

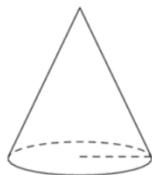


4 Найдите значение выражения

$$30 \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ - 43.$$

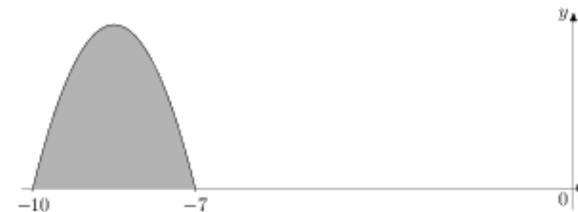
Ответ: \_\_\_\_\_.

5 Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



Ответ: \_\_\_\_\_.

6 На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$ . Функция  $F(x) = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{34}{3}x^2 - \frac{280}{3}x - \frac{18}{5}$  — одна из первообразных функции  $f(x)$ . Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: \_\_\_\_\_.

7 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$$T(t) = T_0 + bt + at^2,$$

где  $t$  — время (в мин.),  $T_0 = 680$  К,  $a = -16 \frac{\text{К}}{\text{мин}^2}$ ,  $b = 224 \text{К/мин}$ . Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

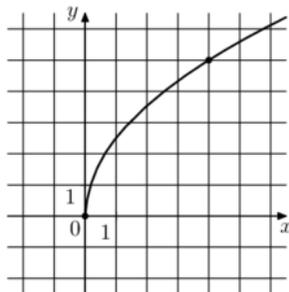
Ответ: \_\_\_\_\_.

8 На изготовлении 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: \_\_\_\_\_.



9 На рисунке изображён график функции  $f(x) = k\sqrt{x}$ . Найдите  $f(6,76)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

10 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: \_\_\_\_\_.

11 Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 441}{x} \text{ на отрезке } [2; 32].$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.**

**Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение

$$\frac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x}}{\sqrt{11 \sin x}} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right].$$

13 В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна боковому ребру  $SA$ . Медианы треугольника  $SBC$  пересекаются в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $AM = AD$ .

б) Точка  $N$  – середина  $AM$ . Найдите  $SN$ , если  $AD = 6$ .

14 Решите неравенство

$$\log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5(x^2-7x+12) + \log_5(5-x).$$

15 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.



**16** Две окружности касаются внешним образом в точке  $K$ . Прямая  $AB$  касается первой окружности в точке  $A$ , а второй – в точке  $B$ . Прямая  $BK$  пересекает первую окружность в точке  $D$ , прямая  $AK$  пересекает вторую окружность в точке  $C$ .

- а) Докажите, что  $ABCD$  – трапеция.  
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $BKD$ , если известно, что радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.

**17** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

**18** Последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

- а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.  
б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?  
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при  $n = 6$ ?

**Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.**



**Система оценивания экзаменационной работы по математике  
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	12
2	0,25
3	18,5
4	-13
5	3
6	6
7	5
8	8
9	6,5
10	0,9975
11	42
12	а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{17\pi}{4}$
13	$\sqrt{15}$
14	[2; 3)
15	7 млн
16	$\frac{\sqrt{65}}{2}$
17	$[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$
18	а) 2, 7, 11, 14, 6 б) да, например, 6, 7, 7, 6, 3 в) 16

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий  
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

**Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.**

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



**12** а) Решите уравнение  $\frac{9\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{11}\sin x} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\frac{7\pi}{2}; 5\pi]$ .

**Источники:**  
 ФИПИ (старый банк)  
 СтатГрад 29.01.2020  
 СтатГрад 26.01.2017

а)  $9\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x = 0$   
 $3\sin x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$   
 $\sin x = 0$  или  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 Нет решений  $\sin x > 0$   
 $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$   
 $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  (не подходит)

б) Общее решение с помощью арктангенса:  
 $x = \frac{4\sqrt{\pi}}{1} + \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}$

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$   
 б)  $\frac{17\pi}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**13** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна боковому ребру  $SA$ . Медианы треугольника  $SBC$  пересекаются в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $AM = AD$ .  
 б) Точка  $N$  — середина  $AM$ . Найдите  $SN$ , если  $AD = 6$ .

**Источники:**  
 Основная волна 2017  
**ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ**  
 1  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$   
 2  $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

а) Пусть  $AD = 2x$   
 $\triangle ABE$ :  $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{5}x$   
 $\triangle SEC$ :  $SE = \sqrt{SC^2 - CE^2} = \sqrt{3}x$   
 $\triangle SBC$ :  $ME = \frac{1}{3} \cdot SE = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  (т.к. М — медиана)  
 $\triangle ASE$ :  $\cos \angle AES = \frac{SE^2 + AE^2 - AS^2}{2 \cdot SE \cdot AE} = \frac{3x^2 + 5x^2 - 4x^2}{2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \sqrt{5}x} = \frac{2}{\sqrt{15}}$   
 $\triangle AME$ :  $AM = \sqrt{\frac{2}{3}x^2 + 5x^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}x \cdot \sqrt{5}x \cdot \frac{2}{\sqrt{15}}} = 2x = AD$

б)  $\triangle ASN$ :  $SN = \sqrt{6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{15}$

**Ответ:**  $\sqrt{15}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



**14** Решите неравенство  $\log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5(x^2-7x+12) + \log_5(5-x)$ .

**Источники:**  
 ФРБ (старый банк)  
 Основная волна 2019  
 Досрочная волна 2020

AA07B4

①  $(3-x)(x^2+2) \geq (x-3)(x-4)(5-x)$   
 ②  $(3-x)(x^2+2) > 0$   
 ③  $(x-3)(x-4) > 0$   
 ④  $5-x > 0$

①  $(3-x)(x^2+2) + (3-x)(x-4) \cdot (5-x) \geq 0$   
 $(3-x) \cdot (x^2+2-x^2-9x+20) \geq 0$   
 $(3-x)(9x-18) \geq 0$

②  $(3-x) \cdot (x^2+2) > 0 \quad | : (x^2+2)$   
 $3-x > 0$   
 $x < 3$

③  $(x-3)(x-4) > 0$

④  $x < 5$

**Ответ:**  $[2; 3)$

Каждым неясете

**15** Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

**Источники:**  
 Яценко 2018 (36 вар)  
 Досрочная волна 2016  
 Основная волна (Резерв) 2016

Пусть  $x$  вв 21 - месяц отн.  
 $x$  - сумма пополнения вкл.

$10 \cdot 1,4641 + 1,21x + 1,1x \geq 30$   
 $2,31x \geq 30 - 14,641$   
 $2,31x \geq 15,359$   
 $x \geq \frac{15359}{2310}$   
 $x \geq 6 \frac{1499}{2310}$   
 $\Rightarrow x_{\text{наим}} = 7$

Дата	Сумма вклада
1   21	10 млн
2   21	$10 \cdot 1,1$
3   22	число не известно
3   22	$10 \cdot 1,1^2$
3   23	$10 \cdot 1,1^2 + x$
3   23	$10 \cdot 1,1^3 + 1,1x$
4   24	$10 \cdot 1,1^3 + 1,1x + x$
4   24	$10 \cdot 1,1^4 + 1,1^2x + 1,1x \geq 30$

**Ответ:** 7 млн

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

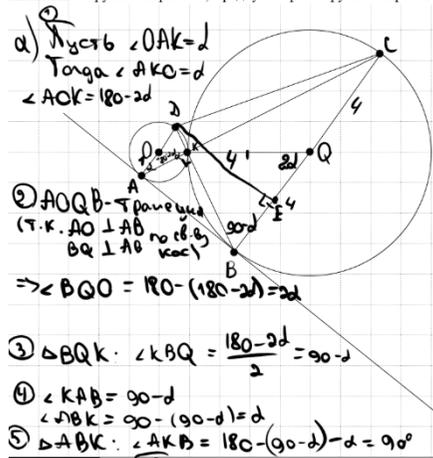
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



**16** Две окружности касаются внешним образом в точке  $K$ . Прямая  $AB$  касается первой окружности в точке  $A$ , а второй – в точке  $B$ . Прямая  $BK$  пересекает первую окружность в точке  $D$ , прямая  $AK$  пересекает вторую окружность в точке  $C$ .

**Источники:**  
Дисциплинарный полем (Резерв) 2019

- а) Докажите, что  $ABCD$  – трапеция.  
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $BCD$ , если известно, что радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.



а)  $\angle AKD = 90^\circ \Rightarrow AD - \text{диаметр}$   
 $\angle BKC = 90^\circ \Rightarrow BC - \text{диаметр}$   
 $\Rightarrow AD \perp AB$   
 $BC \perp AB$   
 $\Rightarrow AD \parallel BC$   
 $\Rightarrow ABCD - \text{трапеция.}$

**ТЕОРЕМА СИНУСОВ**

б)  $\frac{CD}{\sin(90-d)} = 2R$       $\frac{CD}{\cos d} = 2R$

1)  $AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$   
 $CD = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

2)  $\triangle BDE$       $\sin \angle DBE = \frac{4}{25} = \frac{2}{5}$

3)  $\frac{2\sqrt{13}}{\frac{2}{5}} = 2R$       $R = \frac{\sqrt{65}}{2}$

**ОТВЕТ:**  $\frac{\sqrt{65}}{2}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , ИЛИ при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**17** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$  имеет ровно три различных корня.

**Источники:**  
ЕГЭ (старый банк)  
ЕГЭ (новый банк)  
Основная волна 2016

1)  $x^2 + ax + 1 \geq 0$   
 2)  $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$

2)  $3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2x^2 \cdot (ax + 1) + a^2x^2 + 2ax + 1$   
 $x^4 + 2 \cdot a \cdot x^2 + 2x^2 - 3x^2 + a^2x^2 = 0$   
 $x^4 + 2 \cdot a \cdot x^2 - x^2 + a^2x^2 = 0$   
 $x^2 \cdot (x^2 + 2ax - 1 + a^2) = 0$   
 $x_1 = 0$       $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$   
 $(x+a)^2 - 1 = 0$   
 $(x+a-1)(x+a+1) = 0$   
 $x_2 = 1-a$       $x_3 = -a-1$

Найдем, при каких  $a$  найденные три условия не выполняются

$0^2 + a \cdot 0 + 1 \geq 0$       $(1-a)^2 + a(1-a) + 1 \geq 0$   
 $a - \text{любое}$       $1 - 2a + a^2 + a - a^2 + 1 \geq 0$   
 $a < 2$

$(-a-1)^2 + a(-a-1) + 1 \geq 0$   
 $(a+1)^2 - a^2 - a + 1 \geq 0$   
 $a^2 + 2a + 1 - a^2 - a + 1 \geq 0$   
 $a \geq -2$

Если все три корня были равными

$\begin{cases} 1-a \neq -a-1 \\ 1-a \neq 0 \\ -a-1 \neq 0 \end{cases}$       $\begin{cases} a - \text{любое} \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases}$

Получаем:  $\begin{cases} a \neq \pm 1 \\ a \geq -2 \end{cases}$

**ОТВЕТ:**  $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 211018

**18** Последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

**Источники:**  
Основная волна 2016

- а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.  
 б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?  
 в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при  $n = 6$ ?

а)  $4 \quad 10 \quad 11 \quad 10 \quad 5$   
 б)  $1 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 1$   
 Пусть  $a=1$   
 $f=1$   
 На место  $b$  не может быть 1 или 2  
 $\Rightarrow b \geq 3$   
 Пусть  $b=3$   
 Тогда  $c=4$  (учитывая что  $a_n - a_{n-1} > a_{n+1} - a_n$ )  
 "Отзеркалим" первые 3 члена по 3-ти цифрам

$$a_n > \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2a_n > a_{n-1} + a_{n+1}$$

$$a_n - a_{n-1} > a_{n+1} - a_n$$

$4 \quad 6 \quad 7$   
 $a_{n-1} \quad a_n \quad a_{n+1}$   
 Получаем 16

**ОТВЕТ:**  
 а) Приведен  
 б) Да, см. п. а)  
 в) 16

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

- 1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;
- 2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

