

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

10 - 0 , 8

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Найдите корень уравнения

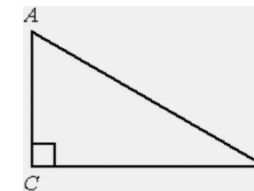
$$\log_3(x + 4) = \log_3 16.$$

Ответ: _____.

- 2** Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Сапфир» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Сапфир» начнёт игру с мячом не более одного раза.

Ответ: _____.

- 3** В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,8$. Найдите $\sin B$.



Ответ: _____.

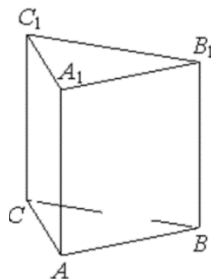


4 Найдите значение выражения

$$\sqrt{108} \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sqrt{27}.$$

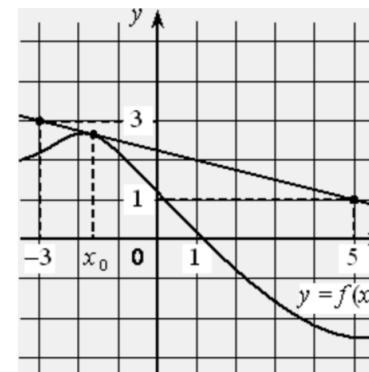
Ответ: _____.

5 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A , C , A_1 , B_1 , C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Площадь основания призмы равна 7, а боковое ребро равно 9.



Ответ: _____.

6 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

7 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 6,4 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, где p — давление в газе (в Па), V — объём газа (в м^3), $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в м^3) будет занимать газ при давлении p , равном $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

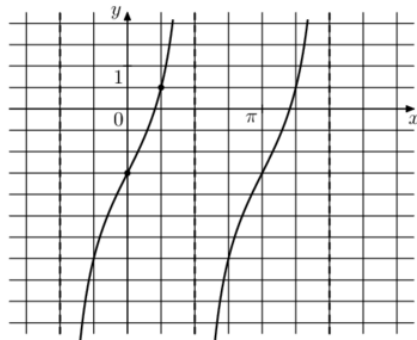
Ответ: _____.

8 Моторная лодка прошла против течения реки 187 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.



9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a \operatorname{tg} x + b$. Найдите b .



Ответ: _____.

10 Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,09. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: _____.

11 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 10x + 4 \ln x + 11 \text{ на отрезке } \left[\frac{10}{11}; \frac{12}{11} \right].$$

Ответ: _____.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.*

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - 6\sin^2 x) = x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right].$$

13 Основание пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

14 Решите неравенство

$$(\log_2^2 x - 2 \log_2 x)^2 < 11 \log_2^2 x - 22 \log_2 x - 24.$$

15 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наименьшее значение x , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.



16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB:BC = AP:PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD , где O – центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если дополнительно известно, что BD – диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a - 1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

18 а) Приведите пример семизначного числа, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 426, 786.

б) Существует ли девятизначное число, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 238, 435, 567, 791?

в) Найдите наименьшее число, из которого можно получить все числа от 1 до 40 включительно, вычёркивая из него цифры.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	12
2	0,5
3	0,6
4	4,5
5	42
6	-0,25
7	8
8	14
9	-1,5
10	0,9919
11	4
12	а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}$
13	6
14	$\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; 16)$
15	8
16	$18\sqrt{3}$
17	$\left(1; \frac{5}{4}\right)$
18	а) например, 1427863 б) нет в) 1231234056789

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - 6 \sin^2 x) = x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

Источники:
Основная волна 2017

а) $4^x = 2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - 6 \sin^2 x$
 $\sqrt{3} \cos x + 6 \sin^2 x = 0$
 $\sqrt{3} \cos x + 6(1 - \cos^2 x) = 0$
 $\sqrt{3} \cos x + 6 - 6 \cos^2 x = 0$
 Пусть $\cos x = t$
 $-6t^2 + \sqrt{3}t + 6 = 0$
 $D = 3 + 144 = 147$
 $t = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{147}}{-12} = \frac{-\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{-12}$
 $t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $t_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$
 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos x = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{3}$
 $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ нет решений

б) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $\frac{13\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$

б) Обведем корни с помощью скр-т.к. $\sin x \neq 0$

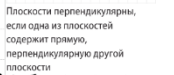
Получим:
 $x = 3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$
 $x = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$

13 Основание пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
 б) Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Горизонт #14 2019
 Основная волна 2017
 ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



а) $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle AKD = 90^\circ$

б) $(PAB) \perp$ на осн.
 $(PCD) \perp$ на осн.
 $\Rightarrow PK$ – высота пирамиды
 $\Rightarrow PK \perp AB$
 $PK \perp CD$

③ $AB \perp DK$ (т.к. $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$)
 $AB \perp PK$ (т.к. PK – выс. пф.)
 $\Rightarrow (PAB) \perp (PCD)$

ОТВЕТ: G

б) ① Пусть $BK = x = CK$ (т.к. $\triangle BCK$ – рф.)
 ② $\angle KBC = 45^\circ = \angle KCB$
 ③ Рассмотрим $\triangle BCK$
 по т. Пиф.
 $3^2 = x^2 + x^2$
 $9 = 2x^2$
 $x^2 = \frac{9}{2}$
 $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$
 ④ $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 8 = 3 \cdot 2 = 6$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

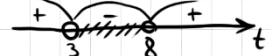


14 Решите неравенство $(\log_2^2 x - 2 \log_2 x)^2 < 11 \log_2^2 x - 22 \log_2 x - 24$.

$$(\log_2^2 x - 2 \log_2 x)^2 < 11 \log_2^2 x - 22 \log_2 x - 24$$

Пусть $\log_2^2 x - 2 \log_2 x = t$

$$t^2 - 11t + 24 < 0$$



$$3 < t < 8$$

$$\begin{cases} t > 3 \\ t < 8 \end{cases} \begin{cases} \log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3 > 0 \\ \log_2^2 x - 2 \log_2 x - 8 < 0 \end{cases}$$

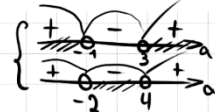
Пусть $\log_2 x = a$

$$\begin{cases} a^2 - 2a - 3 > 0 \\ a^2 - 2a - 8 < 0 \end{cases}$$

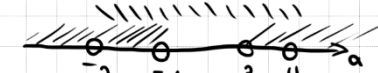
ОТВЕТ: $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \cup (8; 16)$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Семёнов 2018
Основная волна (Резерв) 2015



Найдём пересечение:



$$\begin{cases} -2 < a < -1 \\ -2 < \log_2 x < -1 \\ \log_2 \frac{1}{4} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} 3 < a < 4 \\ 3 < \log_2 x < 4 \\ \log_2 8 < \log_2 x < \log_2 16 \\ 8 < x < 16 \end{cases}$$

15 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наименьшее значение x , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

Дата	Сумма вклада
1 янв 21	10
31 дек 21	10 · 1,1
1 янв 22	ничего не происходит
31 дек 22	10 · 1,1 ²
1 янв 23	10 · 1,1 ² + x
31 дек 23	10 · 1,1 ³ + 1,1x
1 янв 24	10 · 1,1 ³ + 1,1x + x
31 дек 24	10 · 1,1 ⁴ + 1,1 ² x + 1,1x

$$14,641 + 2,31x - 2x - 10 - 7 > 0$$

$$0,31 \cdot x > 2,359 \quad | \cdot 1000$$

$$310 \cdot x > 2359$$

$$x > \frac{2359}{310}$$

$$x > 7 \frac{189}{310}$$

$$\Rightarrow x_{\text{мин}} = 8$$

ОТВЕТ: 8

Источники:

Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна (Резерв) 2020
Досрочная волна 2016
Основная волна (Резерв) 2016

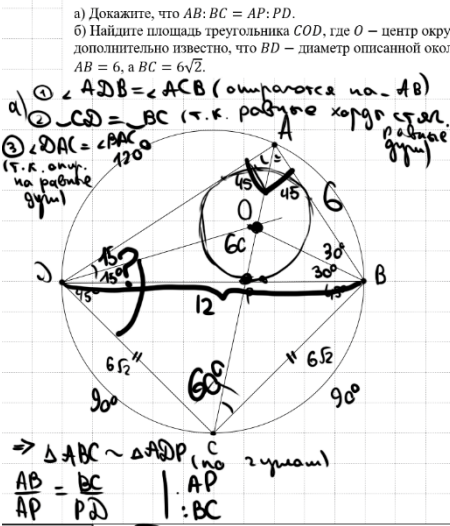
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.

Источники:
 ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Ященко 2020 (36 пар)
 Ященко 2019 (36 пар)
 Ященко 2018
 Основная волна 2015



$\frac{AB \cdot AP}{AP \cdot BC} = \frac{BC \cdot AP}{PB \cdot BC}$

б) 1) $\angle BAD = 90^\circ$
 $\angle BCD = 90^\circ$ (описывается на диаметр)

2) AP - высота в $\triangle ABD$

3) $BD = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = 12$
 $AB = 6$
 $\Rightarrow \angle ADB = 30^\circ$
 $\angle ADO = 15^\circ = \angle BDO$

4) Рассмотрим $\triangle COD$.

$\angle DCO = \angle ABD = 60^\circ$
 (описывается на одну дугу)
 $\Rightarrow \triangle COD$ - равносторонний
 $\Rightarrow S_{COD} = \frac{\sqrt{3}}{4} (6\sqrt{2})^2 = 9\sqrt{3}$

ОТВЕТ: $18\sqrt{3}$

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

Источники:
 ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2016

Пусть $\sqrt{2^x - a} = t$ $t > 0$

Возлагая x :

$$2^x - a = t^2$$

$$2^x = t^2 + a$$

$$x = \log_2(t^2 + a)$$

Уравнение

$$t + \frac{a-1}{t} = 1$$

два различных положительных корня

$$\frac{t^2 - t + a - 1}{t} = 0 \quad | \quad t, \text{ т.к. } t > 0$$

$t^2 - t + a - 1 = 0$

$$D = 1 - 4(a-1) = 1 - 4a + 4 = 5 - 4a$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5-4a}}{2}$$

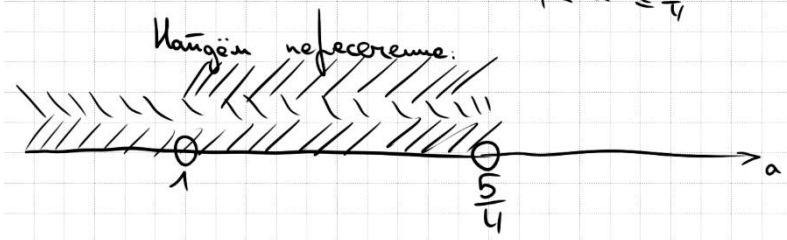
$\begin{cases} D > 0 & ① \\ t_1 > 0 & ② \\ t_2 > 0 & ③ \end{cases}$

① $5 - 4a > 0$
 $a < \frac{5}{4}$

② $5 - 4a \geq 0$
 $a \leq \frac{5}{4}$

③ $1 - \frac{\sqrt{5-4a}}{2} > 0$
 $\sqrt{5-4a} < 2$
 $0 < 5 - 4a < 4$
 $-5 < -4a < -1$
 $\frac{5}{4} > a > 1$
 $1 < a < \frac{5}{4}$

ОТВЕТ: $(1, \frac{5}{4})$



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



18 а) Приведите пример семизначного числа, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 426, 786.
 б) Существует ли девятизначное число, вычёркивая цифры которого, можно получить каждое из чисел: 123, 238, 435, 567, 791?
 в) Найдите наименьшее число, из которого можно получить все числа от 1 до 40 включительно, вычёркивая из него цифры.

Источники:
 Основная волна 2017

Вот 4786, получим 123
 а) 4 123 786
 б) Заметим, что в искомом числе не может встречаться цифр от 1 до 9
 1) 2 3 8
 4 3 5 7
 1) 1 должна быть левее, чем 3 (123)
 5 правее, чем 3 (435)
 7 правее, чем 5 (567)
 1 правее, чем 3, 5 и 7 (791)
 Ответ: а) 4 123 786, например
 б) нет
 в) 123 123 40 567 89
 => 1 должна быть слева от 3 и правее чем 3, что невозможно
 => Ответ: б) нет
 б) 1) В числе используют все 10 цифр
 2) Из-за чисел 11, 22 и 33 наше число 13-значное как минимум.
 3) 1) Куда поставить вторую 1?
 1 1
 чтобы получить 21 и 31
 Куда поставить 2 и 3?
 1 2 3 1
 что поставить на 5 и 6 позиции?
 2 и 3, чтобы получить 22 и 33
 1 2 3 1 2 3
 на 7 позиции ставим 4 (чтобы получить 40)
 1 2 3 1 2 3 4 0 5 6 7 8 9
 Наше число, удовл. усл.

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

