XLVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.6. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leq n \leq 2022$ и $1 \leq k \leq 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022}?

11.7. Произведение цифр натурального числа n равно x, а произведение цифр числа $n+1$ равно y. Может ли случиться, что произведение цифр некоторого натурального числа m равно $y-1$, а произведение цифр числа $m+1$ равно $x-1$?

11.8. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2,…100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За один ход разрешается поменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, в том случае если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинется на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?

11.9. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность ω. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Точка M – середина отрезка AB. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает окружность ω в точках K и L. Точка N – середина дуги CD описанной окружности треугольника PCD, не содержащей точку P. Доказать, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности.

11.10. Даны неотрицательные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=8$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2+b+c}+\frac{b^3}{b^2+c+d}+\frac{c^3}{c^2+d+a}+\frac{d^3}{d^2+a+b} \geq 4.$$