

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

1	0	-	0	,	8													
---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

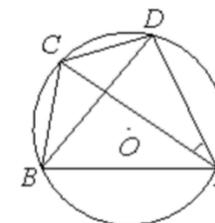
Справочные материалы

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Решите уравнение
 $\log_{x-2} 16 = 2$.
 Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.
 Ответ: _____.
- 2** Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже $36,8^\circ\text{C}$, равна $0,89$. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется $36,8^\circ\text{C}$ или выше.
 Ответ: _____.
- 3** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 82° , угол ABD равен 47° . Найдите угол CAD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

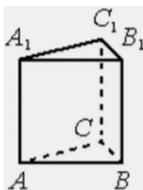


4 Найдите

$\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{51}}{10}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1 .



Ответ: _____.

6 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 27$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.

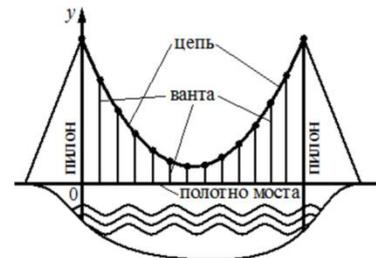
Ответ: _____.

7 На рисунке изображена схема моста. Вертикальные *пилоны* связаны провисающей *цепью*. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают *полотно* моста, называются *вантами*.

Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задаётся формулой

$$y = 0,0029x^2 - 0,53x + 28,$$

где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 90 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

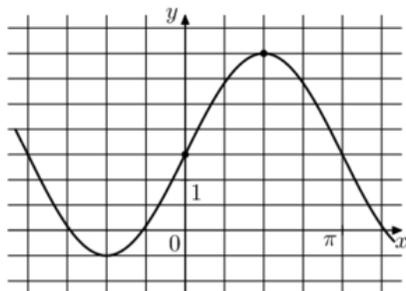


Ответ: _____.

8 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 50 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 5 часов позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите b .



Ответ: _____.

10 Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Ответ: _____.

11 Найдите точку максимума функции $y = (2x - 1) \cos x - 2 \sin x + 5$ принадлежащую промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\log_5(2 - x) = \log_{25} x^4.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8 \right].$$

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

14 Решите неравенство

$$\log_2^2(16 + 6x - x^2) + 10 \log_{0,5}(16 + 6x - x^2) + 24 > 0.$$

15 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1100 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 30-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1503 тысячи рублей?



16 В треугольнике ABC угол ABC тупой, H – точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60° .

- а) Докажите, что угол ABC равен 120° .
б) Найдите BH , если $AB = 7$, $BC = 8$.

17 Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 2x^2 - x \log_2(b - 1) + 4 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

18 На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	6
2	0,11
3	35
4	-0,7
5	45
6	6
7	3,79
8	10
9	1,5
10	0,46
11	0,5
12	а) 1; -2 б) -2
13	$8 + 2\sqrt{2}$
14	$(-2; 0) \cup (6; 8)$
15	200 тыс.
16	$\frac{13\sqrt{3}}{3}$
17	$\left(1; \frac{33}{32}\right] \cup \{129\} \cup (1025; +\infty)$
18	а) да, 8 9 10 11 12 или 7 9 10 11 12 б) нет в) 37

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

14 Решите неравенство $\log_2^2(16+6x-x^2) + 10\log_{0,5}(16+6x-x^2) + 24 > 0$.

Источники: ФИПИ (старый банк) Досрочная волна 2015

Решение:

$$\log_2^2(16+6x-x^2) + 10\log_{0,5}(16+6x-x^2) + 24 > 0$$

$$\log_2^2(16+6x-x^2) - 10\log_2(16+6x-x^2) + 24 > 0$$

Пусть $\log_2(16+6x-x^2) = t$

$$t^2 - 10t + 24 > 0$$

График:

$\begin{cases} t < 4 \\ t > 6 \end{cases}$

$$\log_2(16+6x-x^2) < \log_2 16 \quad \log_2(16+6x-x^2) > \log_2 64$$

$$\begin{cases} 0 < 16+6x-x^2 < 16 \\ 16+6x-x^2 > 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16+6x-x^2 > 0 \\ 16+6x-x^2 < 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 16+6x-x^2 > 64 \\ \text{нет решений} \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(-2, 0) \cup (6, 8)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15 Задание с развернутым ответом

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1100 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 30-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1503 тысячи рублей?

Источники: ФИПИ (новый банк) Основная волна 2018

Решение:

Пусть x — сумма, на которую уменьшается долг каждые 30 месяцев

Дата	Сумма долга	Выплата
15 дек	1100	
1 ян	1100 · 1,02 = 1122	
2 ян	1122 - x	→ сумма выплаты 1122 - (1100 - x) = 22 + x
15 ян	1100 - x	
1 фев	1122 - 1,02x	→ сумма выплаты 22 + 0,98x
2 фев	1100 - 2x	
1 март	1122 - 2,04x	→ сумма выплаты 22 + 0,96x
2 март	1100 - 3x	

Арифметическая прогрессия:

Первые 30 выплат арифметическая прогрессия.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$OSB = 1503$$

$$\frac{(22 + x + 22 + 0,92x) \cdot 15}{2} + 1122 \cdot 30 = 1503$$

$$44 \cdot 15 + 1,42x \cdot 15 - 30,6x = 1503 - 1122 \cdot 30$$

$$-9,3x = -279$$

$$x = 30$$

ОТВЕТ: 200 тыс

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



16 В треугольнике ABC угол ABC тупой, H – точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60° .
 а) Докажите, что угол ABC равен 120° .
 б) Найдите BH , если $AB = 7$, $BC = 8$.

Источники:
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2018

а) $\angle BDE = 360 - 90 - 90 - 60 = 120$
 $\angle ABC = 120$
 (вертикальные)

б) $\angle ABD = 60$
 $\angle CBE = 60$
 $\angle DAB = 30 = \angle ECB$
 $BD = \frac{1}{2} AB = 3,5$
 $BE = \frac{1}{2} BC = 4$ т.к. катеты угла 30° равен $\frac{1}{2}$ гипотенузы

Ответ: $\frac{13}{3}$

② $\triangle AHE$:
 $\angle HAE = 30^\circ$
 $\tan 30^\circ = \frac{HE}{AE}$
 $HE = \frac{11}{\sqrt{3}}$

③ $\triangle BEH$:
 $\angle HBE = 30^\circ$
 $BH = \sqrt{\left(\frac{121}{3}\right) + \frac{16}{1}} = \sqrt{\frac{169}{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}}$

17 Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение $x^3 + 2x^2 - x \log_2(b-1) + 4 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

Источники:
 Сборник 2018
 Досрочная волна 2016

Пусть $\log_2(b-1) = a$
 $x^3 + 2x^2 - x \cdot a + 4 = 0$ | :x
 $x^2 + 2x - a + \frac{4}{x} = 0$
 $x^2 + 2x + \frac{4}{x} = a$
 Решим графически:
 Пусть $f(x) = x^2 + 2x + \frac{4}{x}$
 Исследуем функцию на монотонность
 $f'(x) = 2x + 2 - \frac{4}{x^2}$
 $2x + 2 - \frac{4}{x^2} = 0$
 $2x^3 + 2x^2 - 4 = 0$
 $x^3 + x^2 - 2 = 0$

Заметим, что $x=0$ не явл. реш. ур-я ни при каких a

Заметим, что при подстановке $x=1$ числитель др. $\frac{4}{x}$

$(x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0$
 $x^2 + 2x + 2 = 0$
 $\Rightarrow x = 1$ – точка экстремума

Таблица значений функции $f(x)$ на отрезке $[-1; 2]$:

x	-1	-0,5	0,5	1	1,5	2
y	-5	-8,75	9,25	7		10

График функции $f(x)$ на отрезке $[-1; 2]$ с отмеченными точками и значениями.

Ответ: $\left(1, \frac{33}{32}\right] \cup (129; +\infty)$

1 решение будет при $\begin{cases} a \leq -5 \\ a = 7 \\ a > 10 \end{cases}$

$\log_2(b-1) \leq -5$
 $0 < b-1 \leq \frac{1}{32}$
 $1 < b \leq \frac{33}{32}$

$\log_2(b-1) = 7$
 $b-1 = 128$
 $b = 129$

$\log_2(b-1) > 10$
 $b-1 > 1024$
 $b > 1025$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

– обоснованное решение пункта a ; – обоснованное решение пункта b ; – искомая оценка в пункте c ; – пример в пункте c , обеспечивающий точность предыдущей оценки	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

18 На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Источники:
① ЕПР (старый банк) Досрочная волна 2017
② Резерв 2014
③ Досудок 2022

а) $\begin{matrix} 7 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix}$

б) $\begin{matrix} 7 & 9 & - & - \\ 7 & 9 & - & - \end{matrix}$

д) Пусть a, b, c, d, e и f – числа на доске в порядке возр.

$a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f$

$b \geq 9$ иначе не выполнится усл. задачи
 $e \leq 11$

$\Rightarrow c = 10$
 $d = 10$

ИО $d = 10$ числа на доске д.б. различные

а) да
б) нет
в) 37

① 7 и 9 – это минимально возможная комбинация первых двух чисел, удовл. усл.

② Возникнет наименьшее возмож. число

$\begin{matrix} 7 & 9 & 10 & 11 \\ \text{наим.} & \text{наим.} & \text{наим.} & \text{наим.} \\ \text{возможная} & & \text{комбинация} & \text{числа} \end{matrix}$

37

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрназора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

- Существенными считаются следующие расхождения:
- 1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;
 - 2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов:	1

