Материалы для проведения заключительного этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Первый день

Тюмень, 17–18 апреля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

© Авторы и составители, 2021
© И. И. Богданов, А. И. Голованов, 2021, макет

Условия и решения задач

9 класс

9.1. На окружности отмечено 1000 точек, каждая окрашена в один из k цветов. Оказалось, что среди любых пяти попарно пересекающихся отрезков, концами которых являются 10 различных отмеченных точек, найдутся хотя бы три отрезка, у каждого из которых концы имеют разные цвета. При каком наименьшем k это возможно? (*С. Берлов*)

Ответ. При $k = 143$.

Решение. Предположим, что на окружности есть 8 точек одного цвета (скажем, красного). Добавим к ним ещё две отмеченных точки, получив десятиугольник $A_1A_2 \dots A_5B_1B_2 \dots B_5$. Тогда отрезки A_1B_1, A_2B_2, $\dots$, A_5B_5 попарно пересекаются, и среди них есть три отрезка, у которых все концы красные. Это противоречит условию. Таким образом, точек каждого цвета не больше семи, поэтому $k \geqslant \frac{1000}{7}$, то есть $k \geqslant 143$.

При $k = 143$ отметим дополнительную, 1001-ю, точку и разделим все отмеченные точки на 143 группы по 7 подряд идущих точек. Каждую группу окрасим своим цветом. Пусть A_1B_1, $\dots$, A_5B_5 — пять попарно пересекающихся отрезков с концами в отмеченных точках. Можно считать, что точки A_1, A_2, $\dots$, A_5, B_1, B_2, $\dots$, B_5 расположены на окружности именно в этом порядке. Предположим, что отрезок A_1B_1 имеет одноцветные концы (скажем, красные). Тогда либо все точки A_1, A_2, $\dots$, A_5, либо все точки B_1, B_2, $\dots$, B_5 красные. В первом случае максимум две из точек B_1, B_2, $\dots$, B_5 красные. Но тогда три отрезка, не содержащие этих точек, будут иметь разноцветные концы. Второй случай аналогичен.

9.2. Пусть n — натуральное число. Целое число $a > 2$ назовём *n-разложимым*, если $a^n - 2^n$ делится на каждое число вида $a^d + 2^d$, где d — натуральный делитель n, отличный от n. Найдите все составные натуральные n, для которых существует n-разложимое число. (*С. Кудря*)

Ответ. $n = 2^m$ при $m > 1$.

Решение. Для $n = 2^m$ любое натуральное $a > 2$ является n-разложимым в силу равенства

$$a^{2^m} - 2^{2^m} = (a-2)(a^1+2^1)(a^2+2^2)\dots\left(a^{2^{m-1}} + 2^{2^{m-1}}\right).$$

Действительно, среди сомножителей в правой части присутствуют все числа вида $a^d + 2^d$, где d — делитель n, меньший n.

Пусть теперь n не является степенью двойки, тогда у него есть нечётный простой делитель p и $n = pk$, где $k > 1$ — натуральное число. Предположим, что существует n-разложимое число a. Тогда $a^{pk} - 2^{pk}$ делится на $a^k + 2^k$. Кроме того, $a^{pk} + 2^{pk}$ делится на $a^k + 2^k$, поскольку p нечётно. Следовательно, $2 \cdot 2^{pk} = (a^{pk} + 2^{pk}) - (a^{pk} - 2^{pk})$ также делится на $a^k + 2^k$. Таким образом, число $a^k + 2^k > 1$ является делителем степени двойки и, значит, само является степенью двойки.

В частности, отсюда следует, что a чётно, то есть $a = 2b$ для некоторого натурального $b > 1$. Тогда $b^k + 1 = \dfrac{a^k + 2^k}{2^k} > 1$ также является степенью двойки и, значит, b нечётно. Если k чётно, то число $b^k + 1$ дает остаток 2 при делении на 4, и при этом это число больше 2, что невозможно. Стало быть, k нечётно. Но тогда число

$$b^k + 1 = (b+1)(b^{k-1} - b^{k-2} + b^{k-3} - \ldots - b + 1)$$

не может быть степенью двойки, поскольку вторая скобка нечётна и больше единицы. Значит, n-разложимого числа не существует.

9.3. На прямой отмечено $n+1$ различных отрезков; одна из точек прямой принадлежит всем этим отрезкам. Докажите, что среди отмеченных отрезков можно выбрать различные отрезки I и J, пересекающиеся по отрезку длины, не меньшей $\dfrac{n-1}{n}d$, где d — длина отрезка I. (*И. Богданов, В. Уфнаровский*)

Первое решение. Введём координаты на нашей прямой. Пусть данные отрезки — это $I_0 = [a_0; b_0]$, $I_1 = [a_1; b_1]$, $\ldots$, $I_n = [a_n; b_n]$; нумерацию отрезков выберем так, что $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Если $b_k \geqslant b_{k+1}$ при некотором k, то отрезок I_k содержит I_{k+1}, и потому отрезки $I = I_{k+1}$ и $J = I_k$ — искомые. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что $b_0 < b_1 < \ldots < b_n$.

Рассмотрим $2n$ отрезков $[a_0; a_1]$, $[a_1; a_2]$, $\ldots$, $[a_{n-1}; a_n]$, $[b_0; b_1]$, $[b_1; b_2]$, $\ldots$, $[b_{n-1}; b_n]$ (некоторые из них могут иметь нулевую длину). Рассмотрим кратчайший из них — пусть для определённости это $[a_k; a_{k+1}]$, а его длина равна ℓ. Тогда

$$b_k - b_0 = (b_k - b_{k-1}) + (b_{k-1} - b_{k-2}) + \ldots + (b_1 - b_0) \geqslant k\ell$$

и, аналогично,

$$a_n - a_k = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_{k+1} - a_k) \geqslant (n-k)\ell.$$

Поскольку I_n и I_0 имеют общую точку, имеем $b_0 \geqslant a_n$, откуда

$$b_k - a_k \geqslant (b_k - b_0) + (a_n - a_k) \geqslant k\ell + (n-k)\ell = n\ell.$$

Итак, длина d отрезка I_k не меньше, чем $n\ell$. Иначе говоря, часть $[a_k; a_{k+1}]$ этого отрезка, лежащая вне I_{k+1}, имеет длину, не превосходящую d/n. Поэтому отрезки $I = I_k$ и $J = I_{k+1}$ — искомые.

Второе решение. Пусть данные отрезки — это $I_0 = A_0B_0$, $I_1 = A_1B_1$, $\ldots$, $I_n = A_nB_n$. Как и в предыдущем решении, мы сводим задачу к случаю, когда точки A_0, A_1, $\ldots$, A_n пронумерованы слева направо, и так же пронумерованы точки B_0, B_1, $\ldots$, B_n.

При всех $k = 0, 1, \ldots, n$, отметим на отрезке I_k точку C_k так, что $A_kC_k : C_kB_k = (n-k) : k$. Таким образом, точка $C_0 = B_0$ находится не левее точки $C_n = A_n$. Значит, найдётся индекс k, при котором точка C_k находится не левее точки C_{k+1}. Выберем такой индекс k и положим $d = \min(A_kB_k, A_{k+1}B_{k+1})$. Заметим, что точки A_k, A_{k+1}, C_{k+1}, C_k, B_k, B_{k+1} лежат на прямой именно в таком порядке слева направо. Тогда

$$A_{k+1}B_k \geqslant A_{k+1}C_{k+1} + C_kB_k = \frac{n-k-1}{n}\,A_{k+1}B_{k+1} + \frac{k}{n}\,A_kB_k \geqslant \geqslant \frac{n-k-1}{n}\,d + \frac{k}{n}\,d = \frac{n-1}{n}\,d.$$

Это и значит, что длина общей части отрезков I_k и I_{k+1} не меньше, чем $\dfrac{n-1}{n}\,d$, где d — длина одного из них.

Замечание. Нетрудно привести пример $n+1$ попарно пересекающихся отрезков одинаковой длины d, любые два из которых пересекаются по отрезку длины, не превосходящей $\dfrac{n-1}{n}\,d$.

9.4. На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E. Оказалось, что прямая, проходящая через E и параллельная AB, касается окружности, описанной около треугольника ADC. Докажите, что одна из касательных, проведённых из точки E к описанной окружности треугольника BCD, отсекает от угла ABE треугольник, подобный треугольнику ABC.

(*А. Кузнецов, С. Берлов*)

Решение. Пусть прямая, проходящая через E и параллельная AB, пересекает прямую AC в точке X (см. рис. 1). Поскольку треугольники CEX и CBA подобны, имеем $\frac{EC}{CB} = \frac{XC}{CA}$.

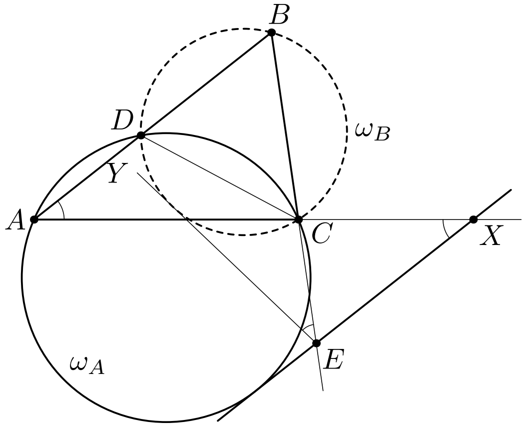

Рис. 1

Заметим, что дуга CB описанной окружности ω_B треугольника CDB равна $2\angle CDB$; тому же равна дуга CDA описанной окружности ω_A треугольника ADC. Из равенства выше получаем, что конфигурация из трёх точек E, C, B и окружности ω_B подобна конфигурации из точек X, C, A и окружности ω_A.

Рассмотрим в первой конфигурации луч EY, соответственный лучу XE во второй. Поскольку XE касается ω_A, луч EY касается ω_B. Кроме того, $\angle YEB = \angle EXA = \angle BAC$. Поэтому луч EY отсекает от угла ABE треугольник, два угла которого равны $\angle BAC$ и $\angle ABC$, то есть этот треугольник подобен треугольнику ABC.

10 класс

10.1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F, причём E лежит между B и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямые AE и DF касаются окружности, описанной около треугольника AOD. Докажите, что они касаются и окружности, описанной около треугольника EOF.

(*А. Кузнецов*)

Первое решение. Будем обозначать (XYZ) окружность, описанную около треугольника XYZ.

Из касания окружности (AOD) и прямой AE имеем $\angle EAO = \angle ADO$, а из параллельности $BC \parallel AD$ имеем $\angle EBO = \angle ADO$ (см. рис. 2). Таким образом, $\angle EAO = \angle EBO$, следовательно, четырехугольник $ABEO$ вписанный. Аналогично $CFOD$ вписанный.

Отсюда, с использованием параллельности $AB \parallel CD$, получаем: $\angle OFE = \angle ODC = \angle OBA = \angle OEA$. Но из равенства $\angle OFE = \angle OEA$ следует касание окружности (EOF) и прямой AE. Аналогично доказываем касание окружности (EOF) и прямой DF.

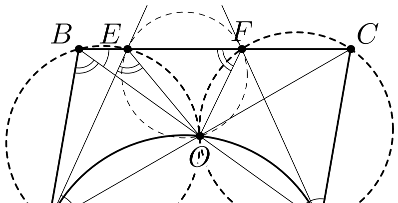

Рис. 2

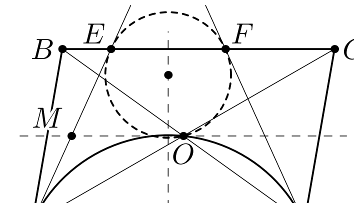

Рис. 3

Второе решение. Четырёхугольник $AEFD$ симметричен относительно серединного перпендикуляра к AD, поэтому линия центров окружностей (AOD) и (EOF) — это серединный перпендикуляр к AD (см. рис. 3). Тогда радикальная ось m этих окружностей параллельна AD и проходит через O. Так как O равноудалена от AD и BC, то m — средняя линия трапеции $AEFD$, в частности, m проходит через середину M отрезка AE.

Значит, степени M относительно (AOD) и (EOF) равны, т.е. $MA^2 = ME \cdot ME'$, где E' — вторая точка пересечения AE и (EOF). Так как $MA = ME$, получаем $E' = E$, откуда следует касание окружности (EOF) и прямой AE. Аналогично доказываем касание окружности (EOF) и прямой DF.

10.2. Найдите все наборы натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ такие, что
$$x_{i+2}^2 = \text{НОК}(x_{i+1}, x_i) + \text{НОК}(x_i, x_{i-1})$$
при $i = 1, 2, \ldots, 20$, где $x_0 = x_{20}, x_{21} = x_1, x_{22} = x_2$. (*П. Козлов*)

Ответ. $x_1 = x_2 = \ldots = x_{20} = 2$.

Решение. Из условия следует, что все x_i больше 1, а также x_{i+2}^2 делится на x_i при $i = 1, 2, \ldots, 20$ (здесь и далее $x_{j+20} = x_j = x_{j-20}$ для $j = 1, \ldots, 20$).

Пусть x_k — наибольшее из чисел $x_1, \ldots, x_{20}$, а p — простой делитель числа x_{k-5}. Поскольку x_{k-3}^2 делится на x_{k-5}, а x_{k-1}^2 делится на x_{k-3}, то x_{k-3} и x_{k-1} делятся на p. А тогда и $\text{НОК}(x_{k-5}, x_{k-4})$, и $\text{НОК}(x_{k-4}, x_{k-3})$ делятся на p, поэтому x_{k-2}^2 делится на p. Таким образом, числа $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}$ все делятся на p, поэтому их попарные НОДы не меньше p. Следовательно,
$$x_k^2 = \text{НОК}(x_{k-1}, x_{k-2}) + \text{НОК}(x_{k-2}, x_{k-3}) =$$
$$= \frac{x_{k-1}x_{k-2}}{\text{НОД}(x_{k-1}, x_{k-2})} + \frac{x_{k-2}x_{k-3}}{\text{НОД}(x_{k-2}, x_{k-3})} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x_{k-1}x_{k-2}}{p} + \frac{x_{k-2}x_{k-3}}{p} \leqslant \frac{2x_k^2}{p}.$$
Поскольку $p \geqslant 2$, такая цепочка неравенств может выполняться только в случае, когда $p = 2$ и все неравенства обращаются в равенства. В частности, $x_{k-2} = x_{k-1} = x_k$ и $\text{НОД}(x_{k-2}, x_{k-1}) = p = 2$. Значит, $x_k = 2$, а тогда и все x_i равны 2 (поскольку x_k наибольшее из них, и все эти числа больше 1).

Остается заметить, что набор $x_1 = x_2 = \ldots = x_{20} = 2$ удовлетворяет условию.

10.3. В стране N городов. Некоторые пары городов связаны двусторонними авиалиниями, каждая пара не более, чем одной. Каждая авиалиния принадлежит одной из k компаний. Оказалось, что из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками), но при закрытии всех авиалиний любой из компаний это свойство нарушается. Какое наибольшее количество авиалиний (при произвольных данных N и k) могло быть в этой стране? (*С. Берлов, Н. Власова*)

Ответ. Конструкция возможна только при $k < N$, и тогда наибольшее количество ребер равно $C_N^2 - C_k^2$.

Первое решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — это города, ребра — авиалинии, причем ребра, соответствующие авиалиниям i-ой компании, покрашены в i-й цвет.

Пример. Пусть в графе вершины $v_1, \ldots, v_k$ не смежны друг с другом, и из вершины v_i ведут ребра цвета i во все вершины с номерами, большими k. Все ребра между вершинами с номерами, большими k, присутствуют и покрашены произвольным образом. Очевидно, что при удалении ребер цвета i из вершины v_i нельзя добраться до остальных вершин графа, а изначальный граф связен.

Оценка. Докажем индукцией по k, что в графе отсутствует хотя бы C_k^2 ребер; из этого следует, что $k < N$, ибо иначе ребер бы не было, и граф не был бы связным. База при $k = 1$ очевидна.

Переход: $(k-1(\mapsto k$. Рассмотрим все компоненты связности k-го цвета. Их хотя бы k, иначе можно, добавляя цвета, каждый раз уменьшать количество компонент хотя бы на 1 (если при добавлении цвета количество компонент не уменьшилось, то при удалении из исходного графа ребер этого цвета граф остается связным). Тогда $(k-1)$-й цвет уже сделает граф связным.

Стянем каждую компоненту k-го цвета в вершину (то есть сопоставим каждой компоненте вершину нового графа, проведя ребра между вершинами тогда и только тогда, когда какие-то вершины соответствующих компонент были связаны ребром; если между двумя компонентами были ребра нескольких цветов, оставим один). Полученный граф удовлетворяет индукционному предположению, поэтому в нем отсутствует хотя бы C_{k-1}^2 ребер, соответствующих хотя бы тому же количеству в исходном графе.

С другой стороны, если выкинуть все ребра k-го цвета, хотя бы одна из его компонент, пусть C, должна разбиться на две. Это значит, что в любую другую компоненту D нет ребер хотя бы от одной из частей C. Докажем, что тогда в графе отсутствуют ещё хотя бы $k-1$ рёбер, не учтённых ранее. Если от компоненты D нет рёбер в обе части C, то это означает отсутствие хотя бы двух рёбер, а до этого мы учли только одно. Если от компоненты D есть ребро к одной из частей C, то в графе из стянутых вершин-компонент соответствующие компоненты были соединены, но на самом деле одного ребра в исходном графе нет. Итак, за счёт каждой компоненты, отличной от C, мы должны учесть отсутствие ещё хотя бы одного ребра. Значит, ещё минимум $k-1$ ребро отсутствует, и всего отсутствующих ребер хотя бы $C_{k-1}^2+(k-1)=C_k^2$, что и требовалось.

Второе решение. Приведём другой способ доказать оценку; мы используем терминологию, введённую в начале первого решения.

Сначала докажем, что для каждой пары компаний (i,j) найдутся две вершины A, B, любой путь между которыми содержит ребра обеих компаний i и j. Пусть при удалении компании i вершины распадаются на два непустых множества U_i и V_i, между которыми нет ребер, а при удалении компании j — на множества U_j и V_j. Если множества $U_i\cap U_j$ и $V_i\cap V_j$ оба непустые, то можно взять $A\in U_i\cap U_j$ и $B\in V_i\cap V_j$. Иначе, множества $U_i\cap V_j$ и $V_i\cap U_j$ оба непустые, и можно взять $A\in U_i\cap V_j$ и $B\in V_i\cap U_j$. Ясно, что A и B подходят и что между ними нет ребра.

Для каждой пары компаний (i,j) выберем A и B так, что расстояние между ними (то есть длина пути по ребрам исходного графа) минимально возможное. Если мы докажем, что разным парам компаний соответствуют разные пары (A,B), то мы получим, что отсутствующих ребер не меньше, чем пар компаний, что и даст требуемую оценку.

Предположим, что пара (A,B) соответствует двум разным парам компаний — $(1,2)$ и еще одной (без ограничения общности, либо $(1,3)$, либо $(3,4)$). Пусть $A=A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n=B$ — один из кратчайших путей между A и B, $n\geqslant 2$. Если ребро A_0A_1 принадлежит не компаниям 1 или 2, то любой путь между A_1 и A_n содержит ребра компаний 1 и 2, что противоречит минимальности расстояния для пары (A,B). Аналогично, ребро $A_{n-1}A_n$ принадлежит одной из компаний 1 или 2.

Значит, пара (A,B) не может соответствовать паре компаний $(3, 4)$. Таким образом, пара (A, B) соответствует паре компаний $(1, 3)$, и ребра A_0A_1 и $A_{n-1}A_n$ оба принадлежат компании 1. Тогда любой путь между A_0 и A_{n-1}, любой путь между A_{n-1} и A_1 и любой путь между A_1 и A_n содержат ребра обеих компаний 2 и 3. Из минимальности расстояния для пары (A, B) следует, что между A_0 и A_{n-1}, между A_{n-1} и A_1, а также между A_1 и A_n существуют пути, не содержащие ребер компании 1. Соединяя эти пути, получаем путь (возможно, с повторяющимися вершинами) от A_0 до A_n, не содержащий ребер компании 1. Противоречие.

10.4. Дано натуральное число $n \geqslant 4$ и $2n + 4$ карточки, пронумерованные числами $1, 2, \ldots, 2n+4$. На карточке с номером m написано вещественное число a_m, причем $[a_m] = m$. Докажите, что можно выбрать 4 карточки так, чтобы сумма чисел на первых двух карточках отличалась от суммы чисел на двух других карточках менее чем на $\dfrac{1}{n-\sqrt{n/2}}$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим $c = \dfrac{1}{n-\sqrt{n/2}}$. Назовем пару карточек неудачной, если написанные на них числа отличаются менее чем на c. Карточки в такой паре имеют последовательные номера, потому что в противном случае числа на них отличаются более чем на 1, а $c \leqslant \frac{1}{2}$ при $n \geqslant 4$. Если карточка i состоит в двух неудачных парах, то эти пары — $(i-1, i)$ и $(i, i+1)$. В таком случае $1 < a_{i+1} - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i + a_i - a_{i-1} \leqslant 2c \leqslant 1$, противоречие. Следовательно, каждая карточка состоит максимум в одной неудачной паре. Пусть нашлись две неудачные пары: $(i, i+1)$ и $(j, j+1)$. В силу сказанного выше, все эти 4 карточки различны. С другой стороны, $|a_i + a_{j+1} - a_{i+1} - a_j| = |(a_{j+1} - a_j) - (a_{i+1} - a_i)| \leqslant \max(a_{i+1} - a_i, a_{j+1} - a_j) < c$, и задача решена. Здесь мы воспользовались тем, что $0 < a_{j+1} - a_j < c$ и $0 < a_{i+1} - a_i < c$. Пусть неудачных пар карточек не более одной. Если неудачная пара есть, пусть эта пара $(T, T+1)$. Если таких пар нет, положим $T = 1$.

Обозначим через S_m множество пар карточек $x < y$ с суммой номеров $x + y = m$. Заметим, что $|S_{2n+5}| = n + 2$, $|S_{2n+5-2s}| = |S_{2n+5-2s+1}| = n + 2 - s$ и $|S_{2n+5+2s}| =$

$= |S_{2n+5+2s-1}| = n + 2 - s$ при $1 \leqslant s \leqslant n$. Положим $S = S_{2n+5+2k} \cup S_{2n+5+2k-1} \cup \ldots \cup S_{2n+5-2k}$, число k мы подберем позже. Тогда $|S| = n+2+4(n+1+n+n-1+\ldots+n-k+2) = n+2+2k(2n-k+3)$.

Пусть в S две пары вида (T, p) и $(T+1, p)$, здесь p может быть как больше T, так и меньше. Тогда $T + p \geqslant 2n+5-2k$ и $T+p+1 \leqslant 2n+5+2k$. Значит, $2n+5-2k-T \leqslant p \leqslant 2n+4+2k-T$, то есть p может принимать не более $4k$ значений. Для каждого из них удалим из S карточку вида (T, p). В результате мы получим множество S', удалив из S не более $4k$ пар карточек. Значит, $|S'| \geqslant n+2+2k(2n-k+3)-4k = n+2+2k(2n-k+1)$.

Заметим, что $a_i + a_j \in [i+j, i+j+2)$. Поскольку в каждой паре из S' сумма номеров карточек принимает значения от $2n+5-2k$ до $2n+5+2k$, то сумма чисел на карточках из таких пар лежит в промежутке $[2n+5-2k, 2n+7+2k)$, длина которого равна $4k+2$. Тогда суммы чисел в каких-то двух парах карточек $(x, y), (z, t) \in S'$ отличаются не более чем на

$$\frac{4k+2}{|S'|-1} = \frac{4k+2}{2k(2n-k+1)+n+1}\,.$$

Остается доказать, что при некотором k число $\frac{2k(2n-k+1)+n+1}{4k+2}$ больше $n - \sqrt{n/2}$. Преобразуем числитель: $2k(2n-k+1)+n+1 = (2k+1)(2n-k+\frac{3}{2}) - n - \frac{1}{2}$. Значит,

$$\frac{2k(2n-k+2)+n+1}{4k+2} = n + \frac{3}{4} - \frac{k}{2} - \frac{n}{4k+2} - \frac{1}{8k+4}\,.$$

Наконец, выберем число k как целое число из промежутка $\left[\sqrt{n/2} - \frac{1}{2}\,; \sqrt{n/2} + \frac{1}{2}\right]$. Тогда $4k+2 \geqslant 2\sqrt{2n}$, поэтому

$$n + \frac{3}{4} - \frac{k}{2} - \frac{n}{4k+2} - \frac{1}{8k+4} \geqslant$$
$$\geqslant n + \frac{3}{4} - \sqrt{n/2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2n}} > n - \sqrt{n/2}$$

при $n \geqslant 4$.

Итак, мы получили, что суммы вида $a_x + a_y$ и $a_z + a_t$ для некоторых $(x, y), (z, t) \in S'$ отличаются менее чем на c. Остается проверить, что эти 4 карточки разные. Предположим противное, по построению S' имеем $x \neq y$ и $z \neq t$. Пусть, без ограничения общности, $x = z$. Тогда $|a_y - a_t| < c$, то есть карточки y и t образуют неудачную пару. Значит, это карточки T и $T + 1$. Следовательно, $(x, T) \in S$ и $(x, T + 1) \in S'$, противоречие.

11 класс

11.1. При некоторых натуральных $n > m$ число n оказалось представимо в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа m, а также в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа $m+1$. При каком наибольшем m это могло произойти (хоть при каком-то $n > m$)?

(*А. Кузнецов*)

Ответ. $m = 2021$.

Решение. Пусть $m > 2021$. Поскольку любая степень числа $m + 1$ дает остаток 1 от деления на m, то сумма 2021 таких степеней дает остаток 2021 от деления на m. С другой стороны, степени числа m дают лишь остатки 0 или 1 от деления на m, поэтому сумма 2021 степени числа m может давать остаток 2021 от деления на m только если все слагаемые равны 1. Но тогда $n = 2021 < m$, противоречие. Значит, $m \leqslant 2021$.

Для $m = 2021$ есть пример: $2021m = 1 + 2020(m + 1)$.

Замечание. Можно привести также пример числа $n > m$, у которого в системах счисления с основаниями m и $m + 1$ при $m = 2021$ сумма цифр равна 2021 (тем самым, оно тоже удовлетворяют условию задачи): $n = m^2 + m(m-1) = (m+1)^2 + (m+1)(m-4) + 3$.

11.2. Пусть $P(x)$ — ненулевой многочлен степени n с неотрицательными коэффициентами такой, что функция $y = P(x)$ — нечетная. Может ли оказаться так, что для различных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на графике G: $y = P(x)$ выполняются условия: касательная к графику G в точке A_1 проходит через точку A_2, касательная в точке A_2 проходит через точку A_3, …, касательная в точке A_n — через точку A_1? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не может.

Первое решение. Покажем, что при данных условиях на многочлен каждая следующая точка касания лежит по другую сторону от оси Oy, чем предыдущая. Пусть $P(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + a_{2m-1}x^{2m-1} + \ldots + a_1x$ — данный многочлен, $Q(x) = a_{2m+1}(2m+1)x^{2m} + \ldots + a_1$ — его производная. Пусть $A(z; P(z))$ — это k-я точка касания, а $B(t; P(t))$ — $(k+1)$-я. Тогда касательная в точке A имеет уравнение $y = Q(z)(x - z) + P(z)$. Значит, $P(t) = Q(z)(t-z)+P(z)$, откуда $P(t)-P(z) = (t-z)Q(z)$. Разделив это равенство на $t - z$ и перенеся все слагаемые в правую часть, получим при четной степени $n - 1 = 2m$ выражение: $a_{2m+1}((2m + 1)z^{2m} - t^{2m} - t^{2m-1}z - \ldots - z^{2m})$. Пусть z и t одного знака (считаем, что 0 с любым числом одного знака). Если $|z| > |t|$, то выражение в скобках положительно, если же $|z| < |t|$, то оно отрицательно. Такие же знаки будут иметь выражения при остальных степенях: $2m - 2, 2m - 4, \ldots, 0$. Значит, если z и t — одного знака, то равенство $(t - z)Q(z) - (P(t) - P(z)) = 0$ невозможно. Итак, любые две последовательные точки касания должны находиться по разные стороны от оси Oy. И в силу нечетности n касательная в точке A_n не может пройти через точку A_1.

Второе решение. Заметим, что функция ax^k при $a \geqslant 0$ и нечетном k выпукла на $[0, \infty)$ и вогнута на $(-\infty, 0]$. Многочлен $P(x)$ представляется в виде суммы нескольких функций такого вида, потому что $P(x)$ является нечетной функцией, а его коэффициенты неотрицательные. Тогда функция $P(x)$ также выпукла на $[0, \infty)$ и вогнута на $(-\infty, 0]$. Это означает, что касательная в точке графика P с положительной абсциссой вторично не пересекает график в точках с неотрицательной абсциссой, и наоборот. Кроме того, касательная к графику в нуле не имеет с ним больше общих точек. Это означает, что абсциссы точек $A_1, \ldots, A_n$ отличны от нуля, а их знаки чередуются. Тогда у точек A_n и A_1 абсциссы одного знака, поэтому касательная в точке A_n не проходит через точку A_1.

11.3. В языке три буквы — Ш, У и Я. *Словом* называется последовательность из 100 букв, ровно 40 из которых — гласные (то есть У или Я), а остальные 60 — буква Ш. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы у любых двух выбранных слов хотя бы в одной из ста позиций одновременно стояли гласные, причём различные? (*Ф. Петров*)

Ответ. 2^{40}.

Решение. *Пример.* Рассмотрим все 2^{40} слов, у которых начиная с 41-ой все буквы Ш, а первые 40 — У или Я. Этот набор слов удовлетворяет условию.

Оценка. Каждому из наших m слов сопоставим 2^{60} слов, заменяя каждую букву Ш, на У или Я (всеми возможными способами). Заметим, что полученные $m \cdot 2^{60}$ слов состоят из букв У и Я и попарно различны (для слов, полученных из одного и того же, это ясно из построения, а для слов, полученных из двух разных, следует из условия). Таким образом, $m \cdot 2^{60} \leqslant 2^{100}$ и $m \leqslant 2^{40}$.

Замечание. Оценку можно получить по-другому.

Способ 1. Подкинем монетку 100 раз. Для каждого слова рассмотрим такое событие: при всяком i если на некоторой позиции i стоит буква У, то при i-м подбрасывании выпала решка, а если буква Я, то орёл. Вероятность такого события равна $1/2^{40}$, и они не совместные, поэтому количество слов не больше чем 2^{40}.

Способ 2. Пусть выбрано более 2^{40} слов. Присвоим каждому слову вес 1. Пусть первая буква у x слов У, у y слов — Я и $x \geqslant y$. Удвоим веса всех слов с первой буквой У, и обнулим — с первой буквой Я. Далее посмотрим на вторую букву и т.д. Опишем шаг рассмотрения m-ой буквы. Пусть p — сумма весов слов, у которых m-ая буква У, q — сумма весов слов, у которых m-ая буква Я. Если $p \leqslant q$, удваиваем веса у слов с m-й буквой Я и обнуляем — с m-й буквой У. Иначе — наоборот. В результате таких операций сумма весов не уменьшается. После 100 операций сумма весов всех слов будет больше 2^{40}. В каждом слове только 40 букв У или Я, поэтому вес каждого слова не больше 2^{40}. Значит, найдутся два слова с ненулевыми весами. Тогда для них не найдется позиции, в которой у одного У, а у другого Я или наоборот, противоречие.

11.4. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC пересекает лучи AA_1 и CC_1 в точках A_2 и C_2 соответственно. Точка O_a — центр описанной окружности треугольника AC_1C_2, точка O_c — центр описанной окружности треугольника CA_1A_2. Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Будем обозначать (XYZ) окружность, описанную около треугольника XYZ. Пусть P_a — центр окружности (BC_1C_2), а P_c — центр окружности (BA_1A_2). Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$ и $\angle ACB = 2\gamma$. Поскольку $BC_2 \parallel AC$, то $\gamma = \angle BCC_2 = \angle ACC_2 = \angle BC_2C$ и $\angle C_2BC_1 = \angle BAC = 2\alpha$. Значит, $BC_2 = BC$. Кроме того, $\angle C_1P_aB = 2\gamma$, $\angle C_1P_aO_a = \angle C_2P_aO_a = \angle C_2BC_1 = 2\alpha$ и $\varphi = \angle P_aBC_2 = |90^\circ - \angle C_2C_1B|$. Здесь мы воспользовались тем, что точка P_a — центр (BC_1C_2) и P_aO_a — серединный перпендикуляр к отрезку C_1C_2.

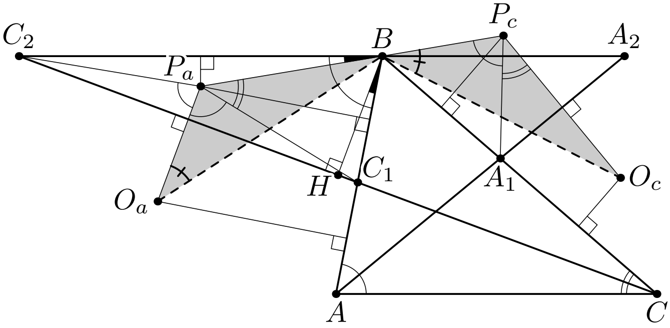

Рис. 4

Проведем в треугольнике BC_1C_2 высоту BH. Тогда $\angle HBC_1 = |90^\circ - \angle BC_1C_2| = \varphi$. Прямая P_aO_a перпендикулярна C_2C_1, а потому параллельна BH. Значит, угол между этой прямой и прямой AB равен φ. Также проекции точек P_a и O_a на AB — середины отрезков BC_1 и AC_1. Следовательно, $P_aO_a = \frac{AB}{2\cos\varphi}$. Проекция точки P_a на прямую BC_2 — середина отрезка BC_2, а угол между прямыми BP_a и BC_2 равен φ, откуда $BP_a = \frac{BC_2}{2\cos\varphi} = \frac{BC}{2\cos\varphi}$.

Из сказанного выше, $\frac{P_aO_a}{BP_a} = \frac{AB}{BC}$. $\angle BP_aO_a = \angle BP_aC_1 + \angle C_1P_aO_a = 2\alpha + 2\gamma$. Рассуждая аналогично, мы получаем, что $\frac{P_cO_c}{BP_c} = \frac{BC}{AB}$ и $\angle BP_cO_c = 2\alpha + 2\gamma$. Значит, треугольники P_aBO_a и P_cO_cB подобны. Тогда $\angle P_aBO_a + \angle P_cBO_c = \angle P_aBO_a + \angle P_aO_aB = 180^\circ - \angle BP_aO_a = 180^\circ - 2\alpha - 2\gamma = \angle ABC$. Поскольку $\angle BP_aC_1 = 2\gamma$ и $BP_a = P_aC_1$, то $\angle P_aBC_1 = 90^\circ - \gamma$. Аналогично $\angle P_cBA_1 = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, $\angle O_aBO_c = \angle P_aBA + \angle ABC + \angle P_cBC - (\angle P_aBO_a + \angle P_cBO_c) = 90^\circ - \gamma + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha - \gamma = \angle AIC$, что и требовалось.

В равенствах $\angle BP_aC_1 = 2\gamma$ (1) и $\angle C_1P_aO_a = \angle C_2P_aO_a =$

$= \angle C_2BC_1$ (2) мы воспользовались расположением точек P_a и O_a, которое остается обосновать. А именно, $\angle C_1C_2B = \gamma$ — острый, поскольку это половина угла ACB. Значит, точка P_a лежит в той же полуплоскости относительно прямой BC_1, что и C_2, и выполняется (1). Также $\angle O_aC_1A = |90^\circ - \angle AC_2C_1|$. Этот угол острый, и в случае, когда O_a лежит в другой полуплоскости относительно AC_1 нежели P_a, не превосходит $90^\circ - \gamma$, так как $\angle AC_2C_1 < 180^\circ - \angle BC_2C_1 = 180^\circ - \gamma$. Значит, точки B и O_a лежат в разных полуплоскостях относительно прямой C_1P_a, а тогда выполнено (2).

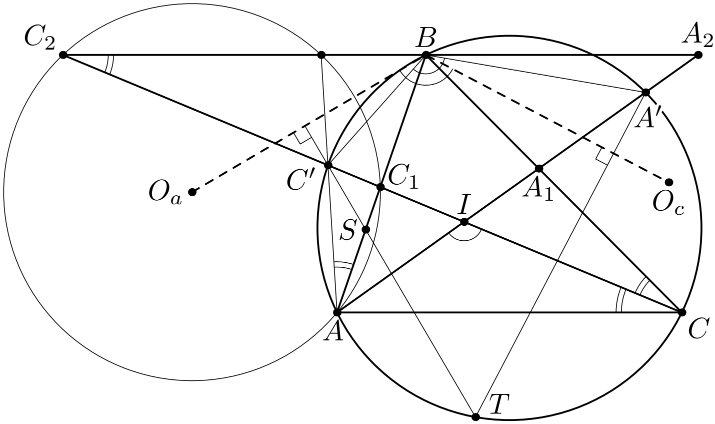

Рис. 5

Замечание. Приведем план другого решения. Обозначим за C' точку пересечения прямой CC_1 с окружностью (ABC). Тогда $\angle BAC' = \angle BCC' = \gamma = \angle BC_2C_1$. Значит, точка пересечения AC' и BC_2 лежит на окружности (AC_1C_2), а тогда точка C' лежит на поляре точке B относительно этой окружности. Теперь отметим на окружности (ABC) точку T так, что четырехугольник $ABCT$ гармонический, обозначим точку пересечения отрезков $C'T$ и AB за S. Центральная проекция в C' переводит четверку точек A, T, C, B с окружности (ABC) в четверку точек A, S, C_1, B на прямой AB. Тогда четверка A, S, C_1, B — гармоническая, откуда следует, что поляра B относительно (AC_1C_2) проходит и через S. Значит, это прямая TC', и она перпендикулярна BO_a. Аналогично, $TA' \perp BO_c$, где A' — точка пересечения AA_1 с (ABC). Тогда $\angle O_aBO_c = 180^\circ - \angle A'TC' = \angle A'BC'$. Остается несложная проверка равенства углов AIC и $A'BC'$.