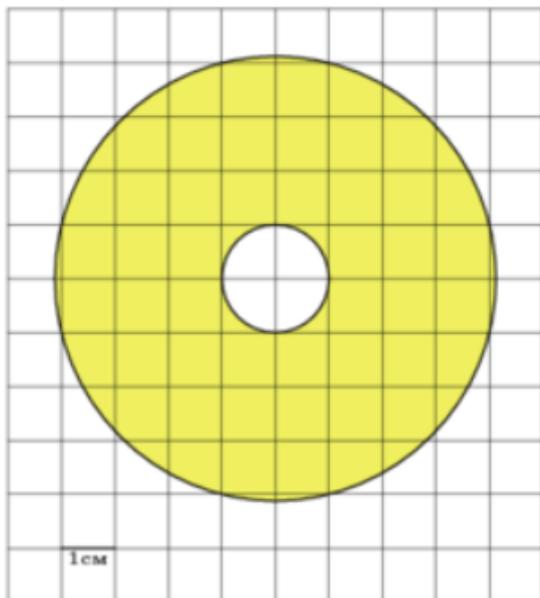


- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображено кольцо. Найдите его площадь. В ответе запишите площадь, делённую на π . Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

- 4 Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25% этих стекол, вторая – 75%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стекол, а вторая – 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: _____.

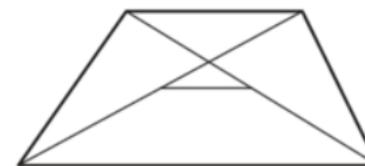
- 5 Найдите корень уравнения

$$\cos \frac{\pi(x - 7)}{3} = \frac{1}{2}.$$

В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

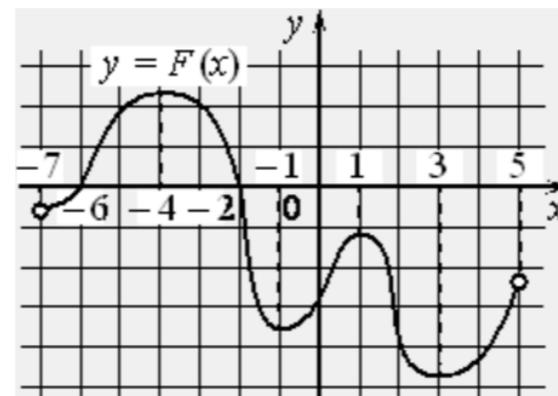
Ответ: _____.

- 6 Основания трапеции равны 27 и 83. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



Ответ: _____.

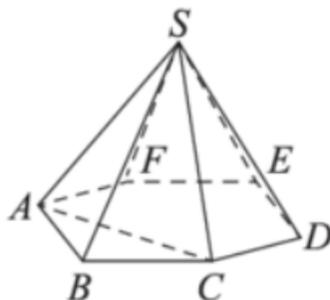
- 7 На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 2]$.



Ответ: _____.



- 8 Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите

$$\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}, \text{ если } p(b) = \left(b + \frac{3}{b}\right)\left(3b + \frac{1}{b}\right). \text{ При } b \neq 0.$$

Ответ: _____.

- 10 На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ — постоянная, r — радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ Н/кг}$). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 42000 Н? Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____.

- 11 Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 4 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 39x + 39) \cdot e^{2-x}$ на отрезке $[0; 6]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.



Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

14 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 5, а боковое ребро равно 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и $C_1 D_1$ перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C , A_1 и F_1 .

15 Решите неравенство

$$2x \geq \log_2 \left(\frac{35}{3} \cdot 6^{x-1} - 2 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} \right).$$

16 В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M .

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = 2(2x + y), \\ a^2 + ax + 2ay = 5 \end{cases}$$

имеет решение.

19 С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трёхзначного числа?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.





**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	660
2	30
3	16
4	0,025
5	-4
6	28
7	3
8	6
9	1
10	1
11	28
12	-35
13	а) $4, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{2\pi}{3}$
14	105
15	$(-\infty; -1] \cup \left[2; \log_{1,5} \frac{35}{12}\right)$
16	$3\sqrt{2}$
17	$n = 4; m = 1$
18	-5; 1
19	а) 2847 б) нет в) 9167169

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

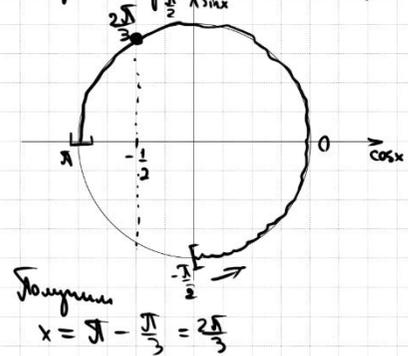
$$2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$

Источники:
Основная волна (Резерв) 2017

а) $2 \cos x \cdot (x-4) + (x-4) = 0$
 $(x-4) \cdot (2 \cos x + 1) = 0$
 $x=4$
 $\cos x = -\frac{1}{2}$
 $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $4 > \pi$
 $\Rightarrow 4 \notin [-\frac{\pi}{2}; \pi]$
 Отберём корни с помощью кр-ти:

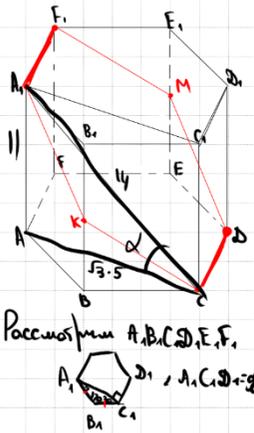


ОТВЕТ: а) $4, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $\frac{4\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обосновано получен верный ответ в пункте а ИЛИ	1
получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

14 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 5, а боковое ребра равны 11.

- а) Докажите, что прямые CA_1 и $C_1 D_1$ перпендикулярны.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C , A_1 и F_1 .



$A_1 C_1$ - проекция $A_1 C$ на верхн. осн
 $A_1 C_1 \perp C_1 D_1$
 $\Rightarrow A_1 C \perp C_1 D_1$ по 3ТП

б) $S_{сеч} = \frac{S_{ABCDEF}}{\cos \angle A C A_1}$

$A_1 C = \sqrt{11^2 + 5^2} = 14$

$\cos \alpha = \frac{5}{14}$

$S_{сеч} = \frac{35 \cdot 25}{2}$

$S_{сеч} = \frac{35 \cdot 25 \cdot 14}{2 \cdot 5} = 105$

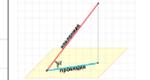
а) Рассмотрим $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$,
 $A_1 C_1 \perp C_1 D_1$

ОТВЕТ: 105

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

Источники:

Ященко 2018 (36 вар)
 УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ (СПОСОБ #2)



Находим угол между плоскостью сечения и плоскостью основания

$\cos \alpha = \frac{\text{проекция наклонной}}{\text{наклонная}}$

$\cos \alpha = \frac{\text{Сторона основания}}{\text{Сечение}}$

ДИАГОНАЛИ РАВНОСТОРОННЕГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА



ПЛОЩАДЬ РАВНОСТОРОННЕГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА

$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

15 Решите неравенство

$2x \geq \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{35}{3} \cdot 6^{x-1} - 2 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} \right)$

$\log_{\frac{3}{2}} 2^x \geq \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{35}{3} \cdot 6^{x-1} - 2 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} \right)$

① $2^x \geq \frac{35}{3} \cdot 6^{x-1} - 2 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}}$
 $\frac{35}{3} \cdot 6^{x-1} - 2 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} > 0$

② $4^x - \frac{35}{3} \cdot \frac{6^x}{6} + \frac{2 \cdot 9^x}{3} \geq 0$

$18 \cdot 35 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x > 0$

$35 - 12 \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$

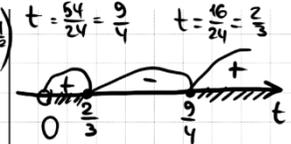
$35 > 12t$

$0 < t < \frac{35}{12}$

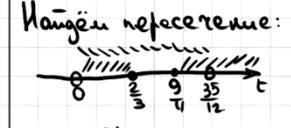
$12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 35 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 18 \geq 0$

$12t^2 - 35t + 18 \geq 0$

$25 - 12 \cdot 25 - 864 = 361 = 19^2$



② $\frac{35}{18} \cdot 6^x - \frac{2}{3} \cdot 9^x > 0$ | $\cdot 18$
 $35 \cdot 6^x - 12 \cdot 9^x > 0$ | $\cdot 6^x$
 $35 - 12 \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$
 $35 > 12t$
 $0 < t < \frac{35}{12}$



Найдём пересечение:

ОТВЕТ: $(-\infty; -1] \cup [2; \log_{1,5} \frac{35}{12})$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек	1
ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «>» вместо «<», или наоборот. Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$a^{\log_a b} = b$

Источники:

Ященко 2020 (14 вар)
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2020 (50 вар)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

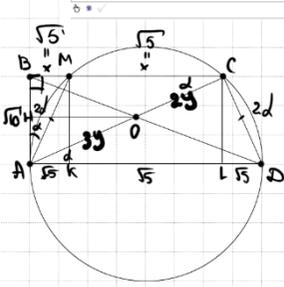
$\log_{2^x} 2^x = 2^x$
 $(2^x)^x = 4^x$

$0 < \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \frac{2}{3}$
 $\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$
 $x \leq -1$

$\frac{9}{4} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{35}{12}$
 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{35}{12}$
 $2 \leq x < \log_{1,5} \frac{35}{12}$



16 В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M .
 а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
 б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.



① Пусть $\angle CAD = d$
 Тогда $\angle C = 2d$

② $AM = CD$ (т.к. трапеция, впис. в окр. - р/б)
 $\Rightarrow AM = 2d$

③ $\angle BAM = \frac{1}{2} \angle AM$
 (угол между кас. и хордой)
 $\Rightarrow \angle BAM = d = \angle CAD$

④ $\triangle AOM \sim \triangle ABC$
 $k = \frac{2}{5}$
 $OM = \frac{2}{5} BC$
 $= \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

⑤ $\triangle AOB \sim \triangle COD$ по 2 углам
 $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{AO}{CO}$

⑥ $AC = \sqrt{10^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{130}$

⑦ $AB - \text{кас.}$
 $BC - \text{сек.}$
 $\sqrt{10}^2 = x \cdot 2x$
 $2x^2 = 10$
 $x = \sqrt{5}$

Источники:

ФИПИ
 сборник
 Основная волна 2017

УГОЛ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ХОРДОЙ

$\alpha = \frac{AB}{2}$

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ И СЕКУЩЕЙ

$AD^2 = AB \cdot AC$

$\sqrt{10} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

ОТВЕТ: $3\sqrt{2}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

Дата	Сумма средств	Дата	Сумма средств
1 янв 21	10 млн	1 янв 21	10
31 дек 21	$1,15 \cdot 10 + n$	31 дек 21	$11,5 + 4 = 15,5$
31 дек 22	$1,15^2 \cdot 10 + 1,15n + n \geq 20$	31 дек 22	$12,825 + 4 = 17,825$
	$2,15n \geq 20 - 13,225$	31 дек 23	$21,825 \cdot 1,15 + m$
	$2,15n \geq 6,775$	31 дек 23	$21,825 \cdot 1,15^2 + 1,15m + m \geq 30$
	$n \geq 3,15$		$2,15m \geq 30 - 28,8635625$
	$\Rightarrow n_{\text{мин}} = 4$		$m \geq \frac{1,1364375}{2,15}$
	Учитывая, что $n = 4$		$m \geq 0,52...$
			$\Rightarrow m_{\text{мин}} = 1$

Источники:

Яценко 2020 (36 впр)
 Сельцов 2018
 СтатГрад 2018
 СтатГрад 2017
 Дюрачная волна 2016

ОТВЕТ: $n = 4 ; m = 1$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершённое, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь — вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы попытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

