

11 класс

Первый день

11.1. Как-то Дима записал на доске десять натуральных чисел. Среди этих чисел нет двух равных. Известно, что из десяти написанных чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

11.2. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a , b и c такие, что верны равенства

$$P(b+c) = P(a), P(c+a) = P(b), P(a+b) = P(c).$$

11.3. В треугольной пирамиде $ABCD$ на её гранях BCD и ACD нашлись соответственно точки A' и B' такие, что $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120^\circ$. Известно, что прямые AA' и BB' пересекаются. Докажите, что точки A' и B' равноудалены от прямой CD .

11.4. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B , то и B дружит с A). Оказалось, что при любом выборе 101 человека из этой компании количество пар дружащих людей среди них нечётно. Найдите наибольшее возможное количество работников в такой компании.

11.5. Пусть S – 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых является элементом множества S . К каждой из 1000000 отмеченных точек (x, y, z) привязан брелок с написанным на нём числом $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}$. На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?