

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Найдите корень уравнения

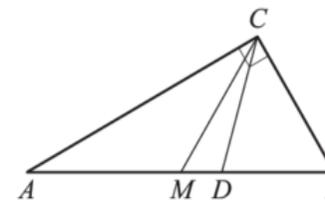
$$7^{-6-x} = 343.$$

Ответ: _____.

- 2** Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше 9 задач, равна 0,63. Вероятность того, что А. верно решит больше 8 задач, равна 0,75. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 9 задач.

Ответ: _____.

- 3** Острый угол B прямоугольного треугольника равен 66° . Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM , проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

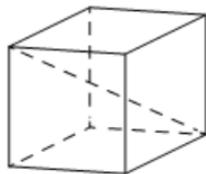


4 Найдите значение выражения

$$3\sqrt{2}\cos^2\frac{9\pi}{8} - 3\sqrt{2}\sin^2\frac{9\pi}{8}.$$

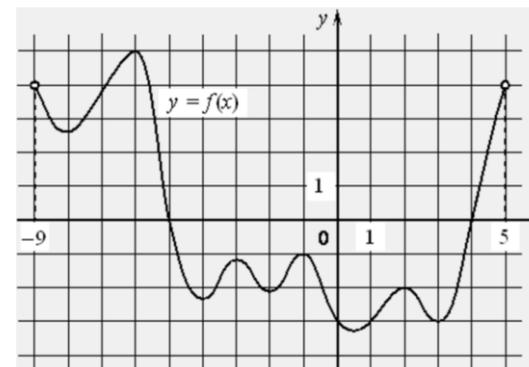
Ответ: _____.

5 Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объем.



Ответ: _____.

6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

7 Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 2,1 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 21$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

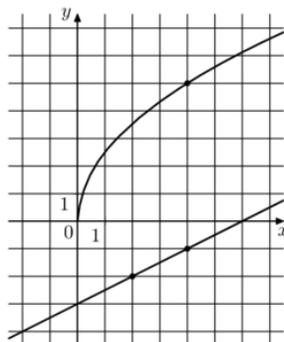
Ответ: _____.

8 На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: _____.



9 На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A . Найдите абсциссу точки A .



Ответ: _____.

10 Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

Ответ: _____.

11 Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 9)^2(x + 4) - 4$ на отрезке $[7; 16]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\log_2^2(x^2) - 16 \log_2(2x) + 31 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3; 6]$.

13 В пирамиде $SABC$ известны длины рёбер: $AB = AC = \sqrt{29}$, $BC = SA = 2\sqrt{5}$, $SB = SC = \sqrt{13}$.

- а) Докажите, что прямая SA перпендикулярна прямой BC .
- б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC .

14 Решите неравенство

$$\log_7(2x^2 + 12) - \log_7(x^2 - x + 12) \geq \log_7\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

15 15-го января был взят в банке кредит на 1 000 000 рублей на $(n + 1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n -го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n + 1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если общая сумма выплат после его полного погашения составила 1 378 000 рублей.



16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD .

- а) Докажите, что луч AC – биссектриса угла BAD .
б) Найдите CD , если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6,5$.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 4x + a - 5| \leq 10$$

выполняется для всех $x \in [a - 5; a]$.

18 На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 30$. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

- а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
б) Можно ли сделать 10 ходов?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	-9
2	0,12
3	21
4	3
5	8
6	9
7	30
8	30
9	36
10	0,68
11	-4
12	а) $2\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$ б) $4\sqrt{2}$
13	$\arccos \frac{1}{2\sqrt{10}}$
14	$\left(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right] \cup [3; +\infty)$
15	3
16	5
17	$\left[3; \frac{3 + \sqrt{69}}{2}\right]$
18	а) например, стереть числа: (1; 6; 11); (2; 7; 12); (3; 8; 13); (4; 9; 14); (5; 10; 15) б) нет в) 6

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение

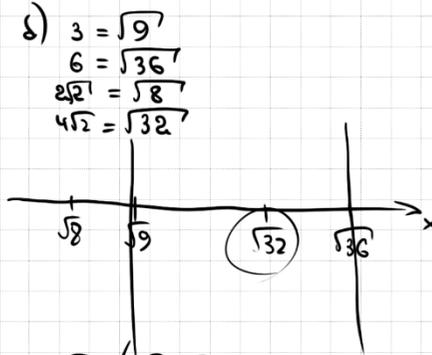
$$\log_2^2(x^2) - 16 \log_2(2x) + 31 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [3; 6].

а) $(2 \log_2 x)^2 - 16 \cdot (\log_2 2 + \log_2 x) + 31 = 0$
 $4 \log_2^2 x - 16 - 16 \log_2 x + 31 = 0$
 Пусть $\log_2 x = t$

$4t^2 - 16t + 15 = 0$
 $D = 256 - 240 = 16$
 $t = \frac{16 \pm 4}{8}$
 $t_1 = 2,5 \quad t = 1,5$

$\log_2 x = 2,5 \quad \log_2 x = 1,5$
 $x = 2^{2,5} = 2^2 \cdot 2^{0,5} = 4\sqrt{2} \quad x = 2^{1,5} = 2^1 \cdot 2^{0,5} = 2\sqrt{2}$



$\Rightarrow \sqrt{8} \in [3, 6]$
 $\sqrt{32} \in [3, 6]$

ОТВЕТ: а) $2\sqrt{2}; 4\sqrt{2}$
 б) $4\sqrt{2}$

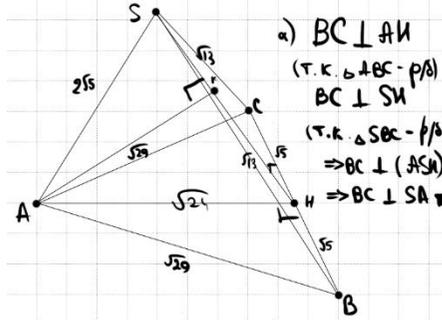
Источники:

Основная волна 2017

13

В пирамиде $SABC$ известны длины рёбер: $AB = AC = \sqrt{29}$, $BC = SA = 2\sqrt{5}$, $SB = SC = \sqrt{13}$.

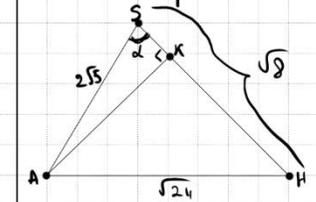
- а) Докажите, что прямая SA перпендикулярна прямой BC .
 б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC .



а) $BC \perp AH$
 (т.к. $\Delta ABC - \text{равн.}$)
 $BC \perp SH$
 (т.к. $\Delta SBC - \text{равн.}$)
 $\Rightarrow BC \perp (ASH)$
 $\Rightarrow BC \perp SA$

б) Пусть $AK - \text{высота}$
 $SK - \text{проекция SA на л. SBC}$
 $\Rightarrow \angle ASK - \text{искомый}$

② Рассмотрим ΔASK .



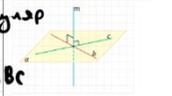
$\cos \alpha = \frac{20 + 8 - 24}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{4}{8\sqrt{10}}$

ОТВЕТ: $\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)$

Источники:

Досрочная волна 2019

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

Если $m \perp c$, то $m \perp \alpha$ в $n \subset \alpha$



Угол между прямой и плоскостью - это угол между прямой и её проекцией на плоскость

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

$1 \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
 $2 \ \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



14 Задание с развернутым ответом

Решите неравенство $\log_7(2x^2 + 12) - \log_7(x^2 - x + 12) \geq \log_7(2 - \frac{1}{x})$.

Источники: ФИПИ (новый банк), Основная волна 2018

№: 5082

Найдем нули числителя и знаменателя $x \neq 0$

$$3x^2 - 13x + 12 = 0$$

$$D = 169 - 144 = 25$$

$$x = \frac{13 \pm 5}{6}$$

$$x = 3 \quad x = \frac{4}{3}$$

Найдем нули знаменателя $x \neq 0$

$$x^2 - x + 12 = 0$$

$$D = 1 - 48 < 0$$

Найдем пересечение:

ОТВЕТ: $(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}] \cup [3; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Задание с развернутым ответом

Источники: ФИПИ (новый банк), Основная волна 2018, Ященко 2021 (36 вар), Ященко 2020 (36 вар)

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1000000 рублей на $(n + 1)$ месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ к началу предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n -го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n + 1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

№: 5197

Пусть $(1 + \frac{r}{100}) = b$

7 число - день платежа

Дата	Сумма долга
15 дек	1000 тыс
1 ян	1000 · b
7 ян	⇒ с.в. 1000b - 960
15 ян	1000 · b ²
7 фев	⇒ с.в. 960b - 920
15 фев	920 · b
7 мар	⇒ с.в. 920b - 880
15 мар	1000 · b ³ = 880

О.С.В. = 1378

$$(1000b - 960 + 240b - 200) \cdot 2^{10} + 200b = 1378$$

$$12400b - 11600 + 200b = 1378$$

$$12600 \cdot b = 12978$$

$$b = 1,03$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1,03$$

$$r = 3$$

ОТВЕТ: 3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 211206



16

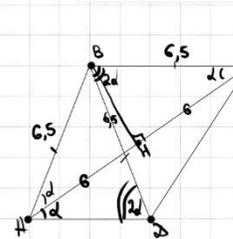
Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD .

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .

б) Найдите CD , если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6,5$.

Источники:

ЕГЭ (старый банк)
СтатГрад 26.01.2017



а) Пусть $\angle CAD = d$
Тогда $\angle ACB = d$ (накрест. лежащие)
 $\triangle ABC - p/s.$
 $\Rightarrow \angle BAC = d = \angle ACB$
 $\Rightarrow AC - \text{биссектриса } \angle BAD$

б) ① $\angle ADB = 2d = \angle BAD$
 $\angle CBD = 2d = \angle CDB$ (накрест. лежащие)

② в $\triangle ABK$:
 $\cos d = \frac{6}{6,5} = \frac{12}{13}$
 $\cos 2d = 2\cos^2 d - 1 = 2 \cdot \frac{144}{169} - 1 = \frac{118}{169}$

③ $\triangle BCD$: по т. кос:
 $CD = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{118}{169}} = 5.$

ОТВЕТ: 5

17

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 4x + a - 5| \leq 10$$

выполняется для всех $x \in [a - 5; a]$.

Источники:

ЕГЭ (старый банк)

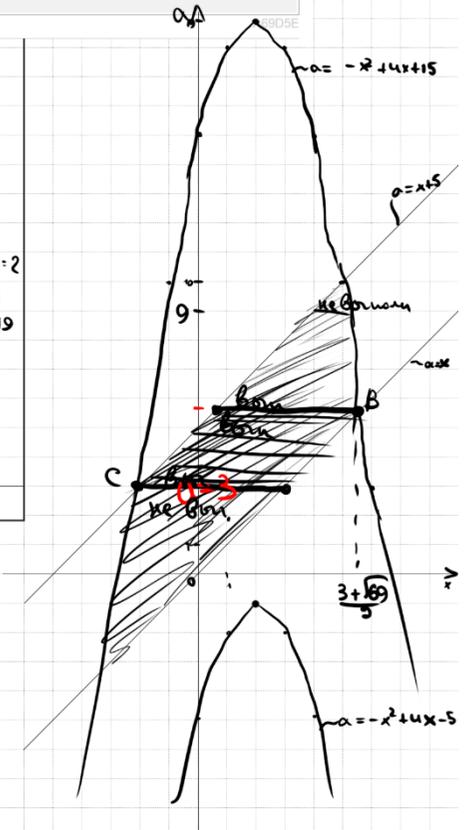
$$\begin{cases} -10 \leq x^2 - 4x + a - 5 \leq 10 \\ a - 5 \leq x \leq a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 \leq x^2 - 4x + a - 5 \\ x^2 - 4x + a - 5 \leq 10 \\ a - 5 \leq x \\ x \leq a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq -x^2 + 4x - 5 \\ a \leq -x^2 + 4x + 15 \\ a \leq x + 5 \\ a \geq x \end{cases}$$

$x_0 = \frac{-4}{2} = -2$
 $Q_{(1)} = -1$
 $Q_{(2)} = 19$

ОТВЕТ: $\left[3; \frac{3 + \sqrt{69}}{2} \right]$
Найдем ординату точки B:
 $a = -x^2 + 4x + 15$ $a = x$
 $-x^2 + 4x + 15 = x$
 $x^2 - 3x - 15 = 0$
 $D = 9 + 60 = 69$
 $x = \frac{3 \pm \sqrt{69}}{2}$
 $x_B = \frac{3 + \sqrt{69}}{2}$ $a_B = \frac{3 + \sqrt{69}}{2}$



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



18 На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
 б) Можно ли сделать 10 ходов?
 в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 ЕГЭ (новый банк)
 Основания июля 2016

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

а) $34 = 1+12+21$
 $33 = 2+11+20$
 $32 = 3+10+19$
 $31 = 4+9+18$
 $30 = 5+8+17$

б) Можно ли сделать 10 ходов? $\frac{1+20}{2} = 10.5$
 За 10 ходов можно стереть 30 чисел.
 За 10 ходов можно стереть следующие: 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25.
 \Rightarrow будет стёрто $\leq \frac{34+25}{2} \cdot 10 = 295$

в) Можно ли сделать 7 ходов?
 После 7 ходов можно стереть 7 троек.
 $\frac{1+21}{2} \cdot 7 = 217 \leq$ стёртые 7 троек $\leq \frac{34+28}{2} = 217$
 $\frac{1+21}{2} \cdot 21 = 231 \leq$ стёртые 7 троек ≤ 217
 $231 \leq$ стёртые 7 троек ≤ 217
 $\Rightarrow 231 \leq$ стёртые 7 троек ≤ 217 — это невозможно
 \Rightarrow 7 и более ходов быть не может

ОТВЕТ:
 а) нет
 б) нет
 в) 6

– пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в;	1

