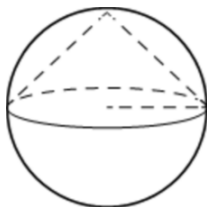


4 Найдите значение выражения

$$\log_2 7 \cdot \log_7 4.$$

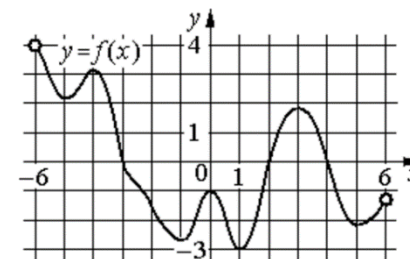
Ответ: _____.

5 Конус вписан в шар (см. рисунок). Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 47. Найдите объём шара.



Ответ: _____.

6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-4,5; 2,5]$.



Ответ: _____.

7 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 60$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 18$ км/ч². Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где t – время в часах, прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 21 км. Ответ дайте в минутах.

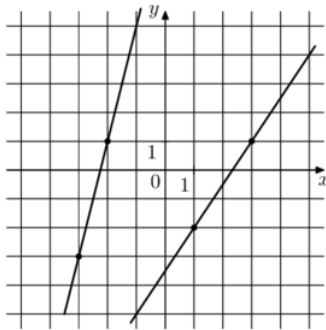
Ответ: _____.

8 Смешав 45-процентный и 97-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: _____.



9 На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



Ответ: _____.

10 На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 65% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

11 Найдите наименьшее значение функции $y = 69 \cos x + 71x + 48$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$7 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 4\sqrt{3} \sin x \cos x = 4\cos^3 x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

13 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q – середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке U .

а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

14 Решите неравенство

$$9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0.$$

15 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей.



ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220307

16 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N – середины катетов AC и BC соответственно, CH – высота.

- а) Докажите, что прямые MN и NH перпендикулярны.
б) Пусть P – точка пересечения прямых AC и NH , а Q – точка пересечения прямых BC и MN . Найдите площадь треугольника PQM , если $AH = 4$ и $BH = 2$.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(a - x^2) = \log_3(a - y^2), \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?
б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 800?
в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 111.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	1
2	0,75
3	5
4	2
5	188
6	4
7	20
8	15
9	-11
10	0,96
11	117
12	а) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$ б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{7\pi}{3}; -\frac{3\pi}{2}$
13	$5,5\sqrt{3}$
14	$(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$
15	3 млн
16	$18\sqrt{2}$
17	$(1; 25]$
18	а) да б) 39 в) 3; 6

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение

$$7 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 4\sqrt{3} \sin x \cos x = 4 \cos^3 x.$$

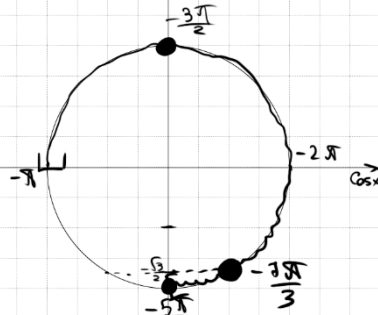
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

а) $7 \cos x + 4\sqrt{3} \sin x \cos x - 4 \cos^3 x = 0$
 $\cos x \cdot (7 + 4\sqrt{3} \sin x - 4 \cos^2 x) = 0$

$\cos x = 0$
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$-4 \cdot (1 - \sin^2 x) + 4\sqrt{3} \sin x + 7 = 0$
 $4 \sin^2 x + 4\sqrt{3} \sin x + 3 = 0$
 $D = 48 - 48 = 0$
 $\sin x = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
 $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

б) Ответём корни с помощью окружности:



Получим ответ: $x = -\frac{5\pi}{2}$
 $x = -\frac{3\pi}{2}$
 $x = -2\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$

Источники:
 Основная волна (Резерв) 2021

ОТВЕТ:

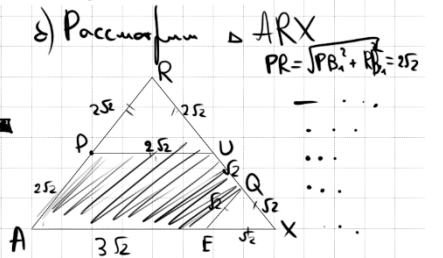
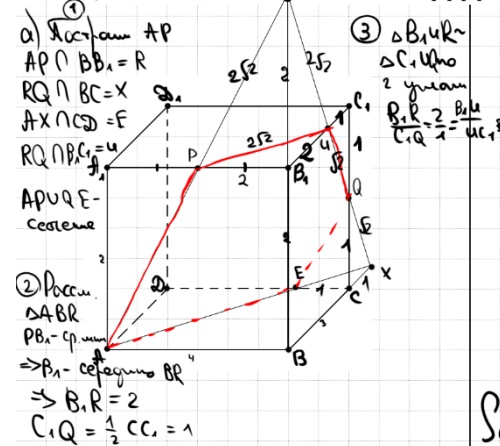
- а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{3}$

13

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4, BC = 3, AA_1 = 2$. Точки P и Q – середины рёбер $A_1 B_1$ и $C_1 C_1$ соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке U .

Источники:
 Сергеев 2018
 Основная волна 2016

- а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$
 б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .



ОТВЕТ: $5,5\sqrt{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



14 Решите неравенство $9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0$.

Источники:
Основная волна (Резерв) 2017

Пусть $3^{4x-x^2-1} = t$
 $t^2 - 36t + 243 \geq 0$

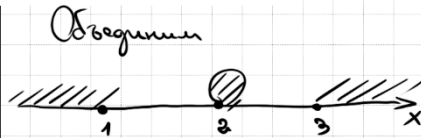
$$\begin{cases} t \leq 9 \\ t \geq 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^{4x-x^2-1} \leq 3^2 \\ 3^{4x-x^2-1} \geq 3^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2+4x-3 \leq 0 \quad | \cdot (-1) \\ x^2-4x+3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x^2+4x-4 \geq 0 \\ x^2-4x+4 \leq 0 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 \leq 0 \Rightarrow x=2$$

ОТВЕТ: $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика будет меньше 7 млн рублей.

Источники:
ФИПИ (старый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
СтатГрад 07.02.2018
СтатГрад 20.12.2016

Пусть S - сумма кредита
 Июль - месяц начисл. %
 Дек - месяц платежа
 X - выплата в 4-й и 5-й годах
 21.21 - месяц старта кредита

Дата	Сумма долга	С
21.21	S	1,2 S
4.21	1,2 S	была выплата X
21.21	\Rightarrow была выплата 0,2 S	1,2 S - X
4.22	S	1,2^2 S - 1,2 X
21.22	1,2 S	была выплата X
4.23	S	1,44 S = 2,2 \cdot X
21.23	1,2 S	X = $\frac{1,44 S \cdot 100}{2,2 \cdot 100} = \frac{144 S}{220} = \frac{36 S}{55}$

$1,2^2 \cdot S - 1,2 X - X = 0$
 $0,6 \cdot S + 2X < 7$

Выразим X из уравнения ①
 $1,44 S = 2,2 \cdot X$
 $X = \frac{1,44 S \cdot 100}{2,2 \cdot 100} = \frac{144 S}{220} = \frac{36 S}{55}$

Подставим в кр-во ②.
 $\frac{36 S}{55} + \frac{72 S}{55} < 7$
 $\frac{108 S}{55} < 7$
 $S < \frac{7 \cdot 55}{108}$
 $S < \frac{385}{108}$
 $S < 3 \frac{70}{108}$
 $S_{max} = 3$

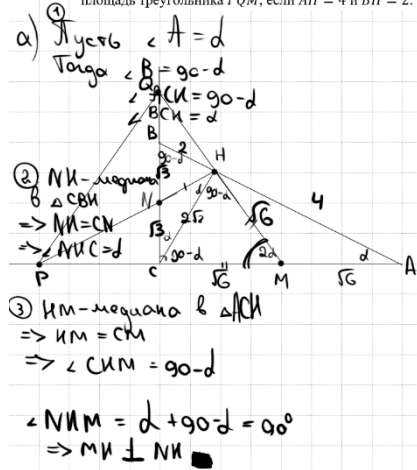
ОТВЕТ: 3 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



16 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N – середины катетов AC и BC соответственно. CH – высота.

- а) Докажите, что прямые MN и NH перпендикулярны.
 б) Пусть P – точка пересечения прямых AC и NH , а Q – точка пересечения прямых BC и MN . Найдите площадь треугольника PQM , если $AH = 4$ и $BH = 2$.



Источники:
 Основная волна (Резерв) 2016
ВЫСОТА

$h^2 = de$

1) $CH = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$
 $BC = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$
 $AC = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$

2) $\triangle CNM$
 $\cos \angle CMN = \frac{6 + 6 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 6} = \frac{1}{3}$
 $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$
 $\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $\tan 2\alpha = 2\sqrt{2}$

3) $\triangle PMN$
 $\cos 2\alpha = \frac{1}{3} = \frac{PM}{PM}$ $PM = 3\sqrt{6}$

4) $\triangle QCM$
 $\tan 2\alpha = 2\sqrt{2} = \frac{QC}{\sqrt{6}}$ $QC = 4\sqrt{3}$

5) $S_{PQM} = \frac{1}{2} \cdot PM \cdot QC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} = 18\sqrt{2}$

ОТВЕТ: $18\sqrt{2}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(a - x^2) = \log_3(a - y^2), \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 Основная волна 2020
 Ященко 2021 (36 пар)

Решим систему 1)
 $\begin{cases} a - x^2 = a - y^2 \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \\ a - x^2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = x \\ y = -x \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \\ a - x^2 > 0 \end{cases}$

Решим систему 2)
 $\begin{cases} x^2 + (-x)^2 = 4x - 6x \\ 2x^2 + 2x = 0 \\ x \cdot (x+1) = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \\ a - x^2 > 0 \end{cases}$

ОТВЕТ:

$(0,0)$ является решением с-мы при a , удовн. $a - x^2 > 0$
 $a - 0^2 > 0$
 $a > 0$

$(5,5)$ явл. реш. с-мы при a , удовн. $a - x^2 > 0$
 $a - 25 > 0$
 \Rightarrow при $a > 25$

$(-1,1)$ явл. реш. с-мы при a , удовн. $a - x^2 > 0$
 $a - 1 > 0$
 \Rightarrow при $a > 1$

$(0,0)$ $(0,0)$ $(0,0)$ $(0,0)$ $(0,0)$
 $(-1,1)$ $(-1,1)$ $(-1,1)$ $(-1,1)$ $(-1,1)$
 $(5,5)$ $(5,5)$ $(5,5)$ $(5,5)$ $(5,5)$

$a < 0$ $a = 0$ $0 < a < 1$ $a = 1$ $1 < a < 25$ $a = 25$ $a > 25$

Ответ: $(1, 25]$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220307



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта a ; – обоснованное решение пункта b ; – искомая оценка в пункте $в$; – пример в пункте $в$, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

18 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
 а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?
 б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 800?
 в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 111.

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 Пробный ЕГЭ 2015
 Досрочная волна 2013
АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
 $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$
 $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$
 $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

Да, например
 а) 3 6 9
 б) $S < 800$
 $\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} < 800 \quad | \cdot 2$
 $(a_1 + a_n) \cdot n < 1600$
 $(a_1 + a_1 + d(n-1)) \cdot n < 1600$
 Для нахождения наибольшего n возьмем $d=1$ и $a_1=1$
 $(2 + n - 1) \cdot n < 1600$
 $(n+1)n < 1600$
 $n^2 + n - 1600 < 0$
 $D = 6401$
 $n = \frac{-1 \pm \sqrt{6401}}{2} \approx 39,6$
 Ответ: а) Да, 369
 б) 39
 в) 3, 6

$\frac{1+39}{2} \cdot 39 = 780 \checkmark$
 $\frac{1+40}{2} \cdot 40 = 820 \times$
 б) $S_n = 111$
 $\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = 111 \quad | \cdot 2$
 $(2a_1 + d(n-1)) \cdot n = 222$
 Если $n=3$, то $2a_1 + 2d = 74$
 $a_1 + d = 37$
 Пусть $a_1=1$ $d=36$
 1 37 73
 Если $n=6$, то $2a_1 + 5d = 37$
 Пусть $a_1=16$ $d=1$
 16 17 18 19 20 21
 Если $n=37$ $2a_1 + 36d = 6$
 $n=74$
 $n=111$
 $n=272$

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.



ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220307