Всероссийская олимпиада
школьников по экономике

Заключительный этап

Екатеринбург, 20–26 марта 2021 г.

10 класс

Решения

Содержание

Задача 1. *Блиц* *(12 баллов)*

В первом задании олимпиады вам предлагается ответить на несколько не связанных друг с другом коротких вопросов.

а) *(4 балла)* **Экономические Ахиллес и черепаха**. В феврале 2020 года было опубликовано видео беседы известного экономиста М. с известным экономистом Г. Одной из тем беседы стала экономическая гонка США и Китая. Экономист Г. заметил: «Если ВВП на душу населения в США растет с темпом 2 % в год, а в Китае — с темпом 6 % в год, то 4 % — это скорость, с которой Китай догоняет США, и в конце концов, он их догонит». Экономист М. парировал: «Если Китай, с ВВП на душу населения 10 000 долларов, растет на 6 % в год, он прибавляет по 600 долларов на человека. Если США, с ВВП на душу населения 64 000 долларов, растут на 2 % в год, они прибавляют примерно по 1 300 долларов на человека. Поскольку $1300 > 600$, Китай никогда не догонит США». Если приведенные числовые данные верны и темпы прироста ВВП на душу населения будут сохраняться, догонит ли Китай США? Если да, то в чем именно ошибка экономиста М.?

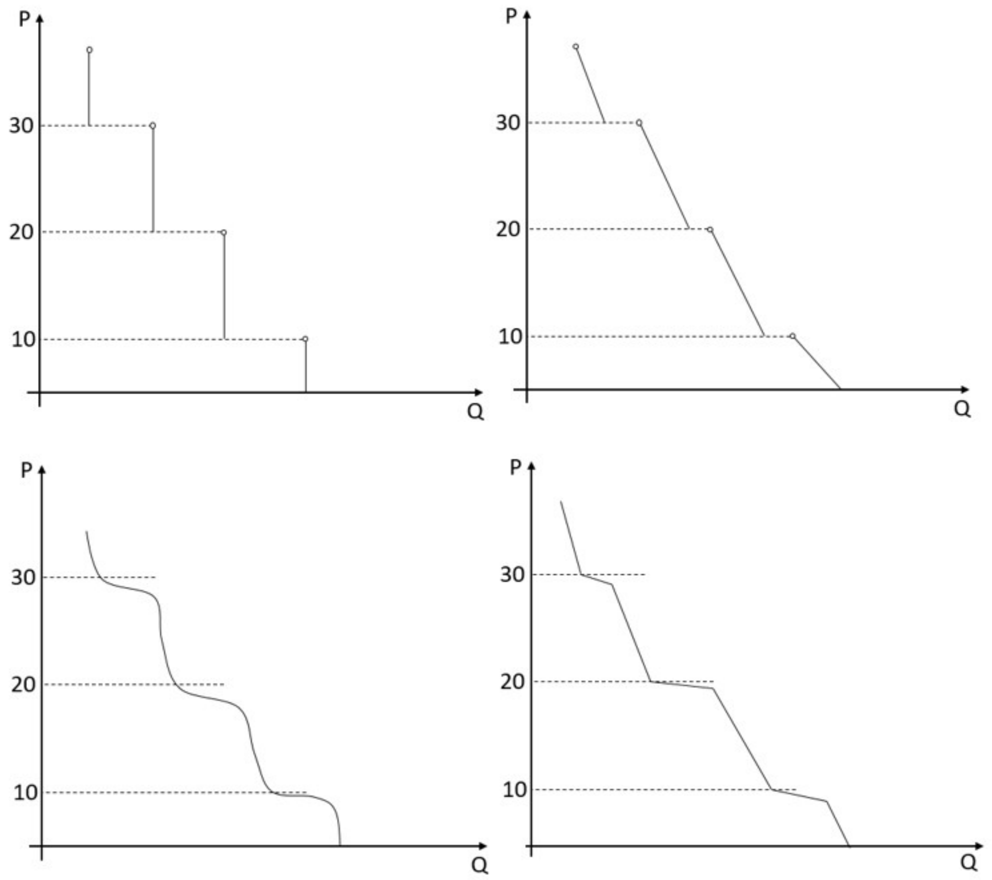
б) *(4 балла)* **Психологическое ценообразование**. Во многих магазинах можно встретить цены, которые немного меньше ближайших к ним целых или круглых чисел: 999 руб., 19,95 $, 29,99 € и т. п. Самое распространенное объяснение использования этой стратегии — особенность психологии восприятия цены некоторыми потребителями. Поняв, что это за особенность, изобразите возможный график кривой спроса, отражающий ее. Из графика должно быть очевидно, почему описанная стратегия ценообразования оптимальна для продавцов. Особенность психологии людей словами описывать не нужно, в ответе должен быть *только график*.

в) *(4 балла)* **Парадокс вакцинации**. Допустим, в разгар эпидемии, вызванной вирусом X, становится доступной вакцина от вируса X, обладающая лишь частичной эффективностью (например, 60 %). Приведите экономическое объяснение того, что в результате появления такой вакцины заболеваемость вирусом X может парадоксальным образом вырасти, а не сократиться.

Решение

а) Если приведенные числовые данные верны и темпы прироста ВВП на душу населения будут сохраняться, Китай, конечно, догонит США. Принимая за нулевой год тот, в котором ВВП на душу населения в США и Китае равны 64000 и 10000 соответственно, подушевой ВВП в США будет равен значению выражения $64000 \cdot 1{,}02^t$, а в Китае — $10000 \cdot 1{,}06^t$, где t — номер года. Ясно, что значение второго выражения при достаточно больших t превысит значение первого. Ошибка экономиста М. заключается в том, что он не учел, что в каждом году проценты будут считаться *от нового* уровня подушевого ВВП. Например, во втором году ВВП Китая вырастет не на 600, а уже на $1{,}06 \cdot 600 = 636$ долл. на человека, и т.д. По-другому ошибку экономиста М. можно сформулировать так: он перепутал простые и сложные проценты. (Когда мы говорим о темпах прироста некой величины, всегда имеются в виду сложные проценты.)

б) Подойдёт любая кривая спроса (с отрицательным наклоном!), такая что её эластичность в точках, где цена принимает значение чуть ниже чисел, оканчивающихся на ноль, по модулю гораздо больше, чем между этими числами. При этом график может быть как с разрывами, так и без. Пример верных графиков:



в) У вакцинированных больше стимулов к рискованному поведению (меньше стимулов к осторожному поведению). Например, вакцинированные могут перестать носить маски или начать встречаться большими компаниями. И при частичной эффективности вакцины такое рискованное поведение может привести к большему распространению вируса.

Примечание: Это сродни классическому эффекту Пельцмана — внедрение ремней безопасности может привести к росту количества аварий и смертей через рост рискованного поведения. Эффект Пельцмана прекрасно описан в книге С. Ландсбурга «Экономист на диване».

Схема проверки

а) Объяснение, что Китай сможет догнать США, основанное на верном описании механизма работы сложных и простых процентов (описание могло быть как словесным, так и даваться в виде верных расчётов по цифрам из задачи) – 4 балла.

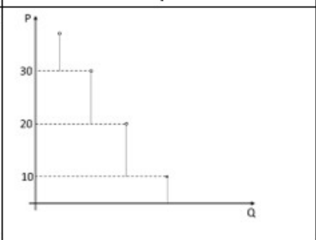
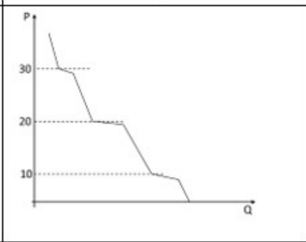
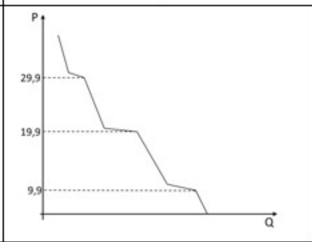
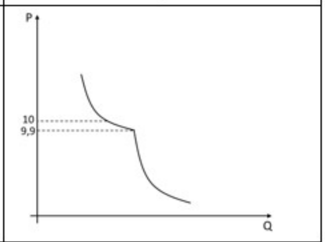
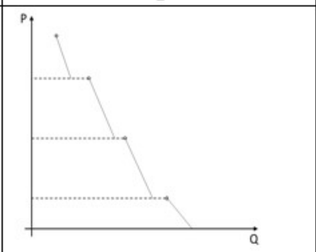
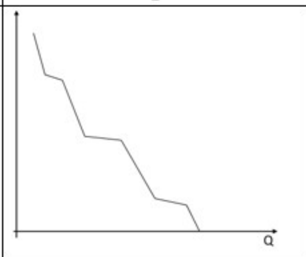
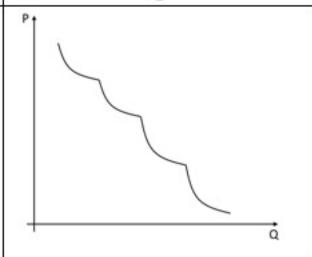
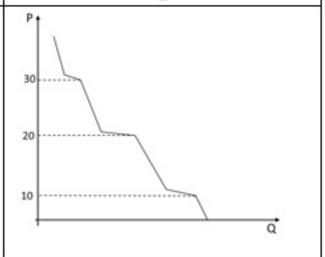
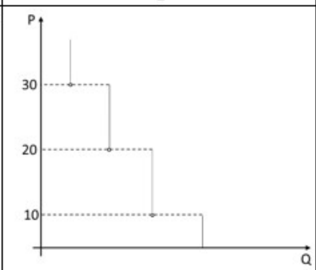
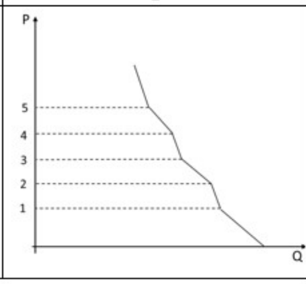
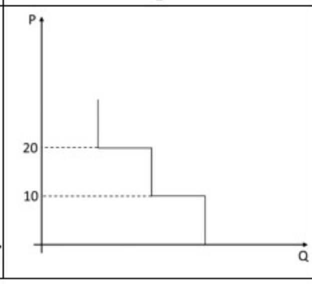
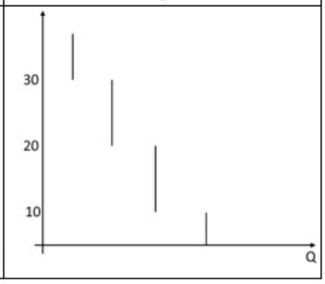
Если в качестве доказательства использовался только расчёт по приростам (с аргументом, что Китай догонит США в момент, когда приросты в денежном выражении сравняются) – 2 балла.

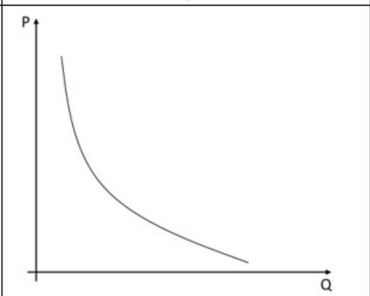
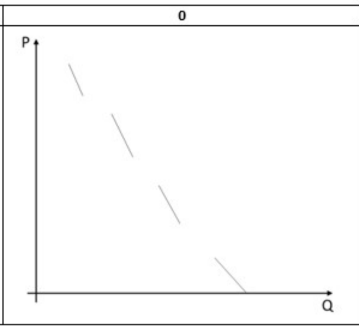
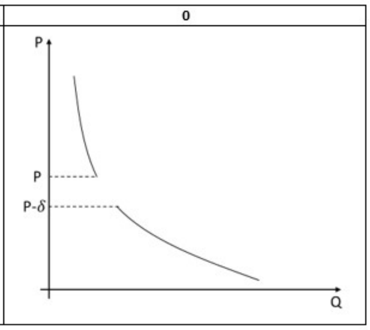
Аргумент, что экономист М. неправ, потому что не учитывал население в США и Китае – 0 баллов.

б) В качестве верного решения засчитывались такие графики, где в качестве пороговой цены использовались любые круглые числа, а также целые числа. Все решения делятся на несколько видов:

- полностью верный график – 4 балла
- график, в котором отсутствуют подписи на оси – 2 балла
- график, в котором есть существенная логическая ошибка (например, выколотая точка расположена не с той стороны), но присутствует идея о смене наклонов или о наличии разрывов – 1 балл
- неверный график (без смены наклона и без разрывов или график, в котором подразумевается бесконечная делимость товара, но при этом существуют цены, для которых спрос не определён) – 0 баллов

Приводим основные виды графиков, встречавшихся в работах с указанием, во сколько баллов оценивался этот вид:

Балл	4	4	4	4
График				
Балл	**2**	**2**	**2**	**1**
График				
Балл	**1**	**1**	**1**	**1**
График				

Балл	0	0	0
График			

в) Есть рассуждение о неосторожном поведении в случае вакцинации – 4 балла.

Рассуждения, не содержащие в себе идеи о неосторожном поведении, оценивались в 0 баллов.

Задача 2. *«Вычитание» КПВ* *(12 баллов)*

Страна A состоит из двух регионов — A_1 и A_2, в стране производится только масло (X) и пушки (Y). У вас есть информация об уравнениях кривых производственных возможностей страны A и региона A_1. Восстановите информацию о КПВ региона A_2: найдите ее уравнение (достаточно привести одно подходящее и доказать, что оно подходит) или докажите, что КПВ страны A и региона A_1 одновременно такими быть не могут. В задаче три пункта, комбинации КПВ приведены в таблице ниже. В пункте **в)** максимальное производство масла в регионе A_1 равно 1.

	КПВ страны A	КПВ региона A_1
а) *(4 балла)*	$Y = 4 - X^2$	$y_1 = 1 - x_1^2$
б) *(4 балла)*	$Y = 8 - 2X^2$	$y_1 = 1 - x_1^2$
в) *(4 балла)*	$Y = 2 - X$	$y_1 = 1 - \sqrt{1 - (1 - x_1)^2}$

Решение

а) *Догадка:* Заметим, что $y_2(0) = 3$. Далее заметим, что при каждом фиксированном $x \leqslant 1$ две приведенные КПВ как раз отличаются на эту константу 3. Это значит, при оптимальном распределении $X \leqslant 1$ между двумя регионами весь Икс производится в первом регионе. Это наводит на мысль о том, что при $X > 1$ максимально возможное количество Икса (единица) производится в первом регионе, а весь оставшийся Икс — во втором, то есть $X = 1 + x_2$, $Y(X) = y_1(1) + y_2(x_2) = 0 + y_2(x_2)$. Но тогда $y_2(x_2) = Y(1 + x_2) = 4 - (x_2 + 1)^2$. Докажем, что действительно $y_2(x_2) = 4 - (x_2 + 1)^2$.

Обоснование: Проверим, что сумма КПВ $y_1(x_1) = 1 - x_1^2$ и $y_2(x_2) = 4 - (x_2 + 1)^2 = 3 - 2x_2 - x_2^2$ действительно равна $Y(X) = 4 - X^2$. Сложить КПВ можно, например, через анализ альтернативных издержек. В первом регионе они равны $|y_1'(x_1)| = 2x_1$, а во втором $|y_2'(x_2)| = 2 + 2x_2$. Отсюда следует цепочка соотношений

$$|y_1'(x_1)| \leqslant |y_1'(1)| = 2 = |y_2'(0)| \leqslant |y_2'(x_2)|,$$

то есть альтернативные издержки *любой* единицы Икса в первом регионе не больше, чем альтернативные издержки *любой* единицы Икса во втором регионе. Значит, действительно весь Икс нужно по возможности производить в первом регионе: $x_1^*(X) = X$ при $X \leqslant 1$ и $x_1^*(X) = 1$ при $X > 1$. Отсюда следует, что $Y(X) = 4 - X^2$, что и требовалось.

Кроме того, найти сумму этих двух квадратичных КПВ можно найти и без использования производной, методом, описанным в решении задачи 4 Регионального этапа этой олимпиады: при каждом X поставим задачу оптимизации $Y = y_1(x_1) + y_2(X - x_1) = 1 - x_1^2 + 3 - 2(X - x_1) - (X - x_1)^2 \longrightarrow \max$ по x_1 при условиях $x_1 \in [0,1]$, $x_1 \leq X$, $X - x_1 \in [0,1]$. Эту задачу можно решить находя вершину параболы, и проверяя, попадает ли она в допустимый интервал.

Доказательство единственности в задаче не требовалось, но можно доказать, что других решений нет. См. примечание 3 внизу.

Ответ: $y_2 = 4 - (x_2 + 1)^2$.

б) Заметим, что $y_2(0) = 7$. Если всего нужно произвести $X \in (0;1]$ единиц Икса, то всегда доступен вариант производить весь Икс в первом регионе. Суммарное производство Игрека в этом случае будет равно $Y = 1 - X^2 + 7 = 8 - X^2$. Но по условию и по определению суммарной КПВ *максимальное* производство Игрека в стране равно $8-2X^2 < 8-X^2$. Противоречие. Ни одна функция $y_2(x_2)$ не может являться КПВ второго региона.

Ответ: КПВ страны и первого региона такими одновременно быть не могут.

в) Перепишем уравнение КПВ региона A_1 как $(1 - y_1)^2 + (1 - x_1)^2 = 1$. Это уравнение окружности радиуса 1 с центром в точке $(1;1)$. КПВ первого региона соответствует части этой окружности, лежащей внутри области $y \leqslant 1$, $x \leqslant 1$. Заметим, что альтернативные издержки производства Икса в этом регионе не возрастают, а убывают.

Догадка: Мы знаем, что $y_2(0) = 1$ и что $y_2(1) = 0$. При этом суммарная КПВ линейна, и поэтому интуитивно кажется правильным, чтобы и $y_2(x_2)$ была хотя бы на каком-то участке линейна. Поэтому рассмотрим самую простую КПВ, имеющую линейный участок и удовлетворяющую $y_2(0) = 1$, $y_2(1) = 0$, а именно $y_2(x_2) = 1 - x_2$.

Оказывается, эта КПВ и будет ответом.

Обоснование: Докажем, что сумма КПВ $y_1(x_1)$ и $y_2(x_2) = 1 - x_2$ как раз равна $Y(X) = 2 - X$. Сначала покажем, что при $y_2(x_2) = 1 - x_2$ для любого $X \in [0;2]$ мы не можем достичь уровня $Y > 2-X$, а затем покажем, что уровня $Y(X) = 2-X$ мы достичь можем.

Из вида КПВ первого региона следует, что $y_1(x_1) \leqslant 1 - x_1$ для любого $x_1 \in [0;1]$. Тогда запишем соотношения

$$y_1 \leqslant 1 - x_1$$

$$y_2 = 1 - x_2$$

Складывая их, получаем, что $Y = y_1 + y_2 \leqslant 2 - x_1 - x_2 = 2 - X$. Значит, мы не можем достичь большего уровня производства, чем $Y = 2-X$. Этот вывод можно получить и с помощью графического анализа векторной суммы двух множеств производственных возможностей.

Мы можем достичь уровня $Y = 2-X$ так: при $X < 1$ производим весь Икс в регионе A_2, а при $X > 1$ — весь Игрек в регионе A_1. При $X = 1$ можно выбрать любой из этих двух вариантов. Нетрудно проверить, что производство Игрека будет равно $2 - X$.

Следовательно, сумма КПВ $y_1(x_1)$ и $y_2(x_2) = 1 - x_2$ равна $Y(X) = 2 - X$.

Доказательство единственности также не требовалось, но можно доказать, что других решений нет. См. примечание 3 внизу.

Ответ: $y_2 = 1 - x_2$.

Примечание 1: В пункте в) мы пользовались только тем, что $y_1(0) = 1$, $y_1(1) = 0$ и что $y_1(x_1) \leqslant 1 - x_1$. Поэтому ответ не изменился бы, если бы в условии стояла *любая* функция с этими свойствами, например $y_1(x_1) = \frac{1-x_1}{1+\sin^2(x_1^3)}$.

Примечание 2: В общем случае «разность» двух КПВ может быть не единственна. Действительно, возьмем условие третьего пункта, но теперь вычтем из $2-X$ не $y_1(x_1)$, а $y_2(x_2) = 1 - x_2$. В силу примечания 1, наряду с $y_1(x_1)$ из условия, разностью этих КПВ будет также и любая функция, удовлетворяющая $y_1(0) = 1$, $y_1(1) = 0$, $y_1(x_1) \leqslant 1 - x_1$, например просто $y_1 = 1 - x_1$.

Примечание 3: Для полноты картины приведем доказательство того, что других решений в пункте а) нет (в пункте в) рассуждение аналогичное). Других решений для $y_2(x_2)$ быть не может, так как каждая точка на $y_2(x_2) = 4 - (x_2 + 1)^2$ «используется» в оптимуме при каком-то X. Поэтому если $y_2(x_2) > 4 - (x_2 + 1)^2$ для какого-то $x_2 = a$, это означало бы, что при X таком, что $x_2^*(X) = a$ можно получить суммарное производство Игрека большее, чем $Y(X)$, что невозможно. Значит, $y_2(x_2) \leqslant 4 - (x_2 + 1)^2$ для всех x_2. Но если теперь $y_2(x_2) < 4 - (x_2 + 1)^2$ для какого-то $x_2 = a$, максимальное производство Игрека при X таком, что $x_2^*(X) = a$, будет меньше $Y(X) = 4 - X^2$. Значит, $y_2(x_2) = 4 - (x_2 + 1)^2$.

Схема проверки

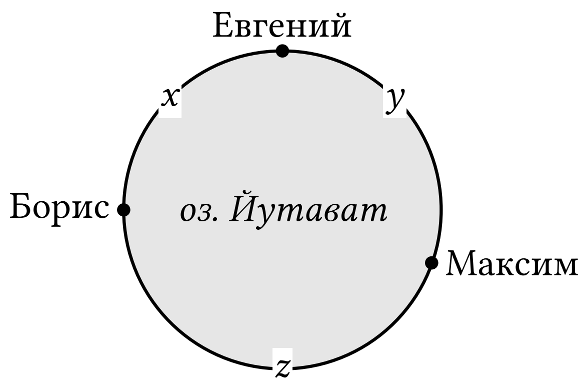
а) *0 баллов:* неверный пример и неверный ответ; *только 1 балл:* верный пример без вывода функции КПВ 2-ого региона, либо с неверным выводом (или верный пример без обоснования вида КПВ, либо с невернымобоснованием); *только 2 балла:* вывод правильного вида функции КПВ 2-ого региона, но без полного обоснования; *только 3 балла:* верный вывод функции КПВ 2-ого региона, но допущена арифметическая ошибка, однако, при этом проверено, что полученная функция не приведет к данной в условии суммарной КПВ, откуда сделан неверный вывод о возможности существования КПВ 2-ого региона; *4 балла:* полное верное решение, при этом доказано, что $max y_1 + y_2$ - есть данная в условии КПВ страны.

б) *0 баллов:* неверные рассуждения при любом ответе, либо частично верные рассуждения, которые привели к неверному ответу; *только 2 балла:* верные рассуждения (не доведенные до конца) которые привели к верному ответу (например, сравнение альтернативных издержек в отдельных точках, либо дан частный вид функции КПВ 2-ого региона); *только 3 балла:* сравнение альтернативных издежек в допустимых интервалах, но отсутствует дальнейшее обоснование, почему это сравнение приводит к невозможности построения фукнции КПВ 2-ого региона; *4 балла:* верные рассуждения, приведшие к верному ответу.

в) *0 баллов:* неверные рассуждения; *только 1 балл:* дан верный ответ без обоснования либо с неверным обоснованием; *только 2 балла:* дан верный ответ, показано, $y_1 + y_2 = 2 - X$, но не доказано, что это максимум; *только 3 балла:* дан верный ответ, но не обоснован один из участков линейной КПВ; *4 балла:* верные рассуждения, которые привели к верному ответу.

Задача 3. *Круглое озеро* *(12 баллов)*

Озеро Йутават представляет собой идеальный круг. Борис, Евгений и Максим ловят в этом озере рыбу и продают ее местным жителям, которые живут вокруг озера. Каждый день рыбаки независимо друг от друга выбирают, в каких точках на берегу (окружности) озера организовать продажу рыбы. Жители распределены вокруг озера равномерно (то есть на каждый километр расстояния вдоль окружности приходится одинаковое и достаточно большое число жителей). Цена килограмма рыбы исторически сложилась на определенном уровне, она достаточно высока, чтобы окупать усилия и снасти рыбаков, никто из них не считает уместным ее менять. Каждый рыбак ловит достаточно много рыбы, чтобы хватило любому количеству потребителей.



Каждый местный житель потребляет по 1 килограмму рыбы в день, покупая ее у ближайшего из трех рыбаков (по расстоянию, которое нужно проделать по окружности). Если расстояние от потребителя до двух ближайших рыбаков одинаково, то он принимает решение произвольным образом (этим потребителем можно пренебречь).

Рыбаки, таким образом, конкурируют за потребителей, и каждый из них хочет выбрать свое расположение на берегу озера так, чтобы максимизировать выручку. Два или три рыбака могут выбрать одну и ту же точку для продажи, в таком случае они будут делить выручку на равные части.

По итогам каждого дня каждый рыбак оценивает объем продаж за день и следующим образом принимает решение, где организовать продажи на следующий день:

- Если его сегодняшнее положение принесло ему максимальную дневную выручку среди всех вариантов его размещения (с учетом фактического положения двух других), то на следующий день он остается в той же точке.
- Если условие предыдущего пункта не выполнено, он выбирает какую-то другую точку, в которой при текущем расположении других рыбаков его выручка была бы больше.

По прошествии нескольких дней все рыбаки решили больше никуда не двигаться и навсегда остались в некоторых точках[1]. Опишите их все возможные финальные расположения через ограничения на параметры x, y, z (расстояния между рыбаками). Считайте, что длина окружности $x + y + z = 1$.

Решение

Заметим, что если рыбак находится на дуге длины l, то он получает долю рынка $\frac{l}{2}$, деля пополам с соседом (соседями, если два других рыбака располагаются в одной точке) дугу слева и деля пополам с соседом (соседями) дугу справа от себя. Далее рассмотрим несколько случаев взаимного расположения рыбаков.

[1]Такое расположение является *равновесием Нэша* в этой задаче.

Случай 1: все три рыбака находятся в одной точке. В этом случае каждый рыбак получает треть рынка. Если Борис сместится в другую точку, то получит половину рынка. Следовательно, это не равновесие **(+1 балл)**.

Случай 2: два рыбака находятся в одной точке (A), третий – в другой (B). В этом случае рыбак, находящийся в точке B, получает половину рынка, а каждый из рыбаков, занявших точку A, будет продавать рыбу четверти от всех потребителей.

Случай 2a: точки A и B находятся не на одном диаметре. В этом случае длина одной из двух дуг AB больше половины длины окружности, а ее половина – больше четверти длины окружности. Следовательно, любому из рыбаков, находящихся в точке A, выгодно сместиться в любую внутреннюю точку большей дуги AB – это позволит продавать рыбу более чем четверти потребителей. Поэтому рассматриваемое расположение рыбаков не является равновесием **(+1 балл)**.

Случай 2b: точки A и B находятся на одном диаметре. Докажем, что такая расстановка рыбаков является равновесием.

Рыбаку из точки B невыгодно переместиться в точку A – тогда он уменьшит свою долю до 1/3. Любое другое изменение положения рыбаком из точки B сохранит за ним половину всего рынка. Таким образом, у этого рыбака нет возможности увеличить свою долю рынка **(+1 балл)**.

Рыбак из точки A, переместившись в точку B, сохранит за собой четверть рынка. Перемещение на любую внутреннюю точку дуги AB позволит рыбаку получить половину от половины рынка, то есть четверть всего рынка. Значит, рыбакам из точки A изменять свое положение нет смысла, а все ситуации, описываемые случаем 2b:

$$x = 0, y = z = \frac{1}{2}; \quad y = 0, x = z = \frac{1}{2}; \quad z = 0, x = y = \frac{1}{2}, \tag{3.1}$$

являются равновесными **(+1 балл)**.

Случай 3: все три рыбака находятся в разных точках ($x,y,z > 0$). В этом случае Евгений получает долю рынка $\frac{x}{2} + \frac{y}{2}$, Борис – $\frac{x}{2} + \frac{z}{2}$, Максим – $\frac{y}{2} + \frac{z}{2}$.

Заметим, что любое отклонение рыбака по той же самой дуге, ограниченной двумя другими рыбаками, не приведет к изменению его доли рынка: в любой точке дуги он забирает потребителей с половины этой дуги, а длина такой дуги зафиксирована положениями двух других рыбаков **(+2 балла)**.

Отклонение в точку, занимаемую другим рыбаком, приведет к получению $\frac{1}{4}$ от всей доли рынка. Для того, чтобы такое отклонение было невыгодным ни одному из рыбаков, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \geqslant \frac{1}{4} \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{2} \geqslant \frac{1}{4} \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \geqslant \frac{1}{4} \end{cases} \tag{3.2}$$

или

$$\begin{cases} x + y \geqslant \frac{1}{2} \\ x + z \geqslant \frac{1}{2} \\ y + z \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.3}$$

или

$$\begin{cases} z \leqslant \frac{1}{2} \\ y \leqslant \frac{1}{2} \\ x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.4}$$

(+2 балла).

Наконец, последнее возможное отклонение рыбака – на противоположную дугу. Тогда Евгений сможет плучить $\frac{z}{2}$, Борис – $\frac{y}{2}$, а Максим – $\frac{x}{2}$. Чтобы ни одному из рыбаков не было выгодно отклоняться, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \geqslant \frac{z}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{2} \geqslant \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \geqslant \frac{x}{2} \end{cases} \tag{3.5}$$

или

$$\begin{cases} x + y \geqslant z \\ x + z \geqslant y \\ y + z \geqslant x \end{cases} \tag{3.6}$$

или

$$\begin{cases} z \leqslant \frac{1}{2} \\ y \leqslant \frac{1}{2} \\ x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.7}$$

(+4 балла).

Объединив любую из систем (3.2)-(3.4) с любой из систем (3.5)-(3.7) и вспомнив ограничение случая 3 ($x, y, z > 0$), получим окончательное описание множества равновесий в этом случае:

$$\begin{cases} 0 < z \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 < y \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.8}$$

Итоговый ответ в задаче описывается объединением множеств (3.1) и (3.9). Несложно видеть, что это множество совпадает со множеством

$$\begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.9}$$

Схема проверки

Основные этапы решения задачи оценивались в соответствии с разбалловкой в решении.

Вычитался 1 балл, если в ответе оставались строгие неравенства вместо нестрогих.

Вычитался 1 балл, если в случае общего положения система была выписана правильно, но при ее решении была допущена арифметическая ошибка, несущественно повлиявшая на итоговый ответ.

Задача 4. *Эксперимент с медицинским страхованием* *(12 баллов)*

В 1974–1982 гг. корпорация RAND проводила эксперимент по заказу Министерства здравоохранения и социальных служб США. В ходе эксперимента 2000 американских семей были случайным образом распределены на четыре группы: первой группе организаторы стали оплачивать все медицинские расходы, второй группе — 75 %, третьей — 50 %, и четвертой — лишь 5 %. Никаких других страховок, в том числе государственных, у семей не было. Одной из целей эксперимента было узнать, насколько фактический рост цены на медуслуги приведет к снижению их потребления, то есть к уменьшению количества походов к врачу, приема лекарств, и т. д.

Фактически организаторы ставили задачу измерить эластичность спроса на услуги здравоохранения. До эксперимента было распространено мнение, что спрос на медицину близок к абсолютно неэластичному: за здоровье можно отдать любые деньги. Выяснилось же, что дуговая эластичность спроса составляет примерно −0,2, причем даже в ситуациях, угрожающих жизни.

а) *(4 балла)* Почему государству важно знать значение этой эластичности и функцию спроса на медуслуги?

б) *(4 балла)* Эксперимент был организационно сложным и дорогостоящим (для него пришлось по сути запускать отдельную страховую компанию!). Казалось бы, можно поступить проще: взять данные о том, сколько раз в год люди ходят к врачу и сколько они платят за медицинские услуги. Имея такие данные, можно просто нанести на график все имеющиеся комбинации (цена, количество) и получить тем самым оценку кривой спроса. Объясните, почему полученная таким образом кривая будет, скорее всего, систематически отличаться от истинной. Почему в описанном выше эксперименте этой проблемы не возникает?

в) *(4 балла)* Наконец, рассмотрим еще один возможный неэкспериментальный дизайн исследования. В США каждый житель получает полную государственную медицинскую страховку (Medicare) начиная с 65 лет. До 65 лет человек оплачивает из своего кармана существенную (известную) долю медицинских расходов, а после – нулевую. Предположим, что кривая спроса на медуслуги линейна. Таким образом, чтобы восстановить ее, достаточно знать две точки. Одну точку возьмем, взяв данные о цене и количестве для тех, кому 64 года, а вторую – для тех, кому 65. Поскольку те, кому 64, и те, кому 65, почти не отличаются по любым характеристикам, влияющим на величину спроса, различие в величине спроса между двумя группами будет полностью продиктовано именно разницей в цене, и мы получим верную кривую спроса, как если бы мы проводили эксперимент. Приведите причину, по которой данный подход, тем не менее, может не сработать, и укажите, в какую сторону измеренная эластичность спроса будет отличаться от истинной.

Решение

а) Государству важно знать, как изменится загрузка системы здравоохранения при увеличении или уменьшений субсидирования пользования ею (переходах к более «бесплатной» или менее «бесплатной» медицине). Кроме того, спрос отражает готовность потребителей платить за медицину, то есть предельную норму замещения между медициной и другими благами с точки зрения предпочтений потребителей. Знание ее важно для принятия решений на государственном уровне, таких как доля бюджета, выделяемого на здравоохранение, те же объемы субсидий, решения о том, при какой максимальной цене оплачивать данное лекарство из бюджета (актуально для Европы), и т.д.

б) В таких данных цена, уплачиваемая потребителем, будет эндогенна, то есть определяться, в том числе, его личными решениями. Эти решения зависят от ненаблюдаемых факторов, которые влияют и на величину спроса. Тогда полученная зависимость $Q_d(P)$ будет отражать не только эффект цены на количество, который мы хотим измерить, но и эффект этих третьих факторов и на цену, и на количество. Мы увидим сумму этих эффектов, но не узнаем, чему равен первый эффект в отдельности. В данном случае пример такого третьего фактора находится просто: это уровень здоровья человека, известный ему, но не известный исследователю. Менее здоровые люди будут покупать более щедрую страховку, что снизит для них цену медуслуг, но одновременно, в силу более слабого здоровья, будут потреблять больше этих услуг. Это даст иллюзию того, что снижение цены ведет к росту количества. Измеренная эластичность спроса будет завышена. При проведении эксперимента такой проблемы не возникнет, так как цена является полностью экзогенной.

в) В отличие от эксперимента, в котором каждый человек попадает только в одну из нескольких групп, здесь человек попадает сначала в группу 64-летних, а затем в группу 65-летних. Предвидя в 64 года то, что в 65 лет страховка все оплатит, человек может просто отложить поход к врачу до наступления 65-летнего возраста. Это занизит измеренную величину спроса в группе высокой цены и завысит в группе низкой цены. Измеренная эластичность спроса в этом случае будет завышена.

Схема проверки

а) 2 балла ставится за разумное соображение о том, как государство в принципе могло бы использовать оцененную эластичность. Основная цель - корректно просчитывать эффект от мер в области субсидирования здравоохранения, регулирования цен или других мер государственной политики. Возможны другие варианты ответа при корректной мотивации. Соображения, для которых нет необходимости в оценке эластичности (просто максимизация общественного благосостояния, к примеру), не принимаются.

2 балла ставится за привязку этих соображений к рассматриваемой задаче: государственная политика подразумевает повышение благосостояния граждан, а здоровье - одна из его составляющих. Значит, государство заинтересовано в разработке мер, повышающих здоровье граждан. Значит, оправдано субсидирование здравоохранения с целью большего охвата населения медицинскими услугами. Аргумент без соответствующей логической цепочки не оценивается.

Просто размышления о том, что эластичность может помочь что-то сделать (оценить изменение благосостояния общества при введении субсидий, оценить степень монопольной власти фирм) без объяснения, зачем это государству, получают 0 баллов по второму критерию.

б) 2 балла ставится за корректный пример ненаблюдаемого фактора, влияющего на величину спроса (доход, уровень здоровья индивида, другие разумно мотивированные факторы), с объяснением механизма, как эти факторы влияют именно на спрос, а не его величину (просто упоминание различий в доходе, к примеру, не оценивается)

1 балл ставится за объяснение механизма, как пропущенный фактор мешает оценить спрос по имеющимся (без эксперимента) данным. По сути, имеющиеся в данных точки - это пересечения разных кривых спроса с (в общем случае разными) кривыми предложения, что не позволяет получить оценки на их основе. Если в работе упомянут ненаблюдаемый фактор, влияющий на доход, но не объяснено, в чем же в итоге проблема с имеющимися данными, за этот критерий ставится 0 баллов.

1 балл ставится за соображение о том, что при проведении эксперимента группы становятся сопоставимыми друг с другом (в том числе усредняются доходы, в каждой группе встречаются люди с разным состоянием здоровья, разного возраста, и так далее) и все различия в потреблении медицинских услуг объясняются только различиями в цене.

в) 2 балла ставится за рассуждения о том, почему сравнение 64 и 65-летних не даст корректную оценку спроса. Основной аргумент - отложенный спрос. Другой аргумент, который может быть принят, - неоднородность спроса для людей разного возраста: оценить общую кривую спроса только по пожилым не получится, потому что у молодёжи она будет другая. Аргумент, что цены для 64 и 65-летних разные и в силу этого у них разный спрос, не принимаются (это рассуждения о величине спроса, а не о самой кривой спроса)

2 балла ставится за правильный ответ, в какую сторону будет смещена оценка эластичности.

Важное замечание: во многих работах приводились рассуждения, явно противоречащие условию задачи (рассматривался случай нелинейного спроса, приводились рассуждения о том, что люди в 64 и 65 значительно отличаются). В таких работах пункт в) оценивался в 0 баллов.

Во всех пунктах проверяющий имеет право снижать балл за пункт в случае, если помимо правильного ответа в работе приводятся некорректные рассуждения и предпосылки.

Задача 5. *Рынок заемных средств* *(12 баллов)*

На рынке заемных средств страны Альфа предложение формируется домашними хозяйствами, величина сбережений которых зависит от ставки процента: $S(r) = 1800r$, где r — годовая ставка процента в долях. Спрос на заемные средства могут формировать только пять компаний, каждая из которых планирует реализовать инвестиционный проект сроком в один год (во всех случаях издержки возникают вначале года, а доход от реализации проекта — в конце года). Собственные средства для инвестиций компании не используют. Данные о планируемых издержках и доходах этих компаний представлены в таблице.

Компания	Издержки	Доход
A	100	110
C	200	240
D	300	390
E	100	135
F	50	100

Ставка процента в стране Альфа регулируется центральным банком (других инструментов у центрального банка нет), и его цель состоит в том, чтобы максимизировать объем инвестиций, осуществляемых в экономике.

а) *(5 баллов)* Какие компании захотят реализовывать инвестиционные проекты, если годовая ставка процента равна 33 % ($r = 0{,}33$)?

б) *(7 баллов)* Один политик высказался, что для достижения максимального уровня инвестиций центральному банку страны Альфа давно пора снизить процентную ставку до нуля. Согласны ли вы с этим утверждением? Если да, объясните. Если нет, найдите ставку процента, которая обеспечит наибольший уровень инвестиций.

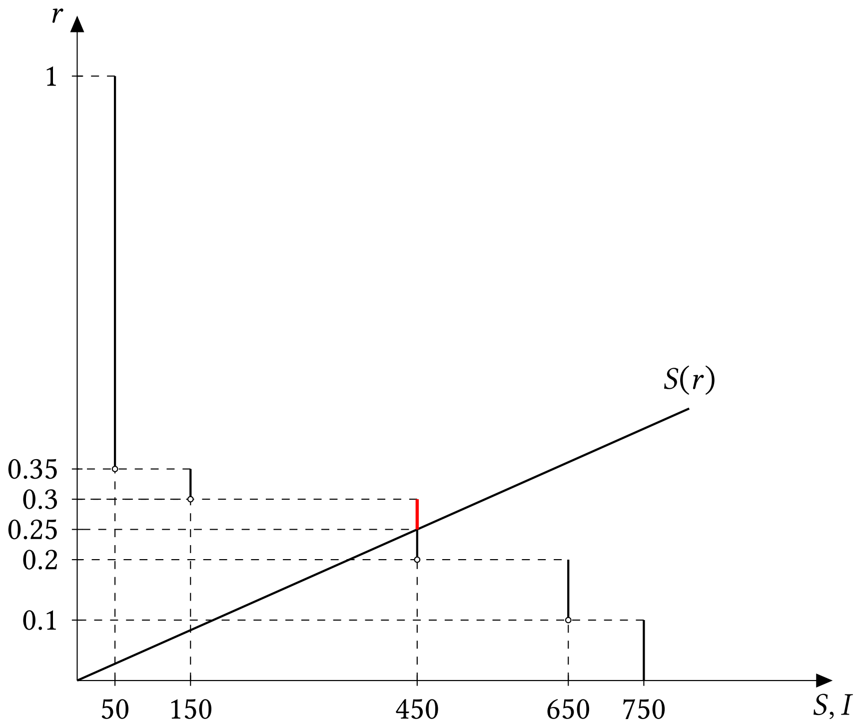
Решение

а) Посчитаем прибыльность каждого проекта, разделив доход на издержки и вычтя единицу. И сравним со ставкой процента. В тех проектах, где доходность больше или равна ставке процента, проект реализовывать выгодно.

Компания	Издержки	Доход	Прибыльность	Будет ли реализован
A	100	110	0,1	нет
C	200	240	0,2	нет
D	300	390	0,3	нет
E	100	135	0,35	да
F	50	100	1	да

б) Нет, политик не прав. Если снизить ставку до 0, то предложение заёмных средств тоже снизится до нуля, проекты будет не на что реализовывать, уровень инвестиций в таком случае тоже будет нулевым.

Теперь посчитаем оптимальную ставку процента. Для наиболее полного понимания, приведём графическое решение. Заметим, что уровень интестиций — это затраты, которые требуются фирмам для реализации проекта. Так, если проект реализует только фирма F, то уровень инвестиций примет значение 50. Если фирма F и E, то 150 (добавили 100 денежных единиц). Также заметим, что функция инвестиций в стране невозрастающая, причём рост будет происходить в момент, когда для очередной фирмы проект будет становиться рентабельным (важно заметить, что компания будет реализовывать проект при нулевой прибыли, это соотвествует стандартным микро- и макроэкономическим моделям). Объединяя все эти пункты, получаем следующий график:



Видно, что сбережения сравняются с инвестициями в точке, где $r = 0{,}25$. Если процентная ставка опустится ниже 0,25, то величины сбережений в экономике будет не хватать для достижения максимально возможного уровня инвестиций. Однако важно так же заметить, что при ставке процента $r \in [0{,}25; 0{,}3]$ уровень инвестиций будет находиться на одном уровне (так как новые фирмы не придут). Следовательно, любая ставка r в этом промежутке ведёт к максимальному уровню инвестиций в экономике данной страны.

Примечание. Выколотые точки на графике поставлены так, что фирма при безразличии осуществляет инвестиции. Для решения эта предпосылка необязательна.

Схема проверки

а) по 1 баллу за проверку каждого проекта и верный вывод по нему.

б) Баллы по этому пункту распределились следующим образом: 2 балла максимум можно было получить, ответив на вопрос о правоте/неправоте политика и 5 баллов за нахождение оптимальной ставки процента.

За ответ политика:

- 2 балла за верный ответ с обоснованием
- 1 балл за верный ответ и частично верное обоснование
- 0 баллов за неверный ответ и за ответ «нет» без обоснования или с полностью неверным обоснованием

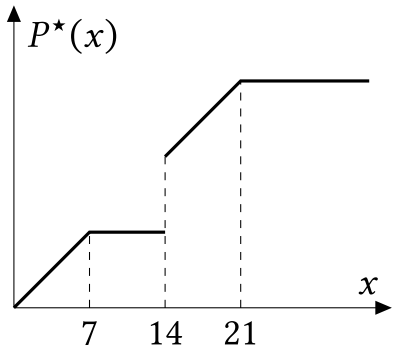
За нахождение оптимальной ставки:

- Рассмотрены случаи для всех возможных значений r — 5 баллов

- Рассмотрены случаи для всех возможных значений r до достижения оптимальной ставки без обоснования, что далее увеличивать/уменьшать ставку не стоит — 3 балла
- Рассмотрены дискретные значения r с проверкой обеих границ ($r = 0$ и $r \geqslant 0{,}35$) — 3 балла
- Рассмотрены дискретные значения r с проверкой одной границы или без границ — 2 балла
- В ответе в итоге указали промежуток r от 0,2 до 0,3 (не проверили сумму инвестиций) — 2 балла
- Неверные рассуждения — 0 баллов
- Правильный ответ при неверном объяснении или отсутствии объяснения –– 0 баллов
- Рассмотрение менее 5 точек (без адекватного объяснения поведения инвестиций на границах) — 1 балл

Задача 6. *Две группы потребителей и потолок цены* *(12 баллов)*

На некотором рынке есть две группы потребителей, функции спроса которых линейны. Монополист назначает единую цену для двух групп, так как ценовая дискриминация запрещена. Переменные издержки фирмы равны нулю. На рынке существует потолок цены, причем в разное время на разном уровне. Обозначим потолок цены за x, а цену, которую фактически устанавливала фирма при этом потолке, за $P^\star(x)$. Наблюдая за реакцией фирмы на разные значения потолка цены, государство определило вид зависимости $P^\star(x)$. (См. график.)



а) *(9 баллов)* Определите цены, которые фирма назначит для двух групп, если ценовая дискриминация будет разрешена, а потолок цены отменен.

б) *(3 балла)* Допустим, потолок цены отсутствует. Пострадает ли кто-то из участников рынка (монополист, потребители первой группы или потребители второй группы), если ценовая дискриминация будет разрешена?

Решение

а) Рассмотрим функцию выручки фирмы $TR(P)$. Поскольку функция рыночного спроса кусочно-линейна с одним изломом, $TR(P)$ будет иметь вид

$$TR(P) = \begin{cases} f_1(P), & P < P_{\text{изл}}; \\ f_2(P), & P \geqslant P_{\text{изл}}, \end{cases}$$

где $f_1(P)$, $f_2(P)$ — две квадратичные параболы с ветвями вниз, $P_{\text{изл}}$ — точка излома рыночного спроса.

При вводе потолка цены на уровне x, фирма будет максимизировать $TR(P)$ (поскольку переменные издержки отсутствуют), выбирая $P \in [0; x]$.

В зависимости от взаимного расположения двух парабол, $TR(P)$ может иметь три качественно разных вида: 1) $TR(P)$ сначала возрастает, потом убывает; 2) $TR(P)$ имеет два локальных максимума, и значение выручки в левом не меньше, чем в правом; 3) $TR(P)$ имеет два локальных максимума, и значение в левом меньше, чем в правом.

Заметим, что в случаях 1) и 2) $P^*(x) = \begin{cases} x, & x < P^{**}; \\ P^{**}, & x \geqslant P^{**}, \end{cases}$ где P^{**} — точка глобального максимума выручки. График такой функции существенно проще, чем приведенный в условии. Значит, нам подходит только случай 3).

И действительно, решая в случае 3) задачу максимизации $TR(P)$ на отрезке $[0; x]$ при разных x, получаем график, подобный приведенному в условии.

Отсюда получаем, что 7 — вершина параболы $f_1(P)$, а 21 — вершина параболы $f_2(P)$. При этом фирма безразлична между обслуживанием обеих групп по цене 7 и только «высокой» группы по цене 14:

$$f_2(14) = f_1(7).$$

Пусть уравнения спроса двух групп имеют вид $Q = a - bP$, $Q = c - dP$, причем $a/b > c/d$ (группа с параметрами a,b имеет более высокую максимальную цену спроса).

Тогда рыночный спрос описывается уравнением

$$Q_{\text{рын}}(P) = \begin{cases} a + c - (b + d)P, & P \leqslant c/d \\ a - bP, & c/d < P \leqslant a/b. \end{cases}$$

$f_1(P) = (a + c - (b + d)P)P$, ее вершина $P_1^{\text{в}} = \frac{a+c}{2(b+d)} = 7$.

$f_2(P) = (a - bP)P$, ее вершина $P_2^{\text{в}} = \frac{a}{2b} = 21$.

Условие $f_2(14) = f_1(7)$ запишется как $(a - 14b) \cdot 14 = (a + c - (b + d)7) \cdot 7$.

При возможности дискриминации фирма максимизирует прибыль по двум ценам P_1 и P_2. Прибыль фирмы, с точностью до постоянных издержек, равна

$$\pi(P_1,P_2) = (a - bP_1)P_1 + (c - dP_2)P_2 \longrightarrow \max$$

Слагаемые независимы, их можно максимизировать по отдельности. Отсюда $P_1^\star = \frac{a}{2b}$, $P_2^\star = \frac{c}{2d}$.

Поскольку мы уже знаем, что $a/2b = 21$, $P_1^\star = 21$.

Осталось найти $P_2^\star = c/2d$. Для этого поработаем с системой

$$\begin{cases} \frac{a}{2b} = 21; \\ \frac{a+c}{2(b+d)} = 7; \\ (a - 14b) \cdot 14 = (a + c - (b + d)7) \cdot 7. \end{cases}$$

Из второго уравнения, $(b + d)7 = (a + c)/2$, подставляя это в правую часть третьего и деля на 7, получаем

$$(a - 14b) \cdot 2 = (a + c)/2.$$

Из первого уравнения $a = 42b$, подставляя это в уравнение выше получаем $28b \cdot 4 = 42b + c$, откуда $c = 70b$.

Наконец, из второго уравнения системы $\frac{42b+70b}{2(b+d)} = 7$, откуда $d = 7b$.

В итоге, $P_2^\star = \frac{c}{2d} = \frac{70b}{2 \cdot 7b} = 5$.

Ответ: 21 и 5. (Можно записать ответ в любом порядке.)

б) После разрешения дискриминации фирма не может пострадать, так как свобода ее действий расширяется, а значит, прибыль не может уменьшиться. Потребители «высокой» группы спроса («богатые») не пострадают, так как независимо от наличия дискриминации они платят цену 21 (из анализа в а) следует, что в отсутствие дискриминации и потолка фирма будет обслуживать только «богатых» и выберет цену 21). Потребители «низкой» группы не только не пострадают, но даже выиграют, так как в отсутствие дискриминации они не потребляли товар вовсе (цена была слишком высока), а при дискриминации они потребляют товар. Значит, никто не пострадает.

Примечание 1: Для получения правильного вывода в б) достаточно понять, что график выручки $TR(P)$ имеет вид типа 3); численный ответ в а) на анализ в б) не влияет.

Примечание 2: Приведенный пример является классическим примером того, как ценовая дискриминация может вести к *Парето-улучшению*, то есть изменению, при котором никому не хуже и хотя бы кому-то лучше.

Примечание 3: В условии не были даны числовые значения по оси P^*, так как их можно однозначно восстановить из того факта, что фирма максимизирует прибыль. Если оптимальная цена P^* находится на правой границе интервала $[0; x]$, то $P^*(x) = x$, если же она внутри интервала, то небольшое изменение x не изменит оптимальную цену. Поэтому график $P^*(x)$ всегда будет состоять из участков, лежащих на линии $y = x$ и горизонтальных участков. Участки типа $P^*(x) = x/2$ просто невозможны.

Схема проверки

а) За каждый из следующих верно выполненных этапов решения участник получал баллы:

1 балл — Объяснение кусочных участков графика в условии (пояснение, почему $P_1 = 7$ и $P_2 = 21$ являются точками локального максимума, а $P_2 = 21$ — глобальным максимумом максимизации прибыли);

1 балл: — Выписан формально или описан словами совокупный спрос (или выручка, или прибыль) с указанием всех участков;

1 балл: — Найдена зависимость от параметров спроса монопольная цена при условии, что монополист продает свой товар при отсутствии дискриминации покупателям только одной группы: $P_2^{\text{в}} = \frac{a}{2b} = 21$;

1 балл: — Найдена зависимость от параметров спроса монопольная цена при условии, что монополист продает свой товар при отсутствии дискриминации покупателям обеих групп: $P_1^{\text{в}} = \frac{a+c}{2(b+d)} = 7$;

2 балла: — Обосновано, что $f_2(14) = f_1(7)$;

1 балл: — Найдена цена, которая установилась бы, если бы монополисту было выгодно продавать товар обеим группам потребителей: $P_2^{\star} = 5$;

1 балл: — Найдена цена, которая установится при дискриминации для потребителей первой группы;

1 балл: — Найдена цена, которая установится при дискриминации для потребителей второй группы;

Если при вычислениях была допущена арифметическая ошибка, которая не приводила к концептуальному искажению результатов, то оценка за такую ошибку не снижалась.

Если при вычислениях была допущена арифметическая ошибка, которая приводила к концептуальному искажению результатов (например, участник находил цену для второй группы потребителей, которая оказывалась больше 7), то оценка снижалась на 1 балл.

б) За каждый из следующих верно выполненных этапов решения участник получал баллы:

1 балл: — Обосновано, почему монополист выиграет от проведения ценовой дискриминации;

1 балл: — Обосновано, почему потребители первой группы не проиграют от проведения дискриминации;

1 балл: — Обосновано, почему потребители второй группы выиграют от проведения ценовой дискриминации;

Задача 7. *Люди и роботы: кто кого?* *(12 баллов)*

В XXI веке ускорились темпы автоматизации производства, то есть замены труда людей капиталом — в основном, промышленными роботами. Неудивителен рост беспокойства по поводу того, что машины могут полностью заменить людей. В данной задаче мы рассмотрим модель, проливающую свет на этот феномен.

Рассмотрим фирму, производственная функция которой имеет вид

$$Q = \sqrt{L_1 + a \cdot R},$$

где Q — объем производства товара, L_1 — объем *неквалифицированного* труда людей (труда рабочих), R — объем труда роботов, $a \geqslant 0$ — параметр, характеризующий производительность роботов. Фирма закупает неквалифицированный труд людей и труд роботов на конкурентном рынке по одинаковой цене, равной 1. При безразличии фирма использует для производства труд роботов, а не людей.

Цена товара фирмы P не зависит произведенного количества товара, но зависит от его качества z: $P(z) = 4z$. Качество товара тем выше, чем больше инженеров, дизайнеров и других *квалифицированных* сотрудников наймет фирма. А именно, $z = \sqrt[4]{L_2}$, где L_2 — объем квалифицированного труда людей. Цена единицы квалифицированного труда людей фиксирована и равна 2.

а) *(1 балл)* При каких значениях a фирма будет использовать труд роботов?

б) *(3 балла)* Допустим, качество товара фиксировано на определенном уровне $z \geqslant 0$. Определите оптимальный для фирмы объем производства как функцию от z и a. Определите, какой объем L_1 будет нанимать фирма как функцию от z и a.

в) *(3 балла)* Определите, какое качество $z^\star$ будет выбирать фирма как функцию от a.

г) *(2 балла)* Определите величину *суммарного* спроса фирмы на труд людей как функцию от a.

д) *(3 балла)* В XXI веке значение параметра a быстро растет. Допустим, a_1 и a_2 таковы, что при росте производительности роботов с a_1 до a_2 фирма увольняет неквалифицированных работников. Верно ли, что при этом величина *суммарного* спроса фирмы на труд людей тоже сократится? Если нет, приведите этому содержательное экономическое объяснение.

Решение

а) Как видно из функции, a единиц труда неквалифицированных работников и единица труда роботов *взаимозаменяемы* — при вычитании одного и добавлении другого выпуск всегда остается неизменным. Следовательно, если a единиц L_1 стоят дороже единицы R, неквалифицированный труд использовать не нужно. Затраты на единицу каждого из этих ресурсов равны 1, так что труд роботов выгоднее использовать при $a > 1$, а при $a = 1$ — безразлично. Согласно условию, в последнем случае фирма тоже выберет роботов, то есть $a \geqslant 1$ — ответ на вопрос пункта.

То же самое можно показать через предельные продукты ресурсов:

$$MP_{L_1} = \frac{1}{2 \cdot (L_1 + a \cdot R)} > \frac{a}{2 \cdot (L_1 + a \cdot R)} = MP_R.$$

Значение первой дроби меньше при $a < 1$, следовательно, при этом условии каждый дополнительный робот производит меньше, чем работник, при одинаковых издержках.

б) В случае $\underline{a \geqslant 1}$ используются роботы, а неквалифицированный труд не используется, то есть $L_1 = 0$. Прибыль при этом равна $\pi = 4zQ - R$ (пренебрегаем фиксированными издержками на L_2). Максимум этой функции можно искать разными способами: через производную, через условие равенства предельных величин или через преобразования в квадратичную параболу. Воспользуемся последним способом и заменим $R = Q^2/a$:

$$\pi = 4zQ - \frac{Q^2}{a}.$$

Относительно Q это квадратичная парабола с ветвями вниз, ее максимум в точке $Q = 2az$.

В случае $\underline{a < 1}$ роботы не используются и производственная функция принимает вид $Q = \sqrt{L_1}$, то есть $L_1 = Q^2$. Запишем функцию прибыли (снова не учитываем фиксированные издержки):

$$\pi = 4zQ - Q^2.$$

Относительно Q это тоже квадратичная парабола с ветвями вниз, ее максимум в точке $Q = 2z$. Отсюда $L_1 = Q^2 = 4z^2$.

В итоге получаем:

$$Q(a,z) = \begin{cases} 2z, & a < 1 \\ 2az, & a \geqslant 1 \end{cases} \qquad L_1(a,z) = \begin{cases} 4z^2, & a < 1 \\ 0, & a \geqslant 1 \end{cases} \qquad R(a,z) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ 4az^2, & a \geqslant 1 \end{cases}$$

В вопросе пункта спрашивались только Q и L_1; функция R выписана, так как она пригодится в дальнейшем.

в) Теперь z является переменой величиной, а значит и издержки L_2 становятся переменными. Их величина равна $2L_2 = 2z^4$. Воспользовавшись результатами предыдущего пункта, составим функцию прибыли:

$$\pi = \begin{cases} 4z \cdot 2z - 4z^2 - 2z^4, & a < 1 \\ 4z \cdot 2az - 4az^2 - 2z^4, & a \geqslant 1. \end{cases}$$

Максимизировать эту функцию можно по-разному. Заменим $t = z^2$:

$$\pi = \begin{cases} 8t - 4t - 2t^2, & a < 1, \\ 8at - 4at - 2t^2, & a \geqslant 1. \end{cases}$$

Вершины парабол (с ветвями вниз) будут ответом на вопрос пункта:

$$z = \sqrt{t} = \begin{cases} 1, & a < 1 \\ \sqrt{a}, & a \geqslant 1. \end{cases}$$

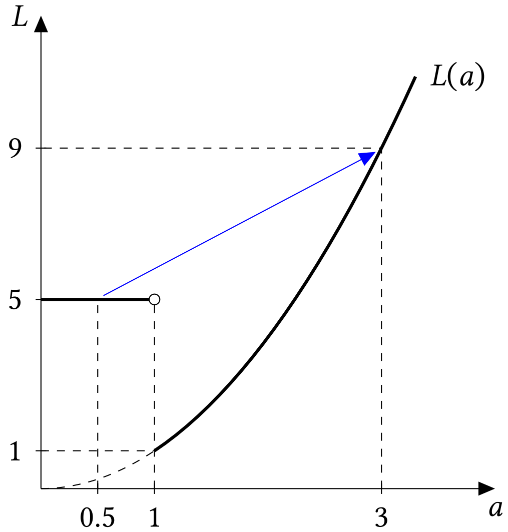
г) Согласно результату первого пункта и условию,

$$L_1(z) = \begin{cases} 4z^2, & a \geqslant 1 \\ 0, & a \geqslant 1 \end{cases} \qquad L_2(z) = z^4$$

Подставив сюда z, найденное в пункте **в)**, получим:

$$L_1(a) = \begin{cases} 4, & a < 1 \\ 0, & a \geqslant 1 \end{cases} \qquad L_2(a) = \begin{cases} 1, & a < 1 \\ a^2, & a \geqslant 1 \end{cases} \qquad L(a) = L_1(a) + L_2(a) = \begin{cases} 5, & a < 1 \\ a^2 & a \geqslant 1 \end{cases}$$

График последней функции в задаче не требовался, но для ответа на следующий вопрос он будет полезен:



д) Например, при росте a от 0,5 до 3 спрос на неквалифицированный труд снижается с 4 до 0, а общий спрс на труд растет с 5 до 9. Бóльшая производительность роботов увеличивает объемы производства, а значит, и стимулы инвестировать в качество (ведь выгоды от увеличения качества умножаются на большее количество). Это, в свою очередь, увеличивает спрос фирмы на квалифицированных сотрудников. Рост этого спроса при росте a может скомпенсировать падение спроса на неквалифицированных сотрудников, и суммарный спрос вырастет.

Также можно описать происходящее в терминах «субституты-комплементы». Неквалифицированный труд людей является субститутом к труду роботов, но квалифицированный труд людей является комплементом к нему (через взаимодействие количества и качества). При росте a растет спрос на роботов, и потому падает на субститут роботов (неквалифицированный труд людей) и растет на комплемент роботов (квалифицированный труд людей). Сумма двух последних эффектов может оказаться положительна.

Схема проверки

а) Определено условие $a \geqslant 1$ — *(1 балл)*

б) По 1 баллу за корректную постановку задачи и за нахождение каждой из функций. Если при нахождении функций один из двух случаев (интервалов a) игнорируется, ставится 1 балл вместо 2.

в) По 1 баллу за корректную постановку задачи, нахождение опитмума и верный ответ.

г) По 1 баллу за верное нахождение функций $L_2(a)$ и $L(a)$.

д) Пример случая, в котором утверждение неверно: (2 балла).

Экономическая интерпретация: *(1 балл)*

Задача 8. *Инвестиции с минимальным сожалением* *(12 баллов)*

Любой инвестор сталкивается с ситуацией, когда он жалеет о том, что вложил или не вложил деньги в определенный актив. Если стоимость актива растет, инвестор, не вложивший деньги в него, жалеет об этом; если же стоимость падает, сожаление испытывают инвесторы, вложившие деньги. Будущее неопределенно, и потому полностью избежать сожаления не удастся. Разные портфели активов, однако, характеризуются разным потенциальным сожалением. В этой задаче вам предлагается найти для нескольких примеров портфели активов, при которых потенциально возможное сожаление *минимально*.

Доходности	Сценарий 1	Сценарий 2
Акции Alset	+30 %	−10 %
Акции Drof	−20 %	+20 %

Представим себе инвестора, имеющего 1 млн руб. и рассматривающего инвестиции в два актива: акции компании Alset, производящей электромобили, и компании Drof, производящей бензиновые автомобили. Цены на акции этих фирм обычно движутся в противоположном направлении. В зависимости от ситуации на энергетических рынках может реализоваться Сценарий 1, при котором растут акции Alset, или Сценарий 2, при котором растут акции Drof. Таблица возможных доходностей приведена справа. (Например, в Сценарии 1 цена акций Alset вырастет на 30 %.) В момент вложения средств инвестор не знает, какой сценарий реализуется.

Определим *сожаление* как разницу между максимальной прибылью при определенном сценарии и фактической прибылью. Например, если инвестор вложит в акции двух компаний по 0,5 млн руб. и реализуется Сценарий 1, инвестор получит прибыль в размере $0{,}3 \cdot 0{,}5 + (-0{,}2) \cdot 0{,}5 = 0{,}05$ млн руб, в то время как максимальная прибыль при данном сценарии равна $0{,}3 \cdot 1 = 0{,}3$ (все надо было вкладывать в Alset). Сожаление инвестора будет равно $0{,}3 - 0{,}05 = 0{,}25$ млн руб. Если же реализуется Сценарий 2, сожаление инвестора будет равно $0{,}2 \cdot 1 - (0{,}2 \cdot 0{,}5 + (-0{,}1) \cdot 0{,}5) = 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}15$ млн руб. Максимально возможное (по всем сценариям) сожаление инвестора при равном вложении средств будет равно $\max(0{,}25; 0{,}15) = 0{,}25$ млн руб.

а) *(4 балла)* Допустим, инвестор вкладывает в акции всю сумму. Определите, какую долю средств ему следует вложить в Alset, чтобы минимизировать максимально возможное в будущем сожаление.

б) *(3 балла)* Инвестор по-прежнему вкладывает всю сумму, но теперь есть Сценарий 3, при котором происходит кризис и акции обеих компаний падают в цене:

Доходности	Сценарий 1	Сценарий 2	Сценарий 3
Акции Alset	+30 %	−10 %	−30 %
Акции Drof	−20 %	+20 %	−20 %

Определите, какую долю средств ему следует вложить в Alset, чтобы минимизировать максимально возможное в будущем сожаление.

в) *(5 баллов)* Предположим, что в условиях пункта **б)** инвестор может не вкладывать часть денег в акции. Невложенные средства приносят доходность 0 % при любом сценарии. Определите, какие доли средств инвестору следует вложить в Alset и Drof, чтобы минимизировать максимально возможное в будущем сожаление.

Решение

а) Пусть x — доля средств, вкладываемых в Alset. Если реализуется Сценарий 1, сожаление будет равно $0{,}3-(0{,}3x-0{,}2(1-x)) = 0{,}5-0{,}5x$. Если реализуется Сценарий 2, сожаление будет равно $0{,}2-(-0{,}1x+0{,}2(1-x)) = 0{,}3x$. Значит, максимальное сожаление равно

$$R_1(x) = \max\{0{,}5 - 0{,}5x; 0{,}3x\}.$$

$0{,}5 - 0{,}5 = 0{,}3x$ при $x = 5/8$, так что функцию сожаления можно переписать как

$$R_1(x) = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5x, & x < 5/8; \\ 0{,}3x, & x \geqslant 5/8. \end{cases}.$$

$R_1(x)$ убывает при $x < 5/8$ и растет при $x > 5/8$, значит, точкой минимума является $x^* = 5/8$.

б) При третьем сценарии сожаление будет равно $-0{,}2 - (-0{,}3x - 0{,}2(1 - x)) = 0{,}1x$. Значит, максимальное сожаление равно

$$R_2(x) = \max\{0{,}5 - 0{,}5; 0{,}3x; 0{,}1x\}.$$

Заметим, что при всех x $0{,}3x \geqslant 0{,}1x$ (сожаление при втором сценарии больше, чем при третьем), так что $R_2(x) = R_1(x)$. Значит, и оптимальное значение x то же, $x^* = 5/8$.

в) Пусть x и y — доли средств, вкладываемые в акции Alset и Drof соответственно, $x+y \leqslant 1$, тогда $1-x-y$ не вкладываются никуда. При первом сценарии сожаление будет равно $0{,}3 - (0{,}3x - 0{,}2y)$, при втором $0{,}2 - (-0{,}1x + 0{,}2y)$, при третьем $0 - (-0{,}3x - 0{,}2y)$ (так как максимальная прибыль при третьем сценарии равна 0, инвестор сожалеет, что вообще вкладывал в акции). Тогда максимальное сожаление равно

$$R(x,y) = \max\{0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y; 0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y; 0{,}3x + 0{,}2y\}.$$

Нам нужно минимизировать эту функцию по x,y при ограничениях $x,y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$.

Дальше двигаться можно несколькими способами.

Способ 1. (Догадка + обоснование)

По аналогии с пунктом а), предположим, что минимальное сожаление достигается тогда, когда сожаление одинаково при всех сценариях. Это происходит при x и y, удовлетворяющих равенствам

$$0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y = 0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y = 0{,}3x + 0{,}2y.$$

Решая эту систему, получаем $x = 0{,}5$, $y = 0{,}25$.

Сожаление при $(x,y) = (0{,}5{,}0{,}25)$ равно $R(0{,}5{,}0{,}25) = \max\{0{,}2; 0{,}2; 0{,}2\} = 0{,}2$.

Докажем, что это действительно минимально возможное сожаление, то есть для всех $x,y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$, $R(x,y) \geqslant 0{,}2$.

Предположим противное. Тогда существуют некие x_0,y_0, такие что $R(x_0,y_0) < 0{,}2$. Тогда, поскольку R равно наибольшему из трех сожалений, сожаление *при каждом сценарии* должно быть меньше 0,2. Но тогда

$$\begin{cases} 0{,}3 - 0{,}3x_0 + 0{,}2y_0 < 0{,}2; \\ 0{,}2 + 0{,}1x_0 - 0{,}2y_0 < 0{,}2; \\ 0{,}3x_0 + 0{,}2y_0 < 0{,}2 \end{cases}$$

Складывая первые два неравенства, получаем $0{,}5-0{,}2x_0 < 0{,}4$, откуда $x_0 > 0{,}5$. Складывая вторые два неравенства, получаем $0{,}4x_0 < 0{,}2$, откуда $x_0 < 0{,}5$. Противоречие.

Значит, минимально возможное сожаление действительно равно 0,2 и достигается при $x^* = 0{,}5$, $y^* = 0{,}25$.

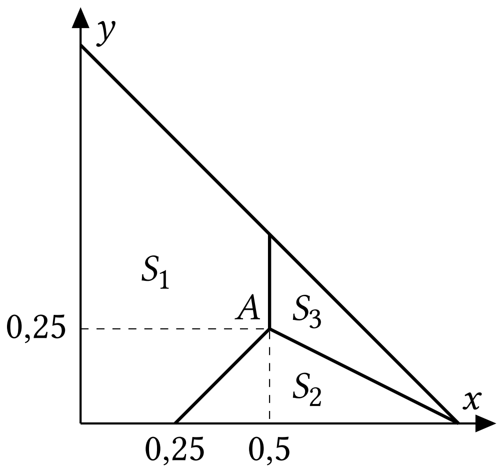
Способ 2. (Прямой анализ)

Обозначим за S множество всех возможных портфелей (x,y), то есть $S = \{(x,y) : x,y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$. Это треугольник с вершинами в точках (0,0), (0,1), (1,0).

Для каждого сценария $i = 1,2,3$ найдем такое подмножество множества портфелей S, что максимальное сожаление достигается при сценарии i. Обозначим эти подмножества за S_i.

Тогда S_1 определяется неравенствами $0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y \geqslant 0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y$, $0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y \geqslant 0{,}3x + 0{,}2y$; S_2 определяется неравенствами $0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y \geqslant 0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y$, $0{,}2+0{,}1x-0{,}2y \geqslant 0{,}3x+0{,}2y$; S_2 определяется неравенствами $0{,}3x+0{,}2y \geqslant 0{,}3-0{,}3x+0{,}2y$, $0{,}3x + 0{,}2y \geqslant 0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y$.

Изобразим эти множества на графике.



Общая граница S_1 и S_2 определяется равенством сожалений при сценариях 1 и 2, то есть равенством $0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y = 0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}2y$, что эквивалентно $y = x - 0{,}25$. Аналогичным образом получаем, что общая граница S_2 и S_3 описывается уравнением $y = 0{,}5 - 0{,}5x$; общая граница S_1 и S_3 задается уравнением $x = 0{,}5$. Общая точка трех множеств $A(0{,}5; 0{,}25)$ определяется равенством всех сожалений.

Тогда разобьем минимизацию $R(x,y)$ на два этапа: 1) проминимизируем сожаление на каждом из множеств S_1, S_2, S_3, получим три оптимальные точки; 2) из трех полученных точек выберем ту, в которой сожаление наименьшее.

Этап 1.

На множестве S_1 (максимальное) сожаление равно $0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y$. Будем минимизировать его графически. Для этого рассмотрим семейство «кривых безразличия», то есть линий, на которых сожаление одинаково. Они описываются уравнениями

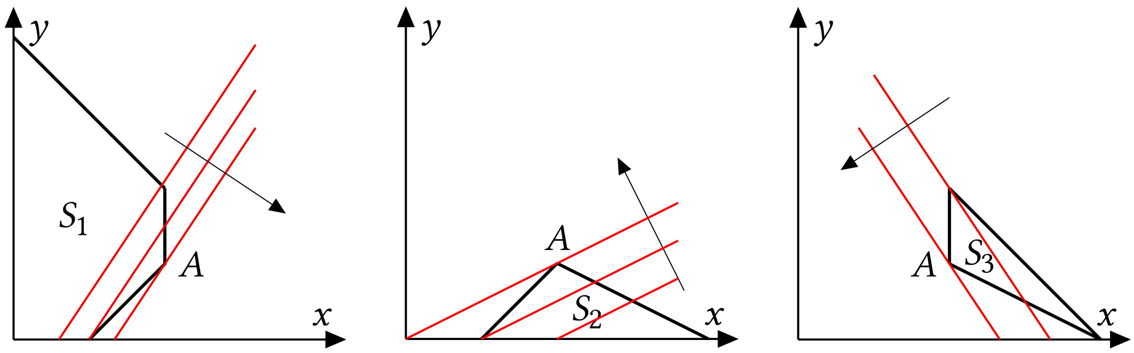


Рис. 8.1: Минимизация сожаления на каждом из множеств S_i графическим методом. Кривые безразличия «действительны» только внутри множеств S_i, но продолжены за пределы S_i для удобства восприятия рисунка. Стрелки показывают направление убывания сожаления.

$0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y = R$, где R — константа, откуда $y = 1{,}5x + C$, где C — константа. Семейство этих линий изображено красным цветом на рис. 8.1 слева. Сожаление $0{,}3 - 0{,}3x + 0{,}2y$ возрастает по x и убывает по y, и значит, оно будет падать при движении вправо-вниз. Стелка показывает направление убывания сожаления. Видно, что минимум достигается в точке A. (Здесь критически важно то, что наклон кривых безразличия меньше, чем наклон возрастающего участка границы множества S_1.)

Аналогичным образом с помощью графического метода находим, что минимум сожаления на каждом из множеств S_2, S_3 достигается в точке A (см. рис. 8.1, в центре и справа). Обратите внимание, что на разных графиках рис. 8.1 кривые безразличия разные, так как сожаление задается разными формулами на разных множествах.

Этап 2. На первом этапе мы получили, что минимум на каждом из множеств S_i достигается в одной и той же точке — точке A. Значит, в точке A максимальное сожаление меньше, чем в любой другой точке «большого» треугольника S. Она и будет ответом.

Ответ: 50% в акции Alset и 25% в акции Drof.

Примечание: лабораторные исследования, проведенные экономистами и психологами, показывают, что зачастую в условиях неопределенности люди действительно ведут себя не так, чтобы максимизировать математическое ожидание полезности или прибыли, а чтобы минимизировать возможное сожаление. Минимизацией сожаления можно объяснить покупку людьми лотерейных билетов (их покупают, чтобы потом не жалеть о том, что не купили), чрезмерно высокие по сравнению с предсказаниями стандартной теории игр ставки в аукционах, и другие явления. Что же касается поведения инвесторов, то красноречивее всего о минимизации сожаления сказал Гарри Марковиц, Нобелевский лауреат по экономике 1990 года. Марковиц получил премию за создание теории оптимального портфеля, основанной на максимизации математического ожидания прибыли. Сам он при этом признавался, что в жизни не следовал своей теории, а минимизировал сожаление. Вот его слова[2]:

[2]Цитата из статьи «Too Proud to Stop: Regret in Dynamic Decisions» Филиппа Стрэка и Пола Виферса, *Journal of European Economic Association*, 2020.

«Надо было рассчитать историческую ковариацию классов активов и провести эффективную границу [это он о своей теории]. *Вместо этого я представил себе свое горе, если бы фондовый рынок поднялся, а я в него не вложился, или если бы он опустился, а все мои накопления были бы в нем. Моим намерением было свести к минимуму мое будущее сожаление, поэтому я разделил свои сбережения 50/50 между облигациями и акциями».*

(Впрочем, может быть, это было шуткой.)

Схема проверки

а)
- Сожаление при первом сценарии $0{,}5 - 0{,}5x$ — **1 балл**.
- Сожаление при втором сценарии $0{,}3$ — **1 балл**.
- Доказательство, что минимум при равенстве — **1 балл**.
- Ответ $x = 5/8$ — **1 балл**.

б)
- Сожаление при третьем сценарии $0{,}1x$ — **1 балл**.
- Доказательство, что не повлияет на минимум (график или сравнение) — **1 балл**.
- Утверждение, что ответ не изменится — **1 балл**.

в)
- Сожаления для всех трех сценариев — **1 балл**. Если ошибка хотя бы в одном, то балл не ставится.
- Предположение о равенстве всех трех условий в точке минимума — **1 балл**.
- Нахождение ответа $x = 0{,}5$, $y = 0{,}25$ — **1 балл**.
- Доказательство, что это минимум — **2 балла**. Частичные баллы за неполное доказательство не ставятся.