Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

Тюмень,
17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Числа $b > 0$ и a таковы, что квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных корня, ровно один из которых лежит на отрезке $[-1; 1]$. Докажите, что ровно один из этих корней лежит в интервале $(-b; b)$. (*А. Храбров*)

Первое решение. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$. Если ровно один корень лежит на отрезке $[-1, 1]$, то трёхчлен меняет знак на этом отрезке, то есть

$$(1 + a + b)(1 - a + b) = f(1)f(-1) \leqslant 0.$$

Тогда

$0 \geqslant b^2(1+a+b)(1-a+b) = (b^2+ab+b)(b^2-ab+b) = f(b)f(-b)$. Следовательно, на отрезке $[-b, b]$ есть корень, причем, если знак полученного неравенства строгий, то корень ровно один (и он не в конце отрезка). В случае равенства один из корней равен $\pm b$, а второй ± 1, причем $b > 1$ (иначе на отрезке $[-1, 1]$ будет два корня). Тогда на интервале $(-b, b)$ лежит ровно один корень.

Второе решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного трёхчлена, причём $|x_1| \leqslant 1$ и $|x_2| > 1$. По теореме Виета имеем $|x_1| \cdot |x_2| = b$. Тогда $|x_2| = b/|x_1| \geqslant b/1 = b$ и $|x_1| = b/|x_2| < b$. Итак, из двух корней только x_1 лежит в интервале $(-b; b)$.

9.6. Внутри неравнобедренного остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle ABC = 60^\circ$, отмечена точка T так, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120^\circ$. Медианы треугольника пересекаются в точке M. Прямая TM пересекает вторично окружность, описанную около треугольника ATC, в точке K. Найдите TM/MK. (*А. Кузнецов*)

Ответ. 1/2.

Первое решение. Пусть O — центр описанной окружности Ω треугольника ABC. Поскольку $\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$, точка O лежит на описанной окружности γ треугольника ATC. Пусть прямая BT вторично пересекает окружность γ в точке X, а окружность Ω — в точке P. Поскольку $\angle ATX = \angle CTX = 60^\circ$, точка X лежит на серединном перпендикуляре к AC, поэтому

OX — диаметр γ. Значит, $BT \perp OT$, то есть T — середина хорды BP окружности Ω.

Наконец, пусть точка K' симметрична точке P относительно точки S — середины стороны AC. Поскольку $\angle AK'C = \angle APC = 120^\circ$, точка K' лежит на γ. Точка M лежит на медиане BS треугольника BPK' из вершины B и делит её в отношении $2:1$, считая от точки B; поэтому M — точка пересечения медиан треугольника BPK'. Значит, M лежит и на медиане $K'T$, поэтому $K' = K$ и $KM : MT = 2 : 1$.

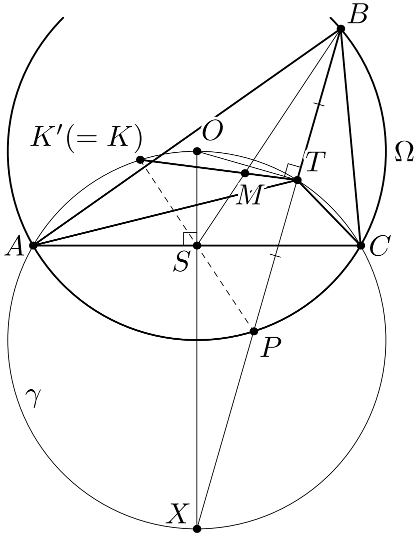

Рис. 1

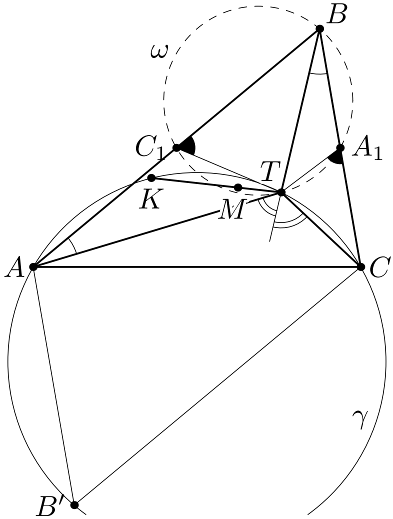

Рис. 2

Второе решение. Пусть AA_1 и CC_1 — медианы в треугольнике ABC. Поскольку $\angle TBC = 60^\circ - \angle TBA = \angle TAB$, треугольники ATB и BTC подобны. Тогда $\angle BC_1T = \angle TA_1C$ как соответственные углы (между стороной и медианой). Значит, точки C_1, A_1, B и T лежат на одной окружности ω.

Рассмотрим гомотетию с центром в точке M и коэффициентом -2. Эта гомотетия переводит треугольник A_1BC_1 в треугольник $AB'C$, где B' — четвёртая вершина параллелограмма $ABCB'$. Поскольку $\angle AB'C = 60^\circ = 180^\circ - \angle ATC$, точка B' лежит на описанной окружности γ треугольника ATC. Значит.

при нашей гомотетии окружность ω переходит в γ, поэтому точка T переходит в точку K, и $TM/MK = 1/2$.

Третье решение. Пусть O и Q — центры описанных окружностей Ω и γ треугольников ABC и ATC соответственно, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Поскольку $\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$ и $\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$, точки O и H лежат на γ. Поскольку $\angle AQC = 360^\circ - 2\angle ATC = 120^\circ$, точка Q лежит на Ω. Как и в первом решении, заметим, что прямая BT вторично пересекает γ в точке X, диаметрально противоположной точке O.

Заметим, что $OQ \parallel BH$ и $BO = OQ = QH$. Поскольку $\angle QHB > 90^\circ > \angle OBH$, из этого следует, что $BOQH$ — ромб. Тогда $BH = OQ = OX/2$.

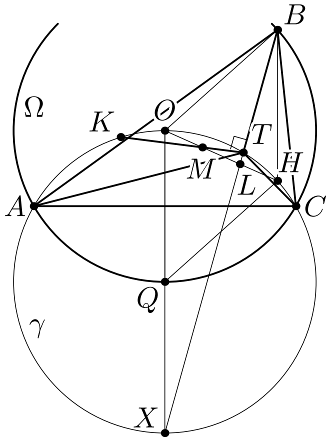

Рис. 3

Пусть BX пересекает OH в точке L; треугольники OLX и HLB подобны с коэффициентом $OX/BH = 2$. Поэтому $HL = HO/3$. Напомним, что точка H переходит в точку O при гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/2$, так что $OM = OH/3$, то есть $OM = ML = LH$.

Значит, TM — медиана в прямоугольном треугольнике OTL, поэтому $TM = MO$. Значит, подобные треугольники OMK и TMH равны, поэтому $MK = MH = 2OM = 2TM$. Отсюда и вытекает ответ.

Замечание. Из последнего решения видно, что $OTHK$ — равнобокая трапеция.

9.7. Натуральные числа $n > 20$ и $k > 1$ таковы, что n делится на k^2. Докажите, что найдутся натуральные числа a, b и c такие, что $n = ab + bc + ca$. *(А. Храбров)*

Решение. Заметим, что из равенства $n + a^2 = (a + b)(a + c)$ следует равенство $n = ab + bc + ca$. Поэтому для решения задачи достаточно найти такое натуральное a, что число $n + a^2$ раскладывается в произведение двух натуральных чисел x

и y, больших a (тогда можно положить $b = x - a$ и $c = y - a$). Согласно условию, $n = \ell p^2$ для некоторых простого p и натурального ℓ.

Если $\ell + 1 > p$, то в силу разложения $n + p^2 = (\ell + 1) \cdot p^2$ в качестве a можно взять число p. Также, если число $\ell + 1$ — составное, то $\ell + 1 = st$ при $s, t > 1$; тогда снова можно положить $a = p$, так как $n + p^2 = (\ell + 1)p^2 = sp \cdot tp$.

В оставшемся случае имеем $n = (q - 1)p^2$ при некоторых простом $q \leqslant p$. Если $p > q$, то $p = mq + r$ при некотором положительном $r < q$ и натуральном m. Тогда число

$$n + r^2 = (q - 1)(r + mq)^2 + r^2 = q(p + mq)^2 - mq(2r + mq)$$

делится на q, а частное от деления больше r, поскольку $n = (q - 1)p^2 > 1 \cdot q \cdot r$. Поэтому можно положить $a = r$.

Наконец, если $p = q$, то $n = p^3 - p^2$, причём $p \geqslant 5$ по условию. Тогда $n + 6^2 = p^3 - p^2 + 36 = (p + 3)(p^2 - 4p + 12)$, где обе скобки больше 6; в этом случае работает $a = 6$.

Замечание. Несложно показать, что в виде $ab + bc + ca$ можно представить все натуральные числа n, для которых число $n + 1$ составное, — в частности, все нечетные числа, отличные от 1. С помощью этого наблюдения и калькулятора несложно найти первые 18 чисел, не представимых в виде $ab + bc + ca$ (все они меньше пятисот). В статье Борвейна и Чоя утверждается, что количество чисел, не представимых в виде $ab + bc + ca$, не более 19, и существование девятнадцатого такого числа противоречило бы обобщенной гипотезе Римана (которая в настоящий момент не является ни доказанной, ни опровергнутой).

9.8. Сотне мудрецов предложили следующее испытание. Их по очереди (в заранее известном порядке) приводят в зал. В зале смотритель предлагает мудрецу на выбор каких-то два различных числа из набора $1, 2, 3$. Мудрец выбирает ровно одно из них, сообщает выбранное число смотрителю и уходит из зала. При этом до своего выбора мудрец имеет право узнать у смотрителя, какое из чисел выбрал каждый из двух предыдущих мудрецов (второй мудрец имеет право узнать про первого). Во время испытания любое общение между мудрецами запрещено. Если в конце сумма всех 100 чисел, выбранных мудрецами, окажется равной 200, то мудрецы провалили испытание; иначе они его выдержали. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о своих действиях так, чтобы гарантированно выдержать испытание. (*С. Берлов*)

Решение. Приведём одну из возможных договорённостей. Каждый мудрец будет пользоваться одной из двух стратегий: либо выбирать из двух предложенных чисел нечётное (*стратегия Н*), либо выбирать из двух чисел большее (*стратегия Б*). Выбирать их они будут так:

(1) Первый мудрец действует по стратегии Б. Второй мудрец действует по стратегии Н, если первый выбрал тройку, иначе он использует стратегию Б.

($*$) k-й мудрец, при $3 \leqslant k \leqslant 99$, действует по стратегии Н, если $(k-1)$-й мудрец выбрал тройку, а $(k-2)$-й — не тройку; иначе он использует стратегию Б.

(100) Сотый мудрец действует по стратегии Б, если 99-й выбрал тройку, а иначе — по стратегии Н.

Проанализируем, что произойдёт к моменту захода сотого мудреца. Выпишем в ряд 99 выбранных к этому моменту чисел в порядке их выбора; пусть S — их сумма. Если в ряду записана единица, то она была выписана по стратегии Н, поэтому прямо перед неё записана тройка, а прямо перед этой тройкой не может стоять другой тройки. Выделим в выписанном ряду эти тройку и единицу. Выделенные пары не пересекаются, сумма в каждой из них равна 4. Все остальные числа в ряду — либо двойки, либо тройки.

Далее, если среди невыделенных чисел есть тройка, рассмотрим первую такую тройку. Либо она стоит в конце ряда (то есть её выбрал 99-й мудрец), либо после неё не может стоять ни единица (иначе она выделена), ни двойка (по алгоритму ($*$)). Поэтому после нашей тройки может стоять лишь тройка, и она тоже не выделена.

Итак, либо все невыделенные числа — двойки (и $S = 198$), либо среди них ровно одна тройка — последняя (и $S = 199$), либо невыделенных троек хотя бы две (и $S \geqslant 200$). В последнем случае мудрецы уже выдержали испытание, ибо после хода последнего мудреца сумма превысит 200.

Иначе мы получаем, что $S = 198$, если 99-й мудрец не назвал 3, и $S = 199$, если назвал. Согласно (100), в первом случае сумма 100 выбранных чисел будет нечётной, а во втором она будет больше 200. Значит, и в этих случаях испытание пройдено.

10 класс

10.5. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что учительница сможет победить. (*М. Дидин, А. Кузнецов*)

Решение. Учительница выберет квадрат K размера $100 \times \times 100$ и будет закрашивать отрезки его границы, если это возможно. Пусть перед n-м её ходом все эти отрезки закрашены. Тогда $n \leqslant 401$, поскольку всего на границе 400 отрезков. К этому моменту всего закрашено не более чем $30 \cdot 400$ отрезков, поэтому хотя бы один отрезок внутри квадрата K не закрашен. Каждым следующим ходом учительница будет закрашивать один из отрезков внутри K. Спустя несколько ходов все отрезки внутри K будут закрашены. Тогда перед ходом игрока, который закрасит последний из таких отрезков, найдется искомый прямоугольник 1×2, и учительница победит.

10.6. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение $P(P(P(x))) = P(x)$ имеет ровно n^3 различных вещественных корней. Докажите, что эти n^3 корней можно разбить на две группы с равными средними арифметическими. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что $P(P(P(t))) = P(t)$ в том и только в том случае, когда $P(t)$ — корень многочлена $P(P(x)) - x$. В частности, у этого многочлена есть корни, обозначим их $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Поскольку $n > 1$, то степень многочлена $P(P(x)) - x$ равна n^2, поэтому $k \leqslant n^2$. Таким образом, все корни уравнения $P(P(P(x))) = P(x)$ — в точности корни многочленов $P(x) - x_1, P(x) - x_2, \ldots, P(x) - x_k$. Все эти многочлены — степени n, поэтому у каждого из них не более n корней. Итого, уравнение $P(P(P(x))) = P(x)$ имеет не более kn корней, но по условию их n^3. Это возможно лишь в случае, когда каждый из многочленов $P(x)-x_1, P(x)-x_2, \ldots, P(x)-x_k$ имеет n различных вещественных корней и $k=n^2$. У этих многочленов коэффициенты при x^n одинаковы и коэффициенты при x^{n-1} одинаковы. Тогда по теореме Виета суммы их корней равны. Следовательно, если корни первого многочлена определить в одну группу, а корни остальных — в другую, то все корни уравнения $P(P(P(x)))=P(x)$ разобьются на две группы с равными средними арифметическими.

10.7. Натуральные числа $n>20$ и $k>1$ таковы, что n делится на k^2. Докажите, что найдутся натуральные a, b и c такие, что $n=ab+bc+ca$. (*А. Храбров*)

Решение. Заметим, что из равенства $n+a^2=(a+b)(a+c)$ следует равенство $n=ab+bc+ca$. Поэтому для решения задачи достаточно найти такое натуральное a, что число $n+a^2$ раскладывается в произведение двух натуральных чисел x и y, больших a (тогда можно положить $b=x-a$ и $c=y-a$). Согласно условию, $n=\ell p^2$ для некоторых простого p и натурального ℓ.

Если $\ell+1>p$, то в силу разложения $n+p^2=(\ell+1)\cdot p^2$ в качестве a можно взять число p. Также, если число $\ell+1$ — составное, то $\ell+1=st$ при $s,t>1$; тогда снова можно положить $a=p$, так как $n+p^2=(\ell+1)p^2=sp\cdot tp$.

В оставшемся случае имеем $n=(q-1)p^2$ при некоторых простом $q\leqslant p$. Если $p>q$, то $p=mq+r$ при некотором положительном $r<q$ и натуральном m. Тогда число

$$n+r^2=(q-1)(r+mq)^2+r^2=q(p+mq)^2-mq(2r+mq)$$

делится на q, а частное от деления больше r, поскольку $n=(q-1)p^2>1\cdot q\cdot r$. Поэтому можно положить $a=r$.

Наконец, если $p=q$, то $n=p^3-p^2$, причём $p\geqslant 5$ по условию. Тогда $n+6^2=p^3-p^2+36=(p+3)(p^2-4p+12)$, где обе скобки больше 6; в этом случае работает $a=6$.

Замечание. Несложно показать, что в виде $ab+bc+ca$ можно представить все натуральные числа n, для которых число $n+1$ составное, — в частности, все нечетные числа, отличные от 1. С помощью этого наблюдения и калькулятора несложно найти первые 18 чисел, не представимых в виде $ab+bc+ca$ (все они меньше пятисот). В статье Борвейна и Чоя утверждается, что количество чисел, не представимых в виде $ab+bc+ca$, не более 19, и существование девятнадцатого такого числа противоречило бы обобщенной гипотезе Римана (которая в настоящий момент не является ни доказанной, ни опровергнутой).

10.8. В окружность ω вписан пятиугольник $ABCDE$. Прямая CD пересекает лучи AB и AE в точках X и Y соответственно. Отрезки EX и BY пересекаются в точке P и вторично пересекают окружность ω в точках Q и R. Точка A' симметрична точке A относительно прямой CD. Окружность γ, описанная около треугольника PQR, пересекает окружность, описанную около треугольника $A'XY$, в двух точках. Докажите, что их можно назвать M и N так, чтобы прямые CM и DN пересекались на окружности γ. (*М. Дидин, А. Кузнецов*)

Решение. Заметим, что точка P лежит внутри окружности (QDR), и четырехугольник $PQDR$ — выпуклый. Значит, точка D лежит внутри окружности (PQR). При этом точка Y лежит вне окружности (PQR). Следовательно, окружность (PQR) вторично пересекает окружность (DRY) в некоторой точке N_1, которая лежит на дуге DY, не содержащей точку R. В частности, N_1 лежит в другой полуплоскости от прямой CD, нежели точка A.

Заметим, что $\angle N_1QP = \angle N_1RY = \angle N_1DY$. Следовательно, $\angle XQN_1 = \angle XDN_1$, поэтому точка N_1 лежит на окружности (XQD). Кроме того, $\angle XN_1Y = \angle XN_1D + \angle DN_1Y = \angle PQD + \angle DRP = \angle EAD + \angle DAB = \angle YAX = \angle XA'Y$. Второе равенство следует из вписанности четырехугольников $XQDN_1$ и $YRDN_1$, третье — из равенств вписанных углов в окружности (ABC), а последнее выполнено, поскольку точки A и A' симметричны относительно XY. Таким образом, $\angle XN_1Y = \angle XA'Y$, поэтому точка N_1 лежит на окружности $(A'XY)$

Пусть M_1 — вторая точка пересечения окружностей (PQR) и (XQC). Рассуждая аналогично, мы получаем, что M_1 лежит на окружностях (CRY) и $(A'XY)$ и в другой полуплоскости относительно CD, нежели A. Отметим, что $M_1 \neq N_1$. Иначе точка N_1 лежала бы и на окружности (CRY), и на окружности

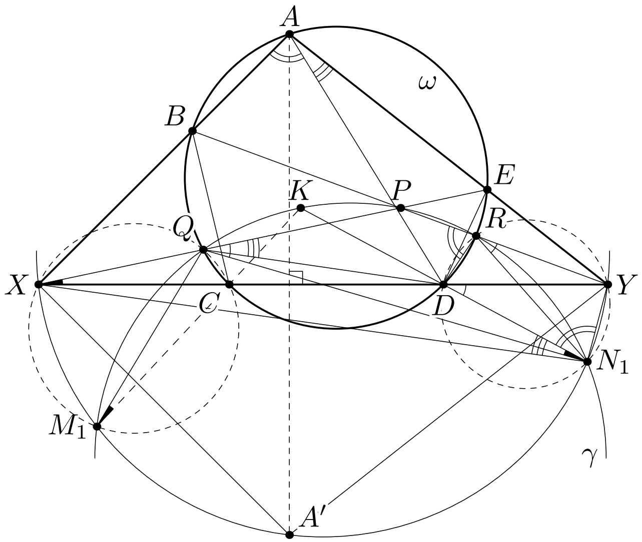

Рис. 4

(DRY) что невозможно. Таким образом, M_1 и N_1 — две точки пересечения окружностей (PQR) и $(A'XY)$.

Назовем $M = M_1$, $N = N_1$. Пусть прямая DN вторично пересекает γ в точке K. Тогда $\angle QMK = \angle QNK = \angle QND = \angle QXD = \angle QMC$, откуда следует, что точки M, C, K лежат на одной прямой. Значит, прямые CM и DN пересекаются на окружности γ, что и требовалось.

11 класс

11.5. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Смогут ли ученики помешать учительнице победить?

(*М. Дидин, А. Кузнецов*)

Ответ. Не смогут.

Решение. Учительница выберет квадрат K размера $100 \times \times 100$ и будет закрашивать отрезки его границы, если это возможно. Пусть перед n-м её ходом все эти отрезки закрашены. Тогда $n \leqslant 401$, поскольку всего на границе 400 отрезков. К этому моменту всего закрашено не более чем $30 \cdot 400$ отрезков, поэтому хотя бы один отрезок внутри квадрата K не закрашен. Каждым следующим ходом учительница будет закрашивать один из отрезков внутри K. Спустя несколько ходов все отрезки внутри K будут закрашены. Тогда перед ходом игрока, который закрасит последний из таких отрезков, найдется искомый прямоугольник 1×2, и учительница победит.

11.6. В тетраэдре $SABC$ длины всех шести рёбер различны. Точка A' в плоскости SBC симметрична точке S относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC. Точка B' в плоскости SAC и точка C' в плоскости SAB определяются аналогично. Докажите, что плоскости $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ и ABC имеют общую точку. (*А. Кузнецов*)

Решение. Будем обозначать (XYZ) окружность, описанную около треугольника XYZ. Обозначим через ω описанную сферу тетраэдра $SABC$. Она пересекает плоскость SAB по окружности (SAB). Точка C' лежит на окружности (SAB), а потому и на сфере ω. Рассуждая аналогично, мы получаем, что точки A' и B' лежат на сфере ω. Тогда точки S, A', B', C' лежат на окружности, по которой сфера ω пересекает плоскость, проходящую через B параллельно плоскости ABC. Не умаляя общности можно считать, что они лежат на окружности именно в таком порядке, то есть четырехугольник $SA'B'C'$ — вписанный.

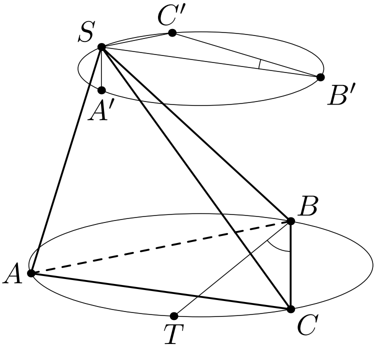

Рис. 5

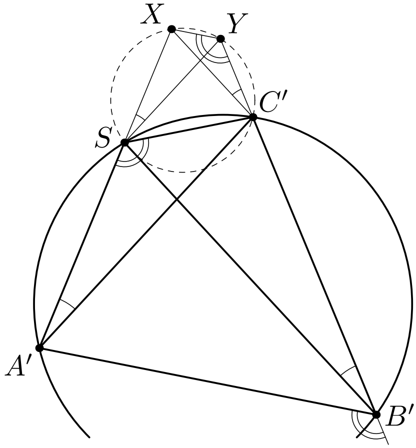

Рис. 6

Отметим на луче $A'S$ точку X, а на луче $B'C'$ — точку Y так, что $A'C' \parallel SY$ и $SB' \parallel C'X$. Тогда $\angle XC'Y = \angle SB'C' = \angle SA'C' = \angle XSY$, поэтому четырехугольник $XSC'Y$ тоже вписанный. Следовательно, $\angle C'YX = \angle A'SC' = 180^\circ - \angle A'B'C'$, поэтому $A'B' \parallel XY$. Заметим, что $SC' \parallel AB$, $SX \parallel BC$ и $XC' \parallel SB' \parallel AC$.

Таким образом, стороны треугольников ABC и $C'SX$ попарно параллельны. Кроме того, они лежат в параллельных плоскостях. Значит, если параллельно перенести треугольник $C'SX$ так, чтобы вершина C' попала в точку A, то полученный треугольник будет отличаться от треугольника ABC гомотетией, а сами треугольники ABC и $C'SX$ — подобны. При упомянутых выше преобразованиях точка Y перейдет в точку T на окружности (ABC), причем $TA \parallel YC'$, $TB \parallel YS$ и $TC \parallel YX$. А тогда $TA \parallel B'C'$, и точка T лежит в плоскости $AB'C'$; аналогично для плоскостей $BA'C'$ и $CA'B'$. А в плоскости ABC она лежит по построению, поэтому эти 4 плоскости имеют общую точку.

Замечание. После того, как мы доказали, что точки A', B', C' лежат на описанной сфере тетраэдра, можно закончить решение инверсией с центром в точке S (с радиусом 1). Обозначим через A^*, B^* и C^* образы точек A, B и C. Образ A'^* точки A' — точка пересечения касательной к окружности SB^*C^* в точке S с прямой B^*C^*, аналогичное верно для точек B'^* и C'^*. Несложно проверить, что эти три точки лежат на одной прямой, обозначим ее ℓ. Тогда окружности $(A'^*B'^*C^*)$, $(A'^*B^*C'^*)$, $(A^*B'^*C'^*)$ и $(A^*B^*C^*)$ проходят через одну точку — точку Микеля M четырехсторонника, образованного прямыми A^*B^*, B^*C^*, C^*A^* и ℓ. А это означает, что плоскости A_1B_1C, AB_1C_1, A_1BC_1 и ABC проходят через прообраз M.

11.7. Найдите все перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$ чисел $1, 2, \ldots, 2021$ такие, что при любых натуральных m, n, удовлетворяющих условию $|m-n| > 20^{21}$, выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{2021} \text{НОД}(m+i, n+a_i) < 2|m-n|.$$

(*Перестановка* $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$ — это последовательность, в которой каждое из чисел $1, 2, \ldots, 2021$ встречается ровно по одному разу.) (*П. Козлов*)

Ответ. Тождественная перестановка, то есть $a_i = i$.

Решение. Рассмотрим перестановку $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$, для которой выполняется условие задачи. Обозначим $d_i = i - a_i$. Очевидно, что сумма всех чисел d_i равна нулю. Пусть не все d_i равны 0, в таком случае существуют индексы j, k такие, что $d_j < 0, d_k > 0$. Возьмём $r = 20^{21}(d_k - d_j) - d_j + 1$, тогда $\text{НОД}(r + d_j, r + d_k) = \text{НОД}(r + d_j, d_k - d_j) = 1$. По китайской теореме об остатках существует целое $m > r$ такое, что $m + j$ кратно $r + d_j$ и $m + k$ кратно $r + d_k$. Тогда для пары натуральных чисел $(m, n) = (m, m - r)$, во-первых, выполняется $|m - n| = r > 20^{21}$, а во-вторых, верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{2021} \text{НОД}(m+i, n+a_i) \geqslant$$

$$\geqslant \text{НОД}(m+j, n+a_j) + \text{НОД}(m+k, n+a_k) + 2019 =$$
$$= \text{НОД}(m+j, -r-d_j) + \text{НОД}(m+k, -r-d_k) + 2019 =$$
$$= (r+d_j) + (r+d_k) + 2019 = 2r + d_j + d_k + 2019 \geqslant$$

$$\geqslant 2r - 2020 + 1 + 2019 = 2r = 2|m - n|,$$

что противоречит выбору перестановки. Следовательно, все d_i равны 0, и перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$ является тождественной, то есть $a_i = i$.

Лемма. *Пусть натуральные A, $\ell \geqslant 2$ удовлетворяют неравенству $A > \ell^3$. Обозначим за $S(n)$ сумму $\sum_{i=1}^{l}$ НОД$(A, n+i)$. Тогда $S(n) < 2A$ для любого натурального n.*

Доказательство. Предположим противное и обозначим за M максимум из чисел вида НОД$(A, n+i), i \in [1, \ell]$, причём $M =$ $=$ НОД$(A, n + i_0)$. Тогда $2A/\ell \leqslant M \leqslant A$, а при $i \neq i_0$ верна следующая цепочка неравенств:

$$\text{НОД}(A, n+i) \cdot \text{НОД}(A, n+i_0) \leqslant A \cdot \text{НОД}(n+i, n+i_0) \leqslant$$
$$\leqslant A|i - i_0| < A\ell,$$

откуда следует, что $S(n) < M + (\ell - 1) \cdot \dfrac{A\ell}{M}$. На отрезке $[2A/\ell; A]$ функция $f(x) = x + \dfrac{A(\ell-1)\ell}{x}$ достигает максимума в одном из его концов, поэтому

$$S(n) < \max\{f(2A/\ell), f(A)\} =$$
$$= \max\{2A/\ell + \ell^2(\ell-1)/2, A + \ell(\ell-1)\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{A + \ell^2(\ell-1)/2, A + \ell(\ell-1)\} < 2A,$$

так как $\ell \geqslant 2$ и $A > \ell^3$, что противоречит нашему предположению. □

Тот факт, что тождественная перестановка подходит под условие задачи, следует из леммы с $A = |m - n|$, $\ell = 2021$ и из равенства НОД$(m+i, n+i) =$ НОД$(m-n, n+i)$.

11.8. У каждой из 100 девочек есть по 100 шариков; среди этих 10000 шариков есть по 100 шариков 100 различных цветов. Две девочки могут обменяться, передав друг другу по шарику. Они хотят добиться того, чтобы у каждой девочки было по 100 разноцветных шариков. Докажите, что они могут добиться этого такой серией обменов, чтобы любой шарик участвовал не более чем в одном обмене. (*И. Богданов, Ф. Петров*)

Решение. Лемма. *Пусть k — натуральное число, и у каждой из ста девочек имеется k шариков, причём всего у них есть по k шариков каждого из 100 цветов. Тогда девочки мо-*

гут выбрать каждая по одному из своих шариков так, чтобы все 100 шариков были разных цветов.

Доказательство. Будем говорить, что девочка дружит с цветом, если у неё есть шарик этого цвета. Заметим, что любые $m = 1, 2, \ldots, 100$ девочек дружат в совокупности хотя бы с m цветами (иными словами, имеют шарики хотя бы m различных цветов): иначе по принципу Дирихле среди их km шариков какого-то цвета было бы более k шариков. Тогда по лемме Холла можно сопоставить каждой девочке дружественный ей цвет так, чтобы все сопоставленные цвета были различны — а это нам и нужно. $\square$

Пусть теперь девочки придут на квадратное поле 100×100 (для игры в большие классики), и каждая девочка выделит себе свой столбец, чтобы разложить в нём свои шарики — по одному на поле. Сначала они воспользуются леммой при $k = 100$, найдут у себя по шарику так чтобы те были разного цвета, и выложат их в первой строке. Затем, применяя лемму при $k = 99$ (к ещё не выложенным шарикам), они найдут по шарику так чтобы те были разного цвета и выложат их во второй строке. и так далее. В результате в каждой строке оказываются шарики разных цветов, а в каждом столбце выложены шарики соответствующей ему девочки. Осталось заметить, что симметрия относительно диагонали этого поля приводит к тому что в каждом столбце лежат шарики разного цвета, и эта симметрия соответствует 4950 разрешённым обменам.