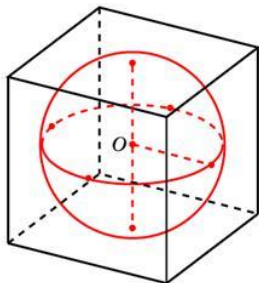


4 Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{24}}$$

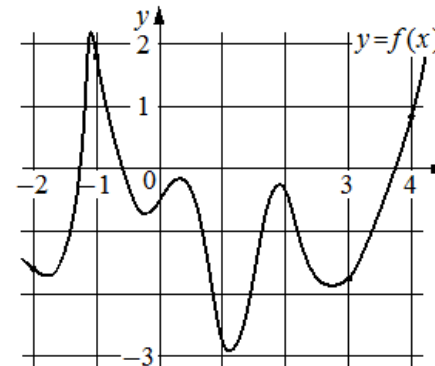
Ответ: _____.

5 Шар, объем которого равен 35π , вписан в куб. Найдите объем куба.



Ответ: _____.

6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: _____.

7 К источнику с ЭДС $\varepsilon = 115$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,6$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 100 В? Ответ выразите в омах.

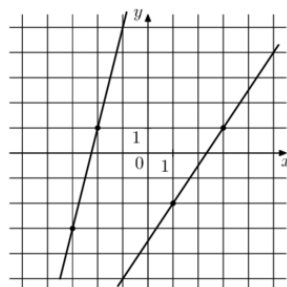
Ответ: _____.

8 Имеется два сосуда. Первый содержит 60 кг, а второй – 20 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 30% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 45% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: _____.



- 9** На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



Ответ: _____.

- 10** В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Ответ: _____.

- 11** Найдите наименьшее значение функции $y = (3x^2 + 21x - 21)e^x$ на отрезке $[-5; 3]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12** а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos x = \sqrt{3} \sin 2x - 1.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

- 13** Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

- а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
 б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

- 14** Решите неравенство

$$(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 + 8 \cdot 5^x < 2 \cdot 25^x + 15.$$

- 15** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r , если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший – не менее 0,6 млн рублей.



16 В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

- а) Докажите, что $AB = CD$.
б) Найдите AD , если $AB = 2$, $BC = 7$.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a + 7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

18 Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

- а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \dots; 199\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	122
2	0,5
3	0,4
4	2
5	210
6	-1
7	4
8	15
9	-5
10	0,027
11	-21
12	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{3}$
13	$\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$
14	$(-\infty; 0) \cup (\log_5 3; 1)$
15	20
16	8
17	$\{-9; -5\}$
18	а) нет б) да в) 2

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 Задание с развернутым ответом

а) Решите уравнение $2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos x = \sqrt{3} \sin 2x - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

Источники: ФИПИ (новый банк), Основная волна 2018, Ященко 2021 (36 вар), Ященко 2020 (36 вар), Ященко 2019 (36 вар).

ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

1. Номер: 5099

а) $2 \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} \right) - \cos x = \sqrt{3} \sin 2x - 1$
 $2 \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cos 2x \cdot \frac{1}{2} - \cos x = \sqrt{3} \sin 2x - 1$
 $2 \cos 2x - \cos x + 1 = 0$
 $2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0$
 $\cos x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$
 $\cos x = 0$ $\cos x = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) Отберём корни с помощью окружности.

Найдем $x = \frac{5\pi}{2}$
 $x = \frac{7\pi}{2}$
 $x = \frac{4\pi}{3}$ $x = \frac{11\pi}{3}$

ОТВЕТ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

13 Все рёбра правильной треугольной призмы $ABC_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
 б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

Источники: Демо 2021, Демо 2020, Демо 2019, Демо 2018, Демо 2017, Демо 2016, Демо 2015.

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ (СПОСОБ #1)

Угол между плоскостями – это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ (СПОСОБ #2)

Находим угол между плоскостью сечения и плоскостью проекции.

а) $\triangle ABM$: $BM = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
 $\triangle A_1NM$: $NM = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
 $B_1N = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$
 $\triangle BB_1N$: $BN = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$
 $\sqrt{63}^2 = \sqrt{45}^2 + (3\sqrt{2})^2$
 $63 = 45 + 18$
 $\rightarrow \angle BMN = 90^\circ \Rightarrow BM \perp MN$

ОТВЕТ: а) $\alpha = \arccos \left(\frac{\sqrt{40}}{4} \right)$

б) Пусть ось NP – перпендикуляр к (ABB_1)
 $\cos \alpha = \frac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle BMN}}$
 Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$.
 NP – ср. линия $\triangle C_1N A_1$
 $\Rightarrow A_1P = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$
 $\triangle A_1PM$: $PM = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{45}}{2}$
 $\triangle BB_1P$: $BP = \sqrt{6^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 3\sqrt{5}$
 $\Rightarrow \triangle BMP$ – прямоугол.
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{45} \cdot \frac{\sqrt{45}}{2}}{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{40}} = \frac{45}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3



14 Решите неравенство $(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 + 8 \cdot 5^x < 2 \cdot 25^x + 15$.

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО
 $a^{\log_a b} = b$
Источники:
Основная волна 2021

$(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 - 2 \cdot 25^x + 8 \cdot 5^x - 15 < 0$
 $(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 - 2 \cdot (25^x - 4 \cdot 5^x) - 15 < 0$
 Пусть $(25^x - 4 \cdot 5^x) = t$
 $t^2 - 2t - 15 < 0$

$-3 < 25^x - 4 \cdot 5^x < 5$ Пусть $5^x = a$

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 3 > 0 \\ a^2 - 4a - 5 < 0 \end{cases}$$

Найдем пересечение:

$$\begin{cases} -1 < a < 1 \\ 3 < a < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < 5^x < 1 \\ 3 < 5^x < 5 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(-\infty; 0) \cup (\log_5 3; 1)$

$$\begin{cases} 5^x < 5^0 \\ 5^{\log_5 3} < 5^x < 5^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \log_5 3 < x < 1 \end{cases}$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Источники:
ЕГЭ (старый банк)
ЕГЭ (новый банк)
Основная волна 2019
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2015

Пусть $(1 + \frac{r}{100}) = a$

Дата	Сумма долга
Июль	4,5 млн
Январь	4,5 · a
Февраль	4,5 · a - 4
Март	4 · a
Апрель	4 · a - 3,5
Май	3,5 млн
Июнь	3,5 · a - 3
Июль	3

В июле планируется выплатить сумму, меньшую или равную 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

$$\begin{cases} 4,5a - 4 \leq 1,4 \\ 0,5a \geq 0,6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4,5a \leq 5,4 & | :4,5 \\ 0,5a \geq 0,6 & | :0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 1,2 \\ a \geq 1,2 \end{cases} \Rightarrow a = 1,2$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1,2 \Rightarrow \frac{r}{100} = 0,2 \Rightarrow r = 20\%$$

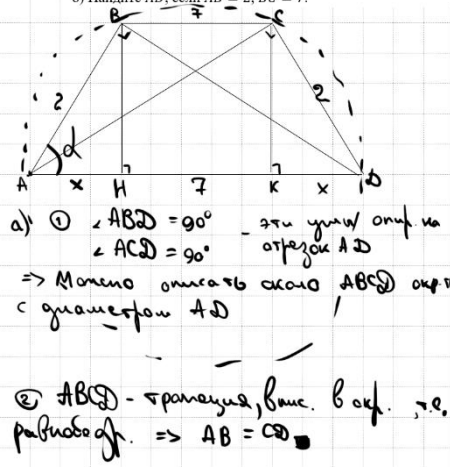
ОТВЕТ: 20

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



16 В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

- а) Докажите, что $AB = CD$.
 б) Найдите AD , если $AB = 2$, $BC = 7$.



ОТВЕТ: 8

Источники:

Основная волна 2018
 Основная волна (Резерв) 2018
ПРИЗНАК ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА
 Если два равных угла опираются на один отрезок, то около четырёхугольника можно описать окружность



17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a+7)^2 = |x-7-a| + |x+a+7|$$

имеет единственный корень.

Пусть $f(x) = x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7|$
 $f(-x) = (-x)^2 + (a+7)^2 - |-x-7-a| - |-x+a+7|$
 $= x^2 + (a+7)^2 - |x+7+a| - |x-a-7|$
 $\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x) - 7$ четная \mathcal{P} -функция
 Единственный корень четная \mathcal{P} -функция может иметь только если этот корень $x=0$

Найдём, при каких a
 Если $x=0$, то $0^2 + (a+7)^2 = |-7-a| + |a+7|$
 $(a+7)^2 - 2|a+7| = 0$
 $|a+7|^2 - 2|a+7| = 0$

ОТВЕТ: -5; -9

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Ященко 2019 (36 пар)
 Семаков 2015
 Основная волна 2013

$|a+7| \cdot (|a+7| - 2) = 0$
 $|a+7|=0$ или $|a+7|=2$
 $a=-7$ или $a=-5$
 $a=-9$
 Проверим, при каких из этих трёх a будет единств. корень:
 Если $a=-7$, то $x^2 = |x| + |x|$
 $|x|^2 - 2|x| = 0$
 $|x| \cdot (|x| - 2) = 0$
 $|x|=0$ или $|x|=2$
 $x=0$ или $x=\pm 2$
 \Rightarrow при $a=-7$ будет 3 р-на
 Если $a=-5$, то $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$

Если $a=-9$, то $x^2 + 4 = |x+2| + |x-2|$
 $x=0$ - единств. корень

$ x+2 $	-	+	+
$ x-2 $	-	-	+
x	-2	-2	2

Если $x < -2$, то $x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$
 $x^2 + 2x + 4 = 0$
 $x^2 + 2x + 1 + 3 = 0$
 $(x+1)^2 + 3 = 0$
 Если $-2 < x < 2$, то $x^2 + 4 = -x + 2 + x + 2$
 $x^2 = 0$
 $x = 0$ - единств. корень
 Если $x > 2$, то $x^2 + 4 = x - 2 + x + 2$
 $x^2 - 2x + 4 = 0$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1



Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

18 Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.
 а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \dots; 199\}$ хорошим?
 б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ хорошим?
 в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 ЕГЭ (новый банк)
 Досрочная волна 2016

а) В данном множестве много простых чисел, например 199

Отправим 199 в одно из двух подмножеств

199...
 Тогда одно из произведений будет кратно 199, а другое нет, т.е. эти произведения будут не равны

б) $50 \cdot 2^{201}$ - произведение некоего подмножества и второго

в) 5, 7 и 11 - простые числа, которые не делят ни одно из чисел множества, значит, остаются $\{1; 3; 4; 6; 9; 12\}$

Остается $\{1; 3\}$ $\{1; 4\}$ $\{1; 6\}$ $\{1; 9\}$ $\{1; 12\}$ $\{3; 4\}$ $\{4; 6\}$ $\{4; 9\}$ $\{4; 12\}$ $\{6; 9\}$ $\{6; 12\}$ $\{9; 12\}$

Ответ: а) не явл.
 б) Да
 в) 2 ($3; 4; 9; 12$ и $1; 3; 4; 12$)

$\{3; 4\}$ $\{1; 12\}$ уже было
 $\{3; 6\}$ $\{ \dots \}$ $\{ \dots \}$
 $\{3; 9\}$ $\{ \dots \}$ $\{ \dots \}$
 $\{3; 12\}$ $\{4; 9\}$ ✓

Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2

