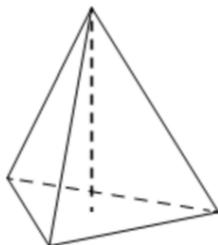


4 Найдите значение выражения

$$\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13}.$$

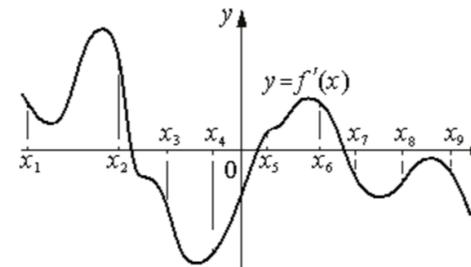
Ответ: _____.

5 В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 10,5. Найдите высоту пирамиды.



Ответ: _____.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



Ответ: _____.

7 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_n = 25^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_b = 57^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \cdot \frac{cm}{\gamma} \cdot \log_2 \frac{T_b - T_n}{T - T_n}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

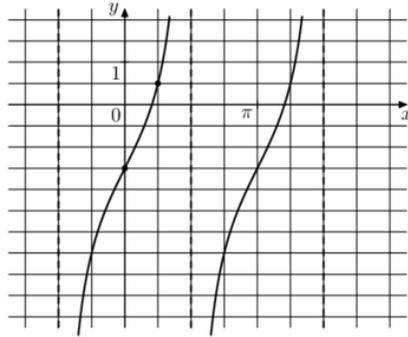
Ответ: _____.

8 Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 1,5 км от дома. Один идёт со скоростью 2,2 км/ч, а другой — со скоростью 4,4 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

Ответ: _____.



9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a \operatorname{tg} x + b$. Найдите a .



Ответ: _____.

10 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: _____.

11 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 8 \cos x + \frac{30}{\pi} x + 19 \text{ на отрезке } \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right].$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{2}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right].$$

13 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 1 : 3$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

14 Решите неравенство

$$\frac{31 - 5 \cdot 2^x}{4^x - 24 \cdot 2^x + 128} \geq 0,25.$$

15 В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 78 030 рублей больше суммы взятого кредита.



16 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ:
 $AB = 3, BC = CD = 5, AD = 8, AC = 7$.

- а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.
- б) Найдите BD .

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

18 В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1, a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

- а) Приведите пример такой последовательности.
- б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
- в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	10
2	0,06
3	98
4	-0,5
5	3,5
6	5
7	33
8	1
9	2
10	0,0491
11	-5
12	а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{13\pi}{4}$
13	$\frac{2597}{8}$
14	$\{1\} \cup (3; 4)$
15	119 700
16	$\frac{55}{7}$
17	$(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$
18	а) 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7 ...235 б) нет в) 23

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



12 а) Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{2}$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Источники:

Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Основная волна 2016
Досрочная волна (Резерв) 2015

а) $\frac{\sin 2x}{-\cos x} - \frac{\sqrt{2}}{1} = 0$

$$-2\sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x = 0$$

$$\cos x (-2\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\begin{cases} -2\sin x - \sqrt{2} = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad | :(-1)$$

$$\begin{cases} 2\sin x + \sqrt{2} = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

б) $\frac{13\pi}{4}$

Отсежем корни с помощью окружности

Получим число $x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$

ОТВЕТ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
б) $\frac{13\pi}{4}$

13

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 1 : 3$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

б) Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

Источники:

ЕГЭ (старый банк)
Досрочная волна 2015

а) $\triangle B_1 L K \sim \triangle B B_1 D_1$ по 2 углам

$$\frac{3}{7} = \frac{B_1 L}{7\sqrt{2}} \quad B_1 L = 3\sqrt{2}$$

б) $\triangle C_1 D_1 L \sim \triangle P B_1 L$ по 2 углам

$$\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{PB_1}{7} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{PB_1}{7} \quad PB_1 = \frac{21}{4}$$

ОТВЕТ: $\frac{2597}{8}$

а) $\frac{A_1 P}{PB_1} = \frac{7 - \frac{21}{4}}{\frac{21}{4}} = \frac{28 - 21}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

б) $V_{\text{куба}} = 7^3 = 343$
 $V_{\text{меньшей части куба}} = \frac{1}{8} \cdot 7 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{21}{4} = \frac{147}{8}$
 $V_{\text{большой}} = \frac{343}{1} - \frac{147}{8} = \frac{2744 - 147}{8} = \frac{2597}{8}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



14 Решите неравенство $\frac{31 - 5 \cdot 2^x}{4^x - 24 \cdot 2^x + 128} \geq 0,25$.

Источники:

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2021
Основная волна 2017
Основная волна 2015

Пусть $2^x = t$

$$\frac{31 - 5t}{t^2 - 24t + 128} - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\frac{124 - 20t - t^2 + 24t - 128}{4 \cdot (t^2 - 24t + 128)} \geq 0$$

$$\frac{-t^2 + 4t - 4}{4 \cdot (t^2 - 24t + 128)} \geq 0 \quad | \cdot (-4)$$

$$\frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 - 24t + 128} \leq 0$$

$$\frac{(t-2)^2}{(t-8)(t-16)} \leq 0$$

ОТВЕТ: $\{1\} \cup (3; 4)$

$$\begin{cases} t=2 \\ 8 < t < 16 \end{cases}$$

$$2^x = 2^{-1}$$

$$x = 1$$

$$2^3 < 2^x < 2^4$$

$$3 < x < 4$$

15 В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:
 • в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
 • с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Источники:

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2020
Основная волна 2017
Досрочная волна 2018

Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 78 030 рублей больше суммы взятого кредита.

Пусть S - сумма кредита
 x - ежемесячный платёж

Дата	Сумма долга
и 20	S
я 21	1,3 · S
ф 21	1,3 ² · S - x
я 22	1,3 ² · S - 1,3 · x
ф 22	1,3 ² · S - 1,3 · x - x
я 23	1,3 ³ · S - 1,3 ² · x - 1,3x
и 23	1,3 ³ · S - 1,3 ² · x - 1,3x - x = 0

① $3x - S = 78030$

$$\textcircled{2} x = \frac{78030 + S}{3} = 26010 + \frac{1}{3}S$$

$$\textcircled{1} \frac{13^3}{10^3} \cdot S - \frac{13^2}{10^2} \cdot x - \frac{13^{10}}{10} \cdot x - \frac{x}{1} = 0$$

$$\frac{13^3}{10^3} \cdot S = \frac{399}{100} \cdot x \quad | \cdot 1000$$

$$13^3 \cdot S = 399 \cdot 10 \cdot (26010 + \frac{1}{3}S)$$

$$2197S = 399 \cdot 260100 + 1330S$$

$$867 \cdot S = 399 \cdot 260100$$

$$S = \frac{399 \cdot 260100}{867} = 119700$$

ОТВЕТ: 119 700

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



16 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

- а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.
- б) Найдите BD .

а) $\triangle ABC$: $\cos \angle ABC = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \angle ABC = 120^\circ$

$\triangle ACD$: $\cos \angle ADC = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \angle ADC = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
 $\Rightarrow ABCD$ - вписанный

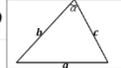
ОТВЕТ: $\frac{55}{7}$

б) $\angle A + \angle C = 180^\circ$
 \Rightarrow $BD = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8$
 $BD = \frac{55}{7}$

Источники:

Досрочная волна (Резерв) 2018

ТЕОРЕМА КОСУНУСОВ



1 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
 2 $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ



$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$
 (работает только для вписанного четырёхугольника)

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$9x^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 - a^2 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (3x - a)(3x + a) = 0 \\ (x + 4)^2 - a^2 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (3x - a)(3x + a) = 0 \\ (x + 4 - a)(x + 4 + a) \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{3} \\ x_2 = -\frac{a}{3} \\ x \neq a - 4 \\ x \neq -a - 4 \end{cases}$

x_1 и x_2 должны быть разными

$\frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3}$
 $a \neq 0$

x_1 не должен быть равен $a - 4$
 $\frac{a}{3} \neq a - 4 \Rightarrow \frac{2}{3}a \neq 4 \Rightarrow a \neq 6$

x_2 не должен быть равен $a - 4$
 $-\frac{a}{3} \neq a - 4 \Rightarrow \frac{4}{3}a \neq 4 \Rightarrow a \neq 3$

ОТВЕТ: $(-2; 2) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4





18 В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1, a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.
 а) Приведите пример такой последовательности.
 б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
 в) Может ли такое количество членов последовательности состоять из 1000 членов?

Источники:
 ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Ященко 2018

а) $1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, 9, 11, \dots, 235$
 б) $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231, 233, 235$

+22 - максимальный шаг увеличения четных чис.
 $\Rightarrow h \geq 23$
 Нужно заметить 4 члена по 22 на 4 члена на 20

Пример
 $1, 4, 21, -16, 41, -36, 61, -56, 81, -78, 103, 125, 147, 169, 191, 213, 235$

ОТВЕТ:
 а) Привести
 б) нет
 в) 23

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.