Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

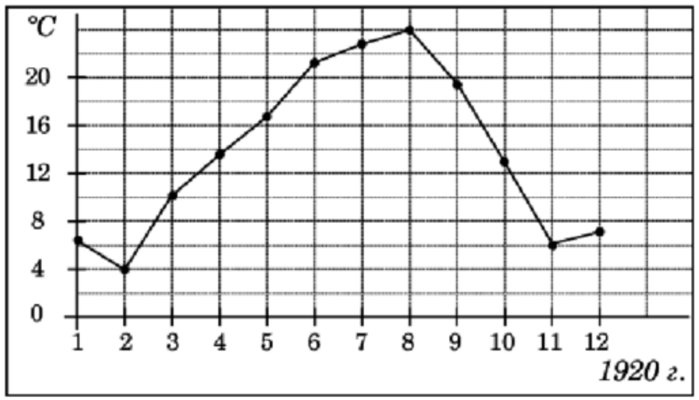
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 10 человек следует взять $\frac{5}{9}$ фунта чернослива. Сколько граммов чернослива следует взять для пирога, рассчитанного на 9 человек? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

Ответ: ___________________________.

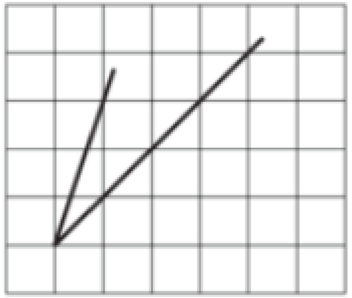
2 На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 1920 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200914

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Ответ: ___________________________.

4 В чемпионате мира участвуют 20 команд. С помощью жребия их нужно разделить на пять групп по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:
1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5.
Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Китая окажется в четвёртой группе?

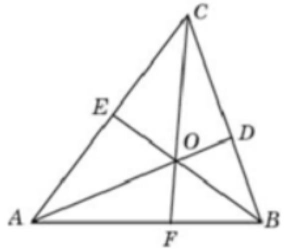
Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения

$x^2 - 8 = (x - 4)^2$.

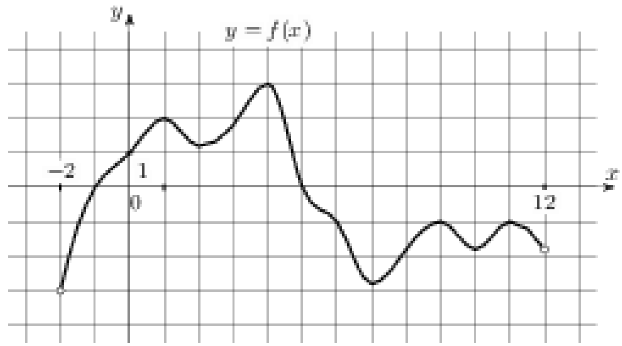
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол A равен $60°$, угол B равен $53°$. AD, BE и CF – биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.



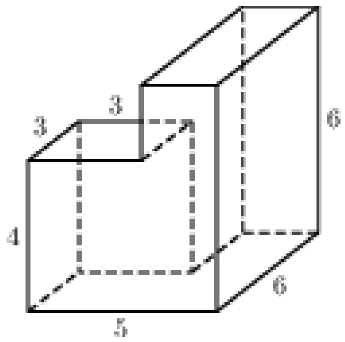
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9 Найдите значение выражения

$(16x^2 + 9y^2 - (4x - 3y)^2) : (-6xy)$.

Ответ: ___________________________.

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{200}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ___________________________.

11 Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 150 метрам?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = x^{\frac{3}{2}} - 27x + 6$ на отрезке $[1; 422]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Для записи решений и ответов на задания* 13–19 *используйте БЛАНК ОТВЕТОВ* № 2. *Запишите сначала номер выполняемого задания* (13, 14 *и т. д.*), *а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5; -4]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 20, боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1, B_1 и середину ребра BC, является трапецией.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1, B_1 и середину ребра BC.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5.$$

16 В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине B проведена биссектриса AK. В треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что сторона MN лежит на отрезке AC, а вершина L — на отрезке AB.

а) Докажите, что $MN = \sqrt{2}KN$.
б) Найдите площадь прямоугольника $KLMN$, если $AB = 1$.

17 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$x^3 + 4x^2 - ax + 6 = 0$

имеет единственный корень на отрезке $[-2; 2]$.

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	200
2	6
3	0,5
4	0,2
5	3
6	63,5
7	44
8	108
9	-4
10	100
11	6
12	-2910
13	а) $0;\ -\log_2 19$ б) $-\log_2 19$
14	210
15	$(-\infty; 1] \cup (\log_3 5\,; 2)$
16	$3\sqrt{2}-4$
17	20
18	$(-\infty; -7] \cup \{11\} \cup (15; +\infty)$
19	а) да, 25×1, 5×37 б) нет в) 18,5

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение $19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-5; -4]$

Источники:
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Ященко 2018 (36 вар)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

а) $19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 2^2 + 1 = 0$

$19 \cdot 4^x - 20 \cdot 2^x + 1 = 0$

Пусть $2^x = t$

$19t^2 - 20t + 1 = 0$

$D = 324 = 18^2$

$t_1 = \frac{20+18}{38} = 1$ $\qquad t_2 = \frac{20-18}{38} = \frac{1}{19}$

$2^x = 1$ $\qquad 2^x = \frac{1}{19}$

$x = 0$ $\qquad x = \log_2 \frac{1}{19}$

$x = \log_2 (19)^{-1}$

$x = -\log_2 19$

б) $0 \notin [-5; -4]$

$2^3 = 8$

Сравним $-\log_2 19$ с границ

$-5 \qquad -\log_2 19 \qquad -4$

$-\log_2 32 < -\log_2 19 < -\log_2 16$

$\Rightarrow -\log_2 19 \in [-5; -4]$

Ответ: а) $0; -\log_2 19$

б) $-\log_2 19$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200914

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 20, боковые рёбра равны 11.

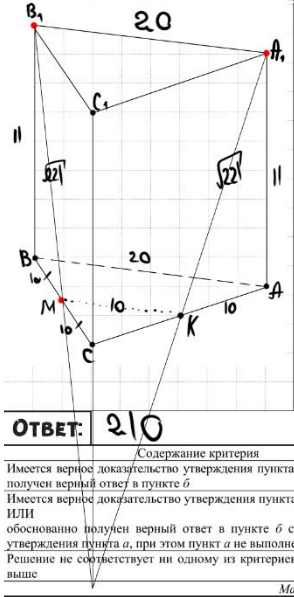
а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1, B_1 и середину ребра BC, является трапецией.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1, B_1 и середину ребра BC.

Источники:
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (30 вар)

ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ

1	Проводим прямые через две точки, лежащие в одной плоскости
2	Плоскость сечения пересекает параллельные грани по параллельным прямым
3	Метод следов (если в некоторой грани известна одна точка сечения, а в соседней грани – отрезок, то продлеваем общее ребро, а затем продлеваем отрезок до пересечения с продолжением общего ребра)



а) A_1B_1MK – сечение

$MK \parallel A_1B_1$ (т.к. сечение пересекает параллельные грани по парал. прямым)

$A_1K \nparallel B_1M$

$\Rightarrow A_1B_1MK$ – трапеция ■

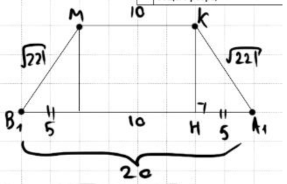
б) $MK \parallel AB$

M – середина

$\Rightarrow MK$ – ср. линия $\triangle ABC$

$\Rightarrow MK = 10$

Рассмотрим трапецию A_1B_1MK.



$KH = \sqrt{221 - 25} = 14$

$S_{тр} = \frac{20+10}{2} \cdot 14 = 210$

Ответ: 210

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\frac{9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2\cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5.$

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО
$a^{\log_a b} = b$

$3^{\log_3 5} = 5$

9F7BD6

Источники:
FIPI
osfipi
Демо 2018
Демо 2017
Основная волна 2016

Пусть $3^x = t$, $t > 0$

$\frac{t^2 - 6\cdot t + 4}{t-5} + \frac{6\cdot t - 51}{t-9} \leq t + 5$

Упростим $t^2 - 6t + 5 = (t-5)\cdot(t-1)$

Получаем:

$\frac{t^2 - 6t + 5}{t-5} - \frac{1}{t-5} + \frac{6t - 54}{t-9} + \frac{3}{t-9} \leq t + 5$

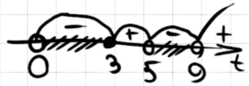
$\cancel{t} - \cancel{1} - \frac{1}{t-5} + \cancel{6} + \frac{3}{t-9} \leq \cancel{t} + \cancel{5}$

$\frac{3}{t-9}^{(t-5} - \frac{1}{t-5}^{(t-9} \leq 0$

$\frac{3t - 15 - t + 9}{(t-5)(t-9)} \leq 0$

$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$

$\frac{2t-6}{(t-5)(t-9)} \leq 0$



$\left[\begin{array}{l} 0 < t \leq 3 \\ 5 < t < 9 \end{array}\right.$

$0 < 3^x \leq 3^1$

$x \leq 1$

$5 < 3^x < 3^2$

$3^{\log_3 5} < 3^x < 3^2$

$\log_3 5 < x < 2$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200914

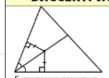
16 В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине B проведена биссектриса AK. В треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что сторона MN лежит на отрезке AC, а вершина L – на отрезке AB.

а) Докажите, что $MN = \sqrt{2}KN$.

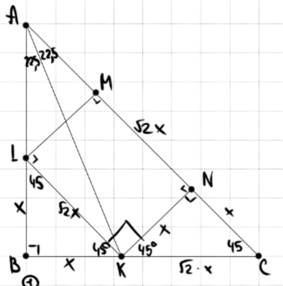
б) Найдите площадь прямоугольника $KLMN$, если $AB = 1$.

Источники:
Гордин #16 2019
Досрочная волна (Резерв) 2014

СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ



Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла



① а) Пусть $KN = x$
Тогда $BK = x$
(по св-ву биссектрисы)

② $\angle BKL = 180-45-90=45$
$\angle BLK = 180-90-45=45$
$\Rightarrow BL = x$
$LK = \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2}\cdot x$
$MN = \sqrt{2}\, x$
$\Rightarrow MN = \sqrt{2}\cdot KN$ $\blacksquare$

б) ① $AB = BC = \boxed{1 = x+\sqrt{2}x}$
$1 = x\cdot(1+\sqrt{2})$
$x = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

② $S_{KLMN} = x\cdot\sqrt{2}\cdot x$ =

= $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+2} = \dfrac{\sqrt{2}\,(3-2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}\,(3-2\sqrt{2})}$

$= \dfrac{3\sqrt{2}-4}{1}$

Ответ: $3\sqrt{2}-4$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

Источники:
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна 2017

Пусть S – сумма долга
1 марта – день платежа
$x_1 = 2\ 592\ 000$
$x_2 = 4\ 392\ 000$
$\left(1+\dfrac{a}{100}\right) = b$

$\begin{cases} S\cdot b^4 - b^3\cdot x_1 - b^2\cdot x_1 - b\cdot x_1 - x_1 = 0 \\ S\cdot b^2 - b\cdot x_2 - x_2 = 0 \end{cases}$

Выразим $Sb^2 = b\cdot x_2 + x_2$
$(b\cdot x_2 + x_2)\cdot b^2 - b^3\cdot x_1 - b^2\cdot x_1 - b\cdot x_1 - x_1 = 0$
$b^3\cdot x_2 + b^2\cdot x_2 - b^3\cdot x_1 - b^2\cdot x_1 - b\cdot x_1 - x_1 = 0$

Сумма долга при 4 платежах	Дата	Сумма долга при 2 платежах
S	31 дек 2014	S
$S\cdot b$	31 дек 2015	$S\cdot b$
$S\cdot b - x_1$	1 мар 16	$S\cdot b - x_2$
$S\cdot b^2 - b\cdot x_1$	31 дек 16	$Sb^2 - b\cdot x_2$
$S\cdot b^2 - b x_1 - x_1$	1 мар 17	$Sb^2 - b\cdot x_2 - x_2 = 0$
$Sb^3 - b^2\cdot x_1 - b\cdot x_1$	31 дек 17	
$Sb^3 - b^2\cdot x_1 - b\cdot x_1 - x_1$	1 мар 18	
$Sb^4 - b^3\cdot x_1 - b^2\cdot x_1 - b\cdot x_1$	31 дек 18	
$Sb^4 - b^3\cdot x_1 - b^2\cdot x_1 - b\cdot x_1 - x_1 = 0$	1 мар 19	

$b^2 x_2(b+1) - b^2 x_1\cdot(b+1) - x_1\cdot(b+1) = 0$
$(b+1)\left(b^2 x_2 - b^2 x_1 - x_1\right) = 0$
$b = -1$ $\varnothing$
$b^2\cdot x_2 - b^2\cdot x_1 - x_1 = 0$
$b^2\cdot(x_2 - x_1) - x_1 = 0$
$b^2\cdot(x_2 - x_1) = x_1$
$b^2 = \dfrac{x_1}{x_2 - x_1}$
$b^2 = \dfrac{2\ 592\ \cancel{000}}{1\ 800\ \cancel{000}} = \dfrac{72}{50} = \dfrac{36}{25}$
$b = \boxed{\dfrac{6}{5} = 1 + \dfrac{a}{100}}$
$1{,}2 = 1 + \dfrac{a}{100}$
$a = 20$

Ответ: 20%

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 4x^2 - ax + 6 = 0 \quad \Big| : x$$

имеет единственный корень на отрезке $[-2; 2]$.

Источники:
СтатГрад 2017
СтатГрад 2019

$\left(\frac{6}{x}\right)' = \left(6 \cdot \frac{1}{x}\right)' = (6 \cdot x^{-1})' = 6(-x^{-2})$

Заметим, что $x = 0$ не является реш. ур-я

$x^2 + 4x - a + \frac{6}{x} = 0$

$\boxed{a = x^2 + 4x + \frac{6}{x}}$

Рассмотрим $f(x) = x^2 + 4x + \frac{6}{x}$

$f'(x) = 2x + 4 - \frac{6}{x^2} = 0$

$\frac{2x^3 + 4x^2 - 6}{x^2} = 0$

$\frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2} = 0$

$\frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x = 1$ – точка экстремума

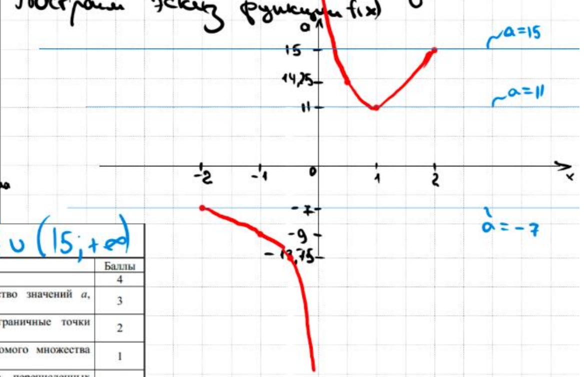
$f'(x)$: $-$ на $(-2; 0)$, $(0; 1)$; $+$ на $(1; 2)$

$f(x)$: $-2 \searrow \min (x = 1) \nearrow 2$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 3 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 + 3x + 3 \\ 3x^2 - 3 & \\ \underline{3x^2 - 3x} & \\ 3x - 3 & \\ \underline{3x - 3} & \\ 0 & \end{array}$$

x	-2	-1	-0,5	0,5	1	2
a	-7	-9	-13,75	14,25	11	15

Построим эскиз функции f(x)



ОТВЕТ: $(-\infty; -7] \cup \{11\} \cup (15; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Источники:
FIPI
osfipi
Основная волна 2015
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018

24C2D5

а) Ср. ар. чисел $= 7$

$\frac{\text{Сумма чисел}}{30} = 7$

$\Rightarrow$ Сумма чисел $= 210$

Может ли быть 30 единиц $\varnothing$

29 единиц?

$29 \cdot 1 + ? = 210$ $\varnothing$

28 единиц?

$28 \cdot 1 + ? + ? = 210$ $\varnothing$

27 единиц?

$27 \cdot 1 + ? + ? + ? = 210$ $\varnothing$

Может ли быть 26 единиц?

$26 \cdot 1 + ? + ? + ? + ? = 210$ $\varnothing$

25 единиц?

$25 \cdot 1 + ? + ? + ? + ? + ? = 210$

Да, например 25 единиц, 5 37-рок

Было: $\frac{25 \cdot 1 + 5 \cdot 37}{30} = 7$

Стало: $\frac{5 \cdot 18,5}{5} = 18,5$

б) Пусть x – кол-во единиц

S – первоначальная сумма всех чисел кроме единиц

Тогда $\frac{S}{2}$ – оставшаяся сумма чисел (без единиц)

До: $\text{Ср. ар.} = \frac{x \cdot 1 + S}{30} = 7$

$x + S = 210$

$S = 210 - x$

После: $\text{Ср. ар.} = \frac{\frac{S}{2}}{30 - x} = \frac{210 - x}{60 - 2x}$

$12 < \frac{210 - x}{60 - 2x} < 13 \quad \Big| \cdot (60 - 2x)$

$720 - 24x < 210 - x < 780 - 26x$

$\begin{cases} 720 - 24x < 210 - x \\ 210 - x < 780 - 26x \end{cases}$

$\begin{cases} 23x > 510 \\ 25x < 570 \end{cases}$

$\begin{cases} x > \frac{510}{23} \\ x < \frac{570}{25} \end{cases}$

$22\frac{4}{23} < x < 22,8$

нет целых x

$\Rightarrow$ не может

в) чем больше x $\to$ тем больше ср. ар.

$x_{max} = 25$

$\Rightarrow$ Ср. ар. наиб. $= 18,5$ (см. п. а))

$\text{Ср. ар.} = \frac{210 - x}{60 - 2x} = \frac{30 - x}{60 - 2x} + \frac{180}{60 - 2x}$

$= \frac{1}{2} + \frac{180}{60 - 2x}$

$= \frac{1}{2} + \frac{90}{30 - x}$

$\frac{1}{2} + \frac{90}{5} = 18,5$

ОТВЕТ:
а) Да, пример приведен
б) Нет
в) 18,5

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200914

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.