СПЕЦИФИКАЦИЯ
диагностической работы по математике
для 10-х классов общеобразовательных организаций г. Москвы,
участвующих в проекте «Инженерный класс в московской школе»

1. Назначение диагностической работы

Диагностическая работа проводится **22 апреля 2021 г.** с целью определения уровня освоения обучающимися 10-х классов общеобразовательных организаций г. Москвы курса математики в рамках проекта «Инженерный класс в московской школе».

2. Документы, определяющие характеристики диагностической работы

Содержание и основные характеристики проверочных материалов определяются на основе следующих документов:

– Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 № 413).

– Федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность (приказ Минпросвещения России от 20.05.2020 № 254).

– О сертификации качества педагогических тестовых материалов (приказ Минобразования России от 17.04.2000 № 1122).

3. Структура диагностической работы

Вариант диагностической работы состоит из 12 заданий.

Первая часть состоит из 9 заданий с кратким ответом.

Вторая часть состоит из 3 заданий с развёрнутым ответом. Все задания второй части представлены в двух вариантах (для разных УМК).

4. Условия проведения диагностической работы

Первая часть работы выполняется в компьютерной форме, вторая – на бланках тестирования. Продолжительность работы – **90 минут**, включая два пятиминутных перерыва через каждые 30 минут для гимнастики глаз (на рабочем месте).

При выполнении заданий разрешается пользоваться линейкой.

5. Порядок оценивания заданий и работы в целом

Верное выполнение каждого из заданий с кратким ответом (1–9) оценивается в 1 балл. Задание с кратким ответом считается выполненным, если записанный ответ совпадает с эталоном.

Задания с развёрнутым ответом (10–12) оцениваются в соответствии с критериями оценивания.

Максимальный первичный балл за выполнение всей работы – 15 баллов.

6. Распределение заданий диагностической работы по содержанию и проверяемым умениям

В таблице 1 представлено распределение заданий по элементам содержания*.

Таблица 1

Контролируемые элементы содержания	Число заданий
Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень	1
Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени	1
Рациональные уравнения	2
Иррациональные уравнения	1
Тригонометрические уравнения	1
Показательные уравнения	1
Логарифмические уравнения	1
Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений	2
Рациональные неравенства	1
Показательные неравенства	1
Логарифмические неравенства	1
Применение производной к исследованию функций и построению графиков	1
Планиметрия	2
Прямые и плоскости в пространстве	2
Многогранники	1
Измерение геометрических величин	4
Вероятности событий	1

* Некоторые задания могут относиться к нескольким КЭС и КТ.

В таблице 2 представлен перечень проверяемых умений**.

Таблица 2

Проверяемые умения	Число заданий
Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма	1
Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования	1
Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции	1
Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы	4
Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы	2
Вычислять производные и первообразные элементарных функций	1
Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции	1
Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)	2
Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы	2
Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры	1
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин	1
Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения	2
Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий	1
Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчёты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах	1

** Некоторые задания могут относиться к нескольким проверяемым умениям.

В **Приложении 1** представлен план демонстрационного варианта диагностической работы.

В **Приложении 2** представлен демонстрационный вариант диагностической работы.

Приложение 1

План демонстрационного варианта диагностической работы по математике для 10-х классов общеобразовательных организаций г. Москвы, участвующих в проекте «Инженерный класс в московской школе»

Позиция в тесте	Контролируемый элемент содержания
1	Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени
2	Иррациональные уравнения
3	Планиметрия
4	Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень
5	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений
6	Планиметрия
7	Вероятности событий
8	Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями
9	Рациональные уравнения
10.1	Тригонометрические уравнения
10.2	Показательные уравнения
11.1	Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми, расстояние между параллельными плоскостями
11.2	Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями
12.1	Применение производной к исследованию функций и построению графиков
12.2	Логарифмические неравенства

Приложение 2

Демонстрационный вариант диагностической работы по математике для 10-х классов общеобразовательных организаций г. Москвы, участвующих в проекте «Инженерный класс в московской школе»

Часть 1

В заданиях 1–9 дайте ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

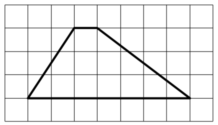
1 Вычислите: $1{,}7-5{,}7:\sqrt{4{,}5}\cdot\sqrt{2}$.

Ответ: ________________.

2 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{4x}{10x-3}}=0{,}4$.

Ответ: ________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите тангенс её бóльшего угла.



Ответ: ________________.

4 Найдите значение выражения $\left(\dfrac{a^3}{3b^4}\right)^{-3}:\dfrac{b^{12}}{2a^7}$ при $a=-1\dfrac{1}{5}$, $b=3{,}7$.

Ответ: ________________.

5 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$$T(t)=T_0+bt+at^2,$$

где t – время (в минутах), $T_0=1200$ Ê, $a=-15$ Ê/ì èí^2, $b=240$ Ê/ì èí. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1620 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ________________.

6 Основания равнобедренной трапеции равны 16 и 12. Радиус описанной окружности равен 10. Центр окружности лежит вне трапеции. Найдите высоту трапеции.

Ответ: ________________.

7 В коробке вперемешку лежат 26 пакетиков чая, из них 12 пакетиков – с зелёным чаем, остальные – с чёрным. Миша не глядя достаёт из коробки два пакетика. Найдите вероятность того, что оба пакетика окажутся с чёрным чаем.

Ответ: ________________.

8 Точка F не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что прямая CF перпендикулярна прямым AB и AD. Найдите тангенс угла между прямыми AF и BC, если $AB=2\sqrt{2}$, $BC=5\sqrt{5}$ и $CF=2\sqrt{3}$.

Ответ: ________________.

9 На изготовление 39 деталей первый рабочий тратит на 10 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 104 таких же деталей. Первый рабочий за час делает на 5 деталей больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ________________.

Часть 2

В заданиях 10–12 запишите подробное решение и ответ на бланке тестирования.

Выберите и выполните только ОДНО из заданий: 10.1 или 10.2.

10.1 Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)}=0$.

10.2 Решите уравнение $4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-2}+2\cdot 9^x-11\cdot 2^x=0$.

Настоящий текст является объектом авторского права. Свободное и безвозмездное использование любых материалов, входящих в состав данного текста, ограничено использованием в личных целях и допускается исключительно в некоммерческих целях. Нарушение вышеуказанных положений является нарушением авторских прав и влечёт наступление гражданской, административной и уголовной ответственности в соответствии с законодательством Российской Федерации. В случае самостоятельного использования материалов теста ГАОУ ДПО МЦКО не несёт ответственности за утрату актуальности текста.
© Московский центр качества образования.

***Выберите и выполните только <u>ОДНО</u> из заданий:* 11.1 *или* 11.2.**

11.1 Точка N не лежит в плоскости правильного шестиугольника $ABCDEF$. Известно, что прямая NC перпендикулярна прямым AB и AF. Найдите расстояние от точки N до прямой AB, если $AB = 2\sqrt{2}$ и $CN = \sqrt{3}$.

11.2 Основание пирамиды $SABC$ – равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной 12. Высота пирамиды SA равна 8. Точки E и F лежат на рёбрах AC и BS соответственно так, что $SF : FB = AE : EC = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми AS и EF.

***Выберите и выполните только <u>ОДНО</u> из заданий:* 12.1 *или* 12.2.**

12.1 Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых функция $f(x) = ax^4 + 4x^3 - 3x^2 - 5$ имеет на отрезке $[-2; 2]$ ровно одну точку минимума.

12.2 Найдите все значения a, при каждом из которых любое значение из отрезка $[2; 4]$ является решением неравенства $\log_a x + \log_2 x \geq \log_a 2$.

Ответы к заданиям 1–9

Номер задания	Правильный ответ
1	–2,1
2	–0,2
3	–0,75
4	37,5
5	2
6	2
7	0,28
8	0,4
9	8

Настоящий текст является объектом авторского права. Свободное и безвозмездное использование любых материалов, входящих в состав данного текста, ограничено использованием в личных целях и допускается исключительно в некоммерческих целях. Нарушение вышеуказанных положений является нарушением авторских прав и влечёт наступление гражданской, административной и уголовной ответственности в соответствии с законодательством Российской Федерации. В случае самостоятельного использования материалов теста ГАОУ ДПО МЦКО не несёт ответственности за утрату актуальности текста.
© Московский центр качества образования.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

10.1 Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)} = 0$.

Решение.
Перейдём к системе

$$\begin{cases} \sin 2x - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0, \\ \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0, \\ \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$\sin 2x + \cos x = 0;\ \cos x(2\sin x + 1) = 0,$$

откуда $\cos x = 0$ или $\sin x = -\dfrac{1}{2}$.

Получаем: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Если $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$, то $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0$ и $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0$.

Если $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$, то условие $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0$ не выполнено.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

10.2 Решите уравнение $4 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-2} + 2 \cdot 9^x - 11 \cdot 2^x = 0$.

Решение.
Преобразуем уравнение:

$$9 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot 9^x - 11 \cdot 2^x = 0;$$

$$9 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^x - 11 = 0.$$

Пусть $t = \left(\dfrac{9}{2}\right)^x$. Получаем:

$$\frac{9}{t} + 2t - 11 = 0;\ 2t^2 - 11t + 9 = 0,$$

откуда $t = 1$ или $t = 4{,}5$.

Значит, $\left(\dfrac{9}{2}\right)^x = 1$ или $\left(\dfrac{9}{2}\right)^x = \dfrac{9}{2}$, откуда $x = 0$ или $x = 1$.

Ответ: 0; 1.

Критерии оценивания задания 10	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**2**

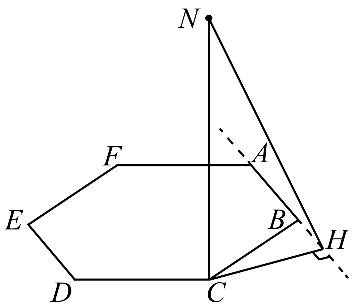
Настоящий текст является объектом авторского права. Свободное и безвозмездное использование любых материалов, входящих в состав данного текста, ограничено использованием в личных целях и допускается исключительно в некоммерческих целях. Нарушение вышеуказанных положений является нарушением авторских прав и влечёт наступление гражданской, административной и уголовной ответственности в соответствии с законодательством Российской Федерации. В случае самостоятельного использования материалов теста ГАОУ ДПО МЦКО не несёт ответственности за утрату актуальности текста.
© Московский центр качества образования.

11.1 Точка N не лежит в плоскости правильного шестиугольника $ABCDEF$. Известно, что прямая NC перпендикулярна прямым AB и AF. Найдите расстояние от точки N до прямой AB, если $AB = 2\sqrt{2}$ и $CN = \sqrt{3}$.

Решение.

Прямая CN перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости ABC, поэтому она перпендикулярна этой плоскости, а значит, точка C является проекцией точки N на плоскость ABC.

Пусть точка H – основание перпендикуляра, проведённого из точки C к прямой AB (см. рис.), тогда CH – проекция NH на плоскость шестиугольника.



По теореме о трёх перпендикулярах получаем, что прямые NH и AB перпендикулярны, следовательно, расстояние от точки N до прямой AB равно NH.

Угол B правильного шестиугольника равен $120°$, значит, угол CBH равен $60°$, а $NH = \sqrt{CN^2 + CH^2} = \sqrt{CN^2 + \left(BC \cdot \sin 60°\right)^2} = \sqrt{CN^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \cdot BC}{2}\right)^2} = 3$.

Ответ: 3.

11.2 Основание пирамиды $SABC$ – равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной 12. Высота пирамиды SA равна 8. Точки E и F лежат на рёбрах AC и BS соответственно так, что $SF : FB = AE : EC = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми AS и EF.

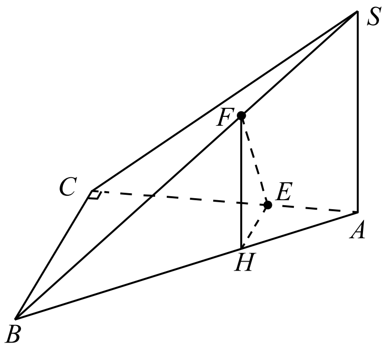
Решение.

Пусть точка H – пересечение прямой AB и прямой, проходящей через точку F параллельно прямой AS.

Угол между прямыми AS и EF равен углу между прямыми FH и FE.

По теореме Фалеса получаем, что $AH : HB = 1 : 2$.

Значит, треугольники AEH и ACB подобны, а $EH = \frac{AE}{AC} \cdot BC = \frac{1}{3} BC$, и треугольники BFH и BSA подобны, а $FH = \frac{BF}{BS} \cdot AS = \frac{2}{3} AS$.



Прямые AS и FH параллельны, следовательно, прямая FH перпендикулярна плоскости ABC. Из прямоугольного треугольника FEH находим

$$\operatorname{tg} \angle EFH = \frac{EH}{FH} = \frac{\frac{1}{3} BC}{\frac{2}{3} AS} = \frac{BC}{2AS} = \frac{AB}{2\sqrt{2}AS} = \frac{12}{2\sqrt{2} \cdot 8} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

Так как угол между прямыми AS и EF равен углу между прямыми FH и EF, то искомый угол равен $\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Критерии оценивания задания 11	**Баллы**
Обоснованно доказана перпендикулярность прямых.	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения. **ИЛИ** При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**2**

Настоящий текст является объектом авторского права. Свободное и безвозмездное использование любых материалов, входящих в состав данного текста, ограничено использованием в личных целях и допускается исключительно в некоммерческих целях. Нарушение вышеуказанных положений является нарушением авторских прав и влечёт наступление гражданской, административной и уголовной ответственности в соответствии с законодательством Российской Федерации. В случае самостоятельного использования материалов теста ГАОУ ДПО МЦКО не несёт ответственности за утрату актуальности текста.
© Московский центр качества образования.

12.1 Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых функция $f(x)=ax^4+4x^3-3x^2-5$ имеет на отрезке $[-2;2]$ ровно одну точку минимума.

Решение.

Область определения функции $f(x)$ – все действительные числа.

$f'(x)=4ax^3+12x^2-6x=2x(2ax^2+6x-3)$.

$f'(x)=0$, если $2x(2ax^2+6x-3)=0$.

1) При $a=0$ уравнение $f'(x)=0$ имеет два корня: $x_1=0$ и $x_2=2$.

Точка $x=2$ является точкой минимума функции $f(x)$ и лежит на отрезке $[-2;2]$.

2) При $a>0$ уравнение $f'(x)=0$ имеет три различных корня:

$x_1=0$, $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{9+6a}}{2a}$ и $x_3=\dfrac{-3+\sqrt{9+6a}}{2a}$, где $x_2<x_1<x_3$.

Точки x_2 и x_3 – точки минимума функции $f(x)$, причём

$x_2=\dfrac{-3-\sqrt{9+6a}}{2a}\ge -2$ при $a\ge\dfrac{15}{8}$;

$x_3=\dfrac{-3+\sqrt{9+6a}}{2a}\le 2$ при всех $a>0$.

Значит, при $a>0$ функция $f(x)$ на отрезке $[-2;2]$ имеет одну точку минимума при $a\in\left(0;\dfrac{15}{8}\right)$.

Получили, что функция $f(x)=ax^4+4x^3-3x^2-5$ имеет одну точку минимума на отрезке $[-2;2]$ при $a\in\left[0;\dfrac{15}{8}\right)$.

Ответ: $\left[0;\dfrac{15}{8}\right)$.

Критерии оценивания задания 12.1	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения. **ИЛИ** Получен ответ, отличающийся от верного включением точки $\dfrac{15}{8}$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**2**

12.2 Найдите все значения a, при каждом из которых любое значение из отрезка $[2;4]$ является решением неравенства $\log_a x+\log_2 x\ge\log_a 2$.

Решение.

Преобразуем неравенство при условиях $a>0$ и $a\ne1$:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 a}+\log_2 x-\frac{1}{\log_2 a}\ge0;\ \frac{(\log_2 a+1)\log_2 x-1}{\log_2 a}\ge0.$$

а) При $a>1$ получаем $\log_2 a>0$,

значит, $(\log_2 a+1)\log_2 x\ge1$; $\log_2 x\ge\dfrac{1}{\log_2 a+1}$; $x\ge2^{\frac{1}{\log_2 a+1}}$.

Получили, что $2^{\frac{1}{\log_2 a+1}}\le2$, откуда $\dfrac{1}{\log_2 a+1}\le1$; $\log_2 a\ge0$.

Значит, условие выполнено при всех $a>1$.

б) При $\dfrac12<a<1$ получаем $\log_2 a<0$, $\log_2 a+1>0$,

значит, $(\log_2 a+1)\log_2 x\le1$; $\log_2 x\le\dfrac{1}{\log_2 a+1}$; $0<x\le2^{\frac{1}{\log_2 a+1}}$.

Получили, что $2^{\frac{1}{\log_2 a+1}}\ge2^2$, откуда $\dfrac{1}{\log_2 a+1}\ge2$; $\log_2 a\le-\dfrac12$; $a\le\dfrac{\sqrt2}{2}$.

Значит, условие выполнено при всех $\dfrac12<a\le\dfrac{\sqrt2}{2}$.

в) При $0<a<\dfrac12$ получаем $\log_2 a<0$, $\log_2 a+1<0$,

значит, $(\log_2 a+1)\log_2 x\le1$; $\log_2 x\ge\dfrac{1}{\log_2 a+1}$; $x\ge2^{\frac{1}{\log_2 a+1}}$.

Получили, что $2^{\frac{1}{\log_2 a+1}}\le2$, откуда $\dfrac{1}{\log_2 a+1}\le1$; $\log_2 a\le0$; $a\le1$.

Значит, условие выполнено при всех $0<a<\dfrac12$.

г) При $a=\dfrac12$ получаем $1\ge0$.

Следовательно, $0<a<\dfrac{\sqrt2}{2}$ или $a>1$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{\sqrt2}{2}\right]$; $(1;+\infty)$.

Критерии оценивания задания 12.2	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	2
Допущена одна вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения. **ИЛИ** Получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\frac{\sqrt{2}}{2}$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**2**