Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022

Заключительный этап. 7 марта

Содержание

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

6 класс

Задача 1. У Деда Мороза было 120 шоколадных конфет и 200 мармеладных. На утреннике он раздавал детям конфеты: каждому досталось по одной шоколадной и одной мармеладной конфете. Пересчитывая конфеты после утренника, Дед Мороз выяснил, что мармеладных конфет осталось в 3 раза больше, чем шоколадных. Сколько детей было на утреннике?

Ответ: 80.

Решение. Пусть всего было x детей, тогда после утренника у Деда Мороза осталось $120 - x$ шоколадных конфет и $200 - x$ мармеладных. Поскольку мармеладных конфет осталось в 3 раза больше, чем шоколадных, получаем уравнение $3 \cdot (120 - x) = 200 - x$. Решая его, получаем $x = 80$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Есть верный ответ с проверкой, что он подходит, но не доказано, что других ответов нет.

Задача 2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды за круглый стол сели 30 жителей этого острова. Каждый из них сказал какую-то из двух фраз: «Мой сосед слева — лжец» или «Мой сосед справа — лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может быть за столом?

Ответ: 10.

Решение. Рядом с каждым лжецом должен сидеть хотя бы один рыцарь (иначе, если с обеих сторон от лжеца сидят лжецы, то сказанная им фраза точно оказалась бы правдой). Следовательно, среди любых трёх подряд сидящих жителей есть хотя бы один рыцарь. Если разбить всех собравшихся за столом на группы из трёх подряд сидящих жителей, получим, что в каждой из них есть хотя бы один рыцарь, поэтому всего рыцарей хотя бы 10.

Приведём пример, когда рыцарей ровно 10. Пусть жители сидят так: рыцарь, два лжеца, рыцарь, два лжеца и т. д. Каждый из рыцарей говорит любую из приведённых фраз — она в любом случае окажется истинной. Лжец говорит: «Мой сосед слева — лжец», если слева от него рыцарь, и наоборот, он говорит: «Мой сосед справа — лжец», если справа от него рыцарь. Ясно, что все условия задачи выполняются. □

Критерии

Следующие критерии суммируются:

5 б. Доказано, что рыцарей хотя бы 10.

2 б. Доказано, что рыцарей может быть ровно 10.

Задача 3. На доске по кругу записаны 5 различных натуральных чисел. Каждое из них Петя поделил на следующее за ним по часовой стрелке, а затем 5 полученных чисел (не обязательно целых) выписал себе на бумажку. Может ли сумма 5 чисел на бумажке оказаться целым числом?

Ответ: да, может.

Решение. Например, для чисел 1, 2, 4, 8, 16 после деления получится сумма $1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 16 = 18$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

0 б. Есть только верный ответ, но верный пример не приведён.

Задача 4. У Карлсона есть три коробки, в каждой из которых лежит по 10 конфет. На одной коробке написано число 4, на другой — 7, на третьей — 10.

За одну операцию Карлсон последовательно делает два следующих действия:

- берёт из любой коробки количество конфет, равное числу, написанному на ней;
- из взятых конфет 3 съедает, а остальные кладёт в любую другую коробку.

Какое наибольшее количество конфет может съесть Карлсон в результате нескольких таких операций?

Ответ: 27.

Решение. Так как на каждом шагу Карлсон съедает 3 конфеты, общее количество съеденных конфет делится на 3. Докажем, что оно не превосходит 27, для этого достаточно показать, что оно не может равняться 30, то есть что Карлсон не может съесть все конфеты. В самом деле, если бы это было возможно, то перед последней операцией оставалось бы ровно 3 конфеты, то есть в каждой коробке было бы не более 3 конфет. Но каждое из чисел 4, 7, 10 больше 3, поэтому последнюю операцию сделать невозможно, противоречие.

Приведённый ниже пример показывает, как мог действовать Карлсон, чтобы съесть в точности 27 конфет. В k-й строчке написано, сколько конфет остаётся в каждой коробке после $(k-1)$-й операции. Три числа в каждой строчке — это количество конфет, остававшихся в коробках на соответствующем шаге. Запись (a, b, c) означает, что в коробке с номером 4 оставалось a конфет, в коробке с номером 7 — b конфет, в коробке с номером 10 — c конфет.

1. (10, 10, 10).
2. (10, 17, 0).
3. (14, 10, 0).
4. (18, 3, 0).
5. (14, 4, 0).
6. (10, 5, 0).
7. (6, 6, 0).
8. (2, 7, 0).
9. (6, 0, 0).
10. (2, 1, 0).

$\square$

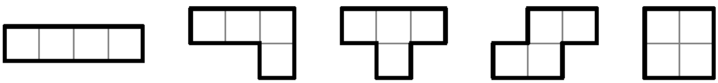
Критерии

Следующие критерии суммируются:

4 б. Доказано, что Карлсон съел не более 27 конфет.

3 б. Доказано, что Карлсон мог съесть ровно 27 конфет.

Задача 5. Клетчатый прямоугольник 42×44 разрезали по линиям сетки на прямоугольники 1×8, один квадрат 2×2 и одну тетраминошку. Докажите, что эта тетраминошка тоже является квадратом. (Все возможные тетраминошки изображены на рисунке ниже, их можно поворачивать и переворачивать.)



Решение. Предположим, что оставшаяся тетраминошка не является квадратом. Тогда существует ряд (горизонталь или вертикаль), пересекающий эту тетраминошку ровно по одной клетке. Покрасим теперь в чёрный цвет весь этот ряд, а также все ряды, удалённые от него на расстояние, кратное четырём (например, если выбрана 11-я горизонталь, то в чёрный цвет красятся горизонтали с номерами 3, 7, 11, 15 и т. д.). Остальные клетки покрасим в белый цвет. Поскольку в каждом чёрном ряду чётное количество чёрных клеток, то и во всём прямоугольнике 42×44 чётное количество чёрных клеток.

Заметим, что каждый из прямоугольников 1×8 содержит чётное количество чёрных клеток (0, 2 или 8). Каждый квадрат 2×2 тоже содержит чётное количество чёрных клеток (0 или 2). Вместе с единственной чёрной клеткой в оставшейся тетраминошке получаем нечётное количество чёрных клеток. Однако всего в прямоугольнике 42×44 чётное количество чёрных клеток, противоречие. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

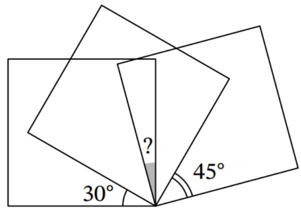
7 б. Любое полное решение задачи.

0 б. Приведены одно или несколько возможных разрезаний, в которых тетраминошка является квадратом, но не доказано, что эта тетраминошка не может быть не квадратом.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

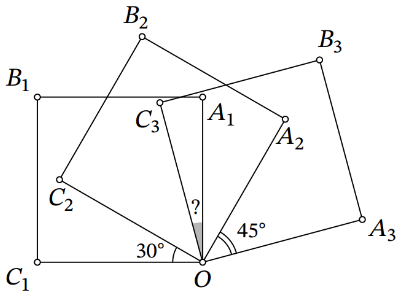
7 класс

Задача 1. На рисунке изображены три квадрата. Найдите отмеченный угол, если известны два других угла на рисунке.



Ответ: 15°.

Решение.



Заметим, что искомый угол равен

$$\angle C_1OA_1 + \angle C_3OA_3 - \angle C_1OA_3 = 90^\circ + 90^\circ - \angle C_1OA_3 = 180^\circ - \angle C_1OA_3.$$

Теперь найдём угол C_1OA_3:

$$\angle C_1OA_3 = \angle C_1OC_2 + \angle C_2OA_2 + \angle A_2OA_3 = 30^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 165^\circ.$$

Теперь мы можем найти ответ:

$$\angle C_3OA_1 = 180^\circ - 165^\circ = 15^\circ.$$

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Найден угол C_1OA_3, но других продвижений нет.

4 б. Получена формула $\angle C_3OA_1 = 180^\circ - C_1OA_3$, но других продвижений нет.

1 б. Есть только верный ответ.

Задача 2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды за круглый стол сели 30 жителей этого острова. Каждый из них сказал какую-то из двух фраз: «Мой сосед слева — лжец» или «Мой сосед справа — лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может быть за столом?

Ответ: 10.

Решение. Рядом с каждым лжецом должен сидеть хотя бы один рыцарь (иначе, если с обеих сторон от лжеца сидят лжецы, то сказанная им фраза точно оказалась бы правдой). Следовательно, среди любых трёх подряд сидящих жителей есть хотя бы один рыцарь. Если разбить всех собравшихся за столом на группы из трёх подряд сидящих жителей, получим, что в каждой из них есть хотя бы один рыцарь, поэтому всего рыцарей хотя бы 10.

Приведём пример, когда рыцарей ровно 10. Пусть жители сидят так: рыцарь, два лжеца, рыцарь, два лжеца и т. д. Каждый из рыцарей говорит любую из приведённых фраз — она в любом случае окажется истинной. Лжец говорит: «Мой сосед слева — лжец», если слева от него рыцарь, и наоборот, он говорит: «Мой сосед справа — лжец», если справа от него рыцарь. Ясно, что все условия задачи выполняются. □

Критерии

Следующие критерии суммируются:

5 б. Доказано, что рыцарей хотя бы 10.

2 б. Доказано, что рыцарей может быть ровно 10.

Задача 3. В некоторой компании 100 акционеров, причём любые 66 из них суммарно владеют хотя бы 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер? (Количество процентов акций компании, принадлежащих акционеру, может быть нецелым.)

Ответ: 25%.

Решение. Рассмотрим любого акционера A. Остальных 99 акционеров разделим на три группы B, C, D по 33 акционера. По условию у B и C суммарно хотя бы 50% акций компании, аналогично у C и D, а также у B и D. Сложив всё это и поделив пополам, получаем, что суммарно у B, C, D хотя бы $((50+50+50):2)\% = 75\%$ акций, поэтому у A — оставшиеся не более чем 25% акций.

При этом у A может быть ровно 25% акций, если у всех остальных акционеров акций поровну, по $\frac{75}{99}\% = \frac{25}{33}\%$. Ясно, что в этом случае у любых 66 акционеров компании суммарно хотя бы $66 \cdot \frac{25}{33}\% = 50\%$ акций. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

Следующие критерии суммируются:

5 б. Доказано, что у любого акционера не более 25% акций.

2 б. Доказано, что у какого-то акционера может быть ровно 25% акций.

Задача 4. Назовём *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

Ответ: да, существует.

Решение. Пусть $150! = 2^k \cdot a$, где a нечётно. Докажем, что число $N = 2^6 \cdot \frac{a}{127}$ удовлетворяет условию задачи, а именно оно не делится на 127 и 128, но делится на все остальные маленькие числа.

Очевидно, что число 127 — простое, причём a делится на 127, но не делится на 127^2. Тогда N — натуральное число, которое не делится на 127. Также число N не делится на 128, поскольку $128 = 2^7$. Также N делится на остальные 148 маленьких чисел, поскольку все они являются делителями числа 150!, при этом не делятся на 127 и содержат в своём разложении на простые множители двойку не более чем в шестой степени.

Замечание. Число N, удовлетворяющее условию задачи, не единственно. Можно доказать (хоть это и не требовалось), что все такие числа N не делятся именно на 127 и 128. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. В верном решении нет обоснования, что число 127 — простое.

6 б. Приведено число N, удовлетворяющее условию задачи, но отсутствует обоснование, почему оно подходит.

4 б. Присутствуют попытки построить число N, которое делится на все маленькие числа, кроме 127 и 128, но само число N не приведено или приведено неверно.

0 б. Присутствует только необоснованное утверждение, что такое число N существует.

Задача 5. В треугольнике ABC угол при вершине B равен 120°, точка M — середина стороны AC. На сторонах AB и BC выбраны точки E и F соответственно так, что $AE = EF = FC$. Найдите $\angle EMF$.

Ответ: 90°.

Решение. Заметим, что сумма углов A и C равна 60°. Пусть $AE = EF = FC = u$.

Отложим на прямой EM точку G такую, чтобы точка M была серединой отрезка EG. Треугольники AME и CMG равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle MCG = \angle MAE = \angle A$ и $CG = AE = u$.

Заметим, что $\angle FCG = \angle FCM + \angle MCG = \angle C + \angle A = 60^\circ$.
Поскольку $FC = u = CG$, то треугольник FCG — равносторонний, и $FG = u$. Следовательно, треугольник EFG — равнобедренный, $EF = FG = u$. Его медиана FM является также и высотой, поэтому $\angle EMF = 90^\circ$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

1 б. Рассматривается точка, симметричная E или G относительно M, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Есть только верный ответ.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

8 класс

Задача 1. В 20 ящиков разложили 60 чёрных и 60 белых шариков — по 6 шариков в каждый. Ваня заметил, что в каждом из первых 14 ящиков чёрных шариков оказалось больше, чем белых. Верно ли, что среди последних 6 ящиков точно найдётся такой, в котором все шарики белые?

Ответ: да, верно.

Решение. Из условия следует, что в каждом из первых 14 ящиков есть хотя бы 4 чёрных шарика. Поэтому всего в первых 14 ящиках хотя бы $14 \cdot 4 = 56$ чёрных шариков. Если бы в каждом из оставшихся 6 ящиков было хотя бы по одному чёрному шарику, то всего чёрных шариков оказалось бы хотя бы $56 + 6 = 62 > 60$, противоречие. Значит, среди оставшихся 6 ящиков точно найдётся такой, в котором все шарики белые. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 0 б. Приведены один или несколько возможных случаев разложения шариков по ящикам, но не доказано, что искомый ящик найдётся всегда.
- 0 б. Только верный ответ.

Задача 2. Гоша ввёл в калькулятор натуральное число. Затем он 3 раза совершил следующую операцию из двух действий: сначала извлёк квадратный корень, а затем у полученного числа взял целую часть. В итоге у него получилось число 1. Какое наибольшее число мог изначально ввести Гоша?

Напомним, целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данное.

Ответ: 255.

Решение. Предположим, он ввёл число, не меньшее 256. Тогда после первого действия у него получилось число не меньше $[\sqrt{256}] = 16$, после второго — не меньше $[\sqrt{16}] = 4$, после третьего — не меньше $[\sqrt{4}] = 2$, противоречие.

Пусть Гоша ввёл число 255. Тогда после первого действия у него получилось $[\sqrt{255}] = 15$, после второго — $[\sqrt{15}] = 3$, после третьего — $[\sqrt{3}] = 1$. Следовательно, ответом к задаче является число 255. □

Критерии

Следующие критерии суммируются:

4 б. Доказано, что число Гоши не больше 255.

3 б. Доказано, что число 255 удовлетворяет условию задачи.

Задача 3. Назовём *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

Ответ: да, существует.

Решение. Пусть $150! = 2^k \cdot a$, где a нечётно. Докажем, что число $N = 2^6 \cdot \frac{a}{127}$ удовлетворяет условию задачи, а именно оно не делится на 127 и 128, но делится на все остальные маленькие числа.

Очевидно, что число 127 — простое, причём a делится на 127, но не делится на 127^2. Тогда N — натуральное число, которое не делится на 127. Также число N не делится на 128, поскольку $128 = 2^7$. Также N делится на остальные 148 маленьких чисел, поскольку все они являются делителями числа 150!, при этом не делятся на 127 и содержат в своём разложении на простые множители двойку не более чем в шестой степени.

Замечание. Число N, удовлетворяющее условию задачи, не единственно. Можно доказать (хоть это и не требовалось), что все такие числа N не делятся именно на 127 и 128. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. В верном решении нет обоснования, что число 127 — простое.

6 б. Приведено число N, удовлетворяющее условию задачи, но отсутствует обоснование, почему оно подходит.

4 б. Присутствуют попытки построить число N, которое делится на все маленькие числа, кроме 127 и 128, но само число N не приведено или приведено неверно.

0 б. Присутствует только необоснованное утверждение, что такое число N существует.

Задача 4. Дан треугольник ABC такой, что $\angle BAC = 2\angle BCA$. Точка L на стороне BC такова, что $\angle BAL = \angle CAL$. Точка M — середина стороны AC. Точка H на отрезке AL такова, что $MH \perp AL$. На стороне BC нашлась точка K такая, что треугольник KMH — равносторонний. Докажите, что точки B, H и M лежат на одной прямой.

Решение. Из условия следует, что $\angle BAL = \angle CAL = \angle BCA$. Следовательно, треугольник CAL — равнобедренный с основанием AC, и его медиана LM является осью симметрии этого треугольника (а также высотой и биссектрисой).

Пусть точка H при симметрии относительно прямой LM переходит в некоторую точку H_1, лежащую на LC, при этом $MH = MH_1$ и $\angle MH_1C = \angle MHA = 90°$. По условию треугольник KMH — равносторонний, поэтому $MK = MH = MH_1$ (и равно расстоянию от точки M до прямой LC). Из равенства $MH_1 = MK$ следует, что точки K и H_1 совпадают. Отсюда получаем, что

$$\angle LMH = \frac{1}{2}\angle HMK = 30°, \qquad \angle ALM = 90° - 30° = 60°,$$

$$\angle BCA = \angle LCA = \angle LAM = 90° - 60° = 30°,$$

$$\angle BAC = 2\angle LAC = 60°, \qquad \angle ABC = 180° - 30° - 60° = 90°.$$

Следовательно, BM — медиана прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе, поэтому $BM = AM$. Поскольку $\angle BAM = 60°$, треугольник ABM — равносторонний. Поскольку AL — биссектриса равностороннего треугольника BAM, то $AL \perp BM$. Наконец, в силу того, что $AL \perp MH$, следует, что точки B, H, M лежат на одной прямой. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Доказано, что углы треугольника ABC равны $30°, 60°, 90°$, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Доказано, что $MK \perp BC$, но дальнейших продвижений нет.

Задача 5. Покупатель пришёл в антикварный магазин. Торговец выложил на стол 2022 монеты, среди которых есть настоящие и фальшивые, и предупредил покупателя, что настоящих монет среди них больше половины. Для покупателя все монеты внешне неотличимы, а торговец знает, какие именно монеты настоящие, а какие — фальшивые.

За один ход происходит следующее:

- покупатель указывает на любые две монеты,
- торговец говорит, одного ли они типа,
- покупатель убирает одну из этих двух монет со стола.

Может ли покупатель добиться того, чтобы спустя 2021 ход на столе гарантированно осталась настоящая монета?

Ответ: да, может.

Решение. Приведём стратегию покупателя. Первым ходом спросим торговца про две любые монеты. Следующими действиями всегда будем спрашивать про ту из двух монет, указанных на предыдущем ходу, что осталась на столе, и ещё про любую из ранее не задействованных монет.

Покажем, по какому правилу нужно убирать монеты со стола. Будем за покупателя вести подсчёт количества убранных монет двух разных типов (не зная, какой из типов настоящий, а какой фальшивый). Так как каждым действием мы сравниваем тип одной новой монеты и одной старой, покупатель безошибочно определит, к первому или второму типу относится новая монета. Если типы двух монет, про которые текущим действием спрашивал покупатель, различны, то он будет убирать монету того типа, монет которого на данный момент убрано не больше, чем другого (другими словами, будет стремиться «уравнивать» количество убранных монет разных типов). Если же выбранные монеты одного типа, то покупатель убирает любую из двух монет.

Докажем от противного, что в результате таких действий последняя оставшаяся монета будет настоящей. Рассмотрим первое действие покупателя, после которого на столе не осталось настоящих монет. Этим действием покупатель убрал последнюю настоящую монету M. Так как M — последняя настоящая монета, то другая монета N, на которую указывал покупатель, фальшивая. На данный момент монет того же типа, что монета M, убрано строго больше, чем монет того же типа, что монета N (поскольку всего настоящих монет больше, чем фальшивых). Значит, согласно стратегии, покупатель должен был убрать монету N, а не M, противоречие. Таким образом, на столе всегда будут настоящие монеты, и поэтому последняя оставшаяся монета — настоящая. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 4 б. Приведена верная стратегия, но не доказано, почему она гарантирует настоящую монету в конце.
- 0 б. Есть только верный ответ.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

9 класс

Задача 1. Положительные числа a и b таковы, что уравнения

$$x^2 + ax - 100 = 0 \text{ и } x^2 - 200x + b = 0$$

имеют общий положительный корень, больший 1. Докажите, что $b - a > 100$.

Решение. Пусть $t > 1$ — общий корень уравнений, тогда $t^2 + at - 100 = 0$ и $t^2 - 200t + b = 0$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $(a + 200)t - 100 - b = 0$. Следовательно, $b + 100 = (a + 200)t > a + 200$, поэтому $b - a > 100$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Из одного равенства вычитается другое, но дальнейших продвижений нет.

Задача 2. За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

Ответ: 30.

Решение. Рассмотрим любую четвёрку подряд идущих людей. Если бы в ней было хотя бы 3 рыцаря, то самый левый из рыцарей точно сказал бы неправду, что невозможно. Если бы в ней было хотя бы 3 лжеца, то самый левый из лжецов точно сказал бы правду, что тоже невозможно. Значит, в каждой четвёрке подряд идущих людей ровно 2 рыцаря и ровно 2 лжеца. Разбив всех людей на 15 таких четвёрок, получаем, что рыцарей $15 \cdot 2 = 30$.

Другое решение. Заметим, что за столом не могут сидеть только рыцари или только лжецы. Тогда найдётся пара рыцарь-лжец, сидящая рядом именно в таком порядке. Рассмотрим 4 случая, кто может сидеть справа от этой пары.

Случай 1. Справа сидят два рыцаря.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-рыцарь-рыцарь,

что противоречит условию, так как первый рыцарь соврал.

Случай 2. Справа сидят два лжеца.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-лжец-лжец.

Кто бы ни сидел сразу после этой последовательности, первый лжец скажет правду, что противоречит условию.

Случай 3. Справа сидят рыцарь-лжец именно в таком порядке.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-рыцарь-лжец.

Рассмотрим первого лжеца. Он говорит неправду, поэтому среди следующих троих должно быть хотя бы два рыцаря. Из чего мы однозначно получаем

рыцарь-лжец-рыцарь-лжец-рыцарь.

Теперь рассмотрим второго рыцаря. Он говорит правду, поэтому шестым человеком в последовательности будет лжец:

рыцарь-лжец-рыцарь-лжец-рыцарь-лжец.

Аналогичным образом продолжаем эти рассуждения и дальше, в итоге получается чередующаяся расстановка, где рыцарей и лжецов поровну.

Случай 4. Справа сидят лжец-рыцарь именно в таком порядке.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-лжец-рыцарь.

Рассмотрим первого лжеца. Он говорит неправду, поэтому среди следующих троих должно быть хотя бы два рыцаря. Из чего мы однозначно получаем

рыцарь-лжец-лжец-рыцарь-рыцарь.

Теперь рассмотрим второго рыцаря. Он говорит правду, поэтому шестым и седьмым человеком в последовательности будут лжецы

рыцарь-лжец-лжец-рыцарь-рыцарь-лжец-лжец.

Аналогичным образом продолжаем эти рассуждения и дальше, в итоге получается расстановка, где рыцарей и лжецов поровну. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 7 б. Задача верно решена для случая, когда за столом присутствуют и рыцари, и лжецы.
- 4 б. В решении рассматриваются оба возможных случая расстановки рыцарей и лжецов, но нет обоснования, почему других расстановок нет.

2 б. В решении рассматривается один из двух возможных случаев расстановки рыцарей и лжецов, но нет обоснования, почему других расстановок нет.

1 б. Присутствует только верный ответ.

Задача 3. Назовём *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

Ответ: да, существует.

Решение. Пусть $150! = 2^k \cdot a$, где a нечётно. Докажем, что число $N = 2^6 \cdot \frac{a}{127}$ удовлетворяет условию задачи, а именно оно не делится на 127 и 128, но делится на все остальные маленькие числа.

Очевидно, что число 127 — простое, причём a делится на 127, но не делится на 127^2. Тогда N — натуральное число, которое не делится на 127. Также число N не делится на 128, поскольку $128 = 2^7$. Также N делится на остальные 148 маленьких чисел, поскольку все они являются делителями числа 150!, при этом не делятся на 127 и содержат в своём разложении на простые множители двойку не более чем в шестой степени.

Замечание. Число N, удовлетворяющее условию задачи, не единственно. Можно доказать (хоть это и не требовалось), что все такие числа N не делятся именно на 127 и 128. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. В верном решении нет обоснования, что число 127 — простое.

6 б. Приведено число N, удовлетворяющее условию задачи, но отсутствует обоснование, почему оно подходит.

4 б. Присутствуют попытки построить число N, которое делится на все маленькие числа, кроме 127 и 128, но само число N не приведено или приведено неверно.

0 б. Присутствует только необоснованное утверждение, что такое число N существует.

Задача 4. В каждую клетку таблицы 7×7 вписали одно из пяти целых чисел: $-2, -1, 0, 1, 2$ так, что сумма чисел во всей таблице равна 0. Докажите, что найдётся квадрат 3×3, в котором модуль суммы всех девяти чисел не превосходит 6.

Решение. Рассмотрим два квадрата 3×3, пересекающихся по прямоугольнику 2×3. Пусть в клетках этих квадратов стоят числа $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

Пусть

$S_1 = |a+b+c+e+f+g+i+j+k|$ — модуль суммы всех чисел в первом квадрате,

а $S_2 = |b+c+d+f+g+h+j+k+l|$ — модуль суммы всех чисел во втором квадрате.

Тогда

$$\Big|S_1 - S_2\Big| = \Big||a+b+c+e+f+g+i+j+k| - |b+c+d+f+g+h+j+k+l|\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|(a+b+c+e+f+g+i+j+k) - (b+c+d+f+g+h+j+k+l)\Big| =$$

$$= \Big|(a+e+i) - (d+h+l)\Big| \leqslant 12.$$

Таким образом, модули сумм чисел в двух таких пересекающихся квадратах отличаются не более чем на 12.

Вернёмся к задаче. Предположим, что нет квадрата 3×3, в котором модуль суммы чисел не более 6. Тогда в любом таком квадрате сумма чисел не меньше 7 или не больше -7.

Покажем, что если суммы чисел во всех квадратах 3×3 не меньше 7 или не больше -7, то существуют квадраты и с положительной суммой, и с отрицательной. Предположим, например, что суммы во всех квадратах 3×3 положительны. Рассмотрим 4 угловых квадрата 3×3, в них общая сумма чисел не меньше $7 \cdot 4 = 28$. Кроме них остались 13 клеток, числа в которых не меньше -2, поэтому сумма чисел во всём квадрате 7×7 больше 0, противоречие.

Рассмотрим теперь какой-нибудь квадрат с положительной суммой чисел и начнём его постепенно сдвигать (на одну клетку по горизонтали или на одну клетку по вертикали), пока он не совпадёт с квадратом с отрицательной суммой. В этом «пути», по доказанному выше, каждый раз сумма чисел будет меняться не более чем на 12. Поскольку сначала она не меньше 7, а в конце она не больше -7, то в каком-то из промежуточных квадратов 3×3 сумма принимает значение от -6 до 6. Противоречие. $\square$

Критерии

7 б. Любое полное решение задачи.

Снижаются баллы за следующие недочёты в решении, аналогичном авторскому, если оно в остальном верно:

-1 б. Нет обоснования, что модули сумм чисел в двух пересекающихся квадратах отличаются не более чем на 12.

-2 б. Нет обоснования, что существует квадрат 3×3 как с положительной, так и с отрицательной суммой чисел.

Задача 5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки P и Q — середины отрезков AC и BD соответственно. На отрезках OA, OB, OC, OD отмечены точки A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно так, что $AA_1 = CC_1$, $BB_1 = DD_1$.

- Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точках K и O.
- Описанные окружности треугольников A_1OB_1 и C_1OD_1 пересекаются в точках M и O.

Докажите, что точки K, M, P, Q лежат на одной окружности.

Решение. Докажем, что точки O, K, P, Q лежат на одной окружности.

Заметим, что треугольники AKC и BKD подобны. Действительно, $\angle OCK = \angle ODK$, поскольку точки O, C, D, K лежат на одной окружности, а $\angle OBK = \angle OAK$, поскольку точки O, B, A, K лежат на одной окружности.

У подобных фигур соответствующие элементы подобны, поэтому треугольники APK и BQK подобны.

Если точка P лежит на отрезке OA, а точка Q лежит на отрезке OD, то

$$\angle OPK + \angle OQK = (180^\circ - \angle APK) + \angle BQK = 180^\circ.$$

Случаи, когда P лежит на отрезке OC и/или Q лежит на отрезке OB, рассматриваются аналогично. Во всех них углы $\angle OPK$ и $\angle OQK$ либо равны, если точки P и Q расположены по одну сторону от прямой OK, либо в сумме дают 180°, если точки P и Q расположены по разные стороны от прямой OK.

Итак, утверждение доказано. Остаётся лишь понять, что точки O, M, P, Q лежат на одной окружности по аналогичной причине (для этого достаточно повторить такое же рассуждение для четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, у которого P и Q — середины диагоналей, а O — точка пересечения диагоналей). Следовательно, все пять точек O, K, M, P, Q лежат на одной окружности. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 5 б. Доказано, что точки O, K, P, Q лежат на одной окружности.
- 5 б. Доказано, что точки O, M, P, Q лежат на одной окружности.
- 2 б. Доказано подобие треугольников AKC и BKD или аналогичных им.
- 2 б. Доказано подобие треугольников A_1MC_1 и B_1MD_1 или аналогичных им.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

10 класс

Задача 1. За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

Ответ: 30.

Решение. Рассмотрим произвольную четвёрку подряд идущих людей. Если бы в ней было хотя бы 3 рыцаря, то самый левый из них точно сказал бы неправду, что невозможно. Если бы в ней было хотя бы 3 лжеца, то самый левый из них точно сказал бы правду, что тоже невозможно. Следовательно, в каждой четвёрке подряд идущих людей ровно 2 рыцаря и ровно 2 лжеца. Разбив всех людей на 15 таких четвёрок, получаем, что рыцарей $15 \cdot 2 = 30$.

Другое решение. Заметим, что за столом не могут сидеть только рыцари или только лжецы. Тогда найдётся пара рыцарь-лжец, сидящая рядом именно в таком порядке. Рассмотрим 4 случая, кто может сидеть справа от этой пары.

Случай 1. Справа сидят два рыцаря.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-рыцарь-рыцарь,

что противоречит условию, так как первый рыцарь соврал.

Случай 2. Справа сидят два лжеца.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-лжец-лжец.

Кто бы ни сидел сразу после этой последовательности, первый лжец скажет правду, что противоречит условию.

Случай 3. Справа сидят рыцарь-лжец именно в таком порядке.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-рыцарь-лжец.

Рассмотрим первого лжеца. Он говорит неправду, поэтому среди следующих троих должно быть хотя бы два рыцаря. Из чего мы однозначно получаем

рыцарь-лжец-рыцарь-лжец-рыцарь.

Теперь рассмотрим второго рыцаря. Он говорит правду, поэтому шестым человеком в последовательности будет лжец:

рыцарь-лжец-рыцарь-лжец-рыцарь-лжец.

Аналогичным образом продолжаем эти рассуждения и дальше, в итоге получается чередующаяся расстановка, где рыцарей и лжецов поровну.

Случай 4. Справа сидят лжец-рыцарь именно в таком порядке.
Тогда получается последовательность

рыцарь-лжец-лжец-рыцарь.

Рассмотрим первого лжеца. Он говорит неправду, поэтому среди следующих троих должно быть хотя бы два рыцаря. Из чего мы однозначно получаем

рыцарь-лжец-лжец-рыцарь-рыцарь.

Теперь рассмотрим второго рыцаря. Он говорит правду, поэтому шестым и седьмым человеком в последовательности будут лжецы

рыцарь-лжец-лжец-рыцарь-рыцарь-лжец-лжец.

Аналогичным образом продолжаем эти рассуждения и дальше, в итоге получается расстановка, где рыцарей и лжецов поровну. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 7 б. Задача верно решена для случая, когда за столом присутствуют и рыцари, и лжецы.
- 4 б. В решении рассматриваются оба возможных случая расстановки рыцарей и лжецов, но нет обоснования, почему других расстановок нет.
- 2 б. В решении рассматривается один из двух возможных случаев расстановки рыцарей и лжецов, но нет обоснования, почему других расстановок нет.
- 1 б. Присутствует только верный ответ.

Задача 2. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, точка O — центр его описанной окружности. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке N. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y соответственно такие, что $OX \parallel AN$ и $OY \parallel CN$. Описанная окружность треугольника XBY пересекает отрезок BH в точке Z. Докажите, что $XY \parallel OZ$.

Решение. Так как $OX \parallel AN$ и $OY \parallel CN$, имеем $\angle XOY = \angle ANC$. Таким образом,

$$180^\circ = \angle ABC + \angle ANC = \angle XBY + \angle XOY,$$

то есть пять точек O, X, B, Y, Z лежат на одной окружности.

С одной стороны,

$$\angle YOZ = \angle YBZ = 90^\circ - \angle ACB.$$

С другой стороны,

$$\angle XYO = \angle XBO = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 90^\circ - \angle ACB = \angle YOZ,$$

откуда и следует, что $XY \parallel OZ$. $\square$

Критерии

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. В верном решении не доказано, что $\angle ABO = \angle HBC$.

Следующие критерии суммируются:

3 б. Доказано, что пять точек O, X, B, Y, Z лежат на одной окружности.

1 б. Сформулировано, что $\angle ABO = \angle HBC$.

Задача 3. Назовём *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

Ответ: да, существует.

Решение. Пусть $150! = 2^k \cdot a$, где a нечётно. Докажем, что число $N = 2^6 \cdot \frac{a}{127}$ удовлетворяет условию задачи, а именно оно не делится на 127 и 128, но делится на все остальные маленькие числа.

Очевидно, что число 127 — простое, причём a делится на 127, но не делится на 127^2. Тогда N — натуральное число, которое не делится на 127. Также число N не делится на 128, поскольку $128 = 2^7$. Также N делится на остальные 148 маленьких чисел, поскольку все они являются делителями числа 150!, при этом не делятся на 127 и содержат в своём разложении на простые множители двойку не более чем в шестой степени.

Замечание. Число N, удовлетворяющее условию задачи, не единственно. Можно доказать (хоть это и не требовалось), что все такие числа N не делятся именно на 127 и 128. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. В верном решении нет обоснования, что число 127 — простое.

6 б. Приведено число N, удовлетворяющее условию задачи, но отсутствует обоснование, почему оно подходит.

4 б. Присутствуют попытки построить число N, которое делится на все маленькие числа, кроме 127 и 128, но само число N не приведено или приведено неверно.

0 б. Присутствует только необоснованное утверждение, что такое число N существует.

Задача 4. Покупатель пришёл в антикварный магазин. Торговец выложил на стол 2022 монеты, среди которых есть настоящие и фальшивые, и предупредил покупателя, что настоящих монет среди них больше половины. Для покупателя все монеты внешне неотличимы, а торговец знает, какие именно монеты настоящие, а какие — фальшивые.

За один ход происходит следующее:

- покупатель указывает на любые две монеты,
- торговец говорит, одного ли они типа,
- покупатель убирает одну из этих двух монет со стола.

Может ли покупатель добиться того, чтобы спустя 2021 ход на столе гарантированно осталась настоящая монета?

Ответ: да, может.

Решение. Приведём стратегию покупателя. Первым ходом спросим торговца про две любые монеты. Следующими действиями всегда будем спрашивать про ту из двух монет, указанных на предыдущем ходу, что осталась на столе, и ещё про любую из ранее не задействованных монет.

Покажем, по какому правилу нужно убирать монеты со стола. Будем за покупателя вести подсчёт количества убранных монет двух разных типов (не зная, какой из типов настоящий, а какой фальшивый). Так как каждым действием мы сравниваем тип одной новой монеты и одной старой, покупатель безошибочно определит, к первому или второму типу относится новая монета. Если типы двух монет, про которые текущим действием спрашивал покупатель, различны, то он будет убирать монету того типа, монет которого на данный момент убрано не больше, чем другого (другими словами, будет стремиться «уравнивать» количество убранных монет разных типов). Если же выбранные монеты одного типа, то покупатель убирает любую из двух монет.

Докажем от противного, что в результате таких действий последняя оставшаяся монета будет настоящей. Рассмотрим первое действие покупателя, после которого на столе не осталось настоящих монет. Этим действием покупатель убрал последнюю настоящую монету M. Так как M — последняя настоящая монета, то другая монета N, на которую указывал покупатель, фальшивая. На данный момент монет того же типа, что монета M, убрано строго больше, чем монет того же типа, что монета N (поскольку всего настоящих монет больше, чем фальшивых). Значит, согласно стратегии, покупатель должен был убрать монету N, а не M, противоречие. Таким образом, на столе всегда будут настоящие монеты, и поэтому последняя оставшаяся монета — настоящая. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Приведена верная стратегия, но не доказано, почему она гарантирует настоящую монету в конце.

0 б. Есть только верный ответ.

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Есть только верный ответ.

Задача 5. Действительные числа x, y, z таковы, что $x+y+z = 2$ и $xy + yz + zx = 1$. Найдите наибольшее возможное значение величины $x - y$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Избавимся от переменной z:

$$1 = xy + z(x + y) = xy + (2 - x - y)(x + y) = 2x + 2y - x^2 - y^2 - xy \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x + 2y.$$

Пусть $a = x + y$ и $b = x - y$, выразим всё через a и b:

$$x^2 + y^2 + xy + 1 = 2x + 2y \quad \Rightarrow \quad a^2 - \frac{a^2 - b^2}{4} + 1 = 2a \quad \Rightarrow \quad 3a^2 + b^2 + 4 = 8a \quad \Rightarrow$$

$$b^2 = -3a^2 + 8a - 4.$$

Оценим величину $b^2 = -3a^2 + 8a - 4$ сверху:

$$(-3a^2 + 8a - 4) - \frac{4}{3} = -3\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad -3a^2 + 8a - 4 \leqslant \frac{4}{3}.$$

Отсюда следует, что $b^2 \leqslant \frac{4}{3}$ и $x - y = b \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Также отметим, что значение $x-y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ достигается при $(x, y, z) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Действительно, в этом случае $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b^2 = -3a^2 + 8a - 4$, поэтому все неравенства, приведённые выше, обращаются в равенства. $\square$

Критерии

Следующие критерии суммируются:

5 б. Доказано, что $x - y \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2 б. Доказано, что существует тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая условиям задачи, для которой $x - y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Есть только верный ответ.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

11 класс

Задача 1. На тарелке лежат различные конфеты трёх видов: 2 леденца, 3 шоколадных и 5 мармеладных. Света последовательно все их съела, выбирая каждую следующую конфету наугад. Найдите вероятность того, что первая и последняя съеденные конфеты были одного вида.

Ответ: 14/45.

Решение. Две конфеты одного вида могут быть либо леденцами, либо шоколадными, либо мармеладными. Посчитаем вероятности каждого из этих событий и сложим их.

Упорядочим конфеты в порядке их съедания. Вероятность того, что первая конфета — леденец, равна $2/10$. Вероятность того, что последняя конфета — леденец, равна вероятности того, что леденец на любом другом месте. Следовательно, эта вероятность равна $1/9$, поскольку после выбора первой конфеты осталось всего 9 конфет, среди которых ровно один леденец. Итак, вероятность того, что первая и последняя конфеты — леденцы, равна $2/10 \cdot 1/9 = 2/90$.

Аналогично найдём вероятность того, что первая и последняя конфета — шоколадные, она равна $3/10 \cdot 2/9 = 6/90$. А вероятность того, что первая и последняя конфета — мармеладные, равна $5/10 \cdot 4/9 = 20/90$. Следовательно, ответом задачи является число

$$2/90 + 6/90 + 20/90 = 28/90 = 14/45.$$

Замечание. Вероятность того, что первая и последняя конфеты являются леденцами, можно также считать следующим образом.

Всего есть $\dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}$ способов выложить наши 10 конфет в ряд, а среди них есть $\dfrac{8}{3! \cdot 5!}$ способов выложить их в ряд так, чтобы леденцы были в начале и в конце. Тогда вероятность того, что первая и последняя конфеты являются леденцами, равна

$$\frac{\dfrac{8}{3! \cdot 5!}}{\dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}.$$

Аналогичным образом можно посчитать вероятности и для конфет других видов. $\square$

Критерии

7 б. Любое полное решение задачи.

В решении, аналогичном авторскому, но содержащем арифметические ошибки, следующие критерии суммируются:

2 б. Верно найдена вероятность того, что первая и последняя конфеты — леденцы.

2 б. Верно найдена вероятность того, что первая и последняя конфеты — шоколадные.

2 б. Верно найдена вероятность того, что первая и последняя конфеты — мармеладные.

1 б. Найден верный ответ.

Задача 2. В школьном турнире по крестикам-ноликам участвовали 16 учеников, каждый сыграл с каждым ровно одну игру. За победу давалось 5 очков, за ничью — 2 очка, за поражение — 0 очков. После завершения турнира выяснилось, что суммарно все участники набрали 550 очков. Какое наибольшее количество участников могло ни разу не сыграть вничью в этом турнире?

Ответ:

Решение. Всего за турнир было сыграно $\dfrac{16 \cdot 15}{2} = 120$ игр. В каждой игре разыгрывалось либо 5 очков (в случае победы-поражения), либо 4 очка (в случае ничьей). Если бы все игры были сыграны вничью, то суммарное количество очков у всех участников равнялось бы $120 \cdot 4 = 480$, что на 70 меньше, чем реальная сумма очков всех участников. В случае не ничейной игры два её участника суммарно получают на 1 очко больше, чем в случае ничейной игры. Это означает, что ровно 70 игр завершились победой одного из участников, а остальные 50 игр закончились вничью.

Предположим, что хотя бы 6 участников ни разу не сыграли вничью. Тогда ничейные партии могли пройти только между оставшимися 10 участниками, а всего они между собой сыграли $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$ игр, что меньше 50. Противоречие. Следовательно, не более 5 участников ни разу не сыграли вничью.

Нетрудно описать пример для 5 участников. Зафиксируем 11 участников, они сыграли между собой $\dfrac{11 \cdot 10}{2} = 55$ игр. Выберем любые 50 из этих игр, пусть они были сыграны вничью (ясно тогда, что каждый из зафиксированных 11 участников хотя бы раз сыграет вничью), а все остальные игры турнира закончились победой любого из участников. Следовательно, $16 - 11 = 5$ человек ни разу не сыграли вничью. Ясно, что все условия задачи выполняются. □

Критерии

Следующие критерии суммируются:

2 б. Верно описан пример, в котором ровно 5 человек ни разу не сыграли вничью.

5 б. Доказано, что не более 5 человек ни разу не сыграли вничью.

Если отсутствует доказательство, что не более 5 человек ни разу не сыграли вничью:

2 б. Доказано, что ничьих было ровно 50 (или что результативных партий было ровно 70).

Задача 3. Натуральное число A назовём *интересным*, если существует натуральное число B такое, что:

- $A > B$;
- разность чисел A и B — простое число;
- произведение чисел A и B — точный квадрат.

Найдите все интересные числа, большие 200 и меньшие 400.

Ответ: 225, 256, 361.

Решение. Пусть $A - B = p$ — простое число. По условию $AB = B(B + p) = n^2$ для некоторого натурального n. Заметим, что НОД чисел B и $B + p$ делит их разность, равную p, поэтому он равен либо p, либо 1. Разберём два случая.

- Предположим, $\text{НОД}(B, B + p) = p$. Тогда $B = ps$ и $B + p = p(s + 1)$ для некоторого натурального s. Тогда $n^2 = B(B + p) = ps \cdot p(s + 1)$, т. е. $n^2 = p^2 s(s+1)$. Отсюда следует, что n делится на p, поэтому $s(s+1) = \left(\frac{n}{p}\right)^2$ — точный квадрат. Но $s^2 < s(s+1) < (s+1)^2$, т. е. число $s(s+1)$ находится между двумя последовательными точными квадратами, поэтому само не может быть точным квадратом. Противоречие.
- Предположим, $\text{НОД}(B, B+p) = 1$. Произведение взаимно простых чисел B и $B+p$ является точным квадратом тогда и только тогда, когда сами числа B и $B + p$ являются точными квадратами. Тогда $B = b^2$ и $A = B + p = a^2$ для некоторых натуральных $a > b$, откуда следует, что $p = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Из того, что произведение натуральных чисел $a - b$ и $a + b$ равно простому числу p, следует, что $a - b = 1$ и $a + b = p$. Тогда $a = \frac{p+1}{2}$ и $b = \frac{p-1}{2}$, поэтому $B = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ и $A = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$. Поскольку число p является простым, получаем несколько случаев:
  - Если $p \leqslant 23$, то $A \leqslant 12^2 < 200$ — не подходит под условие задачи.
  - Если $p = 29$, то $A = 15^2 = 225$ и $B = 14^2 = 196$ — подходит под условие задачи.
  - Если $p = 31$, то $A = 16^2 = 256$ и $B = 15^2 = 225$ — подходит под условие задачи.

– Если $p = 37$, то $A = 19^2 = 361$ и $B = 18^2 = 324$ — подходит под условие задачи.

– Если $p \geqslant 41$, то $A \geqslant 21^2 > 400$ — не подходит под условие задачи.

$\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

6 б. Найден явный вид чисел A и B, но неверно найдены все возможные значения A от 200 до 400.

3 б. Доказано, что числа A и B являются точными квадратами, но дальнейших продвижений нет.

1 б. Есть только верный ответ.

Задача 4. Положительные числа a, b, c, d больше 1. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\log_a(ab^2) + \log_b(b^2c^3) + \log_c(c^5d^6) + \log_d(d^{35}a^{36}).$$

Ответ: 67.

Решение. Из свойств логарифма следует, что $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a = 1$. Также все эти четыре множителя положительны, поскольку все числа a, b, c, d больше 1.

Преобразуем и оценим имеющееся выражение

$$S = \log_a(ab^2) + \log_b(b^2c^3) + \log_c(c^5d^6) + \log_d(d^{35}a^{36}) =$$

$$= (\log_a a + \log_a b^2) + (\log_b b^2 + \log_b c^3) + (\log_c c^5 + \log_c d^6) + (\log_d d^{35} + \log_d a^{36}) =$$

$$= (1 + 2\log_a b) + (2 + 3\log_b c) + (5 + 6\log_c d) + (35 + 36\log_d a) \geqslant$$

$$\geqslant (1 + 2 + 5 + 35) + 4\sqrt[4]{2\log_a b \cdot 3\log_b c \cdot 6\log_c d \cdot 36\log_d a} = 43 + 4 \cdot 6 = 67,$$

здесь в последнем переходе использовалось неравенство между арифметическим и средним геометрическим для четырёх положительных чисел $2\log_a b$, $3\log_b c$, 6 l

Также отметим, что значение $S = 67$ достигается, например, при $a = 2, b = 8, c = d = 64$, поскольку все четыре числа $2\log_a b$, $3\log_b c$, $6\log_c d$, $36\log_d a$ будут равны 6. $\square$

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются.

Оценка. Используется один наибольший подходящий критерий:

5 б. Доказана оценка $S \geqslant 67$.

1 б. Задача сведена к нахождению минимума суммы $2\log_a b + 3\log_b c + 6\log_c d + 36\log_d a$.

0 б. Упомянута положительность чисел $\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c d$, $\log_d a$.

Пример. Используется один наибольший подходящий критерий:

2 б. Доказано, что значение $S = 67$ достигается при некоторых a, b, c, d, больших 1.

0 б. Только верный ответ.

Задача 5. Точка P внутри остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle BAP = \angle CAP$. Точка M — середина стороны BC. Прямая MP пересекает описанные окружности треугольников ABP и ACP в точках D и E соответственно (точка P лежит между точками M и E, точка E лежит между точками P и D). Оказалось, что $DE = MP$. Докажите, что $BC = 2BP$.

Ответ: 35.

Решение. Четырёхугольник $AEPC$ — вписанный, поэтому $\angle CAP = \angle CEP$. Аналогично четырёхугольник $BPAD$ — вписанный, поэтому $\angle BDP = \angle BAP = \angle CAP = \angle CEP$.

Опустим высоты BX и CY на прямую MP. Заметим, что прямоугольные треугольники BMX и CMY равны по гипотенузе $BM = MC$ и острому углу $\angle BMX = \angle CMY$, откуда получаем $BX = CY$.

Заметим, что прямоугольные треугольники CYE и BXD равны по катету $CY = BX$ и острому углу $\angle CEY = \angle CEP = \angle BDP = \angle BDX$, откуда получаем $YE = XD$. Тогда

$$0 = YE - XD = (YM + MP + PE) - (XP + PE + ED) = YM - XP.$$

Получается, что $XP = YM = XM$. Следовательно, в треугольнике BPM высота BX совпадает с медианой, поэтому он является равнобедренным, и $BP = BM = \dfrac{BC}{2}$, что и требовалось.

Другое решение. После равенства $\angle BDP = \angle CEP$ можно было закончить решение иначе. Можно доказать, что треугольники BDP и CEM равны, откуда и следует $BP = CM = \frac{BC}{2}$.

По теореме синусов для треугольников BDM и CEM имеем

$$\frac{BD}{\sin\angle BMD} = \frac{BM}{\sin\angle BDM} = \frac{CM}{\sin\angle CEM} = \frac{CE}{\sin\angle CME}.$$

Поскольку $\angle BMD + \angle CME = 180°$, получаем $BD = CE$. Тогда треугольники BDP и CEM равны по двум сторонам $BD = CE, DP = EM$ и углу между ними $\angle BDP = \angle CEM$. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

6 б. Корректно доказано, что треугольники BDP и CEM равны, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Допущена ошибка в доказательстве равенства треугольников BDP и CEM, либо доказано, что $BD = CE$, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Доказано, что $\angle CEM = \angle PDB$, либо $\angle CAP = \angle CEM$, либо $\angle BAP = \angle BDP$ но дальнейших продвижений нет.

1 б. Приведен корректный рисунок задачи.

Задача 6. Назовём функцию f *хорошей*, если

- f определена на отрезке $[0, 1]$ и принимает действительные значения;
- для всех $x, y \in [0, 1]$ верно $|x - y|^2 \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$.

Найдите все хорошие функции.

Ответ: $f(x) = x + c$, $f(x) = -x + c$, где $c \in \mathbb{R}$.

Решение. Очевидно, что все функции, приведённые выше, подходят. Заметим, что вместе с каждой функцией $f(x)$, удовлетворяющей условию, ему также удовлетворяют и все функции вида $f(x) + c$ и $-f(x)$. Докажем, что если $f(0) = 0$ и $f(1) \geqslant 0$, то при всех $x \in [0, 1]$ верно $f(x) = x$. Отсюда и из замечания выше будет следовать приведённый ответ.

Итак, пусть $f(0) = 0$ и $f(1) \geqslant 0$. Подставив $x = 0$, $y = 1$, получаем $1 \leqslant |f(0) - f(1)| \leqslant 1$, то есть $|f(1)| = 1$, поэтому $f(1) = 1$. Далее для любого $x \in (0, 1)$ имеем

$$f(x) \leqslant |f(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant |x - 0| = x \quad \text{и}$$

$$1 - f(x) \leqslant |1 - f(x)| = |f(1) - f(x)| \leqslant |1 - x| = 1 - x.$$

Итак, $f(x) \leqslant x$ и $1 - f(x) \leqslant 1 - x$, то есть $f(x) \geqslant x$. Следовательно, $f(x) = x$. $\square$

Критерии

7 б. Любое полное решение задачи.

В недоведённом решении следующие критерии суммируются:

1 б. Есть только верный ответ.