

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

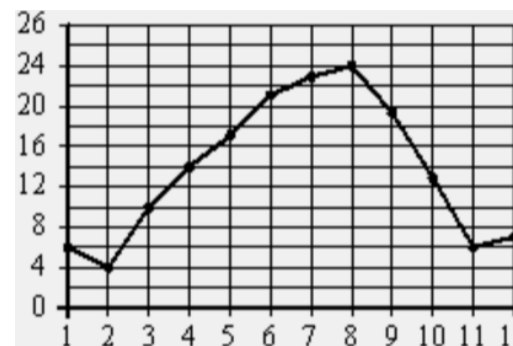
1

Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3300 рублей. До установки счётчиков за воду платили 800 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 400 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Ответ: _____.

2

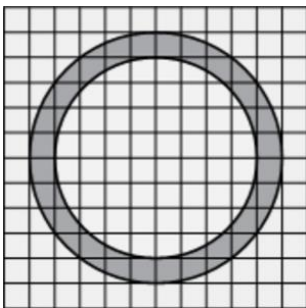
На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднемесячная температура в Сочи в 1920 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.



- 3 На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 48. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: _____.

- 4 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

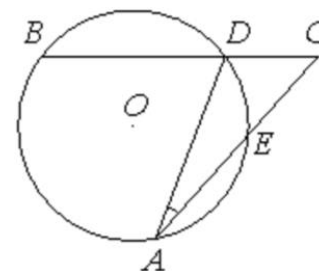
Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 8^x.$$

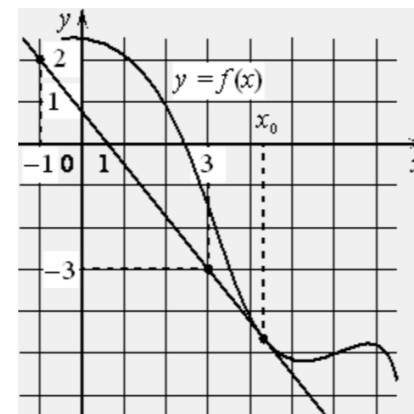
Ответ: _____.

- 6 Угол ACB равен 54° . Градусная мера дуги AB окружности, не содержащей точек D и E равна 138° . Найдите угол DAE . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

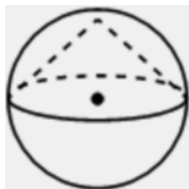
- 7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.



- 8 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Образующая конуса равна $50\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения

$$\frac{24}{\sin^2 127^\circ + 4 + \sin^2 217^\circ}$$

Ответ: _____.

- 10 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)^m}, \text{ где } m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1},$$

$r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,51.

Ответ: _____.

- 11 Первая труба наполняет резервуар на 13 минут дольше, чем вторая. Обе трубы, работая одновременно, наполняют этот же резервуар за 42 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = (2x - 1) \cos x - 2 \sin x + 5$ принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.



Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение

$$\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\sqrt{7} \sin x} = 0.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

- 14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q – середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке U .

- а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

- 15 Решите неравенство

$$\frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \leq \frac{1}{x - 5}.$$

- 16 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

- а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
б) Найдите BC , если $AH = 8\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

- 17 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

- 19 Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

- а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \dots; 199\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	9
2	24
3	27
4	0,16
5	1,5
6	15
7	-1,25
8	50
9	4,8
10	0,79
11	78
12	0,5
13	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{13\pi}{6}$
14	$5,5\sqrt{3}$
15	$[0; 2) \cup (2; 5)$
16	24
17	3
18	$(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$
19	а) нет б) да в) 2



Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

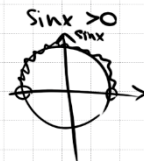
$$\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\sqrt{7} \sin x} = 0$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$

а)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) 2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \\ 2) \sqrt{7} \sin x > 0 \end{cases} \quad 1: \neq$$

2)



1)

$$\begin{aligned} 2 \cos x &= \sqrt{3} \\ \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x &= -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ОТВЕТ:

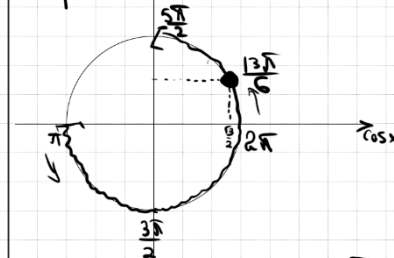
$$\begin{aligned} &а) \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ &б) \frac{13\pi}{6} \end{aligned}$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Источники:

Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Семёнов 2018
Ященко 2018

б) Ответём корни с помощью
окр. ун.

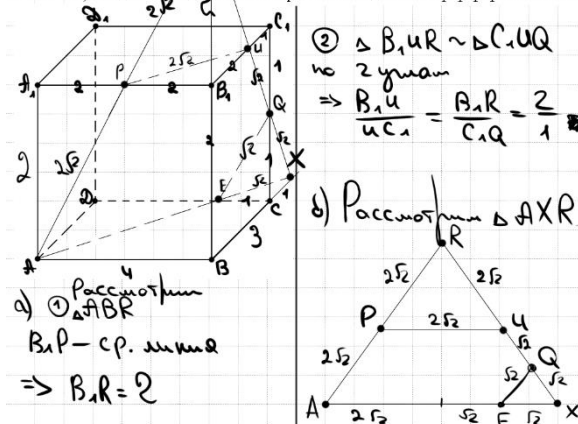


$$\text{Находим } x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$$

- 14** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины ребер $A_1 B_1$ и $C_1 C_1$ соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке R .

а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт б не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Источники:

Сергеев 2018
 Основная волна 2016

15

Задание с развернутым ответом

Решите неравенство $\frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \leq \frac{1}{x-5}$.

Номер: 5063

$$\frac{3^x \cdot (2^x - 4)}{2^x \cdot (x-5) - 4 \cdot (x-5)} - \frac{1}{x-5} \leq 0$$

$$\frac{3^x \cdot (2^x - 4) - (2^x - 4)}{(x-5) \cdot (2^x - 4)} \leq 0$$

$$\frac{(2^x - 4) \cdot (3^x - 1)}{(x-5) \cdot (2^x - 4)} \leq 0$$

$$\frac{(2^x - 2^2) \cdot (3^x - 3^0)}{(x-5) \cdot (2^x - 2^2)} \leq 0$$

$$\frac{(2-1) \cdot (x-2) \cdot (3-1) \cdot (x-0)}{(x-5) \cdot (2-1) \cdot (x-2)} \leq 0 \quad | :2$$

ОТВЕТ: $[0; 2) \cup (2; 5)$

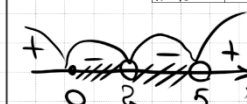
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек	1
ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».

Источники:

осбрі
 Досрочная волна 2018

Было	Стало
$\log_a f - \log_a g$	$\frac{(a-1)(f-g)}{(a-1)(f+g)}$
$a^f - a^g$	$\frac{(a-1)(f-g)}{(f+g)}$
$ f - g $	$\frac{(f-g)(f+g)}{(f+g)}$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$\frac{(f-g)}{(f+g)}$



18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-a)(3x+a) = 0 \\ (x+4)^2 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-a=0 \\ 3x+a=0 \\ (x+4-a)(x+4+a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{3} \\ x_2 = -\frac{a}{3} \\ x \neq a-4 \\ x \neq -a-4 \end{cases}$$

x_1 и x_2 должны быть
различны
 $\Rightarrow \frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3}$
 $\frac{2a}{3} \neq 0$
 $a \neq 0$

x_1 не должен быть равен
 $\frac{a-4}{3}$
 $\frac{a}{3} \neq \frac{a-4}{3}$
 $\frac{a}{3} \neq \frac{a-4}{3}$
 $a \neq a-4$
 $a \neq -3a-12$
 $a \neq -3a-12$

$$\begin{cases} 2a \neq 12 \\ 4a \neq -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 6 \\ a \neq -3 \end{cases}$$

x_2 не должен быть
равен $\frac{a-4}{3}$
 $-\frac{a}{3} \neq \frac{a-4}{3}$
 $-\frac{a}{3} \neq \frac{a-4}{3}$
 $-a \neq a-4$
 $-a \neq a-4$

$$\begin{cases} -a \neq a-4 & 1:3 \\ -\frac{a}{3} \neq -a-4 & 1:3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a \neq 3a-12 \\ -a \neq -3a-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq -6 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(-\infty; -6) \cup (-3; 3) \cup (6; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получение правильного ответа	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Источники:

Досрочная волна 2020

19

Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \dots; 199\}$ хорошим?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

а) В данном множестве много простых чисел, например $\{199; \dots\}$
не кратны 199
не кратны 199
 $\Rightarrow$ не является

$$\{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{198}, 2^{199}, 2^{200}\}$$

100 чисел
(50 пар по 2^{201})
 $\Rightarrow$ является

б) 5, 7 и 11 — простые числа, которых нет среди множителей данных чисел
Получаем $\{1; 3; 4; 6; 9; 12\}$

$$\{2^2, 2^{199}, 2^4, 2^{197}, 2^{98}, 2^{199}, 2^{100}, 2^{100}\}$$

100 чисел
(50 пар по 2^{201})
 $\Rightarrow$ является

ОТВЕТ:	а) нет б) да в) 2
Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а); — обоснованное решение пункта б); — исковая оценка в пункте в); — пример в пункте в), обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

$\{1; 3\}$ $1 \cdot 3 = 3$	$\{3; 4\}$ $3 \cdot 4 = 12$
$\{1; 4\}$ $1 \cdot 4 = 4$	$\{3; 6\}$ $3 \cdot 6 = 18$
$\{1; 6\}$ $1 \cdot 6 = 6$	$\{3; 9\}$ $3 \cdot 9 = 27$
$\{1; 9\}$ $1 \cdot 9 = 9$	$\{3; 12\}$ $3 \cdot 12 = 36$
$\{1; 12\}$ $1 \cdot 12 = 12$	$\{4; 9\}$ $4 \cdot 9 = 36$
$\{3; 4\}$ $3 \cdot 4 = 12$	$\{3; 4; 9; 12\}$ $3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 12 = 1296$
$\{3; 6\}$ $3 \cdot 6 = 18$	$\{6; 9\}$ $6 \cdot 9 = 54$
$\{4; 9\}$ $4 \cdot 9 = 36$	$\{6; 12\}$ $6 \cdot 12 = 72$
$\{4; 12\}$ $4 \cdot 12 = 48$	$\{9; 12\}$ $9 \cdot 12 = 108$





В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.