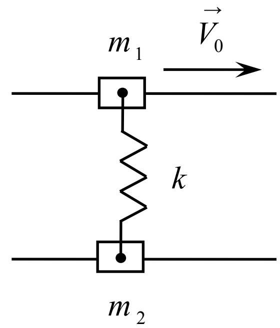
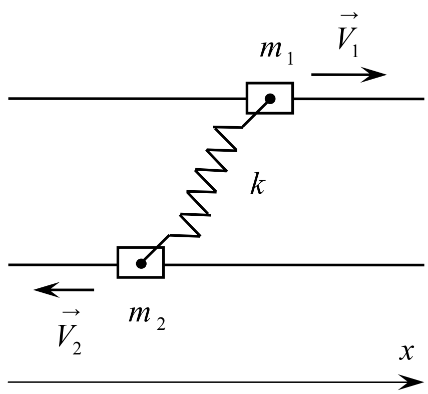
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2023

Отборочный этап. 11 класс

Задача 1 / 1. Два длинных параллельных стержня закреплены в горизонтальной плоскости. По стержням могут скользить без трения грузы 1 и 2 массами $m_1 = 0{,}1$ кг и $m_2 = 0{,}15$ кг. Грузы соединены невесомой пружиной жёсткостью $k = 60$ Н/м. Пружина может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к грузам. В некоторый момент времени, когда расстояние между грузами минимально, пружина сжата, скорость груза 1 равна $V_0 = 0{,}2$ м/с, а скорость груза 2 равна нулю. Сжатие пружины в этом положении $x_0 = 2$ см. Найдите максимальную скорость V_1 груза 1 при дальнейшем движении. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Возможное решение



Рассмотрим движение грузов в неподвижной системе отсчёта, связанной со стержнями. Направим ось x этой системы вдоль вектора $\overrightarrow{V_0}$. Обозначим через $\overrightarrow{V_1}$ и $\overrightarrow{V_2}$ скорости грузов в некотором произвольном положении. Одно из положений, близких к начальному, показано на рисунке. Здесь пружина всё ещё остаётся сжатой и составляющие силы упругости, направленные вдоль стержней, разгоняют груз 1 вправо, а груз 2 влево. Так как грузы движутся без трения, их суммарный импульс сохраняется:

$$m_1 V_0 = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x}\,,$$

V_{1x} и V_{2x} — проекции скоростей грузов на ось x. Удобнее работать с проекциями, поскольку при движении направления скоростей могут меняться. Рассмотрим экстремальные значения проекции V_{1x}. Очевидно, что они достигаются в те моменты времени, когда ускорение груза 1 обращается в нуль. При этом равна нулю проекция на ось x силы упругости, действующей на груз. Такое возможно в двух случаях.

(a) Пружина расположена перпендикулярно стержням (как в начальном положении).

(b) Пружина не деформирована. При этом она образует с осью x угол, отличный от прямого.

Рассмотрим эти случаи по порядку.

Если пружина расположена перпендикулярно стержням, то её сжатие равно начальному значению x_0. Запишем закон сохранения энергии для этого случая:

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} + \frac{k x_0^2}{2} = \frac{m_1 V_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2x}^2}{2} + \frac{k x_0^2}{2} \quad \longrightarrow \quad m_1 V_0^2 = m_1 V_{1x}^2 + m_2 V_{2x}^2\,.$$

Имеем систему двух уравнений, которые удобно переписать так:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m_1(V_0 - V_{1x}) & = & m_2 V_{2x}\,, \\ m_1(V_0^2 - V_{1x}^2) & = & m_2 V_{2x}^2\,. \end{array} \right.$$

Одно решение этой системы очевидно:

$$V_{1x} = V_0 = 0{,}2 \text{ м/с}\,, \quad V_{2x} = 0\,.$$

Качественно движение грузов представляет собой смещение всей системы как целого вправо, на которое наложены относительные колебания. Найденное решение соответствует восстановлению начального положения и скоростей грузов через каждый период колебаний.

Если $V_{1x} \neq V_0$, то можно поделить второе уравнение на первое. В результате получаем систему линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m_1(V_0 - V_{1x}) & = & m_2 V_{2x}\,, \\ V_0 + V_{1x} & = & V_{2x}\,. \end{array} \right.$$

Решение этой системы легко найти:

$$V_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)\,V_0}{m_1 + m_2}\,, \quad V_{2x} = \frac{2m_1 V_0}{m_1 + m_2}\,.$$

Подстановка числовых значений даёт:

$$V_{1x} = -0{,}04 \text{ м/с}\,, \quad V_{2x} = 0{,}16 \text{ м/с}\,.$$

Это решение соответствует восстановлению начального положения грузов через нечётное число полупериодов колебаний. При этом скорости грузов отличаются от начальных скоростей. Отрицательное значение V_{1x} означает, что груз 1 движется в направлении, противоположном вектору $\overrightarrow{V_0}$.

Рассмотрим теперь второй случай, в котором пружина не деформирована. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} + \frac{k x_0^2}{2} = \frac{m_1 V_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2x}^2}{2}\,.$$

Подставляя сюда значение V_{2x}, выраженное из закона сохранения импульса, приходим к квадратному уравнению относительно V_{1x}:

$$(\alpha + 1)\,w^2 - 2w + 1 - \alpha\,(\beta + 1) = 0\,.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$w = \frac{V_{1x}}{V_0}\,, \quad \alpha = \frac{m_2}{m_1}\,, \quad \beta = \frac{k\,x_0^2}{m_1 V_0^2}\,.$$

Корни этого уравнения равны:

$$(\,V_{1x}\,)_1 = \frac{V_0}{\alpha + 1}\left\{1 + \sqrt{\alpha\,[\,\alpha\,(\,\beta + 1) + \beta\,]}\right\}\,,$$

$$(\,V_{1x}\,)_2 = \frac{V_0}{\alpha + 1}\left\{1 - \sqrt{\alpha\,[\,\alpha\,(\,\beta + 1) + \beta\,]}\right\}\,.$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$\alpha = 1{,}5\,, \quad \beta = 6\,,$$

$$(\,V_{1x}\,)_1 = 0{,}48 \text{ м/с}\,, \quad (\,V_{1x}\,)_2 = -0{,}32 \text{ м/с}\,.$$

При движении из начального положения пружина некоторое время остаётся сжатой и дополнительно разгоняет первый груз вправо. Максимальное значение скорости достигается в момент, когда пружина становится недеформированной. Это значение равно первому корню $(\,V_{1x}\,)_1$. В дальнейшем пружина растягивается и тормозит груз. Второй корень $(\,V_{1x}\,)_2$ определяет скорость груза в момент, когда удлинение пружины снова становится равным нулю.

Таким образом, мы имеем четыре экстремальных значения скорости первого груза:

$$0{,}2 \text{ м/с}\,, \quad -0{,}04 \text{ м/с}\,, \quad 0{,}48 \text{ м/с}\,, \quad -0{,}32 \text{ м/с}\,.$$

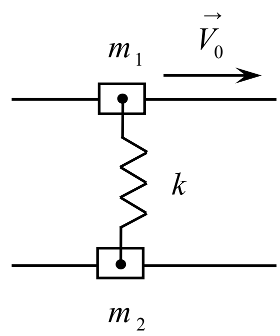
Максимальная скорость V_1 равна 0,48 м/с.

Ответ:

$$V_1 = \frac{V_0}{\alpha + 1}\left\{1 + \sqrt{\alpha\,[\,\alpha\,(\,\beta + 1) + \beta\,]}\right\} = 0{,}48 \text{ м/с}\,;$$

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1} = 1{,}5\,; \quad \beta = \frac{k\,x_0^2}{m_1 V_0^2} = 6\,.$$

Задача 1 / 2. Два длинных параллельных стержня закреплены в горизонтальной плоскости. По стержням могут скользить без трения грузы 1 и 2 массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}075$ кг. Грузы соединены невесомой пружиной жёсткостью $k = 80$ Н/м. Пружина может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к грузам. В некоторый момент времени, когда расстояние между грузами минимально, пружина сжата, скорость груза 1 равна $V_0 = 0{,}4$ м/с, а скорость груза 2 равна нулю. Сжатие пружины в этом положении $x_0 = 1$ см. Найдите минимальную скорость V_1 груза 1 при дальнейшем движении. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.

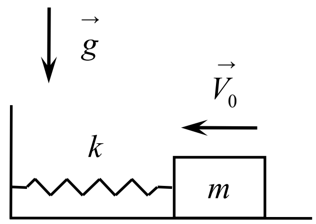


Ответ:

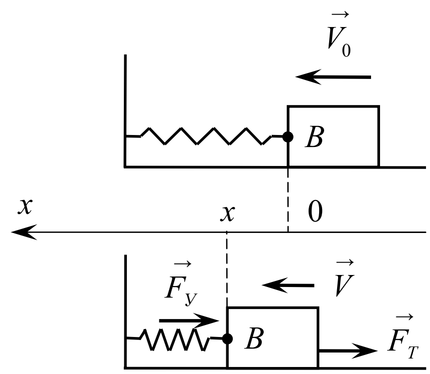
$$V_1 = \frac{V_0}{\alpha + 1}\left\{1 - \sqrt{\alpha\,[\,\alpha\,(\,\beta + 1) + \beta\,]}\right\} = 0{,}14 \text{ м/с}\,;$$

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1} = 0{,}375\,; \quad \beta = \frac{k\,x_0^2}{m_1 V_0^2} = 0{,}25\,.$$

Задача 2 / 1. На горизонтальном столе стоит брусок массой $m = 2$ кг, прикреплённый к вертикальной стене невесомой недеформированной пружиной жёсткостью $k = 15$ Н/м. Коэффициент трения скольжения бруска по столу $\mu = 0{,}1$. Коротким ударом бруску сообщают скорость $V_0 = 0{,}8$ м/с, направленную вдоль пружины влево. Найдите время τ, прошедшее от начала движения до момента, когда скорость бруска обратится в нуль. Ответ выразите в секундах и округлите до сотых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



Рассмотрим движение бруска в системе отсчёта, связанной со столом. Направим ось x этой системы вдоль вектора $\overrightarrow{V_0}$. Поскольку брусок движется поступательно, скорости и ускорения всех его точек одинаковы. Поэтому можно следить за движением любой точки бруска. Выберем точку B, в которой пружина прикреплена к бруску. Горизонтальную координату будем отсчитывать от начального положения этой точки. Тогда координата x точки B равна сжатию пружины.

При движении влево на брусок действует сила упругости $\overrightarrow{F_{\text{У}}}$ со стороны пружины и сила трения скольжения $\overrightarrow{F_{\text{Т}}}$ со стороны стола. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$ma_x = -F_{\text{У}} - F_{\text{Т}}\,, \quad ma_x = -kx - \mu mg\,, \quad ma_x = -k\left(x + \frac{\mu mg}{k}\right)\,.$$

В последнем уравнении введём новую координату y:

$$y = x + \frac{\mu mg}{k}\,.$$

Эта координата отличается от x только сдвигом начала отсчёта. Направления осей x и y совпадают. Поэтому проекции скорости и ускорения на эти оси одинаковы:

$$V_x = V_y\,, \quad a_x = a_y\,.$$

В результате получаем уравнение гармонических колебаний груза на пружине:

$$ma_y = -ky\,.$$

Запишем его решение:

$$y = A\sin(\omega t + \alpha)\,,$$

A — положительная амплитуда, α — начальная фаза, ω — круговая частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Для координаты x и проекции скорости V_x имеем:

$$x(t) = y - \frac{\mu mg}{k} = A\sin(\omega t + \alpha) - \frac{\mu g}{\omega^2}\,,$$

$$V_x\left(t\right)=A\omega\cos\left(\omega t+\alpha\right).$$

Величины A и α определяются начальными условиями:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x\left(0\right) & = & 0\,, \\ V_x\left(0\right) & = & V_0\,. \end{array}\right.$$

Получаем:

$$\left\{\begin{array}{rcl} A\sin\alpha & = & \mu g/\omega^2\,, \\ A\cos\alpha & = & V_0/\omega\,. \end{array}\right.$$

Так как $A>0$, угол α острый. Выразим его через арктангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\mu g}{\omega\,V_0}\quad\longrightarrow\quad\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{\mu g}{\omega\,V_0}\right).$$

Найдём теперь время τ:

$$V_x\left(\tau\right)=0\,,\quad\cos\left(\omega\tau+\alpha\right)=0\,,\quad\tau=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\omega}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{\mu g}{\omega\,V_0}\right)\right].$$

Используя равенство

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\,,$$

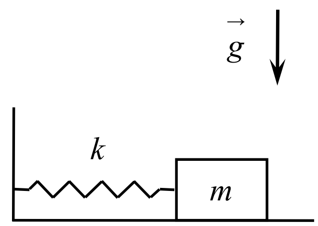
справедливое для положительных x, окончательно получаем:

$$\tau=\frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega\,V_0}{\mu g}\right)=0{,}42\ \text{с}\,.$$

Ответ:

$$\tau=\frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega\,V_0}{\mu g}\right)=0{,}42\ \text{с}\,;\quad\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

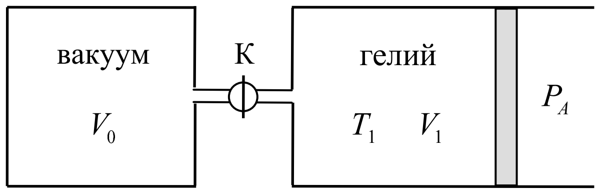
Задача 2 / 2. На горизонтальном столе стоит брусок массой $m = 1$ кг, прикреплённый к вертикальной стене невесомой недеформированной пружиной жёсткостью $k = 50$ Н/м. Коэффициент трения скольжения бруска по столу $\mu = 0{,}05$. Брусок сдвигают вправо на расстояние $x_0 = 2{,}7$ см и отпускают без толчка. Найдите время τ, прошедшее от начала движения до момента, когда удлинение пружины обратится в нуль. Ответ выразите в секундах и округлите до сотых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



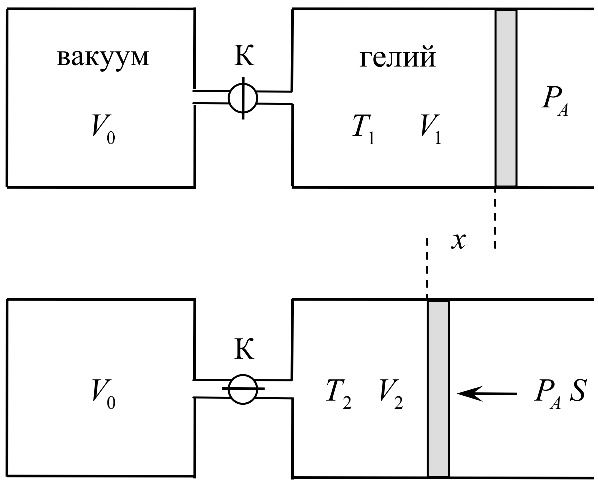
Ответ:

$$\tau = \frac{1}{\omega}\arccos\left(\frac{\mu\, g}{\mu\, g - \omega^2 x_0}\right) = 0{,}31 \text{ с}\,; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Задача 3 / 1. Два цилиндра соединены короткой трубкой с краном К. Объём левого цилиндра $V_0 = 4$ л. Правый цилиндр закрыт поршнем, который может двигаться без трения. Справа от поршня цилиндр открыт в атмосферу. В начальном состоянии кран закрыт и левый цилиндр откачан до глубокого вакуума. В правом цилиндре находится гелий при температуре $T_1 = 300$ К и атмосферном давлении P_A. Объём гелия $V_1 = 5{,}5$ л. Кран открывают, гелий начинает перетекать в левый цилиндр, поршень перемещается, и вся система переходит в новое равновесное состояние. Найдите температуру гелия T_2 в этом состоянии, считая, что стенки цилиндров и поршень не проводят тепло. Объём трубки с краном не учитывайте, атмосферное давление считайте постоянным. Ответ выразите в кельвинах и округлите до целого значения.



Возможное решение



Обозначим через V_2 конечный объём газа в правом цилиндре. Полный конечный объём газа равен $(V_0 + V_2)$. Запишем уравнение состояния:

$$P_A V_1 = \nu R T_1 \quad \longrightarrow \quad \nu = \frac{P_A V_1}{R T_1},$$

$$P_A (V_0 + V_2) = \nu R T_2 \quad \longrightarrow \quad P_A V_2 = \nu R T_2 - P_A V_0,$$

где ν — число молей газа. Согласно первому началу термодинамики имеем:

$$0 = \nu C_V T_2 - \nu C_V T_1 + A,$$

C_V — молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме, A — работа силы давления газа на поршень (работа газа). Запишем уравнение баланса энергии для поршня:

$$0 = A + A'.$$

Нуль в левой части — приращение механической энергии поршня. В правой части имеем сумму работы газа A и работы A' силы постоянного атмосферного давления $P_A S$ (S — площадь поперечного сечения поршня). Обозначим через x перемещение поршня. Тогда

$$A' = P_A S x = P_A (V_1 - V_2).$$

Работа газа равна:

$$A = -A' = -P_A V_1 + P_A V_2 = -\nu R T_1 + \nu R T_2 - P_A V_0.$$

Подставляя этот результат в уравнение первого начала термодинамики и используя полученное ранее выражение для ν, находим конечную температуру газа T_2:

$$0 = \nu C_V T_2 - \nu C_V T_1 - \nu R T_1 + \nu R T_2 - P_A V_0,$$

$$\nu T_2\,(C_V + R) = \nu T_1\,(C_V + R) + P_A V_0\,,$$

$$T_2 = T_1 + \frac{P_A V_0}{\nu C_P} = T_1 + \frac{P_A V_0}{C_P}\cdot\frac{RT_1}{P_A V_1} = T_1\,\left(1 + \frac{R\,V_0}{C_P\,V_1}\right)\,.$$

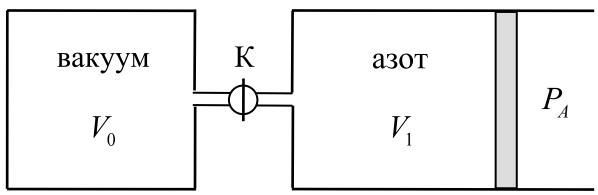
Здесь $C_P = C_V + R$ — молярная теплоёмкость при постоянном давлении. Для гелия имеем: $C_V = 3R/2$, $C_P = 5R/2$,

$$T_2 = T_1\,\left(1 + \frac{2\,V_0}{5\,V_1}\right) = 387\ \text{К}\,.$$

Ответ:

$$T_2 = T_1\left(1 + \frac{2\,V_0}{5\,V_1}\right) = 387\ \text{К}\,.$$

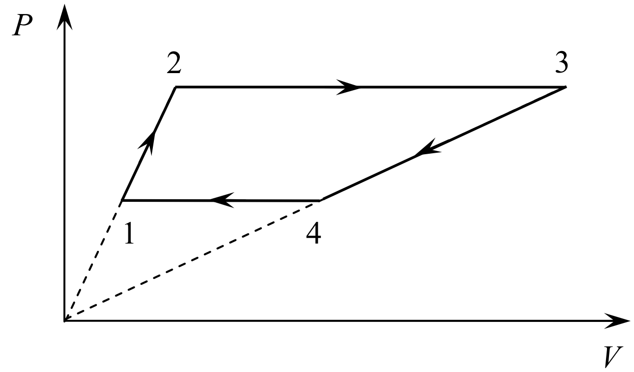
Задача 3 / 2. Два цилиндра соединены короткой трубкой с краном К. Объём левого цилиндра $V_0 = 2{,}5$ л. Правый цилиндр закрыт поршнем, который может двигаться без трения. Справа от поршня цилиндр открыт в атмосферу. В начальном состоянии кран закрыт и левый цилиндр откачан до глубокого вакуума. В правом цилиндре находится молекулярный азот N_2 при атмосферном давлении P_A. Объём азота $V_1 = 3{,}5$ л. Кран открывают, азот начинает перетекать в левый цилиндр, поршень перемещается, и вся система переходит в новое равновесное состояние. Найдите объём азота V_2 в этом состоянии, считая, что стенки цилиндров и поршень не проводят тепло. Объём трубки с краном не учитывайте, атмосферное давление считайте постоянным. Ответ выразите в литрах и округлите до десятых.



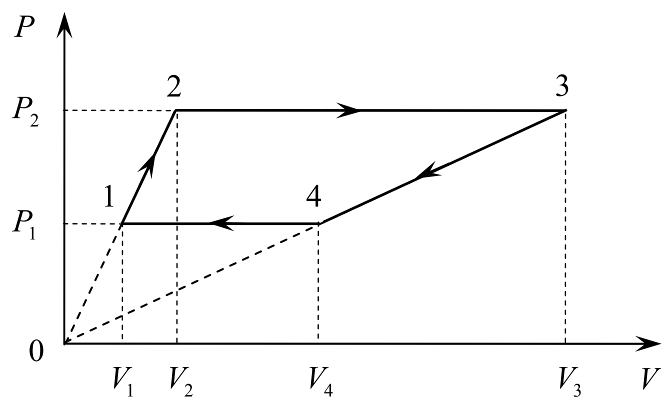
Ответ:

$$V_2 = V_1 + \frac{2\,V_0}{7} = 4{,}2\ \text{л}\,.$$

Задача 4 / 1. Тепловой двигатель работает по замкнутому циклу, состоящему из четырех участков. Участки 1–2 и 3–4 — отрезки прямых, проходящих через начало координат на диаграмме P, V. Участки 2–3 и 4–1 — изобары. Рабочим веществом является идеальный одноатомный газ. Температуры газа в точках 2 и 4 одинаковы: $T_2 = T_4$. КПД двигателя $\eta = 2{,}5$ %. Найдите отношение $x = T_{\max}/T_{\min}$, где $T_{\max}$ и $T_{\min}$ — максимальная и минимальная температуры газа в цикле. Ответ округлите до десятых.



Возможное решение



Температура газа максимальна в точке 3, а минимальна в точке 1. Поэтому имеем равенство:

$$T_3 = x\,T_1\,.$$

Обозначим через ν число молей газа и запишем уравнение состояния в точках 1–4. С учётом равенства $T_4 = T_2$ имеем:

$$P_1V_1 = \nu RT_1\,,$$

$$P_1V_4 = \nu RT_2\,,$$

$$P_2V_2 = \nu RT_2\,,$$

$$P_2V_3 = \nu RT_3\,.$$

Ещё несколько полезных соотношений следуют из подобия треугольников:

$$\triangle\,0\,2V_2 \sim \triangle\,0\,1V_1: \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_2}{P_1} \quad \longrightarrow \quad P_1V_2 = P_2V_1\,.$$

$$\triangle\,0\,3V_3 \sim \triangle\,0\,4V_4: \quad \frac{V_3}{V_4} = \frac{P_2}{P_1} \quad \longrightarrow \quad P_1V_3 = P_2V_4\,.$$

С помощью этих соотношений выразим температуру T_2 через T_1:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad \longrightarrow \quad \frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}\,,$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \quad \longrightarrow \quad T_2 = \sqrt{T_3\,T_1} = \sqrt{x}\,T_1\,.$$

Найдём работу газа за цикл как площадь трапеции 1234. Используя равенства $P_1V_2 = P_2V_1$ и $P_1V_3 = P_2V_4$, получаем:

$$A = \frac{(V_4 - V_1) + (V_3 - V_2)}{2} \cdot (P_2 - P_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(P_2V_4 - P_2V_1 + P_2V_3 - P_2V_2 - P_1V_4 + P_1V_1 - P_1V_3 + P_1V_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(P_2V_3 - P_2V_2 - P_1V_4 + P_1V_1) =$$

$$= \frac{\nu R}{2}\,(T_3 - 2T_2 + T_1) = \frac{\nu RT_1}{2}\,(\,x - 2\sqrt{x} + 1\,) = \frac{\nu RT_1}{2}\,(\,\sqrt{x} - 1\,)^2\,.$$

Газ получает тепло на участках 1–2 и 2–3. Количество теплоты, подведённое на участке 1–2, равно:

$$Q_{12} = \nu\,C_V T_2 - \nu\,C_V T_1 + A_{12} = \nu\,C_V T_1\,(\,\sqrt{x} - 1\,) + A_{12}\,,$$

C_V — молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме, A_{12} — работа газа на участке 1–2. Вычислим работу как площадь трапеции $V_1 12 V_2$:

$$A_{12} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot (V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\,(P_1V_2 + P_2V_2 - P_1V_1 - P_2V_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{\nu R}{2}\,(T_2 - T_1) = \frac{\nu RT_1}{2}\,(\,\sqrt{x} - 1\,)\,.$$

Получаем:

$$Q_{12} = \nu\left(C_V + \frac{R}{2}\right)T_1\,(\,\sqrt{x} - 1\,)\,.$$

Количество теплоты, подведённое к газу на участке 2–3, определяется теплоёмкостью при постоянном давлении $C_P = C_V + R$:

$$Q_{23} = \nu\,C_P\,(T_3 - T_2) = \nu\,C_P\,(x\,T_1 - \sqrt{x}\,T_1) = \nu\,C_P T_1\sqrt{x}\,(\,\sqrt{x} - 1\,)\,.$$

Полное количество теплоты, полученное газом за цикл, равно:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \nu T_1\,(\,\sqrt{x} - 1\,)\,\left(C_V + \frac{R}{2} + \sqrt{x}\,C_P\right)\,.$$

Для КПД двигателя получаем:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{R\,(\,\sqrt{x} - 1\,)}{2\,C_V + R + 2\,\sqrt{x}\,C_P}\,.$$

Для одноатомного газа имеем: $C_V = 3R/2$, $C_P = 5R/2$,

$$\eta = \frac{\sqrt{x} - 1}{4 + 5\,\sqrt{x}}\,.$$

Выразим отсюда x:

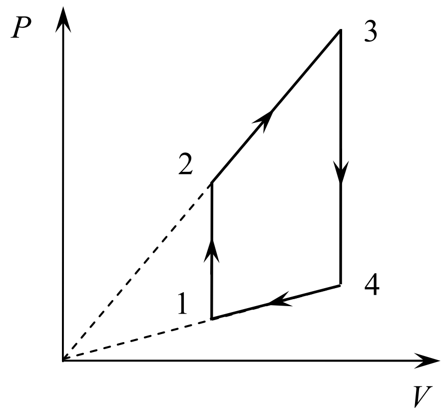
$$4\,\eta + 5\,\eta\,\sqrt{x} = \sqrt{x} - 1 \quad\longrightarrow\quad \sqrt{x} = \frac{1 + 4\,\eta}{1 - 5\,\eta}\,,$$

$$x = \left(\frac{1 + 4\,\eta}{1 - 5\,\eta}\right)^2 = 1{,}6\,.$$

Ответ:

$$x = \left(\frac{1 + 4\,\eta}{1 - 5\,\eta}\right)^2 = 1{,}6\,.$$

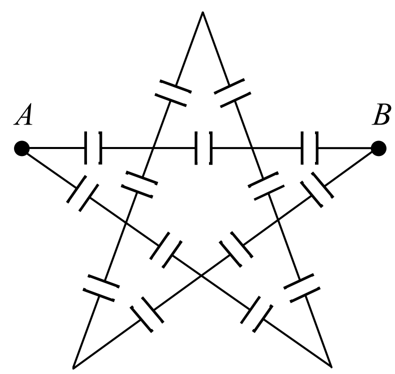
Задача 4 / 2. Тепловой двигатель работает по замкнутому циклу, состоящему из четырех участков. Участки 1–2 и 3–4 — изохоры, участки 2–3 и 4–1 — отрезки прямых, проходящих через начало координат на диаграмме P, V. Рабочим веществом является идеальный двухатомный газ. Температуры газа в точках 2 и 4 одинаковы: $T_2 = T_4$. КПД двигателя $\eta = 4{,}5$ %. Найдите отношение $x = T_{\max}/T_{\min}$, где $T_{\max}$ и $T_{\min}$ — максимальная и минимальная температуры газа в цикле. Ответ округлите до десятых.



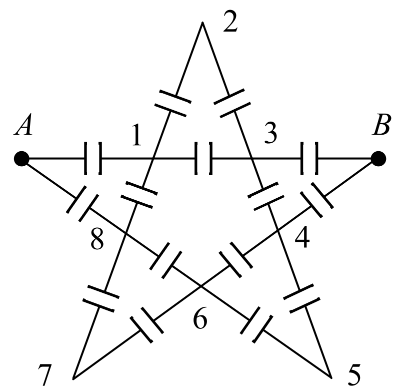
Ответ:

$$x = \left(\frac{1 + 5\,\eta}{1 - 6\,\eta} \right)^2 = 2{,}8\,.$$

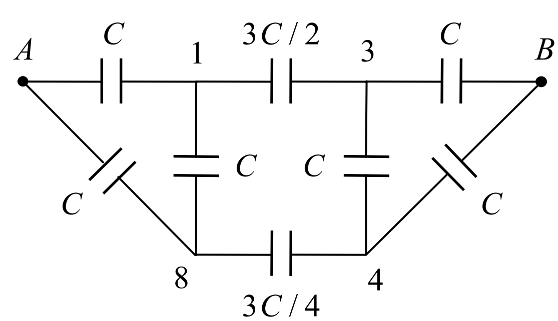
Задача 5 / 1. Из пятнадцати проволочных отрезков собрана пятиконечная звезда. В каждый отрезок включён конденсатор ёмкостью $C = 2{,}5$ мкФ. Найдите общую ёмкость звезды C_0 при её подключении к батарее за точки A и B. Ответ выразите в микрофарадах и округлите до десятых.



Возможное решение



Перенумеруем узлы звезды цифрами от 1 до 8. Треугольники 1–2–3, 4–5–6 и 6–7–8 содержат два последовательно соединённых конденсатора. Их общая ёмкость равна $C/2$. Параллельно этой паре подключён ещё один конденсатор. Таким образом, общая ёмкость каждого треугольника равна $3C/2$. Поскольку треугольники 4–5–6 и 6–7–8 соединены последовательно, их можно заменить одним конденсатором ёмкостью $3C/4$. В результате получаем упрощённую схему.

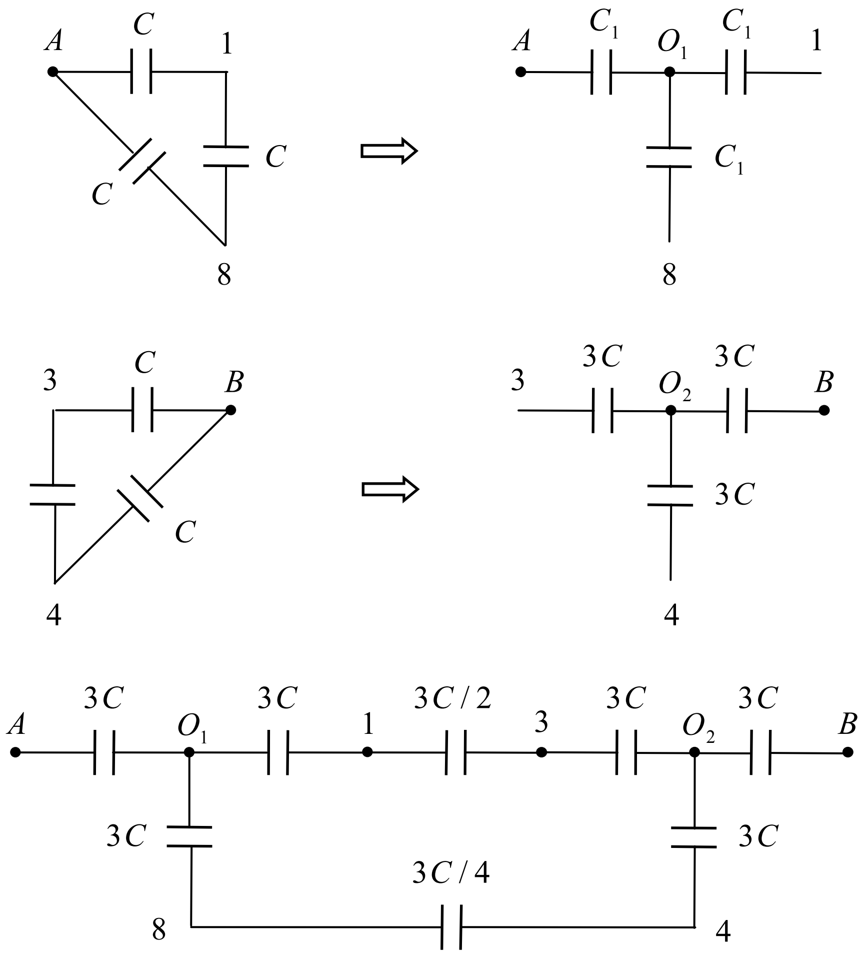


Далее преобразуем треугольник A–1–8 в звезду с центром в точке O_1. Так как ёмкости всех сторон треугольника одинаковы, звезда также состоит из одинаковых ёмкостей C_1. Значение C_1 найдём, потребовав, чтобы при подключении источника напряжения к точкам A и 1 ёмкости треугольника и звезды совпадали. Получаем:

$$\frac{3C}{2} = \frac{C_1}{2} \quad \longrightarrow \quad C_1 = 3C\,.$$

Треугольник B–3–4 заменим на такую же звезду с центром в точке O_2.

В результате приходим к схеме, общая ёмкость которой легко вычисляется.



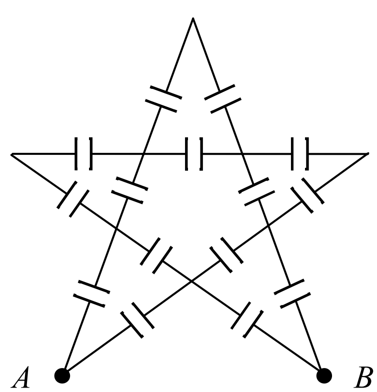
Ёмкости участков O_1–1–3–O_2 и O_1–8–4–O_2 равны соответственно $3\,C/4$ и $C/2$. Так как эти участки включены параллельно, их общая ёмкость равна $5\,C/4$. Добавляя ещё две ёмкости $3\,C$ на участках A–O_1 и B–O_2, находим общую ёмкость звезды:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{3\,C} + \frac{4}{5\,C} + \frac{1}{3\,C} = \frac{22}{15\,C} \quad \longrightarrow \quad C_0 = \frac{15}{22}\,C = 1{,}7 \text{ мкФ}\,.$$

Ответ:

$$C_0 = \frac{15}{22}\,C = 1{,}7 \text{ мкФ}\,.$$

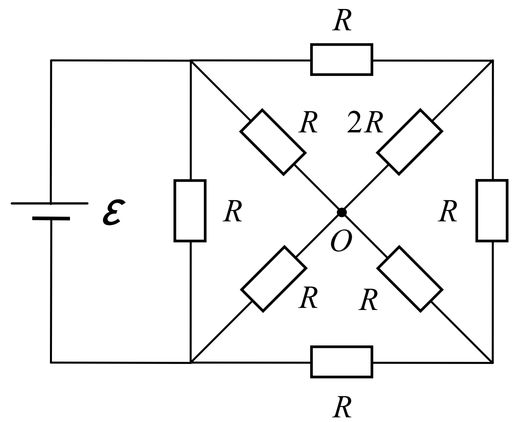
Задача 5 / 2. Из пятнадцати проволочных отрезков собрана пятиконечная звезда. В каждый отрезок включён конденсатор ёмкостью $C = 0{,}7$ мкФ. Найдите общую ёмкость звезды C_0 при её подключении к батарее за точки A и B. Ответ выразите в микрофарадах и округлите до сотых.



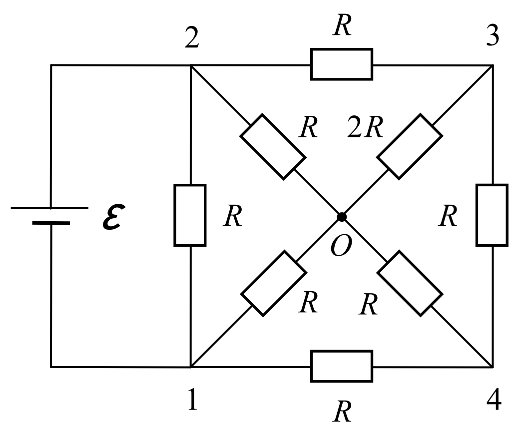
Ответ:

$$C_0 = \frac{5}{6}\,C = 0{,}58 \text{ мкФ}\,.$$

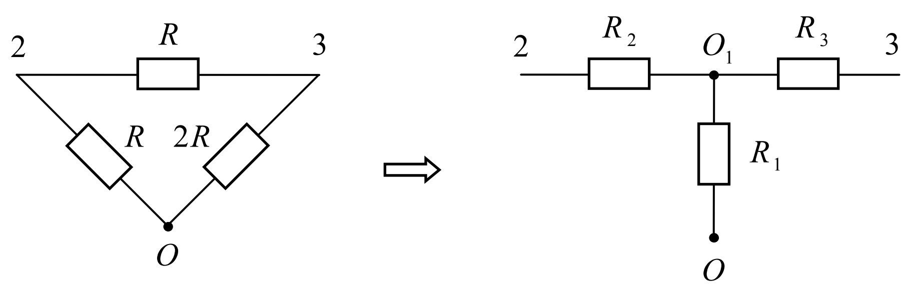
Задача 6 / 1. Из семи одинаковых сопротивлений $R = 180$ Ом и одного сопротивления $2R$ собран квадрат с диагоналями, спаянными в точке O. Квадрат подключён к батарее с ЭДС $\varepsilon = 9$ В. Найдите тепловую мощность P, выделяющуюся на всём квадрате. Внутреннее сопротивление батареи не учитывайте. Ответ выразите в ваттах и округлите до сотых.



Возможное решение



Перенумеруем вершины квадрата цифрами от 1 до 4 и найдём его общее сопртивление. Для этого преобразуем треугольник 2–3–O в звезду с центром в точке O_1.



Сопротивления лучей звезды R_1, R_2 и R_3 найдём, потребовав чтобы при подключении источника напряжения к участкам 2–O, 2–3 и 3–O общие сопротивления треугольника и звезды совпадали. При подключении треугольника за точки 2 и O имеем участок 2–3–O, состоящий из двух последовательно соединённых сопротивлений R и $2R$. Сопротивление этого участка равно $3R$. Параллельно к нему подключено сопротивление R на участке 2–O. Общее сопротивление треугольника равно:

$$\frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3R}{4} .$$

Сопротивление звезды при подключении источника к точкам 2 и O равно $R_1 + R_2$. Таким образом, получаем первое уравнение:

$$R_1 + R_2 = \frac{3R}{4} .$$

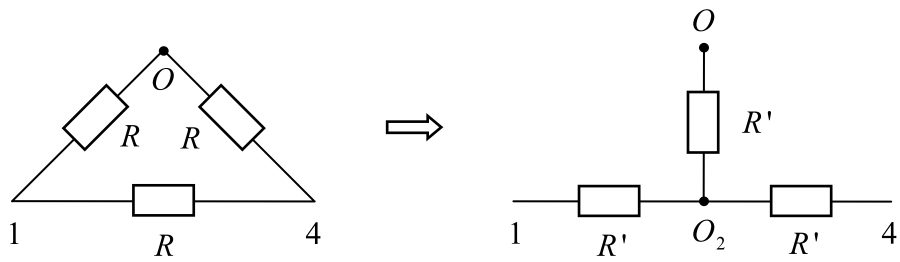
Аналогичное рассмотрение подключений источника к участкам 2–3 и 3–O даёт ещё два уравнения:

$$R_2 + R_3 = \frac{3R}{4}\,,$$

$$R_1 + R_3 = R\,.$$

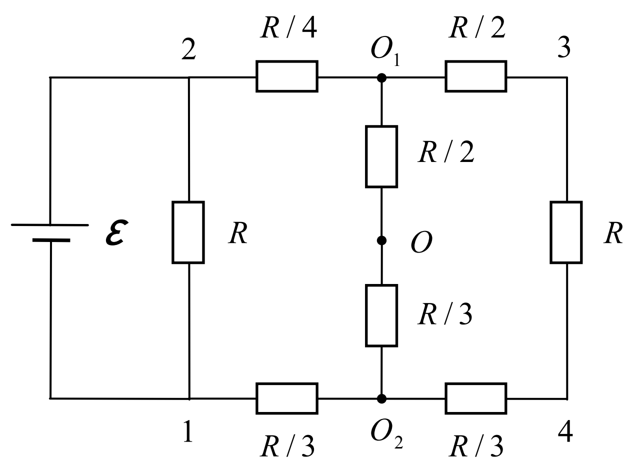
Решая эти уравнения, находим сопротивления лучей звезды:

$$R_1 = R_3 = \frac{R}{2}\,, \quad R_2 = \frac{R}{4}\,.$$



Далее преобразуем треугольник 1–O–4 в звезду с центром в точке O_2. Так как сопротивления всех сторон треугольника одинаковы, звезда также состоит из одинаковых сопротивлений R'. Значение R' найдём, потребовав, чтобы при подключении источника за точки 1 и 4 сопротивления треугольника и звезды совпадали. Получаем:

$$\frac{2R}{3} = 2R' \quad \longrightarrow \quad R' = \frac{R}{3}\,.$$



В результате получаем упрощённую схему, сопротивление которой легко вычисляется. Сопротивления участков O_1–3–4–O_2 и O_1–O–O_2 равны соответственно $11R/6$ и $5R/6$. Эти участки включены параллельно. Найдём их общее сопротивление R_A:

$$\frac{1}{R_A} = \frac{6}{11R} + \frac{6}{5R} = \frac{96}{55R} \quad \longrightarrow \quad R_A = \frac{55R}{96}\,.$$

Прибавляя к этому значению сопротивления участков 2–O_1 и 1–O_2, находим сопротивление R_B всего блока, расположенного справа от участка 1–2:

$$R_B = \frac{R}{4} + \frac{55R}{96} + \frac{R}{3} = \frac{111R}{96}\,.$$

Наконец, учитывая сопротивление R участка 1–2, находим общее сопротивление квадрата R_0:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_B} = \frac{1}{R} + \frac{96}{111R} = \frac{207}{111R} \quad \longrightarrow \quad R_0 = \frac{111R}{207}\,.$$

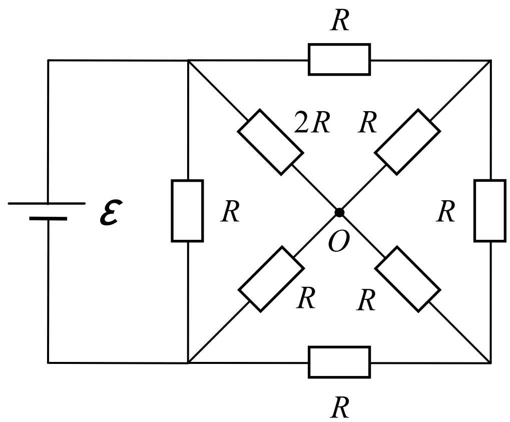
Тепловая мощность, выделяющаяся на всём квадрате, равна:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R_0} = \frac{207}{111} \cdot \frac{\varepsilon^2}{R} = 0{,}84\ \text{Вт}\,.$$

Ответ:

$$P = \frac{207}{111} \cdot \frac{\varepsilon^2}{R} = 0{,}84\ \text{Вт}\,.$$

Задача 6 / 2. Из семи одинаковых сопротивлений $R = 120$ Ом и одного сопротивления $2R$ собран квадрат с диагоналями, спаянными в точке O. Квадрат подключён к батарее с ЭДС $\varepsilon = 4{,}5$ В. Найдите тепловую мощность P, выделяющуюся на всём квадрате. Внутреннее сопротивление батареи не учитывайте. Ответ выразите в ваттах и округлите до сотых.



Ответ:

$$P = \frac{69}{40} \cdot \frac{\varepsilon^2}{R} = 0{,}29 \text{ Вт.}$$