

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ
Ответ: -0,8

10 - 0,8

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

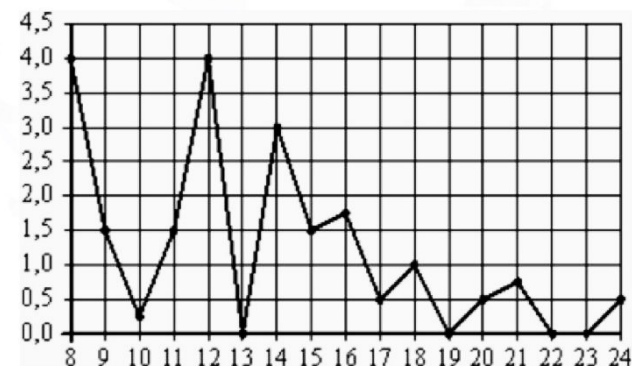
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1 Блокнот в магазине стоит 22 рубля. Сколько рублей заплатит покупатель за 70 блокнотов, если при покупке больше 50 блокнотов магазин делает скидку 5% от стоимости всей покупки?

Ответ: _____.

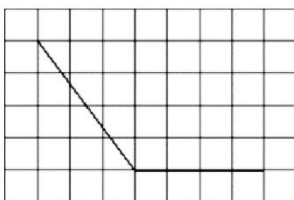
- 2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее суточное количество осадков выпадало за данный период. Ответ дайте в миллиметрах.



Ответ: _____.



- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите синус этого угла.



Ответ: _____.

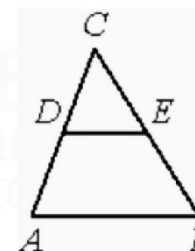
- 4 В группе туристов 300 человек. Их вертолётom доставляют в труднодоступный район, перевозя по 15 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В. полетит первым рейсом вертолётa.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $(6x - 13)^2 = (6x - 11)^2$.

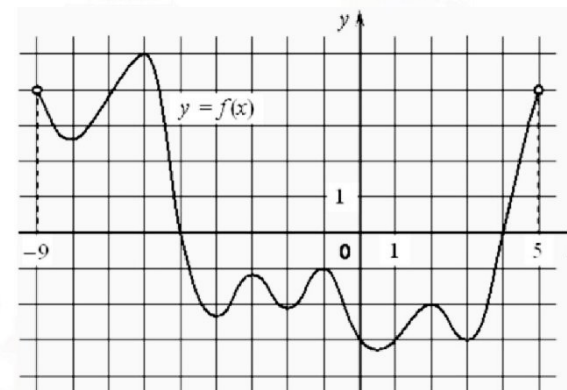
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC DE — средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 24. Найдите площадь треугольника ABC .



Ответ: _____.

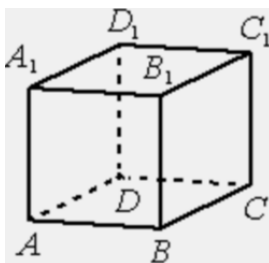
- 7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.



- 8 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми $A_1 D$ и $B_1 D_1$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите значение выражения

$$0,75^{\frac{1}{8}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 12^{\frac{7}{8}}.$$

Ответ: _____.

- 10 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 13t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 8 метров?

Ответ: _____.

- 11 Из городов А и В навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в город В на 12 часов раньше, чем велосипедист приехал в город А, а встретились они через 2 часа 30 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из города В в город А велосипедист?

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции

$$y = 1 + 27x - 2x\sqrt{x}.$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.



Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

- 14 Точка E — середина ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Докажите, что сечение куба плоскостью DEB_1 является ромбом.
б) Найдите угол между прямыми DE и BD_1 .

- 15 Решите неравенство

$$\frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0,5.$$

- 16 В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N ; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

- а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP:PN$.

- 17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 311 040 рублей?

- 18 Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{a - 2xy} = y - x + 7$$

имеет единственное решение.

- 19 В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

- а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?
б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?
в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	1463
2	4
3	0,8
4	0,05
5	2
6	96
7	9
8	60
9	12
10	1,4
11	15
12	81
13	а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$
14	$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$
15	$\{0\} \cup (1; 2)$
16	3:1
17	201 300
18	–24,5
19	а) да б) нет в) $\frac{31}{6}$



Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

Источники:

ФИПИ
Досрочная волна 2015

а) $\cos^2 x \cdot (2\cos x + \sqrt{3}) + (2\cos x + \sqrt{3}) = 0$
 $(2\cos x + \sqrt{3}) \cdot (\cos^2 x + 1) = 0$
 $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ $\cos^2 x + 1 = 0$
 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos^2 x = -1$
 Нет реш.
 $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

б) Отберём корни с помощью окружности.

Получим число: $x = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$
 $x = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

ОТВЕТ:

$$\text{а) } \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } -\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}.$$

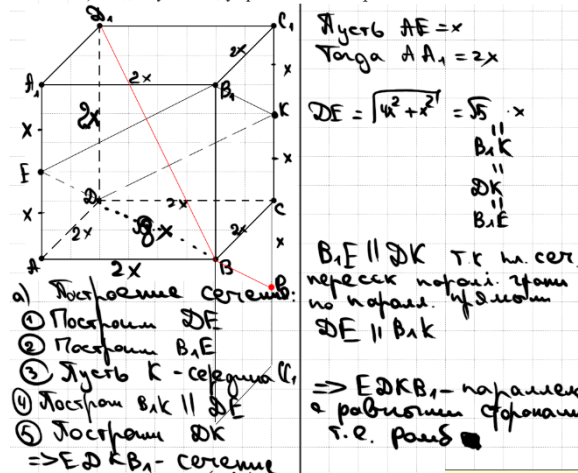
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



14

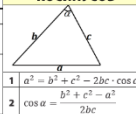
Точка E — середина ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Докажите, что сечение куба плоскостью DEB_1 является ромбом.
 б) Найдите угол между прямыми DE и BD_1 .



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт б не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



Источники:

Ященко 2018 (30 вар)

15

Решите неравенство $\frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0,5$.

Источники:

ГПР
 оэбпр
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Основная волна 2017
 Основная волна 2015

Пусть $3^x = t$
 $\frac{13 - 5t}{t^2 - 12t + 27} - \frac{1}{2} \geq 0$
 $\frac{26 - 10t - t^2 + 12t - 27}{2 \cdot (t-3)(t-9)} \geq 0$
 $\frac{-t^2 + 2t - 1}{2 \cdot (t-3)(t-9)} \geq 0 \quad | \cdot (-1)$
 $\frac{t^2 - 2t + 1}{2 \cdot (t-3)(t-9)} \leq 0$
 $\frac{(t-1)^2}{2 \cdot (t-3)(t-9)} \leq 0$
 $t=1$
 $3 < t < 9$
 $3^x = 1$
 $x=0$
 $3 < 3^x < 3^2$
 $1 < x < 2$

ОТВЕТ: $\{0\} \cup (1, 2)$

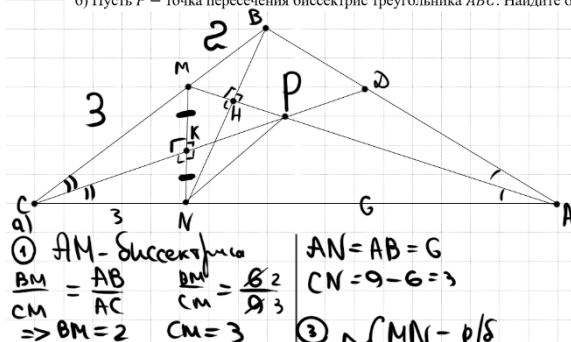
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек	1
ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».



- 16** В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N ; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

- а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP:PN$.



а) AM — биссектриса
 $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
 $\Rightarrow BM = 2, CM = 3$

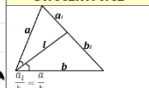
б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP:PN$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Источники:

Яценко 2018
Основная волна (Резерв) 2014

ТЕОРЕМА О БИСЕКТРИСЕ



б) $\triangle MPN$:
 PK — медиана и высота
 $\Rightarrow \triangle MPN$ — p/s
 $\Rightarrow PN = PM$

Найдём $\frac{AP}{PM}$:

② $\triangle ACM$:
 PC — биссектриса по т. о бисс.
 $\frac{AP}{PM} = \frac{AC}{CM} = \frac{9}{3} = 3$

17

Задача с развернутым ответом

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банком будет выплачено 311 040 рублей?

Пусть S — сумма долга
январь — месяц выплаты
 x — ежемесячный платеж

Дата	Сумма долга
Июль 20	S
Янв 21	$1,2S$
Июль 21	$1,2S - x$
Янв 22	$1,2^2 S - 1,2x$
Июль 22	$1,2^2 S - 1,2x - x$
Янв 23	$1,2^3 S - 1,2^2 x - 1,2x$
Июль 23	$1,2^3 S - 1,2^2 x - 1,2x - x$
Янв 24	$1,2^4 S - 1,2^3 x - 1,2^2 x - 1,2x$
Июль 24	$1,2^4 S - 1,2^3 x - 1,2^2 x - 1,2x - x = 0$

$$1 \cdot x_p + 0,2 \cdot x = 1,2 \times 12 = 6$$

$$\textcircled{1} 4 \cdot x = 311040$$

$$x = 77760$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{6}{5}\right)^4 \cdot S - \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot x - \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot x - \frac{6}{5} \cdot x - x = 0$$

$$\frac{6^4}{5^4} S = x \cdot \left(\frac{6^3}{5^3} + \frac{6^2}{5^2} + \frac{6}{5} + 1\right)$$

$$\frac{6^4}{5^4} S = x \cdot \frac{(216 + 180 + 150 + 125)}{5^3}$$

$$S = \frac{671}{5^3} \cdot \frac{77760 \cdot 5^4}{6^4} = 671 \cdot 300 = 201300$$

ОТВЕТ: 201300

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершённое, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь — вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокочастотен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общепонятен и достаточно ясен для того, чтобы попытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближённый к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод, использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

Источники:

ЕГЭ
осбп
Досрочная волна 2018

$$\frac{77760}{5} = 15552$$

18 Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{a - 2xy} = y - x + 7$$

имеет единственное решение.

$$\begin{cases} y - x + 7 \geq 0 \\ a - 2xy = (y - x + 7)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x - 7 \\ a - 2xy = (y - x + 7)^2 \end{cases}$$

Упростим:

$$a - 2xy = (y - x)^2 + 14(y - x) + 49$$

$$a - 2xy = y^2 - 2xy + x^2 + 14y - 14x + 49$$

$$x^2 - 14x + y^2 + 14y + 49 - a = 0$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 14y + 49 = a + 49$$

$$(x - 7)^2 + (y + 7)^2 = a + 49$$

Окружность с центром $(7; -7)$ и $R = \sqrt{a + 49}$

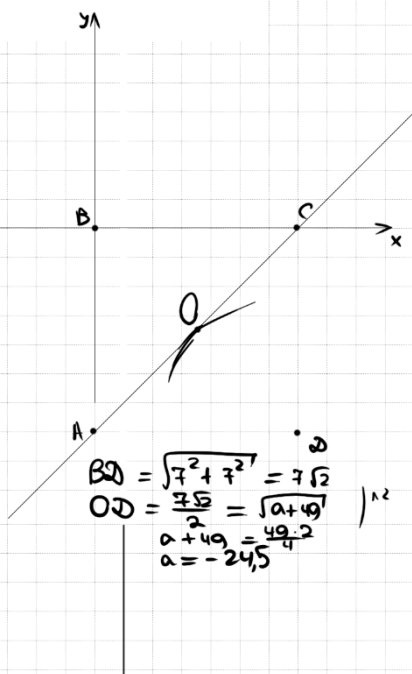
Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ОТВЕТ: $-24,5$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Источники:

Пробный ЕГЭ 2013



19 В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, меньшее 7. Васа в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

Источники:

Основная волна (Резерв) 2017

- а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?
 б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?
 в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

а)

4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Сумма Васи 6

Сумма Петя равна 36
 только если все числа
 таблицы 6, **НО**
 Сумма Васи не 6
 $\Rightarrow$ Не может

б) Пусть Сумма Васи = 6
 Тогда Сумма Пети = ?
 max

6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6
1	1	1	1	1	1

$\Rightarrow$ Сумма Пети = 31
 Отношение $\frac{31}{6}$
 Если Сумма Васи = 7
 Тогда Сумма Пети ≤ 36
 Отношение $\frac{36}{7}$
 Сравним $\frac{31}{6} > \frac{36}{7}$

ОТВЕТ:	а) Да, пример приведем
	б) Нет
	в) $\frac{31}{6}$
	6
Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – исковая оценка в пункте в;	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4





В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.