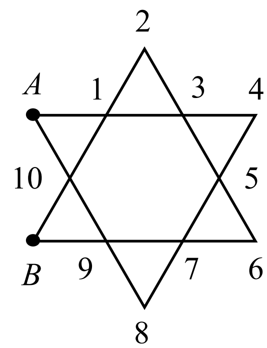
Ответ:

$$\eta = 0{,}12.$$

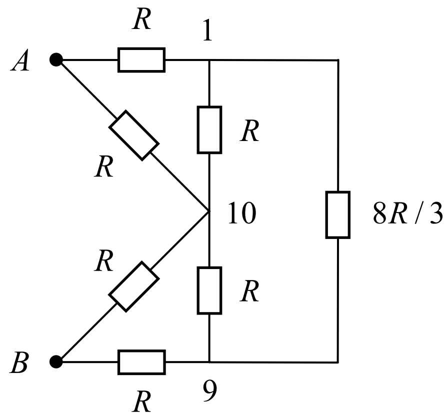
Задача 5 / 1. Из восемнадцати проволочных отрезков сопротивлением $R = 0{,}35$ Ом каждый собрана шестиконечная звезда. Найдите общее сопротивление звезды R_0 при её подключении к источнику постоянного к точкам A и B. Ответ выразите в омах и округлите до сотых.



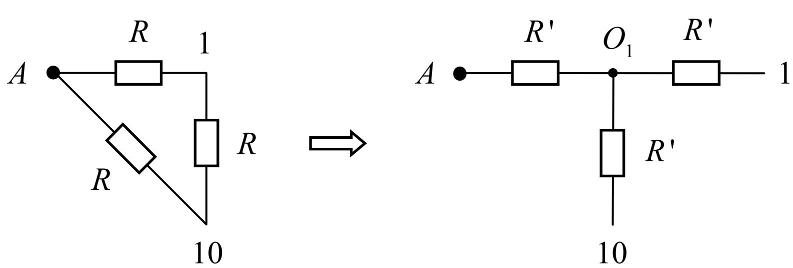
Возможное решение



Перенумеруем узлы звезды числами от 1 до 10. Треугольники 1–2–3, 3–4–5, 5–6–7 и 7–8–9 состоят из сопротивлений R и $2R$, соединённых параллельно. Общее сопротивление каждого такого треугольника равно $2R/3$. Поскольку эти треугольники соединены последовательно, их можно заменить одним сопротивлением $8R/3$. В результате получаем упрощённую схему:



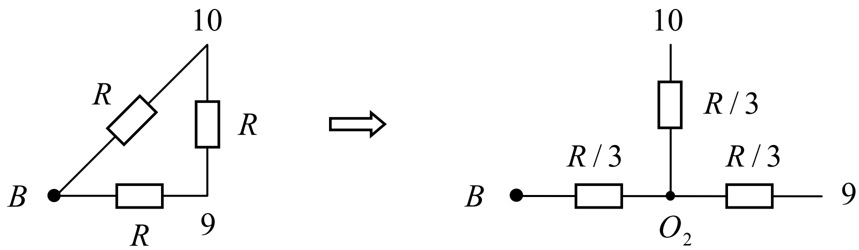
Для того чтобы продвинуться дальше, преобразуем треугольник A–1–10 в звезду с центром в точке O_1.



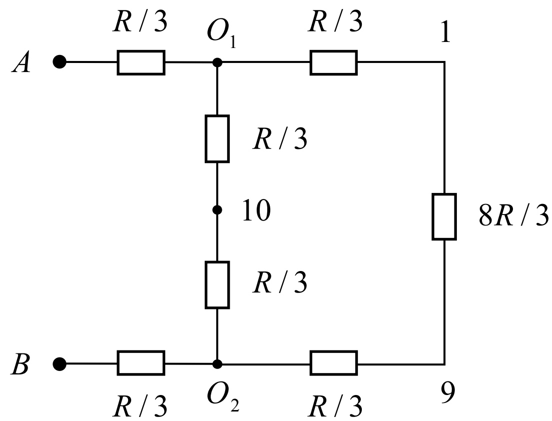
Так как сопротивления всех сторон треугольника одинаковы, звезда также состоит из одинаковых сопротивлений R'. Значение R' найдём, потребовав, чтобы при подключении источника тока за точки A и 1 сопротивления треугольника и звезды совпадали. Получаем:

$$\frac{2R}{3} = 2R' \quad \longrightarrow \quad R' = \frac{R}{3}\,.$$

Треугольник B–10–9 заменим на такую же звезду с центром в точке O_2.



В результате приходим к схеме, общее сопротивление которой легко вычисляется по обычным правилам сложения сопротивлений при параллельном и последовательном соединениях.

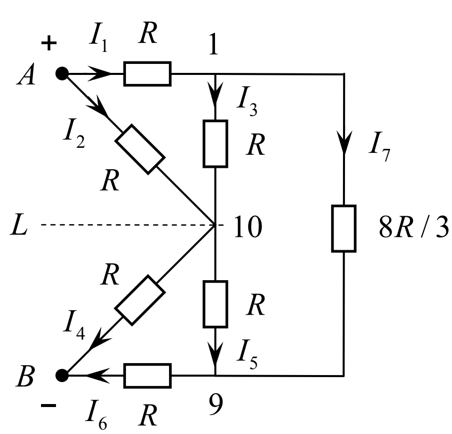


Сопротивления участков O_1–O_2 и O_1–1–9–O_2 равны соответственно $2R/3$ и $10\,R/3$. Эти участки включены параллельно. Их общее сопротивление равно

$$\frac{(2R/3)\cdot(10\,R/3)}{(2R/3)+(10\,R/3)} = \frac{5R}{9}\,.$$

Добавляя ещё два сопротивления $R/3$ на участках A–O_1 и B–O_2, находим общее сопротивление звезды:

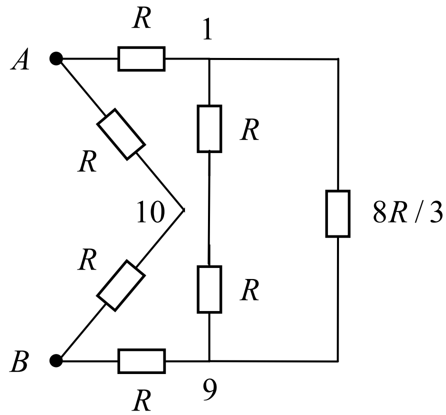
$$R_0 = \frac{R}{3} + \frac{5R}{9} + \frac{R}{3} = \frac{11\,R}{9} = 0{,}43\ \text{Ом}\,.$$



Возможно другое решение. Вернёмся к первой упрощённой схеме. Предположим, что положительный полюс источника тока подключен к точке A, а отрицательный к точке B. Расставим токи в ветвях. Схема зеркально симметрична относительно горизонтальной прямой L, проходящей через точку 10. Поэтому можно утверждать, что распределение токов также обладает зеркальной симметрией. В частности, это означает, что справедливы следующие равенства:

$$I_2 = I_4\,, \quad I_3 = I_5\,.$$

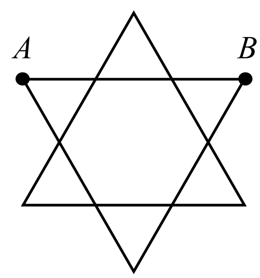
По этой причине ветви A–10–B и 1–10–9 можно разделить в точке 10 без изменения распределения токов. В результате получаем простую схему, сопротивление которой легко найти. Ответ, разумеется, совпадает с найденным выше.



Ответ:

$$R_0 = \frac{11\,R}{9} = 0{,}43\ \text{Ом}\,.$$

Задача 5 / 2. Из восемнадцати проволочных отрезков сопротивлением $R = 0{,}11$ Ом каждый собрана шестиконечная звезда. Найдите общее сопротивление звезды R_0 при её подключении к источнику постоянного тока к точкам A и B. Ответ выразите в омах и округлите до сотых.



Ответ:

$$R_0 = \frac{14\,R}{9} = 0{,}17\ \text{Ом}\,.$$