

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ Профильный
уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровня сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

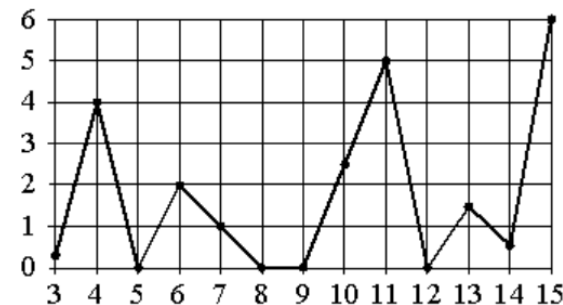
Часть 1

- 1** В доме, в котором живёт Катя, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже в каждом подъезде находится по три квартиры. Катя живёт в квартире

61. В каком подъезде живёт Катя?

Ответ: _____.

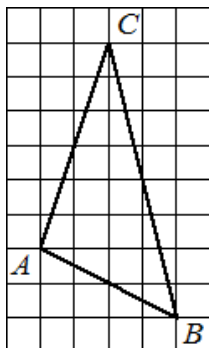
- 2** На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из



Ответ: _____.



- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C .



Ответ: _____.

- 4 В классе 16 учащихся, среди них два друга – Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

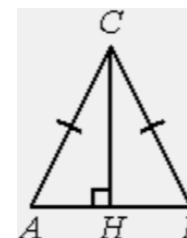
Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{3x-1} = 5.$$

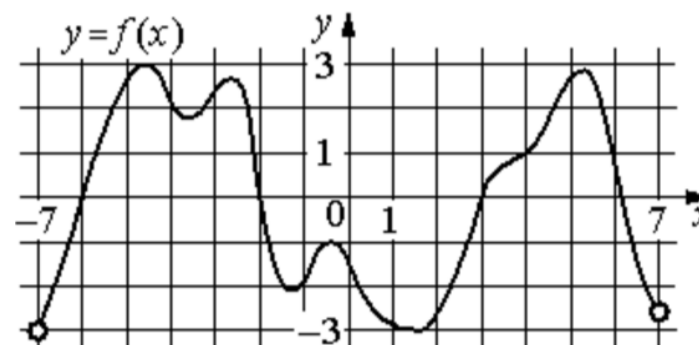
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 19,2, $\cos A = \frac{7}{25}$. Найдите AC .



Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ: _____.



- 8 Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 48, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите

$$\operatorname{tg} \alpha, \text{ если } \sin \alpha = -\frac{4\sqrt{41}}{41} \text{ и } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right).$$

Ответ: _____.

- 10 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 170$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 12$ м/с и $v = 6$ м/с – скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 180 Гц?

Ответ: _____.

- 11 Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 200 км – со скоростью 100 км/ч, а затем 160 км – со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции

$$y = 33x - 30 \sin x + 29 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right].$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.



Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение

$$2 \cos 2x = 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 1.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right].$$

- 14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

- а) Докажите, что высоты треугольников ABD и $A_1 BD$, проведённые к стороне BD , имеют общее основание.
б) Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1 DB$.

- 15 Решите неравенство
- $$\frac{3}{2^{2-x^2}-1} - \frac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \geq 0.$$

- 16 В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если $R = 5$ и $CD = 15$.

- 17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 545 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 40% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
- $$\frac{3}{x+1} = a|x-5|$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет более двух

- 19 корней.

В ряд выписаны квадраты всех натуральных чисел, начиная с 1. Каждое число заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

- а) Найдите 15-е число получившейся последовательности.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	3
2	4
3	7
4	0,2
5	0,4
6	20
7	8
8	12
9	0,8
10	312
11	90
12	29
13	а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{4\pi}{3}$
14	$\operatorname{arctg}\left(\frac{37}{20}\right)$
15	$(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1] \cup \{0\} \cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$
16	40
17	1 029 000
18	$\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{5}\right]$
19	а) 9 б) 3112 в) 543 или 542



Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$2 \cos 2x = 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$.

а) $2 \cdot (2 \cos^2 x - 1) = 4 \cdot \cos x + 1$
 $4 \cos^2 x - 2 - 4 \cos x - 1 = 0$
 $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$
 Пусть $\cos x = t$
 $4t^2 - 4t - 3 = 0$
 $D = 16 + 48 = 64$
 $t = \frac{4 \pm 8}{8}$
 $t_1 = 1,5$
 $\cos x = 1,5$
 нет решений
 $t_2 = -\frac{1}{2}$
 $\cos x = -\frac{1}{2}$
 $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ОТВЕТ: а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{4\pi}{3}$

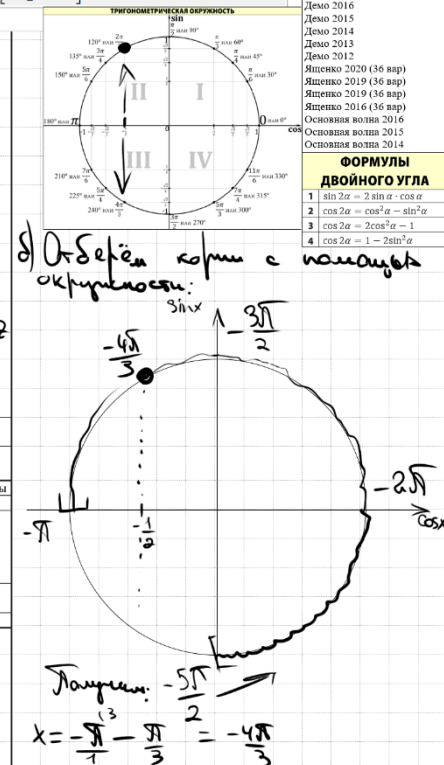
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Источники:

ГПР
осГР
Основная волна 2019
Демо 2018
Демо 2017
Демо 2016
Демо 2015
Демо 2014
Демо 2013
Демо 2012
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2016 (36 вар)
Основная волна 2016
Основная волна 2015
Основная волна 2014

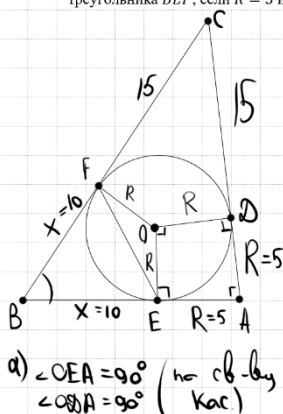
ФОРМУЛЫ
ДВОЙНОГО УГЛА

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$



- 16** В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если $R = 5$ и $CD = 15$.



$$AE = AD = R \text{ (по св. бы касат.)}$$

$\Rightarrow \triangle AOE - \text{прям. т. к. все стороны равны}$

$$\angle OAE + \angle ODE = 360 - 90 - 90 = 180$$

$$\Rightarrow \angle OAE = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle AOE - \text{квадрат}$
 $\Rightarrow \triangle ABC - \text{н. вып. т.}$

$$\delta) CF = CD = 15$$

$$\text{Пусть } BF = x = BE$$

②
 по т.
 Пт. Паралл.

$$(15+x)^2 = 20^2 + (5+x)^2$$

$$225 + 30x + x^2 = 400 + 25 + 10x + x^2$$

$$20x = 200$$

$$x = 10$$

$$\textcircled{3} \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\textcircled{4} \triangle BEF:$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40$$

Источники:

Гордиш #16 2019
 Семейнов 2015

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ



Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ



Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

ОТВЕТ:	40
Содержание критерия	
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	3

- 17** В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 545 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 40% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
- Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Пусть $S = 545 000$
 x - ежегодный платёж
 март - март платёж

Дата	Сумма долга
Июль 20	S
Янв 21	$1,4S$
М 21	$1,4S - x$
Янв 22	$1,4^2 S - 1,4x$
М 22	$1,4^2 S - 1,4x - x$
Янв 23	$1,4^3 S - 1,4^2 x - 1,4x$
М 23	$1,4^3 S - 1,4^2 x - 1,4x - x = 0$

$$1,4^3 S = 1,4^2 x + 1,4x + x$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^3 \cdot S = x \cdot \left(\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \frac{7}{5} + 1\right)$$

$$\frac{343}{125} \cdot S = x \cdot \frac{109}{25}$$

$$x = \frac{343 \cdot S \cdot 25}{125 \cdot 109} = \frac{343 \cdot 545000}{5 \cdot 109}$$

$$= 343000$$

$$3x = 3 \cdot 343000 = 1029000$$

ОТВЕТ:	1029 000
Содержание критерия	
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершённое, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь — вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокочастотен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общепонятен и достаточно ясен для того, чтобы попытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведён к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближённый к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).





В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.