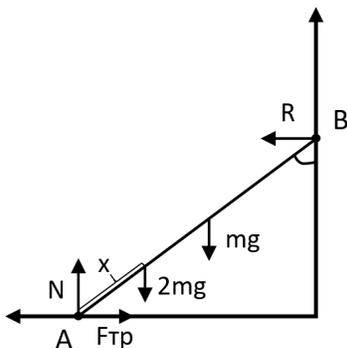


Отборочный этап. 10 класс

Задача 1 / 1. Лестница длиной L и массой m с равномерной плотностью опирается на гладкую вертикальную стену под углом 60° к стене. Нижний торец опирается на плоскую горизонтальную поверхность с коэффициентом трения покоя $\mu = 0,4$. Студент массой $M = 2m$ начинает с поверхности подниматься по лестнице. Какую часть расстояния по лестнице преодолит студент, когда лестница начнет скользить? Ответ дайте в процентах и округлите до десятых.

Возможное решение



Обозначим расстояние, пройденное студентом, за x . Запишем второй закон Ньютона в проекции на оси, обозначенные на рисунке. Таким образом, получим:

$$\begin{cases} N = 2mg + mg = 3mg \\ R = F_{\text{тр}} = \mu N \end{cases}$$

Запишем равенство моментов сил относительно точки A :

$$LR \cos 60^\circ = mg \frac{L}{2} \cos 30^\circ + 2mgx \cos 30^\circ$$

Из полученного равенства выразим величину реакции опоры стены R :

$$R = 2mg\sqrt{3} \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{4} \right)$$

Необходимое условие проскальзывания лестницы со студентом: $F_{\text{тр}} < R$. Из условия равенства этих сил найдем граничное значение отношения пути, пройденного студентом, к длине лестницы:

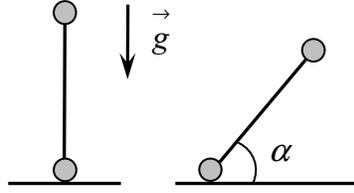
$$2mg\sqrt{3} \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{4} \right) = \mu N = 3\mu mg \Rightarrow \frac{x}{L} = 0,2\sqrt{3} - \frac{1}{4} \approx 9,6\%$$

Ответ: 9,6

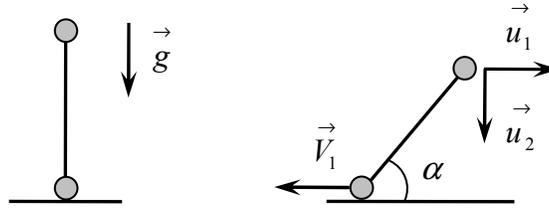
Задача 1 / 2. Лестница длиной L и массой m с равномерной плотностью опирается на гладкую вертикальную стену под углом 60° к стене. Нижний торец опирается на плоскую горизонтальную поверхность с коэффициентом трения покоя $\mu = 0,4$. Студент массой $M = km$ начинает с поверхности подниматься по лестнице. Найдите отношение k массы студента к массе лестницы, если известно, что лестница начала скользить, когда студент преодолел $1/7$ её длины? Ответ округлите до целых.

Ответ: 3

Задача 2 / 1. На концах жёсткого невесомого стержня длины $L = 0,3$ м закреплены два одинаковых маленьких шарика. Стержень ставят вертикально на гладкий горизонтальный стол и отпускают. Найдите скорость верхнего шарика в момент, когда стержень наклонён к горизонту под углом $\alpha = 60^\circ$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с²; шарики считайте материальными точками. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Возможное решение



Пусть m — масса шариков, \vec{V}_1 и \vec{V}_2 — скорости нижнего и верхнего шариков в конечном положении. Разложим \vec{V}_2 на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$\vec{V}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Поскольку между столом и нижним шариком нет трения, горизонтальная составляющая суммарного импульса шариков сохраняется:

$$0 = m u_1 - m V_1 \rightarrow u_1 = V_1$$

Так как длина стержня не меняется при движении, проекции скоростей шариков на направление стержня одинаковы:

$$V_1 \cos \alpha = u_2 \sin \alpha - u_1 \cos \alpha \rightarrow 2 V_1 \cos \alpha = u_2 \sin \alpha \rightarrow V_1 = \frac{u_2 \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$mgL = mgL \sin \alpha + \frac{m V_1^2}{2} + \frac{m V_2^2}{2} \rightarrow 2gL(1 - \sin \alpha) = V_1^2 + u_1^2 + u_2^2$$

Произвести вывод искомой величины V_2 можно, пользуясь полученным ранее выражением для V_1 и равенством $u_1 = V_1$, :

$$2gL(1 - \sin \alpha) = 2V_1^2 + u_2^2 \rightarrow 2gL(1 - \sin \alpha) = 2 \cdot \frac{u_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4} + u_2^2 \rightarrow u_2^2 = \frac{4gL(1 - \sin \alpha)}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}$$

$$V_2^2 = u_1^2 + u_2^2 = V_1^2 + u_2^2 = \frac{u_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4} + u_2^2 = \frac{u_2^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha + 4)}{4} = \frac{gL(1 - \sin \alpha) (\operatorname{tg}^2 \alpha + 4)}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}$$

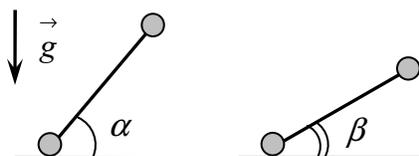
$$V_2 = \sqrt{\frac{gL(1 - \sin \alpha) (\operatorname{tg}^2 \alpha + 4)}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}}$$

Подставим числовые значения:

$$V_2 = \sqrt{3 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{7}{5}} = 0,75 \text{ м/с}$$

Ответ: 0,75

Задача 2 / 2. На концах жёсткого невесомого стержня длины $L = 0,25$ м закреплены два одинаковых маленьких шарика. Стержень ставят на гладкий горизонтальный стол под углом $\alpha = 60^\circ$ к поверхности и отпускают. Найдите скорость нижнего шарика в момент, когда стержень наклонён к горизонту под углом $\beta = 45^\circ$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с²; шарики считайте материальными точками. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Ответ: 0,36

Задача 3 / 1. Две стеклянные колбы соединены тонкой трубкой. Система наполнена неизвестным газом. Одна стеклянная колба имеет объем $V_1 = 75 \text{ см}^3$, а другая $V_2 = 150 \text{ см}^3$, газ может свободно перемещаться между ними. Первоначально система содержит газ при температуре $T_0 = -12^\circ\text{C}$ и давлении $P_0 = 0,91 \times 10^5 \text{ Па}$. Меньшую колбу нагревают до $T_1 = 24^\circ\text{C}$, в то время как колба большего размера поддерживается при -12°C . Найдите новое давление P_1 в системе. Тепловое расширение колб и объем соединительной трубки незначительны. Ответ приведите в КПа и округлите до целых.

Возможное решение

Запишем уравнение состояния в начальный момент времени для соединённых колб, обозначив суммарное количество вещества в колбах за ν :

$$\nu = \frac{P_1 V_1}{RT_1} + \frac{P_2 V_2}{RT_2} = \frac{P_0 (V_1 + V_2)}{RT_0}$$

После нагрева меньшей колбы некоторые параметры системы изменятся, но количество вещества останется прежним:

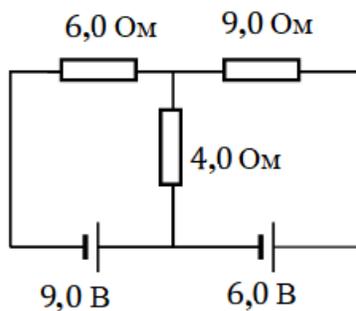
$$\nu = \frac{P_0 (V_1 + V_2)}{RT_0} = \frac{P_1}{R} \left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_0} \right) \Rightarrow P_1 = \frac{P_0 T_1 (V_1 + V_2)}{(V_1 T_0 + V_2 T_1)} \approx 95 \text{ КПа}$$

Ответ: 95

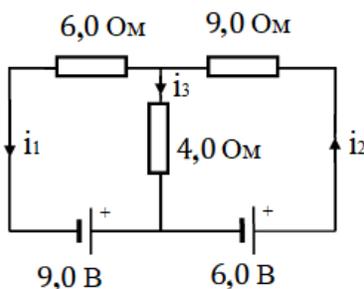
Задача 3 / 2. Две одинаковые сферические стеклянные колбы соединены узкой трубкой, объем трубки мал по сравнению со объёмом сфер. Сферы содержат воздух при температуре $T_0 = 100^\circ\text{C}$. Одну из сфер нагревают на 50°C , а другую охлаждают до 50°C . Это приводит к изменению давления воздуха в системе от P_0 до P_1 . Найдите конечную температуру T_k воздуха в колбах, если известно, что конечное давление P_1 в колбах оказалось одинаковым. Ответ приведите в градусах Цельсия и округлите до целых.

Ответ: 75

Задача 4 / 1. Определите ток в резисторе номиналом 6,0 Ом, показанном на рисунке. Источники тока не имеют внутреннего сопротивления. Ответ дайте в амперах и округлите до сотых.



Возможное решение



Введем обозначения, как показано на рисунке выше. Запишем первый закон Кирхгофа:

$$i_2 = i_1 + i_3$$

Запишем второй закон Кирхгофа для первого контура:

$$9 = 6i_1 - 4i_3$$

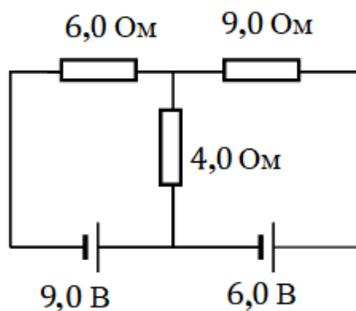
Запишем второй закон Кирхгофа для второго контура:

$$6 = 9i_2 + 4i_3$$

Решая полученную систему уравнений, находим $i_3 \approx -0,395A$. Совершая подстановку в уравнение для первого контура, находим $i_1 = 1,24 A$

Ответ: 1,24

Задача 4 / 2. Определите ток в резисторе номиналом 9,0 Ом, показанном на рисунке. Источники тока не имеют внутреннего сопротивления. Ответ дайте в амперах и округлите до сотых.



Ответ: 0,84

Задача 5 / 1. Пусть геометрическое расположение одного протона и двух электронов таково, что они лежат на одной прямой (в приведенном порядке, то есть $p - e - e$), а потенциальная энергия системы равна нулю. Найдите отношение расстояний между левой и центральной частицами и между правой и центральной частицами? Ответ округлите до десятых.

Возможное решение

Пусть три заряда q_1, q_2, q_3 расположены на координатной прямой в точках $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = a$ соответственно. Тогда энергия системы может быть записана как

$$k \frac{q_1 q_3}{a} + k \frac{q_2 q_3}{a-1} + k \frac{q_1 q_2}{1} = 0$$

Поскольку искомым отношением в данной задаче является $\frac{1}{a-1}$, сделаем замену $t = a - 1$, а также подставим $-q_1 = q_2 = q_3 = e$ в уравнение. Тогда после преобразований можно получить уравнение

$$t^2 + t - 1 = 0$$

Отбирая положительный корень, получим:

$$\frac{1}{t} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \approx 1,6$$

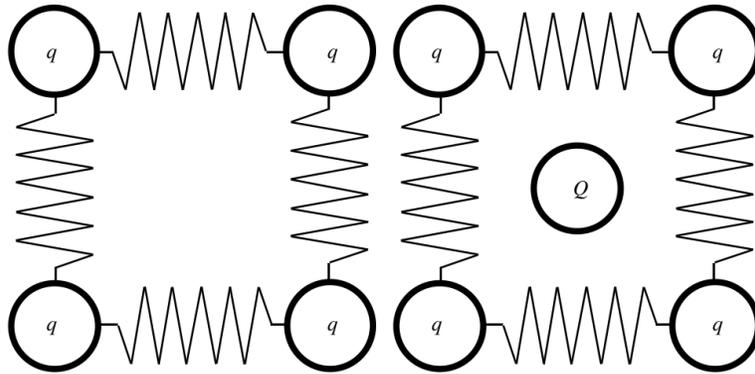
Ответ: 1,6

Задача 5 / 2. Пусть геометрическое расположение одного протона и двух электронов таково, что они лежат на одной прямой (в приведенном порядке, то есть $e - e - p$). Отношение расстояний между правой и центральной частицами и между левой и центральной частицами равно $4/5$. Найдите модуль отношения потенциальной энергии системы к квадрату заряда электрона. Ответ округлите до десятых.

Ответ: 0,8 (СГСЭ)

Ответ: $7,2 \cdot 10^9$ (СИ)

Задача 6/1. Четыре шарика, имеющие равные по величине и знаку заряд q , закреплены на непроводящих пружинах равной жесткости k , как показано на рисунке. Центры шариков лежат в вершинах квадрата со стороной a . В точке пересечения диагоналей квадрата закрепляют заряд Q . После установления равновесия в системе оказалось, что абсолютное значение деформации пружин не изменилось и равняется $\Delta l = \alpha a$, где $\alpha = 0,1$. Найдите отношение $\frac{|Q|}{|q|}$. Ответ округлите до десятых.



Возможное решение

Напишем 2-ой закон Ньютона для проекций сил, действующих на левый нижний шарик, на горизонтальную ось. Из симметрии системы это уравнение также будет определять условие равновесия для всех остальных шариков в проекциях на вертикальные и горизонтальные оси: (для константы в законе Кулона используем букву c , чтобы не путать ее с жесткостью пружины, за a обозначим расстояние между зарядами)

$$k\Delta l = c \frac{q^2}{a^2} + c \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{q^2}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{4 + \sqrt{2}}{4} \left(c \frac{q^2}{a^2} \right)$$

Очевидно, что абсолютное удлинение пружины могло остаться прежним только если новый заряд имеет другой знак, причем растяжение пружин перешло в сжатие. Запишем условие равновесия для новой системы, обозначая за Q и q абсолютные значения зарядов:

$$k\Delta l + \frac{4 + \sqrt{2}}{4} \left(c \frac{q^2}{(a - 2\Delta l)^2} \right) = c \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{qQ}{(0.5\sqrt{2}(a - 2\Delta l))^2}$$

Подставляя значение $k\Delta l$ из первого уравнения, а также учитывая, что $\Delta l = \alpha a$, имеем

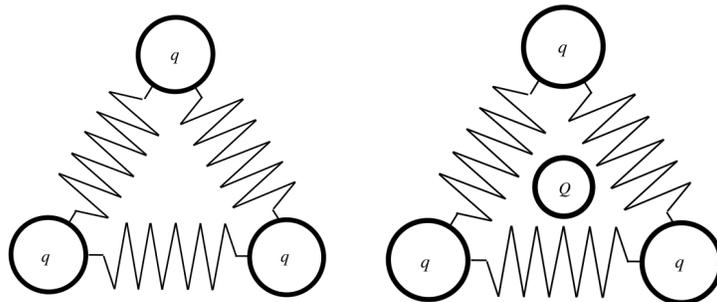
$$c \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{4 + \sqrt{2}}{4} + \frac{4 + \sqrt{2}}{4} \frac{1}{(1 - 2\alpha)^2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{(1 - 2\alpha)^2} c \frac{qQ}{a^2}$$

Таким образом, искомое отношение есть суть:

$$\frac{Q}{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(4 + \sqrt{2})(1 + (1 - 2\alpha)^2)}{4} = (\sqrt{2} + 1)(1 - 2\alpha + 2\alpha^2) = 1,6$$

Ответ: 1,6

Задача 6/2. Три шарика, имеющие равные по величине и знаку заряд q , закреплены на непроводящих пружинах равной жесткости k , как показано на рисунке. Центры шариков лежат в вершинах правильного треугольника со стороной a . В точке пересечения медиан треугольника закрепляют заряд Q . После установления равновесия в системе оказалось, что абсолютное значение деформации пружин не изменилось и равняется $\Delta l = \alpha a$, где $\alpha = 0,1$. Найдите отношение $\frac{|Q|}{|q|}$. Ответ округлите до десятых.

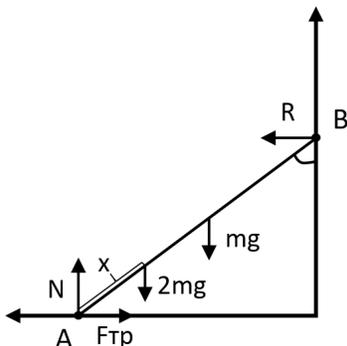


Ответ: 0,9

Отборочный этап. 9 класс

Задача 1 / 1. Лестница длиной L и массой m с равномерной плотностью опирается на гладкую вертикальную стену под углом 60° к стене. Нижний торец опирается на плоскую горизонтальную поверхность с коэффициентом трения покоя $\mu = 0,4$. Студент массой $M = 2m$ начинает с поверхности подниматься по лестнице. Какую часть расстояния по лестнице преодолет студент, когда лестница начнет скользить? Ответ дайте в процентах и округлите до десятых.

Возможное решение



Обозначим расстояние, пройденное студентом, за x . Запишем второй закон Ньютона в проекции на оси, обозначенные на рисунке. Таким образом, получим:

$$\begin{cases} N = 2mg + mg = 3mg \\ R = F_{\text{тр}} = \mu N \end{cases}$$

Запишем равенство моментов сил относительно точки A :

$$LR \cos 60^\circ = mg \frac{L}{2} \cos 30^\circ + 2mgx \cos 30^\circ$$

Из полученного равенства выразим величину реакции опоры стены R :

$$R = 2mg\sqrt{3} \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{4} \right)$$

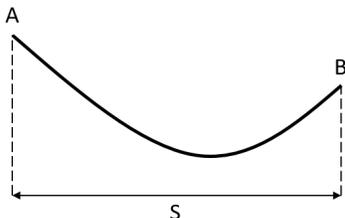
Необходимое условие проскальзывания лестницы со студентом: $F_{\text{тр}} < R$. Из условия равенства этих сил найдем граничное значение отношения пути, пройденного студентом, к длине лестницы:

$$2mg\sqrt{3} \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{4} \right) = \mu N = 3\mu mg \Rightarrow \frac{x}{L} = 0,2\sqrt{3} - \frac{1}{4} \approx 9,6\%$$

Ответ: 9,6

Задача 1 / 2. Лестница длиной L и массой m с равномерной плотностью опирается на гладкую вертикальную стену под углом 60° к стене. Нижний торец опирается на плоскую горизонтальную поверхность с коэффициентом трения покоя $\mu = 0,4$. Студент массой $M = km$ начинает с поверхности подниматься по лестнице. Найдите отношение k массы студента к массе лестницы, если известно, что лестница начала скользить, когда студент преодолел $1/7$ её длины? Ответ округлите до целых. *Ответ: 3*

Задача 2 / 1. Лыжник начинает спуск с холма в точке A , не поворачиваясь и не тормозя. Коэффициент трения $\mu = 0,1$. Когда он останавливается в точке B , его горизонтальное смещение составляет $s = 42160$ м. Найдите разницу по высоте между точками A и B ? Скорость лыжника мала, поэтому дополнительным давлением на снег из-за кривизны можно пренебречь. Пренебрегайте также сопротивлением воздуха. Ответ дайте в метрах и округлите до десятых.



Возможное решение

Рассмотрим такое малое горизонтальное смещение лыжника во время перемещения по холму Δs , что оно соответствует прямолинейному участку пути лыжника непосредственно по холму ΔL . Для соответствующего малого перемещения лыжника действующая на данном малом промежутке сила трения в свою очередь будет равна:

$$\Delta F_{\text{тр}} = \mu mg \frac{\Delta s}{\Delta L}$$

Тогда работа силы трения на участке ΔL будет равна:

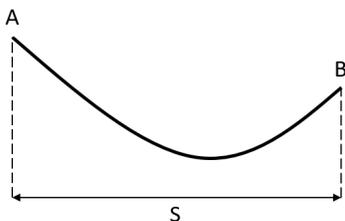
$$\Delta A_{\text{тр}} = \Delta F_{\text{тр}} \cdot \Delta L = \mu mg \Delta s$$

Суммируя по всем таким участкам для всего трека, получим работу силы трения за всё перемещение лыжника, которое, согласно закону сохранения энергии, пропорционально изменению абсолютной высоты лыжника относительно поверхности Земли:

$$A_{\text{тр}} = \mu mgs = mgh \Rightarrow h = \mu s = 4,2 \text{ м}$$

Ответ 4,2

Задача 2 / 2. Лыжник начинает спуск с холма в точке A , не поворачиваясь и не тормозя. Коэффициент трения $\mu = 0,2$. Когда он останавливается в точке B , его горизонтальное смещение составляет $s = 35160$ м. Найдите разницу по высоте между точками A и B ? Скорость лыжника мала, поэтому дополнительным давлением на снег из-за кривизны можно пренебречь. Пренебрегайте также сопротивлением воздуха. Ответ дайте в метрах и округлите до десятых.



Ответ 7

Задача 3 / 1. Самолет летит строго на восток вдоль экватора Земли на постоянной малой высоте с постоянной скоростью относительно Земли. В самолете груз массой в $m = 1$ кг подвешен на пружинных весах, регистрируемый вес равен P_1 . Затем самолет летит строго на запад вдоль экватора на той же высоте с той же скоростью, измеренный вес оказался равен P_2 . Скорость самолета относительно Земли составляет $v = 250$ м/с. Вычислите разницу в измеряемом весе. Ответ выразите в Ньютонах и округлите до сотых.

Возможное решение

На самолёт во время полёта действуют две силы - постоянная на протяжении пути сила тяжести и сила центростремительного ускорения, зависящая от скорости самолета относительно вращающейся планеты. Отсюда и возникает разность в фиксируемых весах:

$$P_1 = mg - m \frac{(V - v)^2}{R}$$

$$P_2 = mg - m \frac{(V + v)^2}{R},$$

где $V = \frac{2\pi R}{T}$, T – период обращения Земли вокруг своей оси, R - радиус Земли. Тогда искомая разность равна:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{m}{R} ((V + v)^2 - (V - v)^2) = \frac{4mVv}{R} = \frac{8\pi mRv}{RT} = \frac{8\pi mv}{T} \approx 0,07 \text{ Н}$$

Ответ: 0,07

Задача 3 / 2. Самолет летит строго на восток вдоль экватора Земли на постоянной малой высоте с постоянной скоростью относительно Земли. В самолете груз массой в $m = 1,25$ кг подвешен на пружинных весах, регистрируемый вес равен P_1 . Затем самолет летит строго на запад вдоль экватора на той же высоте с той же скоростью, измеренный вес оказался равен P_2 . Скорость самолета относительно Земли составляет $v = 240$ м/с. Вычислите разницу в измеряемом весе. Ответ выразите в Ньютонах и округлите до сотых.

Ответ: 0,09

Задача 4 / 1. Вода с первоначальной температурой $t_0 = 60^\circ C$ подается в отопительную систему жилых домов, а покидает отопительную систему при температуре $t_1 = 40^\circ C$. Оказалось, что мощность тепловых потерь в отапливаемом таким образом доме составила $N = 100$ киловатт. Диаметр труб отопительной системы постоянен по всей ее длине и составляет $D = 100$ мм. Найдите скорость воды в трубах. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°C), плотность воды составляет $\rho = 1000$ кг/м³. Ответ дайте в м/с и округлите до сотых.

Возможное решение

В течение некоторого времени Δt в окружающую среду уходит тепло $Q_1 = N\Delta t$, и в течение этого времени отопительная система должна компенсировать эти потери. Площадь сечения трубы составляет $S = \frac{\pi D^2}{4}$, и если v - скорость потока воды, то объём воды, проходящий через трубу за время Δt равен

$$V = Sv\Delta t = \frac{\pi D^2 v \Delta t}{4}$$

Тогда отопительная система способна поддержать тепло

$$Q_2 = cm(t_1 - t_0) = c\rho \frac{\pi D^2 v \Delta t}{4} (t_1 - t_0) = Q_1$$

Отсюда можно получить скорость потока воды в трубах отопительной системы:

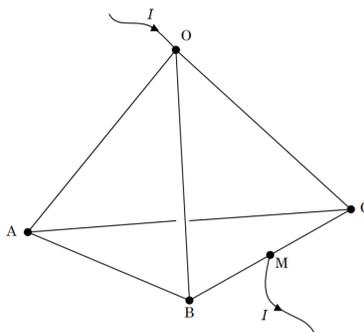
$$v = \frac{4N}{\pi D^2 c \rho (t_1 - t_0)} = 0,15 \text{ м/с}$$

Ответ: 0,15

Задача 4 / 2. Вода с первоначальной температурой $t_0 = 50^\circ C$ подается в отопительную систему жилых домов, а покидает отопительную систему при температуре $t_1 = 30^\circ C$. Оказалось, что мощность тепловых потерь в отапливаемом таким образом доме составила $N = 120$ киловатт. Диаметр труб отопительной системы постоянен по всей ее длине и составляет $D = 90$ мм. Найдите скорость воды в трубах. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°C), плотность воды составляет $\rho = 1000$ кг/м³. Ответ дайте в м/с и округлите до сотых.

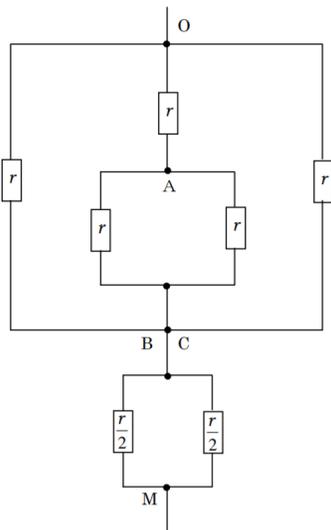
Ответ: 0,22

Задача 5/1. Из шести стержней одной длины, обладающих одинаковым сопротивлением $r = 4$ Ом, собрана следующая схема (см. рисунок): три стержня соединяют контактами так, чтобы получился треугольник ABC . Остальные три стержня соединены в точке O , а также с вершинами A , B и C соответственно. Точки O и M подсоединены к источнику напряжения. Сопротивление единицы длины стержня считать постоянным, сопротивлением контактов пренебречь. Точка M - середина стержня BC . Найдите сопротивление цепи между точками O и M . Ответ дайте в Ом и округлите до десятых.



Возможное решение

Изобразим эквивалентную схему, после чего посчитаем сопротивление отдельных участков цепи. Обозначим сопротивле-



ние участка цепи между точками O и B (или C) как R_1 , сопротивление участка цепи между точками M и B (или C) как R_2 . Вычислим эти величины:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r + r/2} + \frac{1}{r} \Rightarrow R_1 = \frac{3}{8}r$$

Аналогично,

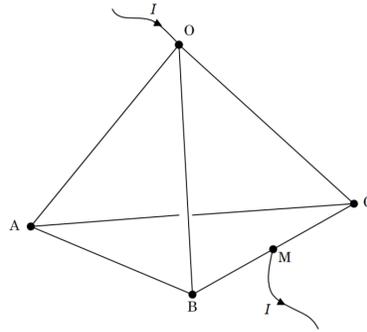
$$R_2 = \frac{r}{4}$$

Тогда общее сопротивление цепи:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{5}{8}r = 2,5 \text{ Ом}$$

Ответ: 2,5

Задача 5/2. Из шести стержней одной длины, обладающих одинаковым сопротивлением r , собрана следующая схема (см. рисунок): три стержня соединяют контактами так, чтобы получился треугольник ABC . Остальные три стержня соединены в точке O , а также с вершинами A , B и C соответственно. Точки O и M подсоединены к источнику напряжения. Сопротивление единицы длины стержня считать постоянным, сопротивлением контактов пренебречь. Точка M - середина стержня BC . Найдите сопротивление r , если сопротивление цепи между точками O и M равно $4,5$ Ом. Ответ дайте в Ом и округлите до десятых..



Ответ: 7,2

Задача 6 / 1.

В прошлом десятилетии изобретатели придумали способ заряжать аккумулятор мобильного телефона при помощи простого преобразователя механической энергии в электрическую, что особенно пригодилось туристам-экстремалам, часто бывающим в походах. Данный механизм помещается в подошву обоих ботинок, и каждый раз, когда человек опирается на нее, происходит преобразование энергии с помощью небольшого электрогенератора. Предположим, что турист имеет массу $m = 75$ кг, и за 1 его шаг подошва ботинка проседает на величину $h = 5$ мм. КПД устройства равно 20%, средняя длина двух последовательных шагов туриста составляет $d = 1,5$ м, подошва проседает на одинаковую величину на протяжении всего пути. Стандартный современный мобильный телефон содержит литий-ионный аккумулятор, который работает на напряжении $U = 3,7$ В, и если он работает на средней силе тока равной $I = 130$ мА, аккумулятор будет функционировать на протяжении $t = 10$ часов. Вычислите дистанцию, которую придется преодолеть туристу, чтобы с помощью вышеописанного механизма полностью зарядить аккумулятор первоначально разряженного мобильного телефона. Ответ дайте в километрах с точностью до десятых.

Возможное решение

Найдем энергию, полученную за один шаг, учитывая, что на подошву действует сила тяжести $F = mg$. При проседании подошвы на величину h совершается работа $A_1 = mgh$, от которой поступает электрическая энергия $W_1 = \eta A_1$ для заряда аккумулятора. Энергия, необходимая для полной зарядки аккумулятора, равна произведению средней мощности аккумулятора $P = UI$ и времени t (с): $W_2 = UIt$. Тогда необходимое количество шагов для его сбора составляет

$$n = \frac{W_2}{W_1}$$

Тогда необходимый для полной зарядки аккумулятора путь равен

$$S = n \frac{d}{2} \approx 17,3 \text{ км}$$

Ответ: 17,3

Задача 6 / 2.

В прошлом десятилетии изобретатели придумали способ заряжать аккумулятор мобильного телефона при помощи простого преобразователя механической энергии в электрическую, что особенно пригодилось туристам-экстремалам, часто бывающим в походах. Данный механизм помещается в подошву обоих ботинок, и каждый раз, когда человек опирается на нее, происходит преобразование энергии с помощью небольшого электрогенератора. Предположим, что турист имеет массу $m = 65$ кг, и за 1 его шаг подошва ботинка проседает на величину $h = 5$ мм. Средняя длина двух последовательных шагов туриста составляет $d = 1,5$ м, подошва проседает на одинаковую величину на протяжении всего пути. Стандартный современный мобильный телефон содержит литий-ионный аккумулятор, который работает на напряжении $U = 3,7$ В, и если он работает на средней силе тока равной $I = 130$ мА, аккумулятор будет функционировать на протяжении $t = 10$ часов. Рассчитайте КПД аккумулятора, если известно, что турист полностью зарядил аккумулятор первоначально разряженного мобильного телефона, преодолев путь в $S = 82$ километра. Ответ дайте в процентах с точностью до десятых.

Ответ: 4,9

Отборочный этап. 8 класс

Задача 1 / 1. Вода с первоначальной температурой $t_0 = 60^\circ\text{C}$ подается в отопительную систему жилых домов, а покидает отопительную систему при температуре $t_1 = 40^\circ\text{C}$. Оказалось, что мощность тепловых потерь в отапливаемом таким образом доме составила $N = 100$ киловатт. Диаметр труб отопительной системы постоянен по всей ее длине и составляет $D = 100$ мм. Найдите скорость воды в трубах. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C), плотность воды составляет $\rho = 1000$ кг/м³. Ответ дайте в м/с и округлите до сотых.

Возможное решение

В течение некоторого времени Δt в окружающую среду уходит тепло $Q_1 = N\Delta t$, и в течение этого времени отопительная система должна компенсировать эти потери. Площадь сечения трубы составляет $S = \frac{\pi D^2}{4}$, и если v - скорость потока воды, то объём воды, проходящий через трубу за время Δt равен

$$V = Sv\Delta t = \frac{\pi D^2 v \Delta t}{4}$$

Тогда отопительная система способна поддержать тепло

$$Q_2 = cm(t_1 - t_0) = c\rho \frac{\pi D^2 v \Delta t}{4} (t_1 - t_0) = Q_1.$$

Отсюда можно получить скорость потока воды в трубах отопительной системы:

$$v = \frac{4N}{\pi D^2 c \rho (t_1 - t_0)} = 0,15 \text{ м/с}$$

Ответ: 0,15

Задача 1 / 2. Вода с первоначальной температурой $t_0 = 50^\circ\text{C}$ подается в отопительную систему жилых домов, а покидает отопительную систему при температуре $t_1 = 30^\circ\text{C}$. Оказалось, что мощность тепловых потерь в отапливаемом таким образом доме составила $N = 120$ киловатт. Диаметр труб отопительной системы постоянен по всей ее длине и составляет $D = 90$ мм. Найдите скорость воды в трубах. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C), плотность воды составляет $\rho = 1000$ кг/м³. Ответ дайте в м/с и округлите до сотых.

Ответ: 0,22

Задача 2 / 1. К потолку подвешена пружина с жесткостью $k = 160$ Н/м, к которой, в свою очередь, подвешено несколько одинаковых кубиков из сурьмы с плотностью $\rho_K = 6,7$ г/см³ и длиной ребра 2 см. Данную конструкцию погружают в сосуд с водой таким образом, что часть кубиков целиком находится в воде с плотностью $\rho_B = 1,0$ г/см³, а часть целиком находится в воздухе. Затем количество кубиков увеличивают на один и вновь погружают в воду. Вследствие этого один из кубиков оказывается частично погруженным в воду, а растяжение пружины увеличивается на $\Delta x = 0,3$ см. Определите, на сколько сантиметров этот кубик погрузился в воду. Ответ округлите до десятых.

Возможное решение

Опишем баланс сил в системе до и после добавления кубика. Пусть всего имеется N кубиков, M из которых изначально погружены в воду. За l обозначим искомую величину погружения, за x - удлинение пружины при первоначальном погружении кубиков в воду. Тогда до добавления кубика верно:

$$kx = N\rho_K a^3 g - M\rho_B a^3 g$$

После добавления кубика будет верно:

$$k(x + \Delta x) = (N + 1)\rho_K a^3 g - (M\rho_B a^3 g + \rho_B a^2 l g)$$

Вычитая первое уравнение из второго, выразим ответ:

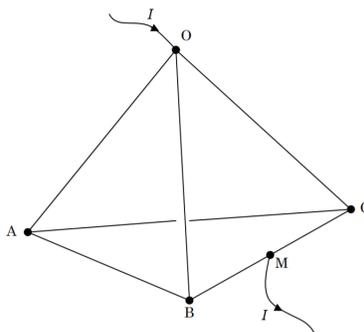
$$k\Delta x = \rho_K a^3 g - \rho_B a^2 l g \Rightarrow l = \frac{\rho_K a^3 g - k\Delta x}{\rho_B a^2 g} = \frac{\rho_K}{\rho_B} a - \frac{k\Delta x}{\rho_B a^2 g} \approx 1,4 \text{ см}$$

Ответ: 1,4

Задача 2 / 2. К потолку подвешена пружина с жесткостью k , на которой подвешены несколько одинаковых кубиков из сурьмы с плотностью $\rho_K = 6,7$ г/см³ и длиной ребра 2 см. Кубики погружают в сосуд с водой таким образом, что часть кубиков целиком находится в воде с плотностью $\rho_B = 1,0$ г/см³, а часть целиком находится в воздухе. Затем количество кубиков увеличивают на два и вновь погружают в воду. Вследствие этого один из кубиков оказывается частично погруженным в воду на величину $l = 0,7$ см, а растяжение пружины увеличивается на $\Delta x = 0,4$ см. Определите жесткость пружины. Ответ дайте в Н/м и округлите до целых.

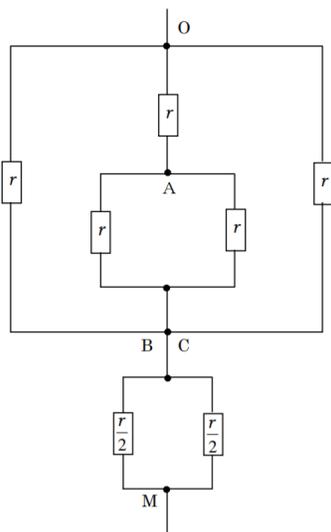
Ответ: 221

Задача 3 / 1. Из шести стержней одной длины, обладающих одинаковым сопротивлением $r = 4$ Ом, собрана следующая схема (см. рисунок): три стержня соединяют контактами так, чтобы получился треугольник ABC . Остальные три стержня соединены в точке O , а также с вершинами A , B и C соответственно. Точки O и M подсоединены к источнику напряжения. Сопротивление единицы длины стержня считать постоянным, сопротивлением контактов пренебречь. Точка M - середина стержня BC . Найдите сопротивление цепи между точками O и M . Ответ дайте в Ом и округлите до десятых.



Возможное решение

Изобразим эквивалентную схему, после чего посчитаем сопротивление отдельных участков цепи.



Обозначим сопротивление участка цепи между точками O и B (или C) как R_1 , сопротивление участка цепи между точками M и B (или C) как R_2 . Вычислим эти величины:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r + r/2} + \frac{1}{r} \Rightarrow R_1 = \frac{3}{8}r$$

Аналогично,

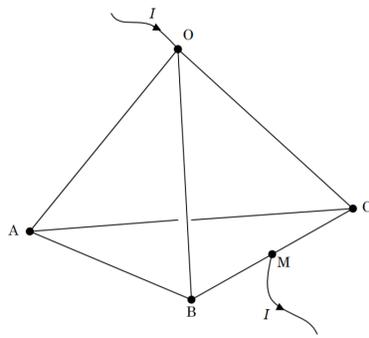
$$R_2 = \frac{r}{4}$$

Тогда общее сопротивление цепи:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{5}{8}r = 2,5 \text{ Ом}$$

Ответ: 2,5

Задача 3 / 2. Из шести стержней одной длины, обладающих одинаковым сопротивлением r , собрана следующая схема (см. рисунок): три стержня соединяют контактами так, чтобы получился треугольник ABC . Остальные три стержня соединены в точке O , а также с вершинами A , B и C соответственно. Точки O и M подсоединены к источнику напряжения. Сопротивление единицы длины стержня считать постоянным, сопротивлением контактов пренебречь. Точка M - середина стержня BC . Найдите сопротивление r , если сопротивление цепи между точками O и M равно 4,5 Ом. Ответ дайте в Ом и округлите до десятых.



Ответ: 7,2

Задача 4 / 1. Сплав на основе железа содержит гранулярные вкрапления углерода. Плотность сплава без вкраплений составляет $\rho_c = 7000 \text{ кг/м}^3$. Плотность сплава с вкраплениями составляет $\rho_k = 6800 \text{ кг/м}^3$. Плотность углерода в области вкраплений составляет $\rho_y = 2000 \text{ кг/м}^3$. Определите долю объема, которую занимают вкрапления в сплаве. Ответ дайте в процентах и округлите до целых.

Возможное решение

По определению плотности

$$\rho_k = \frac{\rho_c V_c + \rho_y V_y}{V}$$

Пользуясь тем, что

$$\frac{V_c}{V} + \frac{V_y}{V} = 1$$

Получаем:

$$\rho_k = \rho_c + (\rho_y - \rho_c) \frac{V_y}{V}$$
$$\frac{V_y}{V} = \frac{\rho_c - \rho_k}{\rho_c - \rho_y} = \frac{7000 - 6800}{7000 - 2000} = 0.04$$

Ответ: 4

Задача 4 / 2. Сплав на основе железа содержит гранулярные вкрапления неизвестного металла. Плотность сплава без вкраплений составила $\rho_c = 7150 \text{ кг/м}^3$. Плотность сплава с вкраплениями составила $\rho_k = 6910 \text{ кг/м}^3$. Доля объема, которую занимают вкрапления в сплаве, составила $\alpha = 5,5\%$. Определите плотность ρ_x неизвестного металла. Ответ дайте в кг/м^3 и округлите до целых.

Ответ: 2786

Задача 5 / 1. Красная Шапочка выезжает на велосипеде из своего дома к избушке бабушки, расположенной на расстоянии L от дома Шапочки. В то же самое время Волк начинает движение к бабушке из своего логова, удаленного от избушки также на расстояние L . Красная Шапочка знает о маршруте Волка: она рассчитала, что, если будет двигаться со своей начальной скоростью, Волк доберется до избушки на 3 минуты раньше. Если же Красная Шапочка будет двигаться с такой скоростью, что каждый километр она будет преодолевать на 1 минуту быстрее, то в итоге она обгонит волка ровно на 1 минуту. Найдите скорость Волка v_2 , если скорость велосипеда Красной Шапочки равна $v_1 = 12$ км/ч. Ответ выразите в км/ч и округлите до десятых.

Возможное решение

Сначала рассчитаем предполагаемую скорость Красной Шапочки для обгона Волка. Поскольку со скоростью $v_1 = 12$ км/ч расстояние в 1 километр Красная Шапочка преодолевает за 5 минут, для сокращения этого времени до 4 минут, ее скорость должна быть увеличена до $v'_1 = 15$ км/ч. Тогда можно записать систему уравнений для движения Красной Шапочки и Волка, откуда можно выразить искомую скорость v_2 :

$$\begin{cases} \frac{L}{v_1} = \frac{L}{v_2} + 3 \\ \frac{L}{v'_1} = \frac{L}{v_2} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{4v'_1 \cdot v_1}{v'_1 + 3v_1} \approx 14,1 \text{ км/ч}$$

Ответ: $v_2 = 14,1$ км/ч

Ответ: 14,1

Задача 5 / 2. Красная Шапочка выезжает на велосипеде из своего дома к избушке бабушки, расположенной на расстоянии L от дома Шапочки. В то же самое время Волк начинает движение к бабушке из своего логова, удаленного от избушки также на расстояние L . Красная Шапочка знает о маршруте Волка: она рассчитала, что если будет двигаться со своей начальной скоростью, Волк доберется до избушки на 4 часа раньше. Если же Красная Шапочка будет двигаться с такой скоростью, что каждый километр она будет преодолевать на k секунд быстрее, то в итоге она обгонит волка на 2 часа. Найдите число секунд k , определяющее увеличение скорости Шапочки. Скорость Волка $v_2 = 15$ км/ч, скорость велосипеда Красной Шапочки равна $v_1 = 12$ км/ч. Ответ округлите до целых.

Ответ: 90

Отборочный этап. 7 класс

Задача 1 / 1. Платина (Pt) и калий (K) имеют плотности $21,5 \text{ г/см}^3$ и $0,89 \text{ г/см}^3$ соответственно. Какой объем V_{Pt} платины нужно присоединить к $V_K = 10,0 \text{ см}^3$ калия, чтобы полученное объединение могло полностью погрузиться в ртуть (Hg) с плотностью $13,6 \text{ г/см}^3$? Игнорируйте любые химические реакции. Ответ выразите в кубических сантиметрах с точностью до целых.

Возможное решение

Запишем баланс сил, действующих на объединение платины и калия:

$$\rho_{Hg}(V_{Pt} + V_K)g = \rho_{Pt}V_{Pt}g + \rho_K V_K g$$

Отсюда выразим искомый объем платины:

$$V_{Pt} + V_K = \frac{\rho_{Pt}}{\rho_{Hg}}V_{Pt} + \frac{\rho_K}{\rho_{Hg}}V_K$$

$$0 = \left(\frac{\rho_{Pt}}{\rho_{Hg}} - 1\right)V_{Pt} + \left(\frac{\rho_K}{\rho_{Hg}} - 1\right)V_K$$

$$V_{Pt} = \frac{\rho_{Hg} - \rho_K}{\rho_{Pt} - \rho_{Hg}} \cdot V_K = 16 \text{ см}^3$$

Ответ: 16

Задача 1 / 2. Платина (Au) и натрий (Na) имеют плотности $19,3 \text{ г/см}^3$ и $0,97 \text{ г/см}^3$ соответственно. Какой объем V_{Au} золота нужно присоединить к $V_{Na} = 4,5 \text{ см}^3$ натрия, чтобы полученное объединение могло полностью погрузиться в ртуть (Hg) с плотностью $13,6 \text{ г/см}^3$? Игнорируйте любые химические реакции. Ответ выразите в кубических сантиметрах с точностью до целых.

Ответ: 10

Задача 2 / 1. Сплав на основе железа содержит гранулярные включения углерода. Плотность сплава без включений составляет $\rho_c = 7000 \text{ кг/м}^3$. Плотность сплава с включениями составляет $\rho_k = 6800 \text{ кг/м}^3$. Плотность углерода в области включений составляет $\rho_y = 2000 \text{ кг/м}^3$. Определите долю объема, которую занимают включения в сплаве. Ответ дайте в процентах и округлите до целых.

Возможное решение

$$\rho_k = \frac{\rho_c V_c + \rho_y V_y}{V}$$

Пользуясь тем, что

$$\frac{V_c}{V} + \frac{V_y}{V} = 1$$

Получаем:

$$\rho_k = \rho_c + (\rho_y - \rho_c) \frac{V_y}{V}$$
$$\frac{V_y}{V} = \frac{\rho_c - \rho_k}{\rho_c - \rho_y} = \frac{7000 - 6800}{7000 - 2000} = 0.04$$

Ответ: 4

Задача 2 / 2. Сплав на основе железа содержит гранулярные включения неизвестного металла. Плотность сплава без включений составила $\rho_c = 7150 \text{ кг/м}^3$. Плотность сплава с включениями составила $\rho_k = 6910 \text{ кг/м}^3$. Доля объема, которую занимают включения в сплаве, составила $\alpha = 5,5\%$. Определите плотность ρ_x неизвестного металла. Ответ дайте в кг/м^3 и округлите до целых.

Ответ: 2786

Задача 3/1 Муравей Михиал движется по линейке, на которой отмечено $n = 100$ равных интервалов. На каждом интервале скорость движения муравья постоянна, а при перемещении на новый интервал скорость муравья возрастает в α , где $\alpha = 1,01$. Найдите среднюю скорость муравья, если скорость его движения на последнем делении есть $v = 1 \frac{\text{см}}{\text{с}}$. Ответ выразите в м/с, округлите до тысячных.

Возможное решение

По определению, средняя скорость выражается формулой:

$$v_a = \frac{S}{T}$$

Обозначим длину интервала за Δ , тогда $S = n\Delta$. Пусть скорость движения муравья на первом интервале составляет v_0 . Первый интервал проходит за $t_1 = \frac{\Delta}{v_0}$, второй за $t_2 = \frac{\Delta}{\alpha v_0}$, а последний - за $t_{100} = \frac{\Delta}{\alpha^{99} v_0}$. Таким образом, общее время движения муравья составляет:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 \dots + t_{100} = \frac{\Delta}{v_0} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \dots + \frac{1}{\alpha^{99}} \right)$$

Получаем следующую сумму:

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \dots + \frac{1}{\alpha^{99}} \right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{100}}{1 - \frac{1}{\alpha}}$$

Таким образом:

$$v_a = \frac{S}{T} = \frac{n\Delta}{\frac{\Delta}{v_0} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{100}}{1 - \frac{1}{\alpha}} \right]}$$

Учитывая, что скорость на последнем интервале есть 0.01 м/с, начальная скорость равна $v_0 = \frac{0.01}{\alpha^{99}} = \frac{0.01}{1.01^{99}}$. Таким образом,

$$v_a = \frac{100 \frac{0.01}{1.01^{99}}}{\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1.01}\right)^{100}}{1 - \frac{1}{1.01}} \right]}$$

Ответ 0,006

Задача 3/2 Муравей Михиал движется по линейке, на которой отмечено $n = 50$ равных интервалов. На каждом интервале скорость движения муравья постоянна, а при перемещении на новый интервал скорость муравья возрастает в α , где $\alpha = 1,05$. Найдите среднюю скорость муравья, если скорость его движения на последнем делении есть $v = 1 \frac{\text{см}}{\text{с}}$. Ответ выразите в м/с, округлите до тысячных.

Ответ 0,002

Задача 4 / 1. К потолку подвешена пружина с жесткостью $k = 160$ Н/м, к которой, в свою очередь, подвешено несколько одинаковых кубиков из сурьмы с плотностью $\rho_K = 6,7$ г/см³ и длиной ребра 2 см. Данную конструкцию погружают в сосуд с водой таким образом, что часть кубиков целиком находится в воде с плотностью $\rho_B = 1,0$ г/см³, а часть целиком находится в воздухе. Затем количество кубиков увеличивают на один и вновь погружают в воду. Вследствие этого один из кубиков оказывается частично погруженным в воду, а растяжение пружины увеличивается на $\Delta x = 0,3$ см. Определите, на сколько сантиметров этот кубик погрузился в воду. Ответ округлите до десятых.

Возможное решение

Опишем баланс сил в системе до и после добавления кубика. Пусть всего имеется N кубиков, M из которых изначально погружены в воду. За l обозначим искомую величину погружения, за x - удлинение пружины при первоначальном погружении кубиков в воду. Тогда до добавления кубика верно:

$$kx = N\rho_K a^3 g - M\rho_B a^3 g$$

После добавления кубика будет верно:

$$k(x + \Delta x) = (N + 1)\rho_K a^3 g - (M\rho_B a^3 g + \rho_B a^2 l g)$$

Вычитая первое уравнение из второго, выразим ответ:

$$k\Delta x = \rho_K a^3 g - \rho_B a^2 l g \Rightarrow l = \frac{\rho_K a^3 g - k\Delta x}{\rho_B a^2 g} = \frac{\rho_K}{\rho_B} a - \frac{k\Delta x}{\rho_B a^2 g} \approx 1,4 \text{ см}$$

Ответ: 1,4

Задача 4 / 2. К потолку подвешена пружина с жесткостью k , на которой подвешены несколько одинаковых кубиков из сурьмы с плотностью $\rho_K = 6,7$ г/см³ и длиной ребра 2 см. Кубики погружают в сосуд с водой таким образом, что часть кубиков целиком находится в воде с плотностью $\rho_B = 1,0$ г/см³, а часть целиком находится в воздухе. Затем количество кубиков увеличивают на два и вновь погружают в воду. Вследствие этого один из кубиков оказывается частично погруженным в воду на величину $l = 0,7$ см, а растяжение пружины увеличивается на $\Delta x = 0,4$ см. Определите жесткость пружины. Ответ дайте в Н/м и округлите до целых.

Ответ: 221

Задача 5 / 1. Красная Шапочка выезжает на велосипеде из своего дома к избушке бабушки, расположенной на расстоянии L от дома Шапочки. В то же самое время Волк начинает движение к бабушке из своего логова, удаленного от избушки также на расстояние L . Красная Шапочка знает о маршруте Волка: она рассчитала, что, если будет двигаться со своей начальной скоростью, Волк доберется до избушки на 3 минуты раньше. Если же Красная Шапочка будет двигаться с такой скоростью, что каждый километр она будет преодолевать на 1 минуту быстрее, то в итоге она обгонит волка ровно на 1 минуту. Найдите скорость Волка v_2 , если скорость велосипеда Красной Шапочки равна $v_1 = 12$ км/ч. Ответ выразите в км/ч и округлите до десятых.

Возможное решение

Сначала рассчитаем предполагаемую скорость Красной Шапочки для обгона Волка. Поскольку со скоростью $v_1 = 12$ км/ч расстояние в 1 километр Красная Шапочка преодолевает за 5 минут, для сокращения этого времени до 4 минут, ее скорость должна быть увеличена до $v'_1 = 15$ км/ч. Тогда можно записать систему уравнений для движения Красной Шапочки и Волка, откуда можно выразить искомую скорость v_2 :

$$\begin{cases} \frac{L}{v_1} = \frac{L}{v_2} + 3 \\ \frac{L}{v'_1} = \frac{L}{v_2} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{4v'_1 \cdot v_1}{v'_1 + 3v_1} \approx 14,1 \text{ км/ч}$$

Ответ: 14,1

Задача 5 / 2. Красная Шапочка выезжает на велосипеде из своего дома к избушке бабушки, расположенной на расстоянии L от дома Шапочки. В то же самое время Волк начинает движение к бабушке из своего логова, удаленного от избушки также на расстояние L . Красная Шапочка знает о маршруте Волка: она рассчитала, что если будет двигаться со своей начальной скоростью, Волк доберется до избушки на 4 часа раньше. Если же Красная Шапочка будет двигаться с такой скоростью, что каждый километр она будет преодолевать на k секунд быстрее, то в итоге она обгонит волка на 2 часа. Найдите число секунд k , определяющее увеличение скорости Шапочки. Скорость Волка $v_2 = 15$ км/ч, скорость велосипеда Красной Шапочки равна $v_1 = 12$ км/ч. Ответ округлите до целых.

Ответ: 90