

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

ОТВЕТ: -0,8

10 - 0,8

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

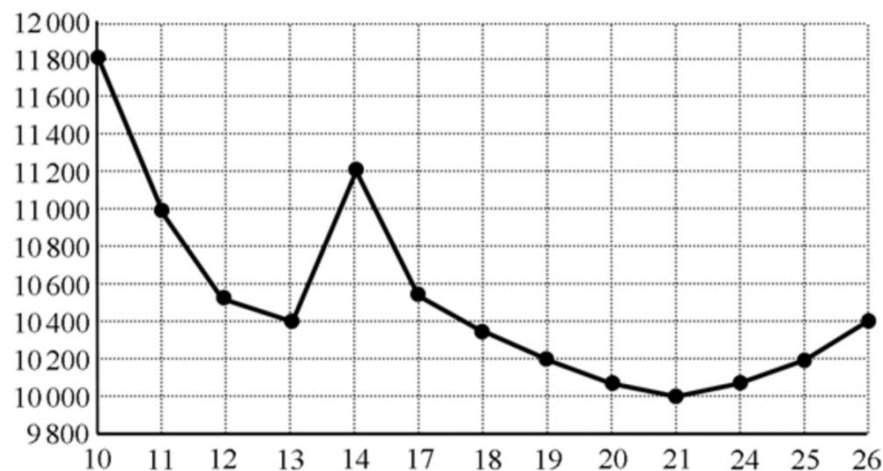
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Одна таблетка лекарства содержит 1,4 мг активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,2 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку, возраст которого четыре месяца и вес 7 кг, в течение суток?

Ответ: _____.

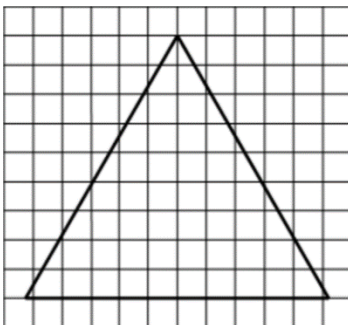
- 2** На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Ответ: _____.



- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



Ответ: _____.

- 4 Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стартер» по очереди играет с командами «Протор», «Ротор» и «Мотор». Найдите вероятность того, что «Стартер» будет начинать только вторую и последнюю игры.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения

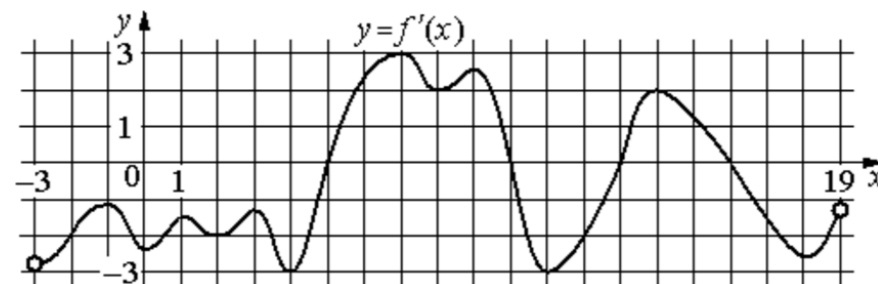
$$\lg(x + 11) = 1.$$

Ответ: _____.

- 6 Стороны параллелограмма равны 5 и 10. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 3. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.

Ответ: _____.

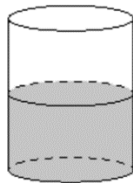
- 7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 15]$.



Ответ: _____.



- 8 В цилиндрический сосуд налили 2800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения

$$\sqrt{108} \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sqrt{27}.$$

Ответ: _____.

- 10 Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,75$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 13,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – постоянная, $T = 300 \text{ К}$ – температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15960 Дж.

Ответ: _____.

- 11 Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 10%. На сколько процентов одиннадцать таких же рубашек дороже куртки?

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции

$$y = 9x - 9 \cdot \ln(x + 3) + 4.$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.



Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение
 $\cos 4x - \cos 2x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.
- 14** В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 7$, $SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 4.
- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
 б) Найдите объём пирамиды $SABC$.
- 15** Решите неравенство
 $\log_{\sqrt[3]{8}}\left(\log_{\frac{1}{7}}(x+1)\right) \geq 3$.
- 16** В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причём $CM = BC$ и $CN = AC$. Отрезки CP и CQ – биссектрисы треугольников ACB и NCM соответственно.
- а) Докажите, что CP и CQ перпендикулярны.
 б) Найдите PQ , если $BC = 3$, а $AC = 5$.

- 17** 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей?

- 18** Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a+1)x + a^3}{\sqrt{2+x-x^2}} = 0$$

имеет два различных корня.

- 19** Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
 б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 1000?
 в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 129.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	6
2	11800
3	6
4	0,125
5	-1
6	1,5
7	1
8	2275
9	4,5
10	7
11	10
12	-2
13	а) $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $\pi; 2\pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$
14	$16\sqrt{6}$
15	$\left(-1; -\frac{48}{49}\right]$
16	$\frac{15}{4}$
17	0,8 млн
18	$(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{2})$
19	а) да, пример: 1, 2, 3, 4 б) 44 в) 3; 6



Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

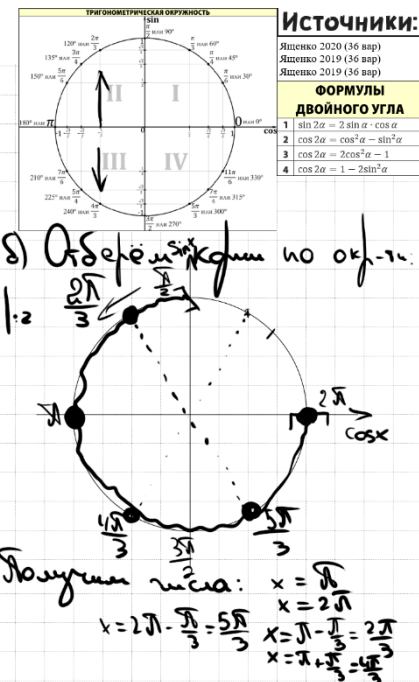
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

- 13** а) Решите уравнение $\cos 4x - \cos 2x = 0$
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$

$$\begin{aligned} \text{а) } 2\cos^2(2x) - 1 - \cos(2x) &= 0 \\ \text{Пусть } \cos(2x) &= t \\ 2t^2 - t - 1 &= 0 \\ D &= 9 \\ t_1 &= 1 \\ t_2 &= -\frac{1}{2} \\ \cos 2x &= 1 \quad \cos 2x = -\frac{1}{2} \\ 2x &= 2\pi n \quad 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x &= \pi n \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n; \pi n \end{aligned}$$

ОТВЕТ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$
б) $\pi; 2\pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



- 14** В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 7$, $SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 4.

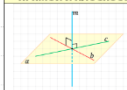
- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

$\Rightarrow AB \perp CM$
 $\Rightarrow CM$ - медиана и
 высота $\triangle ABC$
 $\Rightarrow ABC$ - равност.
 б) ① $\triangle SCK$:
 $CK = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$
 $CM = 6$
 ② $\triangle ASK$
 $AK = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33}$
 ③ $\triangle AMK$:
 $AM = \sqrt{BS^2 - 3^2} = \sqrt{24}$
 а) ① Рассмотрим
 $\triangle ABS$ - равност.
 SM - медиана и высота
 ② $AB \perp SM$
 $AB \perp SK \Rightarrow AB \perp (SM)$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт б не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Источники:

Основная волна 2017

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

Если $\begin{cases} m \perp a \\ m \perp b \end{cases}$, то $m \perp \alpha$

- 15** Решите неравенство
 $\log_{\sqrt{8}}(\log_7(x+1)) \geq 3$

$$\log_{\sqrt{8}}(\log_7(x+1)) \geq 3 \Leftrightarrow \log_8 \log_7(x+1) \geq 3$$

$$\log_7(x+1) \geq 8^3 \Leftrightarrow \log_7(x+1) \geq 512$$

$$\log_7(x+1) \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 7^2 \Leftrightarrow x+1 \geq 49$$

$$x \geq 48$$

ОТВЕТ: $[-1; -\frac{48}{5}]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».

Источники:

Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2020 (50 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Ященко 2019 (50 вар)
 Ященко 2019 (14 вар)



18 Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a+1)x + a^3}{\sqrt{2+x-x^2}} = 0$$

имеет два различных корня.

$$\begin{cases} ① x^2 - a(a+1)x + a^3 = 0 \\ ② 2+x-x^2 > 0 \end{cases}$$

Решим ②

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 > 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$

Решим ①

$$x^2 - a(a+1)x + a^3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 + a \\ x_1 x_2 = a^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a^2 \\ x_2 = a \end{cases} \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

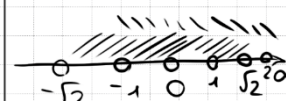
Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Источники:

Основная волна (Резерв) 2019

$$\begin{cases} ④ -1 < a^2 < 2 \\ a^2 - 2 < 0 \end{cases}$$

Найдем пересечение



19 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

- Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
- Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 1000?
- Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 129.

а) Если $n=3$, то

$$a_1 + a_2 + a_3 = 10$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 10$$

$$3a_1 + 3d = 10$$

Если $n=4$, то

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 10$$

$$4a_1 + 6d = 10$$

а) $a_1 = 1, d = 1$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) < 1000$$

$$(a_1 + a_n) \cdot n < 2000$$

$$(2a_1 + d \cdot (n-1)) \cdot n < 2000$$

ОТВЕТ: а) 2, 4, 1, 2, 3, 4
б) 44
в) 3, 6

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

б) $S_n = 129$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 129 \quad | \cdot 2$$

$$(a_1 + a_1 + d \cdot (n-1)) \cdot n = 258$$

$$(2a_1 + d \cdot (n-1)) \cdot n = 258$$

① Если $n=3$, то

$$2a_1 + 2d = 86$$

$$a_1 + d = 43$$

а) $a_1 = 1, d = 42$

② Если $n=6$, то

$$2a_1 + 5d = 43$$

$$a_1 = 19, d = 1$$

③ Если $n=43$, то

$$2a_1 + 42d = 6$$

④ Если $n=86$, то

$$2a_1 + 85d = 3$$

Решим меньше

$$a_1 + d \cdot (n-1) < 1000$$

$$(2a_1 + d \cdot (n-1)) \cdot n < 2000$$

$$(2 \cdot 1 + 1 \cdot (n-1)) \cdot n < 2000$$

$$(1+n) \cdot n < 2000$$

$$n^2 + n - 2000 < 0$$

$$D = 8001$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{8001}}{2}$$

$$n = \frac{-1 + \sqrt{8001}}{2}$$

$$89 < \sqrt{8001} < 90$$

$$88 < -1 + \sqrt{8001} < 89$$

$$44 < \frac{-1 + \sqrt{8001}}{2} < 44,5$$

$$\Rightarrow n = 44$$

Решим больше

$$129; 3; 6; 43; 86; 129; 258$$

Источники:

ЕГЭ Пробный ЕГЭ 2015

Досрочная волна 2013

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1 $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

2 $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

3 $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$





В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.