

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

К И М
Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

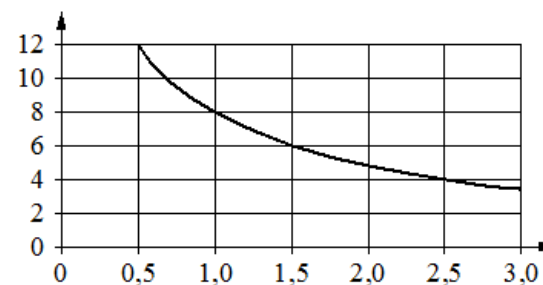
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Магазин делает пенсионерам скидку на определенное количество процентов от цены покупки. Упаковка сосисок стоит в магазине 120 рублей. Пенсионер заплатил за упаковку сосисок 114 рублей. Сколько процентов составляет скидка для пенсионеров?

Ответ: _____.

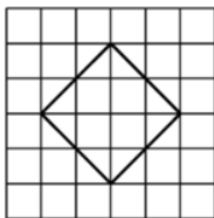
- 2** Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя: чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На графике показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На горизонтальной оси отмечено сопротивление в омах, на вертикальной оси – сила тока в амперах. Определите по графику сопротивление цепи при силе тока 6 ампер. Ответ дайте в омах.



Ответ: _____.



- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ изображён квадрат. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.



Ответ: _____.

- 4 По отзывам покупателей Василий Васильевич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,93. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,94. Василий Васильевич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

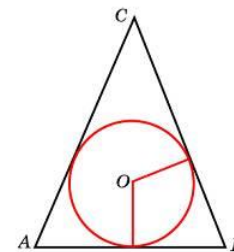
Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения

$$\log_5(5 - x) = 2 \log_5 3.$$

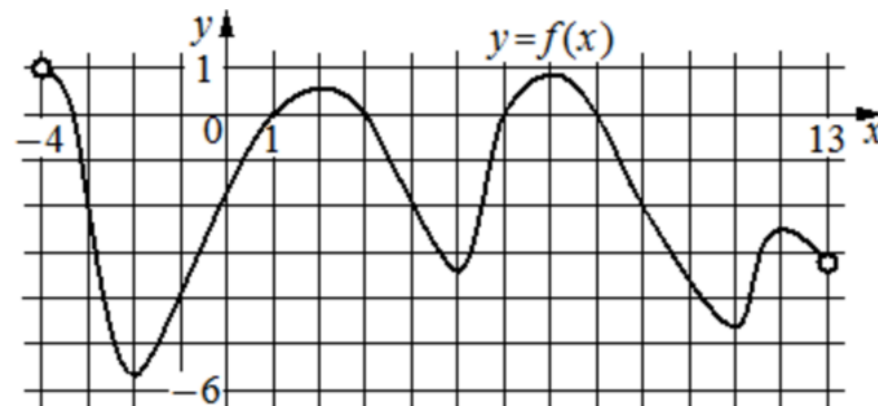
Ответ: _____.

- 6 Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 10 и 1, считая от вершины, противоположной основанию. Найдите периметр треугольника.



Ответ: _____.

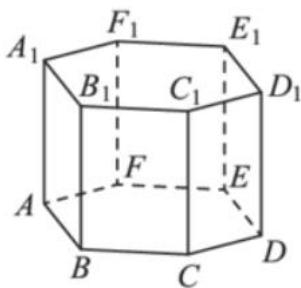
- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 14$.



Ответ: _____.



- 8 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол $AC_1 C$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения

$$x + \sqrt{x^2 - 4x + 4} \text{ при } x \leq 2.$$

Ответ: _____.

- 10 Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вчетверо объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 8 раз?

Ответ: _____.

- 11 Митя, Артем, Паша и Женя учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 18% уставного капитала, Артем — 60000 рублей, Паша — 0,18 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Женя. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1100000 рублей причитается Жене? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_8(4 - 4x - x^2) + 8.$$

Ответ: _____.

**Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**



Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{2}}.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right].$$

- 14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

- 15 Решите неравенство

$$\log_x(x - 2) \cdot \log_x(x + 2) \leq 0.$$

- 16 В трапеции $ABCD$ точка E – середина основания AD , точка M – середина боковой стороны AB . Отрезки CE и DM пересекаются в точке O .

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.

- 17 15-го мая планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1472 тысячи рублей?

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a(x - 1) \geq 4, \\ 2\sqrt{x - 2} \geq a, \\ 3x < a + 14 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

- 19 По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

- а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
- б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
- в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	5
2	1,5
3	2
4	0,0042
5	-4
6	24
7	6
8	60
9	2
10	1,5
11	374000
12	9
13	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{25\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$
14	$\arctg\left(\frac{2}{3}\right)$
15	(2; 3]
16	2:9
17	1200 тыс.
18	$(1; 2\sqrt{3}]$
19	а) да б) нет в) 8



Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{2}}$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[3\pi; \frac{9\pi}{2}]$

$$а) \frac{1 + \sin x}{2} = \cos^2 x \quad \text{и} \quad \cos x \geq 0$$

$$1 + \sin x = 2\cos^2 x$$

$$1 + \sin x = 2 \cdot (1 - \sin^2 x)$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\text{Положим } \sin x = t$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$t = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = -1 \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

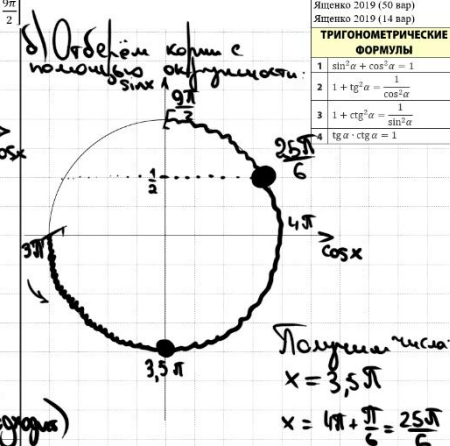
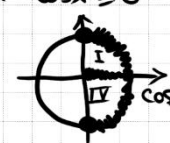
$$\sin x = -1 \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (\text{не подходит})$$

$$\text{ОТВЕТ: а) } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$б) 3,5\pi; \frac{25\pi}{6}$$



Источники:

Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2019 (14 вар)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

1 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2 $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
3 $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
4 $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

Получим числа:

$$x = 3,5\pi$$

$$x = 4\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{25\pi}{6}$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ б	1
получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



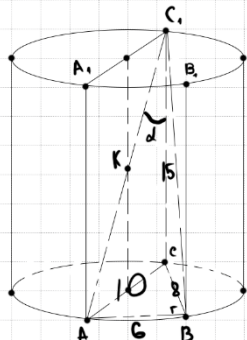
14

Задание с развернутым ответом

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересечёт ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

Номер: 5081



а) AA_1C_1C — осевое сечение цилиндра

AC — проекция AC_1 на пл. нижн. осн.

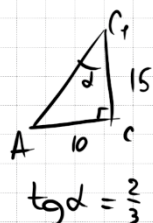
$\Rightarrow AC$ — диаметр

② $\angle ABC = 90^\circ$ (опр. по диаметру)

③ BC — проекция BC_1 на пл. нижн. осн.

$\Rightarrow \angle ABC_1 = 90^\circ$ по ТТП

б) $\angle AC_1C$ — искомым



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$$

ОТВЕТ: $\alpha = \arctg\left(\frac{2}{3}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт б не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Источники:

оспр
Основная волна 2018

15

Решите неравенство

$$\log_x(x-2) \cdot \log_x(x+2) \leq 0$$

$$(\log_x(x-2) - \log_x 1)(\log_x(x+2) - \log_x 1) \leq 0$$

$$(x-1) \cdot (x-2-1) \cdot (x-1)(x+2-1) \leq 0$$

$$② \quad x > 0$$

$$③ \quad x \neq 1$$

$$④ \quad x-2 > 0$$

$$⑤ \quad x+2 > 0$$



$$② \quad x > 0$$

$$③ \quad x \neq 1$$

$$④ \quad x > 2$$

$$⑤ \quad x > -2$$

ОТВЕТ: $(2; 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

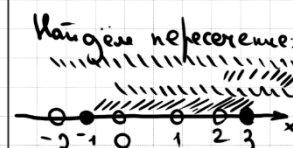
При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».

Источники:

Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2019 (14 вар)
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Ященко 2018

МЕТОД ЗАМЕНЫ
МНОЖИТЕЛЕЙ

Было	Стало
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

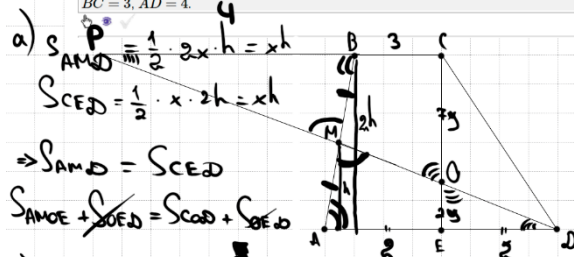


16

В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания AD , точка M — середина боковой стороны AB . Отрезки CE и DM пересекаются в точке O .

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.



б) Пусть $DM \cap AB = P$
 $\triangle PBM \sim \triangle AMD$ по 2 углам
 $\Rightarrow PB = 4$

в) $\triangle PCO \sim \triangle DOE$ по 2 углам
 $\frac{CO}{OE} = \frac{2}{2}$

ОТВЕТ:	2 : 9
Содержание критерия	
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	3

Источники:

ФИПИ
осбпр
Ященко 2018
Ященко 2018
Основная волна 2016

$$\textcircled{3} S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2h = 2h$$

$$S_{OED} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 2h = \frac{4}{3} h$$

$$S_{COD} = S_{CED} - S_{OED} = 2h - \frac{4}{3} h = \frac{2}{3} h$$

$$\textcircled{4} \frac{S_{AMOE}}{S_{трап}} = \frac{S_{COD}}{\frac{3+4}{2} \cdot 2h} = \frac{\frac{2}{3} h}{\frac{14}{2} h} = \frac{2}{9}$$

17

15-го мая планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1472 тысячи рублей?

погашения составил 1472 тысячи рублей?		Дата	Сумма долга	Сумма долга	Первые 16 выплат образуют арифметическую прогрессию
Пусть S - сумма кредита		15 мая	S	S - 1550 = S - 750	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
7 июня - день выплаты		17 мая		102S - 102 * 750	
1 мес.	15 мая	16 мая	7 т. → 58	102S - 102 * 750 - S + 800	
	7 июня	15 июня		S - 800	
	15 июня	17 июня	12 т.	102S - 102 * 800	
2 мес.	15 июня	17 июня	7 т. → 58	102S - 102 * 800	
	7 июля	15 июля		0	
	15 июля				
3 мес.	15 июля				
	7 августа				
	15 августа				
				$(102S - S + 50 + 102S - 102 * 750 - S + 800) \cdot 2$	
					$16 + 102S - 102 * 750 = 1472$
ОТВЕТ:		1200 т.р.			



18

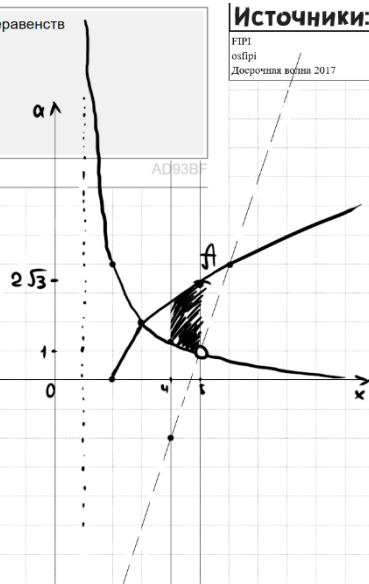
Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a(x-1) \geq 4, \\ 2\sqrt{x-2} \geq a, \\ 3x < a+14 \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq \frac{4}{x-1} \\ a \leq 2\sqrt{x-2} \\ a > 3x-14 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

Найдём координаты точки A :

$$\begin{aligned} a &= 2\sqrt{x-2} & x &= 5 \\ a &= 2\sqrt{5-2} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



Источники:

ГПР
осіпрі
Досрочна волна 2017

ОТВЕТ:

$(1; 2\sqrt{3}]$.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

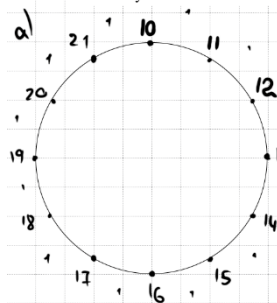
19

По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

- а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
 б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
 в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Источники:

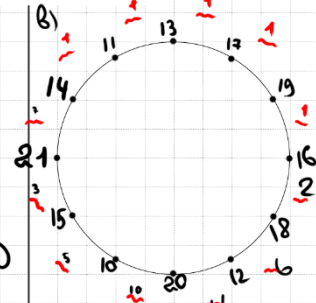
Яценко 2018 (20 вар)
Семёнов 2015
Статград 2015



а) Должно быть 12 разных НОД

10-наибольший возможный НОД (для 10 и 20)

=> 12 разных НОД не наберётся



$k \leq 8$ (если поставим все простые рядом)
Пример привасти привасти для $k=8$.

12 16 18
2 4 6

ОТВЕТ:

а) Да, пример привасти
 б) нет
 в) 8

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – некая оценка в пункте в;	1
– пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.