Материалы для проведения заключительного этапа

XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2021–2022 учебный год

Первый день

Саранск, 17–25 апреля 2022 г.

Москва, 2022

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, М. А. Антипов, А. В. Антропов, И. И. Богданов, Д. Ю. Бродский, А. С. Голованов, М. А. Дидин, П. Ю. Козлов, Д. Н. Крачун, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

© Авторы и составители, 2022
© И. И. Богданов, А. И. Голованов, 2022, макет

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

(*А.С. Голованов*)

Решение. Пусть $n > k$ — главные делители числа a; тогда a/n и a/k — два наименьших делителя числа a, бо́льших единицы. Пусть p — наименьший простой делитель числа a, а q — наименьший простой делитель a, кроме p (если такой существует). Тогда $a/n = p$. Далее, a/k — либо простое число (тогда это q), либо составное. Во втором случае единственным простым делителем числа a/k является p, и потому $a/k = p^2$; этот случай реализуется ровно тогда, когда a делится на p^2, причём $p^2 < q$ или q не существует.

Итак, главные делители числа a — это либо a/p и a/q, либо a/p и a/p^2. Покажем теперь, что по двум главным делителям $n > k$ составное число a восстанавливается однозначно (откуда и следует требуемое). Если n кратно k, то выполнен второй случай, и тогда $a = n^2/k$. Иначе выполнен первый случай, и тогда $a = \text{НОК}(n, k)$.

9.2. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, внешние биссектрисы его углов B и C пересекаются в точке J. Окружность ω_b с центром в точке O_b проходит через точку B и касается прямой CI в точке I. Окружность ω_c с центром в точке O_c проходит через точку C и касается прямой BI в точке I. Отрезки O_bO_c и IJ пересекаются в точке K. Найдите отношение IK/KJ.

(*Л. Емельянов, И. Богданов*)

Ответ. 1/3.

Первое решение. Проведём в окружности ω_b диаметр IX, а в окружности ω_c — диаметр IY. Заметим, что $\angle IBJ = 90^\circ = \angle ICJ$, поскольку внутренняя и внешняя биссектриса угла перпендикулярны. Следовательно, точка X лежит на BJ, а точка Y — на CJ (см. рис. 1). Кроме того, $IX \perp IC$, поскольку ω_b касается IC в точке I, поэтому $IX \parallel CJ$. Аналогично, $IY \parallel BJ$. Итого, четырёхугольник $IXJY$ — параллелограмм, пусть его диагонали пересекаются в точке M. Тогда $IM = MJ$, а отрезок O_bO_j — средняя линия треугольника IXY, поэтому точка K — середина отрезка IM. Таким образом, $IK = IM/2 = IJ/4$, откуда следует, что $IK/KJ = 1/3$.

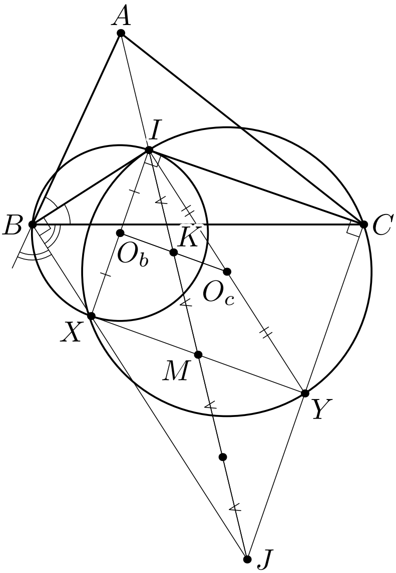

Рис. 1

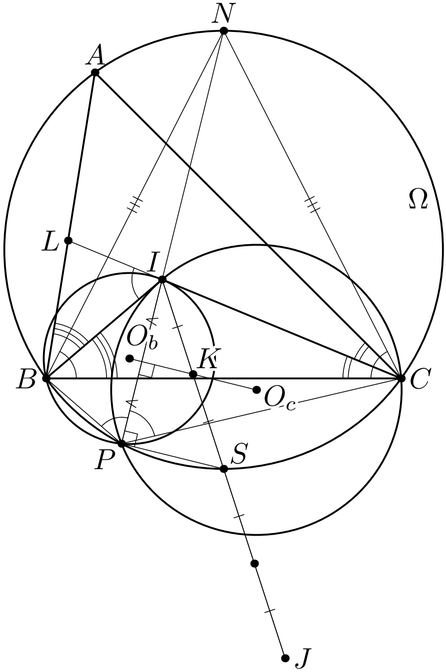

Рис. 2

Второе решение. Обозначим через N середину дуги BAC описанной окружности Ω треугольника ABC, а через S — середину другой её дуги BC. Пусть луч NI вторично пересекает Ω в точке P (см. рис. 2). Поскольку SN — диаметр окружности (ABC), то $\angle NPS = 90^\circ$.

По известной лемме о трезубце имеем $SI = SC = SJ$, в частности, S — середина отрезка IJ. Поскольку $\angle BAC = \angle BNC$ и $BN = NC$, то $\angle NBC = \angle NCB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB$.

Продлим луч CI до пересечения с AB в точке L. Так как $\angle LIB$ внешний для треугольника BIC, а также четырёхугольник $BNCP$ — вписанный, мы получаем, что $\angle LIB = \angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \angle NCB = \angle IPB$, поэтому окружность (IBP) касается прямой CI в точке I. Также эта окружность проходит через B, следовательно, это и есть окружность ω_b. Аналогично, окружность ω_c описана около треугольника IPC.

Значит, IP — общая хорда окружностей ω_b и ω_c, а тогда O_bO_c — серединный перпендикуляр к отрезку IP. Поскольку к тому же $\angle IPS = 90°$, мы получаем, что O_1O_2 проходит через середину отрезка IS, то есть $KI = KS$, а тогда $IK/KJ = 1/3$.

Замечание. Точка S во втором решении совпадает с точкой M из первого решения.

9.3. В строку выписаны 200 натуральных чисел. Среди любых двух соседних чисел строки правое либо в 9 раз больше левого, либо в 2 раза меньше левого. Может ли сумма всех этих 200 чисел равняться 24^{2022}? (*О. Подлипский, И. Богданов*)

Ответ. Не может.

Решение. Пусть строка состоит из чисел a_1, $a_2, \ldots, a_{200}$ в этом порядке. Если число $a_i = 2k$ чётно, то следующим за ним может быть число k или число $18k$; эти числа дают одинаковые остатки при делении на 17. Если же a_i нечётно, то $a_{i+1} = 9a_i$. В любом случае получаем, что $a_i \equiv 2a_{i+1} \pmod{17}$.

Таким образом, полагая $a = a_{200}$, получаем, что с точки зрения остатков при делении на 17 строка устроена так же, как и строка $2^{199}a$, $2^{198}a$, $\ldots$, $2a$, a. Сумма всех членов этой новой строки равна $(2^{200} - 1)a$. В частности, она делится на $2^8 - 1 = 15 \cdot 17$, то есть делится на 17. Поэтому и сумма чисел в исходной строке делится на 17, и она не может равняться 24^{2022}.

Замечание. Доказать, что сумма всех чисел в строке делится на 17, можно и по-другому. Можно, например, разбить строку на восьмёрки подряд идущих чисел и заметить, что сумма чисел восьмёрки, заканчивающейся числом a, сравнима с $(2^8 - 1)a = 17 \cdot 15a$.

Также можно рассуждать следующим образом. Каждое следующее число в строке получается из предыдущего одной из следующих операций: делением на 2 или умножением на 9. Отметим, что перестановка местами этих операций не меняет остатка от деления суммы всех чисел на 17 (действительно, после такой замены фрагмент строки $2k, 18k, 9k$ заменяется на фрагмент $2k, k, 9k$). Тогда можно переставить операции так, чтобы сначала шли деления на 2, а потом умножения на 9.

Если при этом происходит $n-1$ деление на 2, а затем $200-n$ умножений на 9, то строка состоит из чисел $2^{n-1}a$, $2^{n-2}a$, $\ldots$, $2a$, a, $9a$, $81a$, $\ldots$, $9^{200-n}a$. Сумма всех этих чисел равна

$$a(2^n-1)+9a\cdot\frac{9^{200-n}-1}{8}=\frac{a}{8}\cdot(2^{n+3}+9^{201-n}-17).$$

После этого достаточно проверить, что число 2^i+9^j делится на 17, если $i+j$ даёт остаток 4 при делении на 8. Это можно сделать, например, перебором остатков от деления на 8 с учётом того, что $2^8-1=15\cdot 17\equiv 0 \pmod{17}$ и $9^8-1\equiv(-4)^4-1=2^8-1\equiv 0$ (mod 17).

9.4. В классе 18 детей. Родители решили подарить детям из этого класса торт. Для этого они сначала узнали у каждого ребёнка площадь куска, который он хочет получить. После этого они заказали торт квадратной формы, площадь которого в точности равна сумме 18 названных чисел. Однако, увидев торт, дети захотели, чтобы их куски тоже были квадратными. Родители могут резать торт разрезами, параллельными сторонам торта (разрезы не обязаны начинаться или оканчиваться на стороне торта). Для какого наибольшего k родители гарантированно могут вырезать из заказанного торта k квадратных кусков, которые можно выдать k детям, чтобы каждый из них получил желаемое? (*А. Ибрагимов, И. Богданов*)

Ответ. $k=12$.

Решение. Мы всегда считаем, что площадь торта равна 1.

Покажем, что при некоторых запросах детей родители не смогут вырезать более 12 требуемых кусков. Выберем число $1/15>x>1/16$. Предположим, что 15 *главных* детей заказали по куску торта площади x (а остальные трое сделали произвольные заказы так, чтобы суммарная площадь заказанных кусков была равна 1). Мысленно разобьём торт на 16 равных квадратов и отметим на торте все 9 вершин этих квадратов, не лежащих на границе торта (см. рис. 3). Тогда строго внутри любого квадратного куска площади x будет лежать одна из отмеченных точек, то есть можно вырезать не больше девяти таких кусков. Значит, хотя бы шестерым детям желаемых кусков не достанется.

Осталось доказать, что 12 детей всегда смогут получить желаемое. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{18}$ — длины сторон кусков, которые хотят получить дети, то есть

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{18}^2 = 1.$$

Покажем, что из квадрата можно вырезать куски со сторонами $a_7, a_8, \ldots, a_{18}$.

Для этого нам потребуются неравенства

$$a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad a_7 + a_8 + a_9 \leqslant 1. \qquad (*)$$

Для доказательства первого неравенства заметим, что

$$1 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{16}^2 \geqslant 4a_4^2 + 4a_8^2 + 4a_{12}^2 + 4a_{16}^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4(a_7^2 + a_{10}^2 + a_{13}^2 + a_{16}^2) \geqslant (a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16})^2;$$

в последнем переходе мы воспользовались неравенством между средним квадратичным и средним арифметическим. Второе неравенство доказывается аналогично:

$$1 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_9^2 \geqslant 3a_3^2 + 3a_6^2 + 3a_9^2 \geqslant$$
$$\geqslant 3(a_7^2 + a_8^2 + a_9^2) \geqslant (a_7 + a_8 + a_9)^2.$$

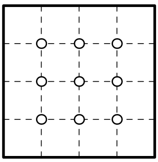

Рис. 3

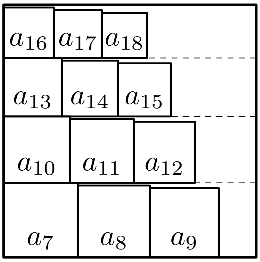

Рис. 4

Из неравенств $(*)$ следует, что можно разрезать торт на горизонтальные полосы высот, не меньших a_7, a_{10}, a_{13} и a_{16} соответственно, и в i-ю полосу уложить квадраты со сторонами a_{3i+4}, a_{3i+5} и a_{3i+6}, как показано на рис. 4.

10 класс

10.1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

(*А.С. Голованов*)

Решение. Пусть $n > k$ — главные делители числа a; тогда a/n и a/k — два наименьших делителя числа a, бо́льших единицы. Пусть p — наименьший простой делитель числа a, а q — наименьший простой делитель a, кроме p (если такой существует). Тогда $a/n = p$. Далее, a/k — либо простое число (тогда это q), либо составное. Во втором случае единственным простым делителем числа a/k является p, и потому $a/k = p^2$; этот случай реализуется ровно тогда, когда a делится на p^2, причём $p^2 < q$ или q не существует.

Итак, главные делители числа a — это либо a/p и a/q, либо a/p и a/p^2. Покажем теперь, что по двум главным делителям $n > k$ составное число a восстанавливается однозначно (откуда и следует требуемое). Если n кратно k, то выполнен второй случай, и тогда $a = n^2/k$. Иначе выполнен первый случай, и тогда $a = \text{НОК}(n, k)$.

10.2. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = CE$. На дуге DE описанной окружности треугольника ADE, не содержащей точку A, нашлись такие точки P и Q, что $AB = PC$ и $AC = BQ$. Докажите, что $AP = AQ$.

(*А. Кузнецов*)

Первое решение. Без ограничения общности будем считать, что точка D лежит на отрезке BE и $AD \leqslant AE$. Пусть O — центр окружности (ADE). Пусть точка A' симметрична A относительно серединного перпендикуляра к отрезку DE (см. рис. 5). Из симметрии $A'B = AC = BQ$. Окружность с центром B и радиусом BA' пересекает окружность (ADE) в точках, симметричных относительно прямой BO, то есть точки A' и Q симметричны относительно BO. Аналогично, точки A' и P симметричны относительно прямой CO.

Прямые OB и OC симметричны относительно серединного

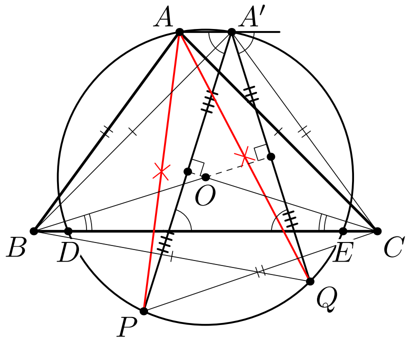

Рис. 5

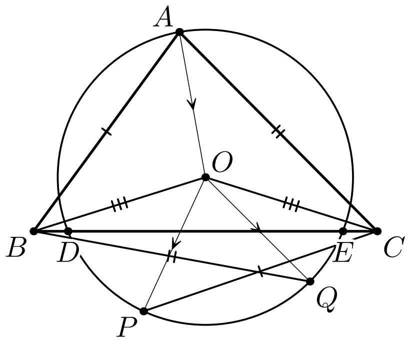

Рис. 6

перпендикуляра к отрезку DE, поэтому они образуют равные углы с прямой DE. Поскольку $A'P \perp CO$, $A'Q \perp BO$ и $AA' \parallel \parallel DE$, то прямые $A'Q$ и $A'P$ образуют равные углы с прямой AA'. Значит, меньшие дуги окружности (ADE), стягиваемые хордами AP и AQ равны, а тогда $AP = AQ$, что и требовалось.

Второе решение. Без ограничения общности будем считать, что точка D лежит на отрезке BE. Пусть O — центр окружности (ADE). Заметим, что $OB = OC$. Поскольку $\angle DAE < \angle BAC < 90^\circ$, то точки A и O лежат по одну сторону от прямой BC (см. рис. 6). Треугольники OAB и OPC равны по трем сторонам, треугольники OAC и OQB — тоже.

Тогда $\angle ABQ = \angle ABO + \angle OBQ = \angle PCO + \angle OCA = \angle PCA$. (Если луч BO не лежит внутри угла ABQ, то луч BA лежит внутри угла QBO, а значит и внутри угла OBC. В этом случае либо $\angle BOA > \angle BOE = \angle COD > \angle COP$, либо $\angle BOA < < \angle BOD = \angle COE < \angle COP$; в обоих случаях получаем противоречие с равенством треугольников OAB и OPC. Аналогично, луч CO лежит внутри угла PCA.)

Поэтому треугольники ABQ и PCA равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $AP = AQ$.

10.3. Изначально на доске написана пара чисел $(1, 1)$. Если для некоторых x и y на доске написана одна из пар $(x, y-1)$ и $(x+y, y+1)$, то можно дописать другую. Аналогично, если на доске написана одна из пар (x, xy) и $\left(\frac{1}{x}, y\right)$, то можно дописать другую. Докажите, что в каждой выписанной паре первое число будет положительным. *(М. Антипов)*

Первое решение. Назовём *дискриминантом* пары чисел (a, b) величину $D(a, b) = b^2 - 4a$. Докажем, что дискриминант всех пар чисел, записанных на доске, всегда отрицателен. Действительно, дискриминант пары чисел, записанной изначально, равен $D(1, 1) = -3 < 0$. Далее, верны следующие соотношения:

$$\frac{D(x, y-1)}{D(x+y, y+1)} = \frac{y^2 - 4x - 2y + 1}{y^2 - 4x - 2y + 1} = 1$$

и

$$\frac{D(x, xy)}{D(1/x, y)} = \frac{x^2y^2 - 4x}{y^2 - 4/x} = x^2,$$

поэтому на доске ни в какой момент не может появиться число с положительным дискриминантом. Теперь рассмотрим любую выписанную на доску пару (a, b). В ней первое число a равно $\frac{b^2 - D}{4}$ и, следовательно, больше 0, что и требовалось доказать.

Второе решение. Если на доске написана пара (x, y), то с помощью первой операции можно добавить или пару $(x + y + 1, y + 2)$, или пару $(x - y + 1, y - 2)$. Обе этим пары можно записать как $(x + ky + k^2, y + 2k)$, где в первом случае $k = 1$, а во втором — $k = -1$. С помощью второй операции можно добавить только пару $\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$.

Докажем более общий факт: на каждом шаге для любых целых s, t, таких, что $s^2 + t^2 > 0$, для любой пары чисел (x, y), написанной на доске, выполняется неравенство

$$s^2x + sty + t^2 > 0.$$

В частности, при $s = 1, t = 0$ получается в точности утверждение исходной задачи.

Для пары $(1, 1)$ утверждение задачи верно. Далее, рассмотрим два типа операций:

• $(x, y) \to (x + ky + k^2, y + 2k)$. Тогда для новой пары верно $s^2(x + ky + k^2) + st(y + 2k) + t^2 = s^2x + s(sk + t)y + (sk + t)^2 > 0$.

• $(x, y) \to (1/x, y/x)$. Здесь также получаем нужное неравенство:

$$s^2\,\frac{1}{x} + st\,\frac{y}{x} + t^2 = \frac{t^2x + tsy + s^2}{x} = \frac{t^2x + tsy + s^2}{1^2 \cdot x + 1 \cdot 0 \cdot y + 0^2} > 0.$$

10.4. Дано натуральное число $n > 4$. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Василий проводит по одному все отрезки, соединяющие пары отмеченных точек. На каждом шаге, проводя очередной отрезок S, Василий помечает его наименьшим натуральным числом, которым ещё не помечен ни один отрезок, имеющий с S общий конец. Для какого наибольшего k Василий может действовать так, чтобы пометить какой-то отрезок числом k? (*А. Глебов, Д. Храмцов*)

Ответ. $k = 2n - 3$ при нечётном n, и $k = 2n - 4$ при чётном $n > 4$.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим шаг, на котором Василий помечает некоторый отрезок AB. Перед этим шагом из каждой из точек A и B выходит максимум по $n - 2$ отрезка, и они содержат максимум $2n - 4$ различных пометки. Значит, Василий точно сможет пометить этот отрезок числом, не превосходящим $2n - 3$. Итак, $k \leqslant 2n - 3$.

Если n чётно, эту оценку можно уточнить следующим образом. Назовём *маленьким* отрезок, помеченный единицей. Докажем, что в конце процесса из каждой точки будет выходить маленький отрезок; предположим противное. Точки, из которых выходят маленькие отрезки, разбиваются на пары точек, соединённых таким отрезком. Значит, есть хотя бы две точки X и Y, из которых не выходит маленьктх отрезков. Выходит, что когда Василий проводил отрезок XY, он должен был пометить его единицей — противоречие.

Значит, если отрезок AB не будет маленьким. то в конце процесса среди отрезков, выходящих из A и B, кроме AB, будут два маленьких отрезка. Значит, на этих отрезках будет максимум $2(n-2)-1 = 2n-5$ различных пометок. Следовательно, когдв Василий будет проводить отрезок AB, он сможет пометить его числом, не превосходящим $2n - 4$, и $k \leqslant 2n - 4$.

Пример. Осталось доказать, что Василий может достичь указанных значений k.

Лемма. *Если количество точек чётно и равно m, то Василий может пометить все отрезки между этими точками, использовав лишь числа от 1 до $m - 1$. При этом из каждой* *точки будут выходить отрезки, помеченные всеми этими числами.*

Доказательство. Утверждение леммы не зависит от конкретного расположения точек, так что можно считать, что $m-1$ точек $A_1, \ldots, A_{m-1}$ расположены в вершинах правильного $(m-1)$-угольника, а оставшаяся точка — в его центре O.

Тогда все отрезки между этими точками можно разбить на $m-1$ множеств S_1, S_2, …, S_{m-1} так, чтобы отрезки одного множества не имели общих концов. Например, в множество S_i можно включить отрезок OA_i и все отрезки, соединяющие пары вершин $(m-1)$-угольника и перпендикулярные OA_i. Из каждой точки выходит по отрезку каждого из множеств.

Теперь Василий может сначала пометить все отрезки множества S_1 числом 1, затем все отрезки второго множества числом 2, и т. д. □

Вернёмся к решению. Пусть n нечётно, и пусть A — отмеченная точка. Пусть Василий сначала пометит все отрезки между точками, отличными от A, числами от 1 до $n-2$ согласно лемме. Затем он проведёт все $n-1$ отрезок из A; каждый отрезок AB ему придётся помечать числом, бóльшим $n-2$, ибо из B уже выходят отрезки, помеченные всеми меньшими числами. Кроме того, все эти $n-1$ отрезок будут помечены разными числами, ибо у них есть общий конец. Следовательно, они будут помечены числами $n-1$, n, …, $2n-3$, то есть Василий получит пометку $k = 2n-3$.

Пусть теперь n чётно. Выберем две отмеченных точки A и B; пусть C_1, C_2, …, C_{n-2} — остальные отмеченные точки. Пусть Василий сначала пометит все отрезки между точками C_i числами от 1 до $n-3$ согласно лемме, а также пометит отрезок AB числом 1. Затем он последовательно проводит отрезки AC_1, AC_2, …, AC_{n-3}; поскольку в вершины C_i уже входят отрезки с пометками от 1 до $n-3$, новые отрезки будут помечены числами $n-2$, $n-1$, …, $2n-6$ соответственно. Далее Василий проводит отрезки BC_{n-3}, BC_2, BC_3, …, BC_{n-4}; аналогично, он пометит их числами $n-2$, $n-1$, …, $2n-6$ соответственно.

Теперь в вершины A и B уже входят отрезки со всеми пометками от $n-2$ до $2n-6$, а в вершину C_{n-2} — со всеми пометками от 1 до $n-3$. Значит, когда Василий проводит отрезки AC_{n-2} и BC_{n-2}, первый будет помечен числом $2n-5$, а второй — числом $2n-4$ (ибо имеет общий конец с предыдущим). Значит, Василий добился появления числа $k = 2n - 4$.

11 класс

11.1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

(*А.С. Голованов*)

Решение. Пусть $n > k$ — главные делители числа a; тогда a/n и a/k — два наименьших делителя числа a, бо́льших единицы. Пусть p — наименьший простой делитель числа a, а q — наименьший простой делитель a, кроме p (если такой существует). Тогда $a/n = p$. Далее, a/k — либо простое число (тогда это q), либо составное. Во втором случае единственным простым делителем числа a/k является p, и потому $a/k = p^2$; этот случай реализуется ровно тогда, когда a делится на p^2, причём $p^2 < q$ или q не существует.

Итак, главные делители числа a — это либо a/p и a/q, либо a/p и a/p^2. Покажем теперь, что по двум главным делителям $n > k$ составное число a восстанавливается однозначно (откуда и следует требуемое). Если n кратно k, то выполнен второй случай, и тогда $a = n^2/k$. Иначе выполнен первый случай, и тогда $a = \text{НОК}(n, k)$.

11.2. На плоскости нарисованы графики функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$, а также оси координат. Как циркулем и линейкой построить какую-нибудь прямую, которая касается графика синуса как выше оси абсцисс (Ox), так и ниже (и, возможно, имеет ещё несколько точек пересечения)? (*А. Кузнецов*)

Решение. Будем искать касательную, проходящую через начало координат. Касательная к графику синуса в точке $(x_0, \sin x_0)$ имеет уравнение $y = (x - x_0) \cdot \cos x_0 + \sin x_0$. Эта прямая проходит через начало координат тогда и только тогда, когда $0 = -x_0 \cdot \cos x_0 + \sin x_0$, что равносильно $\operatorname{tg} x_0 = x_0$.

Осталось построить точку $(x_0, \sin x_0)$. Для этого (с помощью циркуля и линейки) построим биссектрису координатного угла, т.е. прямую $y = x$. Выберем её точку пересечения с графиком тангенса: $(x_0, \operatorname{tg} x_0)$, $x_0 \neq 0$. Далее, опуская из этой точки перпендикуляр на ось абсцисс и пересекая этот перпендикуляр с графиком синуса, получаем точку $(x_0, \sin x_0)$. Прямая, проходящая через начало координат и точку $(x_0, \sin x_0)$ будет касаться графика синуса в точке $(x_0, \sin x_0)$ по выбору точки x_0, а также в точке $(-x_0, -\sin x_0)$ из симметрии относительно начала координат. Эти точки лежат по разные стороны от оси абсцисс, что и требовалось.

11.3. На плоскости фиксирован остроугольный треугольник ABC с наибольшей стороной BC. Пусть PQ — произвольный диаметр его описанной окружности, причём точка P лежит на меньшей дуге AB, а точка Q — на меньшей дуге AC. Точки X, Y и Z — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямую AB, из точки Q на прямую AC и из точки A на прямую PQ. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на фиксированной окружности (не зависящей от выбора точек P и Q). (*И. Кухарчук, М. Дидин*)

Решение. Заметим, что $\angle PAQ = 90^\circ$, так как PQ — диаметр окружности (ABC). Пусть M и N — середины отрезков AP и AQ соответственно. Так как $\angle AZP = 90^\circ = \angle AXP$, то четырёхугольник $AZXP$ вписан в окружность с центром в точке M, откуда $\angle PZX = \angle PAB = 90^\circ - \angle BAQ = 90^\circ - \angle BPZ$. Следовательно, $XZ \perp BP$. Тогда, в силу сказанного выше, серединный перпендикуляр к отрезку XZ проходит через точку M и параллелен прямой BP, а потому на нём лежит и середина отрезка AB, обозначим её через D. Аналогично, если E — середина отрезка AC, то NE — серединный перпендикуляр к отрезку YZ. Таким образом, прямые MD и NE пересекаются в центре окружности (XYZ), обозначим его через O.

Тогда $\angle DOE = 180^\circ - \angle XZY = \angle PZX + \angle QZY = \angle PAB + \angle QAC = 90^\circ - \angle BAC$. Следовательно, точка O лежит на фиксированной окружности, проходящей через точки D и E, что и требовалось.

11.4. Дано натуральное число $n > 4$. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Василий проводит по одному все отрезки, соединяющие пары отмеченных точек. На каждом шаге, проводя очередной отрезок S, Василий помечает его наименьшим натуральным числом, которым ещё не помечен ни один отрезок, имеющий с S общий конец. Для

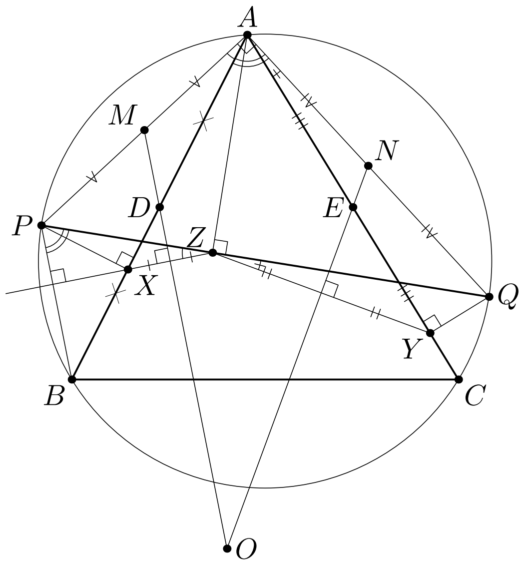

Рис. 7

какого наибольшего k Василий может действовать так, чтобы пометить какой-то отрезок числом k? *(А. Глебов, Д. Храмцов)*

Ответ. $k = 2n - 3$ при нечётном n, и $k = 2n - 4$ при чётном $n > 4$.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим шаг, на котором Василий помечает некоторый отрезок AB. Перед этим шагом из каждой из точек A и B выходит максимум по $n - 2$ отрезка, и они содержат максимум $2n - 4$ различных пометки. Значит, Василий точно сможет пометить этот отрезок числом, не превосходящим $2n - 3$. Итак, $k \leqslant 2n - 3$.

Если n чётно, эту оценку можно уточнить следующим образом. Назовём *маленьким* отрезок, помеченный единицей. Докажем, что в конце процесса из каждой точки будет выходить маленький отрезок; предположим противное. Точки, из которых выходят маленькие отрезки, разбиваются на пары точек, соединённых таким отрезком. Значит, есть хотя бы две точки X и Y, из которых не выходит маленьктх отрезков. Выходит, что когда Василий проводил отрезок XY, он должен был пометить его единицей — противоречие.

Значит, если отрезок AB не будет маленьким. то в конце процесса среди отрезков, выходящих из A и B, кроме AB, будут два маленьких отрезка. Значит, на этих отрезках будет максимум $2(n-2)-1=2n-5$ различных пометок. Следовательно, когдв Василий будет проводить отрезок AB, он сможет пометить его числом, не превосходящим $2n-4$, и $k \leqslant 2n-4$.

Пример. Осталось доказать, что Василий может достичь указанных значений k.

Лемма. *Если количество точек чётно и равно m, то Василий может пометить все отрезки между этими точками, использовав лишь числа от 1 до $m-1$. При этом из каждой точки будут выходить отрезки, помеченные всеми этими числами.*

Доказательство. Утверждение леммы не зависит от конкретного расположения точек, так что можно считать, что $m-1$ точек $A_1, \ldots, A_{m-1}$ расположены в вершинах правильного $(m-1)$-угольника, а оставшаяся точка — в его центре O.

Тогда все отрезки между этими точками можно разбить на $m-1$ множеств S_1, S_2, $\ldots$, S_{m-1} так, чтобы отрезки одного множества не имели общих концов. Например, в множество S_i можно включить отрезок OA_i и все отрезки, соединяющие пары вершин $(m-1)$-угольника и перпендикулярные OA_i. Из каждой точки выходит по отрезку каждого из множеств.

Теперь Василий может сначала пометить все отрезки множества S_1 числом 1, затем все отрезки второго множества числом 2, и т. д. □

Вернёмся к решению. Пусть n нечётно, и пусть A — отмеченная точка. Пусть Василий сначала пометит все отрезки между точками, отличными от A, числами от 1 до $n-2$ согласно лемме. Затем он проведёт все $n-1$ отрезок из A; каждый отрезок AB ему придётся помечать числом, бóльшим $n-2$, ибо из B уже выходят отрезки, помеченные всеми меньшими числами. Кроме того, все эти $n-1$ отрезок будут помечены разными числами, ибо у них есть общий конец. Следовательно, они будут помечены числами $n-1$, n, $\ldots$, $2n-3$, то есть Василий получит пометку $k=2n-3$.

Пусть теперь n чётно. Выберем две отмеченных точки A

и B; пусть C_1, C_2, $\ldots$, C_{n-2} — остальные отмеченные точки. Пусть Василий сначала пометит все отрезки между точками C_i числами от 1 до $n-3$ согласно лемме, а также пометит отрезок AB числом 1. Затем он последовательно проводит отрезки AC_1, AC_2, $\ldots$, AC_{n-3}; поскольку в вершины C_i уже входят отрезки с пометками от 1 до $n-3$, новые отрезки будут помечены числами $n-2$, $n-1$, $\ldots$, $2n-6$ соответственно. Далее Василий проводит отрезки BC_{n-3}, BC_2, BC_3, $\ldots$, BC_{n-4}; аналогично, он пометит их числами $n-2$, $n-1$, $\ldots$, $2n-6$ соответственно.

Теперь в вершины A и B уже входят отрезки со всеми пометками от $n-2$ до $2n-6$, а в вершину C_{n-2} — со всеми пометками от 1 до $n-3$. Значит, когда Василий проводит отрезки AC_{n-2} и BC_{n-2}, первый будет помечен числом $2n-5$, а второй — числом $2n-4$ (ибо имеет общий конец с предыдущим). Значит, Василий добился появления числа $k = 2n-4$.