



и От простого — к сложному,
от нерешительности — к уверенности!

Готовимся к ЕГЭ по математике —
успешно и с удовольствием!

Пособие для групповых и индивидуальных занятий

А. В. Вычков, О. В. Гробер

Poluschkin-Verlag, XXI вѣкъ



От простого — к сложному,
от нереш^ительности — к уверенности!

Готовимся к ЕГЭ по математике — успешно и с удовольствием!

Пособие для групповых и индивидуальных занятий

- ✓ Более ста заданий,
составленных по мотивам
КИМ ЕГЭ 2018 – 2020 годов.
- ✓ Более ста уравнений,
требующих отбора корней,
принадлежащих указанному
множеству.
- ✓ Более ста неравенств,
содержащих в ответах
изолированные и
«выколотые» точки.
- ✓ Сотни подготовительных
примеров, адаптированных
для освоения тем «с нуля».

А. В. Бычков, О. В. Гробер

Poluschein-Verlag, XXI вѣкъ

УДК 373.51
ББК 22.1я72

Бычков А. Б., Гробер О. В. Готовимся к ЕГЭ по математике — успешно и с удовольствием! Пособие для групповых и индивидуальных занятий. — Полушкин: Poluschkin-Verlag, 2021. — 96 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для системной подготовки к профильному уровню ЕГЭ по математике на факультативных занятиях, подготовительных курсах, в репетиторских центрах, в группах и индивидуально. Издание содержит 1616 актуальных на 2020/2021 учебный год задач (сотни уравнений и неравенств, составленных по мотивам заданий ЕГЭ прошлых лет, в т. ч. уравнения, требующие отбора корней, принадлежащих указанному множеству, и неравенства, имеющие изолированные или «выколотые» точки в ответах).

Цель пособия — дать (педагогам и учащимся) продуманный и достаточный набор примеров, расположенных по принципу «от простого к сложному», для комфортной наработки приёмов решения уравнений и неравенств профильного уровня ЕГЭ, начиная с самых элементарных.

Свёрстано в издательской системе L^AT_EX, макрос $\mathcal{NC}$ А. И. Роженко

Обложка: М. Кучеров. Отпечатано в авторской редакции

Издательский дом Poluschkin-Verlag
Ростовская область, Азовский р-н, х. Полушкин, пер. Западный, 9

ISBN 978-5-0051-6907-5 © А. Б. Бычков, О. В. Гробер, 2021

Содержание

От авторов	4
§ 1. Тожественные преобразования	6
Ответы к заданиям § 1	11
§ 2. Алгебраические уравнения	12
Ответы к заданиям § 2	22
§ 3. Показательные уравнения	25
Ответы к заданиям § 3	30
§ 4. Логарифмические уравнения	31
Ответы к заданиям § 4	36
§ 5. Тригонометрические уравнения	37
Ответы к заданиям § 5	43
§ 6. Тригонометрические уравнения. Отбор корней	45
Ответы к заданиям § 6	57
§ 7. Алгебраические неравенства	60
Ответы к заданиям § 7	69
§ 8. Показательные неравенства	72
Ответы к заданиям § 8	77
§ 9. Логарифмические неравенства	79
Ответы к заданиям § 9	90
Литература	94

От авторов

Регулярно оказываясь в разношёрстных аудиториях (подготовительные курсы, репетиторские центры, слушатели которых готовились по разным программам и учебникам), мы снабжаем учащихся своей авторской подборкой примеров. Часть этой коллекции составила основу настоящего сборника. Наш опыт¹ подсказывает, что для работы с группами и однотипных примеров необходимо больше, и по диапазону сложности подборки примеров должны быть богаче. Настоящий задачник максимально адаптирован для организации групповых занятий.

Если посмотреть на предмет издания с другого ракурса, заметим, что требования к экзаменуемым, сформулированные в нормативном документе [18], начинаются с разделов «Уметь выполнять вычисления и преобразования» и «Уметь решать уравнения и неравенства». Данное издание предназначено для системной отработки этих ключевых навыков.

На полках книжных магазинов имеются хорошие пособия для подготовки к заданиям 1–12 профильного уровня ЕГЭ по математике (например, [5]). С литературой для подготовки к заданиям 13–19 (требующих оформленного обоснованного решения) ситуация заметно хуже: в основном доступны сборники типовых тестов, даже издания с достаточным набором аналогов примеров № 13 (уравнений с указанием интервалов для отбора корней) в книжных магазинах который год отсутствуют. Надеемся, что данный задачник отчасти удовлетворит упомянутый методический дефицит и окажется удобным подспорьем в работе. Мы постарались сделать издание максимально актуальным: внимательно анализировались не только КИМы² последних лет, но и вся литература от разработчиков КИМ. Хочется верить, что в результате этой работы настоящий сборник содержит аналоги всех 13-х и 15-х задач, засветив-

¹ В течение более чем 15 лет один автор был методистом, а другой — преподавателем центра довузовской подготовки Ростовского государственного строительного университета, и в настоящее время мы активно работаем с группами.

² Контрольные измерительные материалы ЕГЭ.

шихся на ЕГЭ и в сборниках составителей с 2013 по 2020 год.

Задания в книге расположены по принципу «от простого — к сложному» в продуманном, отработанном, но, конечно же, не единственно верном порядке. Если, глядя на предлагаемую подборку, кто-то из коллег подумает: «Примеров такого типа слишком много, зачем столько?», то, скорее всего, и мы так когда-то считали, пока не взяли на подкурсах группу, убедившую нас в обратном.

Почти все задания сборника являются авторскими (что, конечно же, не исключает того, что и в XVII веке точно такой пример мог быть сконструирован семнадцать раз). Небольшое количество задач заимствовано из пособий [6, 7, 8, 9, 10, 13, 14], главным образом затем, чтобы был повод благодарно упомянуть здесь эти достойнейшие издания, по некоторым из них авторы сами в своё время готовились к поступлению на мехмат.

Для самоконтроля, актуализации и полировки навыков решения уравнений и неравенств мы рекомендуем тесты от разработчиков КИМ³ (например, [1, 2, 3, 4]), а также официальный банк заданий ЕГЭ [19] и ресурс А. А. Ларина [15]. Особо отметим богатую коллекцию примеров ЕГЭ прошлых лет, собранную и оформленную Т. А. Гуевым, с ответами и, частично, с указаниями и решениями (материалы доступны слушателям школы ВЕЕГЕЕК [16]).

Наконец заметим, что время от времени что-либо полезное для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ авторы размещают на страничке [17], которую используют и для обратной связи с читателями и слушателями.

А. В. Вычков, О. В. Гробер
хутор Полушкин, 28 октября 2020 г.

³Надо, однако, признать, что последние годы литература от разработчиков не злоупотребляет налётами на «боевые» экзаменационные задания.

§1

Тождественные преобразования

На данный момент в контрольных измерительных материалах ЕГЭ по математике нет заданий «упростить выражение». Тем не менее, подавляющее большинство упражнений требуют от экзаменуемого уверенных навыков тождественных преобразований — раскрытия скобок, сложения дробей и т. п. На наш взгляд, эти навыки являются базовыми, и в своих группах мы начинаем подготовку к ЕГЭ, как правило, с тождественных преобразований. Для их выполнения полезны т. н. формулы сокращённого умножения:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, & (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \\a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), & a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2), \\a^2 + b^2 &= \dots & a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}$$

Сделаем несколько ремарок.



Формулы для выражения $a^2 + b^2$ существуют, но авторам они представляются бесполезными.



По нашим наблюдениям, одной из самых коварных причин ошибок является смена порядка действий: экзаменуемые слишком часто путают квадрат разности и разность квадратов, корень из суммы и сумму корней, и т. п.



Умение упрощать алгебраические выражения во многом состоит из умения преобразовывать суммы в произведения.

В частности, если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена, то может быть полезным разложение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Упростить

1. $\frac{x^2 - xy}{yx - y^2} \cdot \frac{y^2}{x}$.
2. $\frac{9a}{a^2 + ab} \cdot \frac{ab + b^2}{3b^2}$.
3. $\frac{x^2 - yx}{xy} \cdot \frac{2y}{xy - y^2}$.
4. $\frac{6a}{x^2 - x} \cdot \frac{2x - 2}{3ax}$.
5. $\frac{x - 2}{x} : \frac{3x - 6}{x}$.
6. $\frac{a^2 - 4}{2a - a^2} : \frac{3}{a}$.
7. $\frac{b - a}{a} \cdot \frac{3a}{a^2 - b^2}$.
8. $\frac{4a^2b + 2a^2b}{a(3a^4b - a^4b)} : \frac{a - 3}{a^3 - 3a^2}$.
9. $\frac{a^2 + a - (3 + a^2)}{a^2 - 6a + 9}$.
10. $\frac{ax - b(x + a) + ab}{a} : \frac{b - a}{a}$.
11. $\frac{8y(8y - 5) - (8y - 5x)(5x + 8y) - 25x^2}{40xy}$.
12. $\frac{3 + x}{x^3 - yx^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 9} : \frac{x + y}{x^2}$.
13. $\frac{4 + a(2 + a) - a^2}{a + 2} \cdot \frac{a(a - 2) - a^2 + 3a + 2}{2(a - 2)}$.

Упростить

14. $\frac{a^4 + 3}{9} - \left(-\frac{a^2}{3}\right)^2$.
15. $\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}$.
16. $\left(a - \frac{a^2 + 4}{a + 2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{a - 2}\right)$.
17. $(a + b) \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{-1}$.
18. $\left(\frac{1}{a - b} - \frac{1}{a + b}\right) \cdot \frac{a^3 - ab^2}{ab}$.
19. $\left(a - \frac{a^2 + b^2}{a + b}\right) \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a - b}\right)$.
20. $1 + \frac{24}{(x - 2)^2} \cdot \frac{4x - x^2 - 4}{4x + 24}$.
21. $\left(\frac{x}{x + 1} + 1\right) \cdot \frac{1 - x^2}{4x^2 - 1}$.
22. $\left(\frac{a - 2}{a + 2} - \frac{a + 2}{a - 2}\right) \cdot \left(\frac{4a}{a^2 - 4}\right)^{-1}$.
23. $\left(a + \frac{5a}{a - 5}\right) \cdot \left(\frac{5a}{a + 5} - a\right) \cdot \left(\frac{a^2}{25 - a^2}\right)^{-1}$.
24. $\left(x - \frac{x^2 + y^2}{x + y}\right) \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x - y}\right)$.
25. $\left(\frac{1}{1 + a} + \frac{a}{1 - a} + \frac{2a}{1 - a^2}\right) \cdot (1 - a)$.
26. $\left(\frac{b}{a^2 - ab} - \frac{b}{a^2 + ab}\right) \cdot \frac{a^2 - ab}{2b^2}$.

$$27. \left(\frac{a-2}{a^2-4} + \frac{a^2-4}{a+2} + 2-a \right) \cdot (a+2).$$

$$28. \left(\frac{a^2}{a^2+2a} + \frac{2}{a-2} + \frac{4a}{a^2-4} \right) : \frac{a+2}{2-a}.$$

$$29. \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} + 1 \right) \cdot \frac{a^2-1}{a^2+1}.$$

$$30. \left(\frac{a}{ab-b^2} + \frac{b}{a^2-ab} - \frac{2}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{1}{ab} \right)^{-1}.$$

$$31. \left(a - \frac{4ab}{a+b} + b \right) \cdot \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}. \quad 32. \left(\frac{(a-b)^2}{2a} + b \right) : \frac{a^2+b^2}{2a^2}.$$

$$33. \left(\frac{a^2+9}{a^2-6a+9} \right) : \left(3+a - \frac{18}{3-a} \right) \cdot (a-3).$$

$$34. \left(\frac{a+1}{a+3} - \frac{a+3}{a+1} \right)^{-1} \cdot \frac{4a+8}{a^2-9}. \quad 35. \left(\frac{4}{a^2-4a} - \frac{4}{a^2+4a} \right) \cdot \frac{a^3-16a}{16}.$$

$$36. \left(\frac{a}{a+3} + \frac{a}{a-3} + \frac{6a}{a^2-9} \right) \cdot \left(\frac{a+3}{a-3} \right)^{-1}.$$

$$37. \left(\frac{a}{ab-b^2} - \frac{b}{a^2-ab} \right) : \frac{a^2-b^2}{ab}.$$

$$38. \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{4ab}{a^2-b^2} \right) : \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{-1}.$$

$$39. \frac{2y}{x^2-y^2} : \left(\frac{1}{y^2-x^2} + \frac{1}{x^2+2xy+y^2} \right).$$

$$40. \left(2x+1 - \frac{1}{1-2x} \right) : \left(2x - \frac{4x^2}{2x-1} \right).$$

$$41. \left(\frac{a}{a+1} + \frac{2a}{a^2-1} \right) \cdot a^{-1} + \left(\frac{a}{a-1} - \frac{1}{a^2-a} \right) : a^{-1}.$$

Упростить

$$42. \frac{b^3+b^2-b-1}{b^2+b+b+1} + \frac{2b+2}{b+1}. \quad 43. \frac{3x^3+4x^2-6x-8}{2x^3+5x^2-4x-10} - \frac{3x-6}{2x+5}.$$

$$44. \frac{a^2(a-2)-4a+8}{a^2-4a+4}. \quad 45. \frac{3x^3-6x^2-4x+8}{\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}x-2x+4}.$$

$$46. \frac{a^3-a^2+a-1}{a^3-4a^2+a-4} - \frac{3(a-2)(a+2)}{a^3-4a^2-4a+16}.$$

$$47. \frac{3x^3-x^2-27x+9}{2x^3+3x^2-18x-27} + \frac{x+7}{2x+3}.$$

Упростить

48. $\frac{(x+3)(x(x+1)-6)}{x^2+6x+9}$.
49. $\left(\frac{a^2-9}{a+3} + \frac{2}{a+4} - a+3\right) \cdot \frac{16+a^2+8a}{2}$.
50. $\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3} - \frac{2}{x+1}\right) \cdot (1+x)$. 51. $\frac{2}{y+1} - \frac{y-9}{y^2-3y-4} - \frac{1}{y-4}$.
52. $\frac{3}{a-2} + \frac{a^2+6}{a^2+a-6} + \frac{3}{a+3}$.
53. $\left(\frac{1}{a^2-3a+2} + \frac{1}{a^2-5a+6} + \frac{1}{a^2-4a+3}\right) \cdot (a-3)$.
54. $\left(\frac{1}{a^2+a-2} + \frac{4}{a^2+2a-3} - \frac{1}{a^2+5a+6}\right) \cdot (a-1)$.
55. $\left(\frac{6a+1}{a^2-6a} + \frac{6a-1}{a^2+6a}\right) \cdot \frac{a^4-35a^2-36}{a^4+2a^2+1}$.

Упростить

56. $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b} - \frac{a^3+b^3}{a+b}\right) \cdot \frac{2}{ab}$.
57. $\frac{(a^2+b^2-ab)(a^4-b^4)}{(a^3+b^3)(a^2+b^2)(a-b)}$. 58. $\left(\frac{1}{a^2} + a\right) : \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} + 1\right)$.
59. $\left(\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$.
60. $\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}} - \frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right) : \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right)^{-1}$. 61. $\frac{a^4-1}{a^3+a^2+a+1}$.
62. $\frac{b^3+6b^2+12b+8}{4+4b+b^2}$. 63. $\frac{c^3+c^2+2c+8}{c^3-3c^2+6c-8}$. 64. $\frac{d^3-d^2+3d-27}{d^3+2d^2+9d}$.
65. $\frac{a+2\sqrt{ab^2}+b^2}{\sqrt{a}+b}$, $b \geq 0$. 66. $\frac{a+2\sqrt{ab^2}+b^2}{b-\sqrt{a}}$, $b \leq 0$.
67. $\left(\frac{1}{(a+5)^2} - \frac{1}{(a-5)^2}\right) \cdot \frac{\sqrt{(a+5)^4 \cdot (a-5)^4}}{2a}$.
68. $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{1-a}{\sqrt{ab}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{-1}$.

$$69. \left(\frac{a-9}{\sqrt{a}+3} + 3 - \sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}+4} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}+4}{2}.$$

$$70. \left(\sqrt{a} - \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right).$$

$$71. \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \cdot \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \cdot (a-b).$$

$$72. \left(\frac{4a-9a^{-1}}{2\sqrt{a}-3(\sqrt{a})^{-1}} + \frac{a-4+3a^{-1}}{\sqrt{a}-(\sqrt{a})^{-1}} \right)^2.$$

$$73. \left(\frac{1-a^{-2}}{\sqrt{a}-\sqrt{a^{-1}}} - \frac{2}{\sqrt{a^3}} + \frac{a^{-2}-a}{\sqrt{a}-\sqrt{a^{-1}}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a^3}}{-1}.$$

$$74. \frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a^9}}{\sqrt{a}-\sqrt{a^3}} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[4]{a}+\sqrt{a^5}}. \quad 75. \left(\frac{\sqrt{ab}}{a} - \frac{b}{a+\sqrt{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

Ответы к заданиям § 1

1. y . 2. $\frac{3}{b}$. 3. $\frac{2}{y}$. 4. $\frac{4}{x^2}$. 5. $\frac{1}{3}$. 6. $-\frac{a+2}{3}$. 7. $-\frac{3}{a+b}$. 8. $\frac{3}{a}$.
 9. $\frac{1}{a-3}$. 10. $-x$. 11. $-\frac{1}{x}$. 12. $\frac{1}{x-3}$. 13. $\frac{a+2}{a-2}$. 14. $\frac{1}{3}$. 15. $x-y$.
 16. 1. 17. -1 . 18. 2. 19. 1. 20. $\frac{x}{x+6}$. 21. $\frac{1-x}{2x-1}$. 22. -2 . 23. a^2 .
 24. 1. 25. $a+1$. 26. $\frac{1}{a+b}$. 27. 1. 28. -1 . 29. 1. 30. $a-b$.
 31. 1. 32. a . 33. 1. 34. $\frac{a+1}{3-a}$. 35. 2. 36. $\frac{2a}{a+3}$. 37. $\frac{1}{a-b}$. 38. 1.
 39. $-x-y$. 40. $-2x$. 41. $\frac{a^2}{a-1}$. 42. $b+1$. 43. $\frac{10}{2x+5}$. 44. $a+2$.
 45. $\sqrt{3}x+2$. 46. 1. 47. 2. 48. $x-2$. 49. $a+4$. 50. $x+1$. 51. 0.
 52. $\frac{a+3}{a-2}$. 53. $\frac{3}{a-1}$. 54. $\frac{4}{a+2}$. 55. $\frac{12}{a}$. 56. 4. 57. 1. 58. $a+1$. 59. 1.
 60. $-\frac{1}{a\sqrt{2}}$. 61. $a-1$. 62. $b+2$. 63. $\frac{c+2}{c-2}$. 64. $\frac{d-3}{d}$. 65. $\sqrt{a}+b$.
 66. $b-\sqrt{a}$. 67. -10 . 68. ab . 69. 1. 70. 1. 71. $4\sqrt{b-a}$. 72. $9a$.
 73. a^2+2 . 74. $\sqrt[4]{a}$. 75. $\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$.

§2

Алгебраические уравнения

Корнем уравнения называется всякое число x , обращающее данное уравнение в верное равенство. Задание «решить уравнение» означает, что необходимо найти все его корни (говорят — множество корней; если у уравнения нет корней, то множество его корней пусто). Два уравнения называются равносильными, если все их корни совпадают. Уравнение В называется уравнением-следствием уравнения А, если всякий корень А принадлежит множеству корней уравнения В. Для «отсекания» посторонних корней, получившихся в процессе решения при переходах к уравнениям-следствиям, мы рекомендуем делать проверку.

Решить уравнения

1. $7x + 3(2x - 4) - 4(2 - 3x) = 5$.
2. $3x - 2(x + 1) - 4(5 - 3x) = 4$.
3. $2(4 + 8x) - x = 1 - 3x - 2(x - 11)$.
4. $8(7 - 4x) - 7(4x + 1) + 5(8x - 1) = 19$.
5. $3x - 2 + 3(x + 1) = 6x - 1$.
6. $3x + 2 - 5(x - 1) = 2(1 - x) + 5$.
7. $\frac{x+2}{1-3x} = 1$.
8. $\frac{7}{4x+1} = -1$.
9. $\frac{11}{2-5x} = 3$.
10. $\frac{2}{7-3x} = -0,25$.
11. $\frac{2-x}{2-x} = \frac{2}{3-x}$.
12. $\frac{6}{2x-11} = \frac{3}{x+5}$.
13. $\frac{2}{x+3} = \frac{2x-1}{x^2}$.
14. $\frac{x^2}{2x+1} = \frac{2+x}{2}$.
15. $2x^2 - 3x + 1 = 0$.
16. $x^2 + 10x + 24 = 0$.
17. $x^2 - 10x + 21 = 0$.
18. $x^2 - 5x + 4 = 0$.
19. $x^2 + x - 2 = 0$.
20. $x^2 - x = 0$.
21. $x^3 - 7x^2 = 0$.
22. $x^2 - 2x + 1 = 0$.
23. $9x^2 + 6x + 1 = 0$.
24. $x(x - 1) = x + 8$.
25. $x(x - 1) = 6$.

26. $x(x-5) = 2x - 12$. 27. $x^2 - 2(x+3) = 2$.
28. $x^2 + 2(x-8) + 1 = 0$. 29. $x(x+3) + 2(2x+1) + 10 = 0$.
30. $x(x+2) + x = 10$. 31. $x(x-4) + 4 = x$.
32. $x(x+8) = 12(x+1)$. 33. $x(x-2) + 9x(1+x) + 1 = 0$.
34. $x(2-3x) + 4(x+1) = 3$. 35. $(3x-1)(x+2) = 20$.
36. $(3x+7)(5-x) = 32$. 37. $(x-3)(3x+1) = 32$.

Решить уравнения

38. $x(x^2 + x - 12) = 0$. 39. $(x-3)(x^2 + 8x - 9) = 0$.
40. $(x+2)(2x^2 + 3x - 2) = 0$. 41. $(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 3x) = 0$.
42. $(x-1)(3x^2 + 2x - 1) = 0$. 43. $(2x-7)(8x^2 + 2x - 1) = 0$.
44. $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 9) = 0$. 45. $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)$.
46. $x^2(x-3) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
47. $(4x^2 + 4x + 1)(x+3) = (x-2)(1+2x)$.
48. $(x-2)(x+5) = \frac{x-2}{x+5}$. 49. $(x+3)(4x-5) = \frac{x+3}{4x-5}$.
50. $(2x+3)(3-5x) = \frac{3+2x}{3x-5}$. 51. $(7x-2)(x+1) = \frac{7x-2}{x-3}$.
52. $2x^3 + x^2 + 12x + 6 = 0$. 53. $x^3 - 6x^2 + 2x - 12 = 0$.
54. $x^3 - 2x^2 - 81x + 162 = 0$. 55. $3x^3 + 12x^2 = 2x + 8$.
56. $6 \cdot \left(x + \frac{1}{x^2}\right) - 7 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$.

Решить уравнения

57. $x + \frac{5}{x} + 6 = 0$. 58. $x + 4 = \frac{5}{x}$. 59. $x + 7 + \frac{6}{x} = 0$.
60. $x - \frac{12}{x} = 4$. 61. $\frac{1}{x} + 2 = 3x$. 62. $x + \frac{1}{x} = 2,5$.

63. $2x + 5,5 = \frac{3}{2x}$. 64. $\frac{7}{x^2} - \frac{13}{x} - 2 = 0$. 65. $2 + \frac{5}{x} = \frac{12}{x^2}$.
 66. $\frac{3}{x^3} - \frac{5}{2x^2} = 0$. 67. $\frac{10}{x^3} - \frac{1}{5x} = 0$. 68. $(7 - 8x)^2 = 1$.
 69. $(x^2 - 4x)^2 = 25$. 70. $(x^2 - 6x + 9)^2 = 81$.
 71. $(8 - 7x - 3x^2)^2 = 4$. 72. $(7x^2 - 6x)^2 = 1$. 73. $\frac{4}{9x} = \frac{9x}{4}$.
 74. $\frac{7x}{6} = \frac{6}{7x}$. 75. $\frac{x^2}{7} - \frac{343}{9} = 0$. 76. $\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{32}{25} = 0$.
 77. $\frac{5}{36} - \frac{(x+3)^2}{5} = 0$. 78. $\frac{16}{49} - \frac{(2x+1)^2}{4} = 0$.

Решить уравнения

79. $\frac{(x-4)(x-3)}{x^2 - 2x - 8} = 0$. 80. $\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = 0$.
 81. $\frac{x(x+3) - 10}{x + 5} = 0$. 82. $\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x - 3} = 0$.
 83. $\frac{x^2 - 4(x+3)}{x + 2} = 0$. 84. $\frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 5x + 6} = 0$.
 85. $\frac{x(x-7)}{x+2} + \frac{6(x-1)}{x+2} = 0$. 86. $\frac{2x - 14}{x^2 - 6x - 7} = 1$.
 87. $\frac{2x + 1}{2x^2 + 3x + 1} = 1$. 88. $\frac{x^2 - x}{x - 1} = 2$. 89. $\frac{x(x+2)}{4 - x} = 4$.
 90. $\frac{x^2 + 2x}{3x - 16} = -6$. 91. $\frac{1 - 9x^2}{3x + 1} = -6$. 92. $\frac{x^2 + 8x - 20}{x - 2} = 3$.
 93. $\left(\frac{x}{5} - \frac{4}{5-x} + \frac{1}{10}\right)^2 = 1$. 94. $\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{6+x} + \frac{1}{2}\right)^2 = 4$.
 95. $\left(\frac{x-2}{3} - \frac{4}{x} - 1\right)^2 = 9$. 96. $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+10}{x^2 + 2x}$.
 97. $\frac{15}{x-2} = \frac{42+x}{x}$. 98. $\frac{x^2}{x+5} = \frac{25}{x+5}$. 99. $\frac{2x^2}{x+9} = \frac{9-17x}{x+9}$.
 100. $2x^2 = \frac{3x^2 - 27}{x - 3}$. 101. $2x(2x+5) = \frac{9-x^2}{x+3}$.
 102. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$. 103. $\frac{4x^2 - 25}{2x + 5} = \frac{4x^2 - 25}{5x + 2}$.

Решить уравнения

104. $\frac{2}{3-x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{x(3-x)}$. 105. $\frac{x}{x^2-16} + \frac{x-1}{x+4} = 1$.
106. $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$. 107. $\frac{x}{x-3} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{6x}{x^2-9}$.
108. $3(x-2) - \frac{16}{x-3} = 1$. 109. $\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{3}{x-2}$.
110. $\frac{2}{x-5} + \frac{14}{x} = 3$. 111. $\frac{x^2-1}{x} = x^2 - \frac{1}{x}$.
112. $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x(x-4)}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+2} - \frac{4(3+x)}{4-x^2}$.
113. $\frac{x+5}{x+2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1}$. 114. $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)} + \frac{1}{x-3} = 1$.
115. $\frac{2}{x+3} - \frac{5}{x-4} = 1 - \frac{35}{x^2-x-12}$.
116. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3+1} = \frac{2}{x^2-x+1}$. 117. $\frac{\frac{1}{x}-2}{1-\frac{1}{x-6}} = -2$.
118. $\frac{\frac{3}{x}+5}{\frac{6}{x-6}-1} = -2$. 119. $\frac{2-\frac{3}{x+2}}{2-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{3}$. 120. $\frac{\frac{3}{x}-1}{1-\frac{1}{x-2}} = -11$.
121. $\frac{\frac{2}{x+1}-1}{1+\frac{1}{x-2}} = x+2$. 122. $\frac{\frac{2}{x-3}+2}{2+\frac{1}{x-3}} = \frac{6}{x}$. 123. $\frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{2-\frac{6}{x}}{x-2}$.

Решить уравнения

124. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. 125. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
126. $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$. 127. $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$. 128. $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$.
129. $x^4 + 3x^2 - 40 = 0$. 130. $2(3x-4)^2 + 3(3x-4) = 2$.
131. $(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15 = 0$.
132. $(x+3)^4 - 3(x+3)^2 + 2 = 0$.
133. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$. 134. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4,5 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$.

$$135. (x^2 + 2x)^2 - 3(x + 1)^2 = 1. \quad 136. (x^2 - 4x)^2 + 2(x - 2)^2 = 11.$$

$$137. \frac{36}{(x-4)^2} + x^2 + 3 = 8x. \quad 138. \frac{4}{x(x-2)} - \frac{7}{(x-1)^2} = 5.$$

$$139. \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{x^2+6x} = \frac{4}{5}. \quad 140. \frac{2(x-1)}{x} - \frac{5x}{x-1} = -3.$$

$$141. \frac{x+1}{3x} - \frac{3x}{2x+2} = -\frac{1}{2}. \quad 142. \frac{2x-3}{1+x} - \frac{8x+8}{2x-3} = -2.$$

$$143. (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) = 12. \quad 144. x^2 + x + 3 = \frac{10}{x^2 + x}.$$

$$145. \frac{12}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6. \quad 146. \frac{4x^2 + 5x - 3}{2} - \frac{3}{4x^2 + 5x} = 1.$$

$$147. \frac{6x^2 + x - 3}{2} - \frac{7}{6x^2 + x} = 1. \quad 148. \frac{21}{2x^2 - 5x + 10} - 2x^2 + 5x = 6.$$

$$149. \frac{36}{x^4 - 4x^2} + x^4 + 13 = 4x^2. \quad 150. \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = 2.$$

$$151. \frac{1}{3x^2 - 2x + 2} - \frac{8}{3x^2 - 2x - 3} = 3.$$

$$152. \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{1}{2}.$$

$$153. \frac{2x^2 - x + 1}{4x^2 - 2x} + \frac{2x^2 - x + 2}{2x^2 - x - 3} = -\frac{1}{2}.$$

$$154. \frac{x^2 + 4x + 7}{x^2 + 4x - 3} = x^2 + 4x + 1. \quad 155. \frac{6}{1 + 3x - x^2} = x^2 - 3x + 4.$$

Решить уравнения

$$156. (x^2 - 4)\sqrt{x} = 0. \quad 157. (x^2 - 25)\sqrt{6 - 2x} = 0.$$

$$158. \sqrt{17 - 5x}(x^2 - 7x + 12) = 0. \quad 159. \sqrt{x - 2}(x^2 - 6x + 7) = 0.$$

$$160. \sqrt{x} \cdot \frac{x^2 - 1}{x + 5} = 0. \quad 161. \sqrt{x} \cdot \frac{x^2 - 1}{x + 5} = \sqrt{x}.$$

$$162. \sqrt{\frac{x+2}{x}} \cdot x^2 = \sqrt{\frac{x+2}{x}}. \quad 163. \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} \cdot x^2 = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}.$$

$$164. \sqrt{x-1} = 2. \quad 165. \sqrt{\frac{1}{2x-6}} = \frac{1}{8}.$$

$$166. \sqrt{x+1}\sqrt{2x-5} = 2. \quad 167. \sqrt{3x+8}\sqrt{x+3} = 2.$$

$$168. \sqrt{x-6}\sqrt{3x+8} = 3. \quad 169. \sqrt{x^2+4x} = \sqrt{14-x}.$$

170. $\sqrt{x^3 - x + 5} = \sqrt{x^3 + x^2 - 1}$. 171. $\sqrt{x^2 + 6x + 8} = \sqrt{x + 2}$.
172. $\sqrt{x - 2} = \sqrt{2x - 1}$. 173. $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{14 - x}$.
174. $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$. 175. $x + 5\sqrt{x} = 24$. 176. $\frac{18}{\sqrt{x}} + 7 = \sqrt{x}$.
177. $\frac{x+1}{x} - \sqrt{\frac{x+1}{x}} - 2 = 0$. 178. $\sqrt{22 - x^2} = -x$.
179. $\sqrt{2x^2 - 9} = x$. 180. $\sqrt{2x^2 + 1} = 2x - 1$.
181. $-\sqrt{x + 5} = 2x - 5$. 182. $\sqrt{3 - 4x} = 2x - 1$.
183. $\sqrt{x + 3} = x - 9$. 184. $\frac{3x - 4}{\sqrt{2 - x}} = 1$. 185. $\frac{\sqrt{1 - x}}{2x + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
186. $\frac{\sqrt{3x + 1}}{x - 1} = 1,8$. 187. $(x^2 + 4x)(x - \sqrt{3x + 10}) = 0$.
188. $(x^2 - 9)(\sqrt{3 - 2x} - x) = 0$.
189. $(x^2 - 4)(\sqrt{4 - 3x} + x) = 0$. 190. $\sqrt{x + 2} = 2 + \sqrt{x - 6}$.
191. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{2x + 2} = 2$. 192. $\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 2} = 2$.
193. $\sqrt{x + 3} + \sqrt{3x - 2} = 7$. 194. $\sqrt{4x - 1} - \sqrt{x - 2} = 3$.
195. $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x} = \sqrt{2x + 7}$. 196. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 6} = 7$.
197. $\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 3} = 1$. 198. $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 3} = 2\sqrt{x}$.
199. $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0$. 200. $\sqrt[3]{(x + 3)^2} + \sqrt[3]{x + 3} = 2$.
201. $\sqrt[3]{x} = \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}$. 202. $3 \cdot \sqrt[3]{x} - 5 \cdot \sqrt[3]{x^{-1}} = 2 \cdot x^{-1}$.
203. $\frac{x - 1}{1 + \sqrt{x}} = 4 - \frac{1 - \sqrt{x}}{2}$. 204. $\sqrt{x^2 + 3x + 5} = \sqrt{x^2 + 3x} + 1$.
205. $\sqrt{5x^2 + x + 12} = \sqrt{5x^2 + x} + 2$.
206. $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7$. 207. $x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 18$.
208. $x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7$. 209. $\sqrt{\frac{2x + 2}{x + 2}} - \sqrt{\frac{x + 2}{2x + 2}} = \frac{7}{12}$.
210. $\sqrt{\frac{x + 2}{x - 2}} - \sqrt{\frac{x - 2}{x + 2}} = \frac{80}{9}$. 211. $\frac{x}{\sqrt{x + 1} + 1} = x - 12$.

$$\begin{array}{ll}
212. \frac{x-10}{\sqrt{x-1}+3} = \frac{x-6}{2}. & 213. \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = x-11. \\
214. \frac{2x-1}{\sqrt{2x+15}-4} = x+10. & 215. \frac{2x+1}{3-\sqrt{2x+10}} = 2+x. \\
216. \sqrt{4-x\sqrt{3x-4}} = 3x-2. & 217. \sqrt{4+x\sqrt{x-4}} = x-2. \\
218. \sqrt{9+x\sqrt{2x-3}} = x-3. & 219. \sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}} = x+1. \\
220. \sqrt{4-x\sqrt{x^2+4}} = x+2. & 221. \frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}. \\
222. \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}. & \\
223. \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-x+1} = 4x-1. &
\end{array}$$

Bizarreries cubiques⁴

$$\begin{array}{ll}
224. x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0. & 225. 4x^3 - 6x^2 - 14x + 21 = 0. \\
226. \sqrt{2}x^3 + 2x^2 - \sqrt{8}x - 4 = 0. & 227. x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0. \\
228. x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0. & 229. 4x^3 - 7x^2 - 14x - 3 = 0. \\
230. 5x^3 - 11x^2 + 7x - 1 = 0. & 231. x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0. \\
232. x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0. & 233. 2x^3 + 11x^2 + 13x + 4 = 0. \\
234. 2x^3 - 11x^2 + 13x - 4 = 0. & 235. 6x^3 + 19x^2 + 2x - 3 = 0. \\
236. x^3 - 13x - 12 = 0. & 237. x^3 - 3x + 2 = 0. \\
238. x^3 - 3x^2 + 4 = 0. & \\
239. (x-2)^4 - (x+2)^4 = 80. & 240. \sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0. \\
241. \sqrt[3]{4x} - \sqrt{2+x} = 0. & 242. x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3-x^2} = 2. \\
243. \frac{2x}{1-\sqrt{2x+10}} = 1+x. & 244. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+1} = 1. \\
245. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = 1. & 246. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}. \\
247. \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2. & 248. \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5.
\end{array}$$

⁴Кубические причуды (франц.), фраза, вырвавшаяся у Анри Матисса в 1908 году, вместе с которой появился термин «кубизм».

Решить уравнения

$$249. 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9.$$

$$250. 12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9 + 28\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

$$251. (x+2)^2 + \frac{144}{(x+2)^2} - 15\left(\frac{x+2}{3} - \frac{4}{x+2}\right) = 20.$$

$$252. x^2 + \frac{4}{x^2} = x - \frac{2}{x} + 6.$$

$$253. \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{18}{(x-2)^2} = 3\left(\frac{x-2}{4} - \frac{3}{x-2}\right) + 2.$$

$$254. \frac{(x+1)^2}{8} + \frac{2}{(x+1)^2} + 4\left(\frac{x+1}{4} + \frac{1}{x+1}\right) = 5.$$

$$255. \frac{(x-3)^2}{6} + \frac{24}{(x-3)^2} + 5\left(\frac{x-3}{6} - \frac{2}{x-3}\right) = 5.$$

$$256. \frac{(x+1)^2}{8} + \frac{2}{(x+1)^2} - 2\left(\frac{x+1}{4} + \frac{1}{x+1}\right) = 23.$$

$$257. \frac{2(x+4)^2}{3} + \frac{96}{(x+4)^2} - 41\left(\frac{x+4}{3} + \frac{4}{x+4}\right) + 84 = 0.$$

$$258. 2x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 6. \quad 259. 3x^2 + 2x + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 10.$$

$$260. x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 9x + 9 = 0.$$

$$261. x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x + 9 = 0.$$

$$262. 4x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 3x + 4 = 0.$$

$$263. x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

⁵ К заданиям, помеченным назидательно поднятым  пальцем, рядом с ответом мы приводим рекомендацию к решению. Кстати, уравнения этого пункта составлены по мотивам заданий от разработчиков КИМ [3]. И, пусть и не совсем уже кстати, ремарка к вопросу о (второй) свежести тестов: прототипы каверзных неравенств (№ 15), предложенных на ЕГЭ-2018 в Ростовской области, анонсировались в типовых тестах от 2014 года [1, с. 29–33]. В общем, варианты от разработчиков КИМ — не осетрина, и не стоит пренебрегать заданиями прошлых лет.

Решить уравнения

264. $(x+1)^4 + (x-1)^4 = 272$.

265. $(x+2)^4 + (x-2)^4 = 82$. 266. $(x+1)^4 + (x-1)^4 = 16$.

267. $(x+2)^4 + (x+4)^4 = 2$. 268. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

269. $(x+3)^4 + (x-1)^4 = 82$. 270. $x(x-2)(x^2-2x-3) = 40$.

271. $(x+1)(x^2+5x+6)(x+4) = 120$.

272. $x(6x+5)(2x+1)(3x+1) = 2$. 273. $(x-3)(x-2)x(x+1) = 4$.

274. $(x^2-4)(x-1)(x+3) = 60$. 275. $(x-5)(x^2-4)(x-1) = -20$.

276. $x(x-5)(x^2-x-6) = 39$. 277. $(8x+7)^2(4x+3)(x+1) = \frac{9}{2}$.

278. $(4x-5)^2(x+2)(2x-9) + 726 = 0$.

279. $(2x+3)^2(x-2)(x+5) = 39$.

280. $(x+4)(x+5)(x^2-12x+20) = -54x^2$.

281. $(x-4)(x^2-8x-20)(x+5) = 220x^2$.

282. $(6-x)(x-2)(x+3)(x+9) = 24x^2$.

283. $(x+6)(x+2)(12-x)(x-4) + 160x^2 = 0$.

284. $(x+6)(x^2-5x+6)(x+4) = 40x^2$.

285. $(x-9)(x-3)(x^2+8x+12) = 56x^2$.

286. $(x-3)(x+9)(x^2-4x-12) = 300x^2$.

287. $\frac{2x}{x^2-x+1} + \frac{3x}{x^2+2x+1} = 2$.

288. $\frac{4x}{15x^2-3x+2} - \frac{x}{15x^2+2x+2} = \frac{1}{3}$.

289. $\frac{x}{x^2-x-1} + \frac{4x}{2x^2+x-2} = 3$. 290. $\frac{2x}{x^2+x-3} - \frac{5x}{x^2-3x-3} = \frac{10}{3}$.

Решить уравнения⁶

291. $\left|\frac{3}{4} - 4x\right| = \frac{1}{2}$. 292. $\left|7 + \frac{2}{x-2}\right| = \frac{1}{3}$.
293. $\left|3x + \frac{2}{x}\right| = 5$. 294. $||x - 1| - 2| = 1$. 295. $||x - 1| + 2| = 1$.
296. $|3 - |x + 1|| = 11$. 297. $x^2 - 4|x| - 5 = 0$.
298. $x^2 + 6\sqrt{x^2} = 16$. 299. $(x + 2)^2 - 8|x + 2| + 15 = 0$.
300. $(2x - 1)^2 - 7|2x - 1| + 6 = 0$. 301. $|3 - 7x| = 9x$.
302. $|x - 3| = 2 - 3x$. 303. $|x^2 - 3x + 2| = 8 - 2x$.
304. $\left|3 - \frac{2}{x+1}\right| = 1 - x$. 305. $|x + |2 - x|| = x + 1$.
306. $|x - |x + 1| + 2| = 1$. 307. $||x - 8| - x + 6| = 2$.
308. $|x| = \sqrt{x + 2}$. 309. $|1 - 6x| = \sqrt{x}$. 310. $|3x - 1| = \sqrt{x - x^2}$.
311. $|x^2 - x| = |8 - 3x|$. 312. $\left|x - \frac{1}{x}\right| = |2x + 2|$. 313. $|x| + x^3 = 0$.
314. $|x + 1|\sqrt{x} = 1 + x$. 315. $x^2 - 3|2x - 7| = 13$.
316. $x^2 - 4|x - 7| = -7$. 317. $|x^2 - 1| = x + 5$.
318. $6 - |3 - 2x| = \frac{1}{x-3}$. 319. $|x - 1| - |x - 2| = 1$.
320. $|x - 1| + |3x + 2| = 3$. 321. $|x - 3| - \frac{2}{|x|} = x + 1$.
322. $\frac{|x-2|+1}{x} - |3-2x| = 1$. 323. $|x-2| - \frac{x+3}{|x+1|} = |x|$.

⁶Всем, кто считает, что для 60+ баллов «проходить модули» обязательно, мы рекомендуем заглянуть в тесты от разработчиков КИМ, например [3].

Ответы к заданиям § 2

1. 1. 2. 2. 3. $\frac{3}{4}$. 4. $\frac{5}{4}$. 5. $\emptyset$. 6. $x \in \mathbb{R}$. 7. $-0,25$. 8. -2 .
 9. $-\frac{1}{3}$. 10. 5. 11. 5. 12. $\emptyset$. 13. 0,6. 14. $-0,4$. 15. 1; 0,5. 16. -4 ;
 -6 . 17. 3; 7. 18. 1; 4. 19. 1; -2 . 20. 0; 1. 21. 0; 7. 22. 1. 23. $-\frac{1}{3}$.
 24. -2 ; 4. 25. -2 ; 3. 26. 3; 4. 27. -2 ; 4. 28. -5 ; 3. 29. -4 ; -3 .
 30. -5 ; 2. 31. 1; 4. 32. -2 ; 6. 33. $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{5}$. 34. $1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 35. $-3\frac{2}{3}$;
 2. 36. $-\frac{1}{3}$; 3. 37. $-\frac{7}{3}$; 5. 38. -4 ; 0; 3. 39. -9 ; 1; 3. 40. -2 ; -2 ; $\frac{1}{2}$.
 41. 0; 1; 3; 3. 42. -1 ; $\frac{1}{3}$; 1. 43. $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $3\frac{1}{2}$. 44. ± 2 ; $4 \pm \sqrt{7}$. 45. -2 ;
 -1 ; 1. 46. 0; 3. 47. $-\frac{1}{2}$. 48. -6 ; -4 ; 2. 49. -3 ; 1; 1,5. 50. $-\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{5}$.
 51. $\frac{2}{7}$; $1 \pm \sqrt{5}$. 52. $-\frac{1}{2}$. 53. 6. 54. -9 ; 2; 9. 55. -4 ; $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$. 56. -1 ;
 $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$. 57. -5 ; -1 . 58. -5 ; 1. 59. -6 ; -1 . 60. -2 ; 6. 61. $-\frac{1}{3}$; 1.
 62. $\frac{1}{2}$; 2. 63. -3 ; $\frac{1}{4}$. 64. -7 ; $\frac{1}{2}$. 65. -4 ; $\frac{3}{2}$. 66. $\frac{6}{5}$. 67. $\pm 5\sqrt{2}$.
 68. $\frac{3}{4}$; 1. 69. -1 ; 5. 70. 0; 6. 71. $-\frac{10}{3}$; -3 ; $\frac{2}{3}$; 1. 72. $-\frac{1}{7}$; $\frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}$; 1.
 73. $\pm \frac{4}{9}$. 74. $\pm \frac{6}{7}$. 75. $\pm \frac{49}{3}$. 76. 0,4; 3,6. 77. $-\frac{23}{6}$; $-\frac{13}{6}$. 78. $-\frac{15}{14}$;
 $\frac{1}{14}$. 79. 3. 80. 4. 81. 2. 82. 0; 1. 83. 6. 84. $-\frac{1}{4}$. 85. 3. 86. 1.
 87. 0. 88. 2. 89. -8 ; 2. 90. -24 ; 4. 91. $\frac{7}{3}$. 92. -7 . 93. -3 ; 2,5.
 94. -12 ; -4 ; $\pm 4\sqrt{3}$. 95. -6 ; 2; $7 \pm \sqrt{61}$. 96. 5. 97. -28 ; 3. 98. 5.
 99. 0,5. 100. $-1,5$. 101. 0,25. 102. -1 . 103. 1; 2,5. 104. 4. 105. 5.
 106. 1; 6. 107. $-\frac{1}{2}$. 108. $\frac{1}{3}$; 5. 109. $\pm \sqrt{6}$. 110. $\frac{10}{3}$; 7. 111. 1.
 112. 6. 113. -4 . 114. $\emptyset$. 115. -6 . 116. 0; 3. 117. -6 . 118. -2 ; 3.
 119. -1 ; 0,25. 120. $-0,2$. 121. -4 ; 0. 122. 5. 123. -3 . 124. -1 ;
 1; -2 ; 2. 125. ± 2 ; ± 3 . 126. ± 2 . 127. ± 3 . 128. $\pm \sqrt{3}$. 129. $\pm \sqrt{5}$.
 130. $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$. 131. -5 ; -1 ; -1 ; 3. 132. -4 ; -2 ; $-3 \pm \sqrt{2}$. 133. -1 ; 2.
 134. $\frac{1}{2}$; 1; 1; 2. 135. -1 ; $-1 \pm \sqrt{5}$. 136. 1; 3; $2 \pm \sqrt{5}$. 137. 1; 2; 6; 7.
 138. $\frac{5 \pm \sqrt{35}}{5}$. 139. $\frac{-6 \pm \sqrt{6}}{2}$; $\frac{-6 \pm \sqrt{30}}{2}$. 140. $\frac{2}{7}$. 141. $-\frac{1}{4}$; 2. 142. $-\frac{1}{6}$.
 143. -2 ; 1. 144. -2 ; 1. 145. 2. 146. -2 ; -1 ; $-\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$. 147. $-\frac{7}{6}$;
 1. 148. 1; $\frac{3}{2}$. 149. $\pm \sqrt{2}$. 150. 1. 151. $\frac{1}{3}$. 152. 1. 153. $-\frac{1}{2}$; 1.
 154. -5 ; $-2 \pm \sqrt{2}$; 1. 155. 1; 2; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. 156. 0; 2. 157. -5 ; 3. 158. 3;
 3,4. 159. 2; $3 + \sqrt{2}$. 160. 0; 1. 161. 0; 3. 162. -2 ; 1. 163. -2 ; -1 .
 164. 5. 165. 35. 166. 3. 167. $-\frac{5}{3}$. 168. $\frac{19}{3}$. 169. -7 ; 2. 170. 2.
 171. -2 . 172. $\emptyset$. 173. $\frac{3 \pm \sqrt{65}}{2}$. 174. 1. 175. 9. 176. 81. 177. $\frac{1}{3}$.
 178. $-\sqrt{11}$. 179. 3. 180. 2. 181. $\frac{5}{4}$. 182. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 183. 13. 184. $\frac{14}{9}$.
 185. $\frac{1}{4}$. 186. $\frac{8}{3}$. 187. 0; 5. 188. -3 ; 1. 189. -4 ; -2 . 190. 7.

191. 1. 192. $11 - 8\sqrt{2}$. 193. 6. 194. $\frac{14+2\sqrt{15}}{3}$. 195. 1. 196. 10.
 197. -1. 198. 4. 199. $-3\frac{3}{8}$; 1. 200. -11; -2. 201. -1; 8. 202. $\pm 2\sqrt{2}$.
 203. 81. 204. -4; 1. 205. -1; $\frac{4}{5}$. 206. -1; 4. 207. -5; 2. 208. -5; 2.
 209. 7. 210. 2,05. 211. 15. 212. 2. 213. 13. 214. -3. 215. -5.
 216. $\frac{4}{3}$. 217. 4; 5. 218. $7 + \sqrt{10}$. 219. 0; 5. 220. 0. 221. -1; $\frac{9}{16}$.
 222. Домножить обе части уравнения на $\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}$. $\frac{25}{16}$.
 223. Домножить обе части уравнения на $\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - x + 1}$,
 преобразовать, полученное уравнение можно решить само по себе,
 а можно сложить с исходным. 0, $\frac{1}{4}$. 224. ± 1 ; 3. 225. $\pm \frac{\sqrt{14}}{2}$; $\frac{3}{2}$.
 226. $\pm \sqrt{2}$. 227. -4; -3; 1. 228. 2; 3; 5. 229. -1; $-\frac{1}{4}$; 3. 230. $\frac{1}{5}$; 1.
 231. -2; -1. 232. -5; -2; 3. 233. -4; -1; $-\frac{1}{2}$. 234. $\frac{1}{2}$; 1; 4. 235. -3;
 $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$. 236. -3; -1; 4. 237. -2; 1; 1. 238. -1; 2; 2. 239. -1. 240. 2.
 241. 2; $4 + 2\sqrt{5}$. 242. -1; 2. 243. -0,5. 244. 0. 245. 0. 246. 1; 3.
 247. 0. 248. 1; 20. 249. Пусть $t = x + \frac{1}{x}$; обе части этого равенства
 возвести в квадрат. Ответ: $\frac{1}{2}$; 2. 250. $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 2. 251. -5; 2;
 ± 4 . 252. -2; 1; $1 \pm \sqrt{3}$. 253. 0; 8; $3 \pm \sqrt{13}$. 254. $-7 \pm 4\sqrt{2}$; 1.
 255. 0; 7; $\pm \sqrt{21}$. 256. $-7 \pm 4\sqrt{2}$; $7 \pm 2\sqrt{15}$. 257. $2 \pm 2\sqrt{6}$; $\frac{1 \pm \sqrt{97}}{4}$.
 258. -2; $-\frac{1}{2}$; 1. 259. 1; $\frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$. 260. Поверив, что $x = 0$ корнем
 не является, разделим обе части уравнения на x^2 , и пример станет
 таким же, как и предыдущий. -3; 1; $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. 261. $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. 262. ± 1 ;
 $\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{8}$. 263. $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. 264. ± 3 . 265. ± 1 . 266. ± 1 . 267. Принять за t
 среднее арифметическое обеих скобок ($t = x + 3$), далее используем
 бином Ньютона: $(t \pm 1)^4 = \dots$. Ответ: -3. 268. -5; -3. 269. 0; -2.
 270. -2; 4. 271. Положим $t = x^2 + 5x$, или, ещё рациональней,
 $t = (x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4$. -6; 1. 272. -1; $\frac{1}{6}$. 273. 1;
 $1 \pm \sqrt{5}$. 274. -4; 3. 275. 0; 3; $\frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$. 276. $\frac{3 \pm \sqrt{61}}{2}$. 277. -1,25;
 -0,5. 278. $-\frac{3}{2}$; $\frac{5 \pm 4\sqrt{3}}{4}$; 4. 279. $-\frac{3 \pm 2\sqrt{13}}{2}$. 280. Раскрыть скобки:
 $(x + 4)(x + 5) = x^2 + 9x + 20$, разделить обе части уравнения на x^2 ,
 сделать замену $t = x + \frac{20}{x}$. Ответ: 4; 5. 281. -1; 20; $-6 \pm 2\sqrt{14}$.
 282. -6; 3; $\frac{-1 \pm \sqrt{73}}{2}$. 283. -12; 2; $9 \pm \sqrt{105}$. 284. -2; 6; $\frac{-9 \pm \sqrt{129}}{2}$.
 285. -9; 2; $\frac{11 \pm \sqrt{193}}{2}$. 286. $\frac{-21 \pm 3\sqrt{41}}{2}$; 1; 18. 287. $\frac{1}{2}$; 2. 288. $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{3}$.
 289. $-\frac{1}{2}$; ± 1 ; 2. 290. $-\frac{3}{2}$; $\frac{3 \pm 3\sqrt{309}}{10}$; 2. 291. $\frac{1}{16}$; $\frac{5}{16}$. 292. $\frac{17}{10}$; $\frac{19}{11}$.
 293. ± 1 ; $\pm \frac{2}{3}$. 294. ± 2 ; 0; 4. 295. $\emptyset$. 296. -15; 13. 297. ± 5 . 298. ± 2 .

299. $-7, -5, 1, 3$. 300. $-\frac{5}{2}, 0, 1, \frac{7}{2}$. 301. $\frac{3}{16}$. 302. $-\frac{1}{2}$. 303. $-2; 3$.
304. $-3; \frac{3-\sqrt{17}}{2}; 0$. 305. $1; 3$. 306. $\{-2\} \cup [-1; +\infty)$. 307. $\{6\} \cup [8; +\infty)$.
308. $-1; 2$. 309. $\frac{1}{9}; \frac{1}{4}$. 310. $0,2; 0,5$. 311. $-4; 2$. 312. $-1; \frac{1}{3}$. 313. 0 ;
 -1 . 314. 1 . 315. $-3 - \sqrt{43}; 4$. 316. $-7; 3$. 317. $-2; 3$. 318. $\frac{3-\sqrt{89}}{4}$;
 $\frac{7}{2}; 4$. 319. $x \geq 2$. 320. $-1; 0$. 321. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 322. $1; \frac{3}{2}$. 323. $-\frac{5}{3}$.

§3

Показательные уравнения

Функция $y = a^x$ называется показательной; a — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее ограничениям $a > 0$ и $a \neq 1$, называется её основанием. Областью определения показательной функции является вся числовая ось $\mathbb{R}$, множеством значений — все положительные действительные числа. Показательная функция является взаимно однозначной: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$. Приведём в виде формул другие её свойства:

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x \cdot a^y; & a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y}; & a^x \cdot b^x &= (ab)^x; & \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x; \\ a^0 &= 1; & (a^x)^y &= a^{xy}; & a^{-x} &= \frac{1}{a^x}; & \sqrt[n]{a^x} &= a^{\frac{x}{n}} \quad (n = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Решить уравнения

1. $6^{x-1} = 36$.
2. $2^{3x-4} = 32$.
3. $2^{x-1} = 4^5$.
4. $3^{4x-7} = \frac{1}{3}$.
5. $7^{3x-8} = \frac{1}{49}$.
6. $13^{4-3x} = \frac{1}{13}$.
7. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 64$.
8. $11^{3x} = 121^{5-x}$.
9. $7^x = 49^{\frac{2}{3}}$.
10. $5^{x^2-15} = 25^x$.
11. $4^x = 8^{2x-3}$.
12. $16^{2x^2+1} = 8^{4x}$.
13. $4^{x+1} = \sqrt{2}$.
14. $81^x = \sqrt[5]{9}$.
15. $(\sqrt{3})^{x+3} = 9$.
16. $2^{x-3} = \sqrt{32}$.
17. $64^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
18. $5^{x^2} = \frac{1}{5}$.
19. $\left(\frac{7}{5}\right)^{3-x^2} = \frac{5}{7}$.
20. $\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-1} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x+2}$.
21. $\left(\frac{2}{7}\right)^{x-3} = \left(\frac{49}{4}\right)^{x^2}$.
22. $\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2-7} = \frac{25}{16}$.
23. $e^x = 1$.
24. $\pi^x = 0$.
25. $2^{x^2+5x-3,5} = \frac{8}{\sqrt{2}}$.

Решить уравнения

26. $3^x \cdot 2^x = \frac{1}{36}$. 27. $2^{x+2} \cdot 9^x = 72$. 28. $7^x \cdot 3^{x+3} = \frac{9}{7}$.
 29. $\sqrt{3^x} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 225$. 30. $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$. 31. $4^{x-2} \cdot 7^{x+1} = \frac{7\sqrt{7}}{8}$.
 32. $32 \cdot 2^{x^2+10} = \frac{1}{2^{8x}}$. 33. $2^{1-2x} \cdot 2^{3(x-2)} = 4^{x-1}$.
 34. $\frac{2^{2-x}}{4^{x+1}} = \sqrt{8}$. 35. $\frac{2^{3x-2} \cdot 64}{4^{x-2}} = 8^{2x+1}$. 36. $0,1^x \cdot 100^{2x} = 10^{-3}$.
 37. $(10^{5-x})^{6-x} = 100$. 38. $(2^{x^2})^2 \cdot 2^x = 2$. 39. $2^{\frac{1}{x-1}} = \sqrt[5]{2^8} \cdot 2^{\frac{x}{x-1}}$.
 40. $5^{3x+2} \cdot 25^{7-2x} = 5^{5x+28}$. 41. $(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$.
 42. $(0,4)^{x-1} = (6,25)^{6x-5}$. 43. $64^x = \frac{8^{\frac{1}{x+1}}}{\sqrt[4]{2}}$.
 44. $25^{\frac{15x^2-17x-3}{8}} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$. 45. $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$.
 46. $32^{x-1} = 0,25 \cdot 128^{\frac{1}{x-1}}$. 47. $27^{x-3} = \frac{81^{\frac{x-4}{x+1}}}{\sqrt[3]{3}}$.
 48. $0,25 \cdot 2^{x^2-4x} = \left(\frac{\sqrt{2}}{0,25}\right)^{x+4}$. 49. $2,25^{x^2+3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-10}$.
 50. $(0,4)^{x-1} = (6,25)^{6x-5}$. 51. $2^{x+2} \cdot 5^{x-5} = 10^{2+x} \cdot 5^{x+8}$.
 52. $3^x \cdot 7^{2x+3} = 3 \cdot 21^{x-1} \cdot 7^{7-x}$. 53. $3^{x^2-x+1} \cdot 2^{x^2-x+0,5} = \frac{6^{x+5,5}}{12\sqrt{3}}$.

Решить уравнения

54. $4^{x+1} - 3 \cdot 4^x = 16$. 55. $2^{x+2} = 2^x + 24$.
 56. $3^{x+1} - 2 \cdot 3^x = 9$. 57. $6 \cdot 3^x + 1 = 3^{x+2}$.
 58. $20 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x+1} = 1$. 59. $4 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+2} = 1$.
 60. $4 \cdot 3^{x+1} - 11 \cdot 3^x = \frac{1}{27}$. 61. $\frac{3}{7} \cdot 7^x - 7^{x-1} = 14$.
 62. $5 \cdot 2^{x+2} - 2^{x+4} - 2^{x+1} = 8$. 63. $3^{x+1} - 2 \cdot 3^x = 3^{x-1} + 6$.

$$64. 16^x - 4^x - 2 = 0. \quad 65. 4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0.$$

$$66. 25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0. \quad 67. 4^x - 16 \cdot 2^x = 0.$$

$$68. 4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0. \quad 69. 4^{\frac{1}{x}} - 6 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 8 = 0.$$

$$70. 3 \cdot 81^{\frac{1}{x}} - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0. \quad 71. 3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0.$$

$$72. 3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2. \quad 73. 9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0.$$

$$74. 2^x + 6 = 2^{4-x}. \quad 75. 6^{x+1} + 6^{1-x} = 37. \quad 76. 5^x + 5^{1-x} = 6.$$

$$77. 5^x - \frac{1}{5^{x-1}} = 4. \quad 78. 3^{x+1} - \frac{4}{3^x} = -1. \quad 79. 5^{x+1} + 0,2^{x-2} = 126.$$

$$80. 5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24. \quad 81. 5 \cdot 50^x + 9 \cdot 10^x = 2^{x+1}.$$

$$82. 2 \cdot 8^{1+x} - 2^{2x+5} = 4^{2x+0,5}. \quad 83. 27^{x+\frac{1}{3}} = 3^{x+2} + 26 \cdot 3^{2x}.$$

$$84. \left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84. \quad 85. \left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} = 128.$$

$$86. \frac{169^x - 14 \cdot 13^x + 13}{169^x - 7 \cdot 13^x + 6} = 0. \quad 87. \frac{49^x - 8 \cdot 7^x + 7}{9^{x+\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^x - 1} = 0.$$

Решить уравнения

$$88. \frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{x+1}} = 4. \quad 89. \frac{1}{2^{x-1}} - \frac{3}{2^{x+1}} = 2^x. \quad 90. 4^{x+1} - \frac{1}{4^{x-1}} = \frac{12}{4^x}.$$

$$91. \frac{3}{2^{x-1}} + \frac{4}{2^x} - \frac{5}{2^{x+1}} = 30 \cdot 2^x. \quad 92. \frac{4^{x-1} + 1}{4^{x+1} - 8} = 0,25.$$

$$93. \frac{4^{x-1} - 2^{x+1} - 3}{2^{x+2} - 5} = -2. \quad 94. \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^{x+2} - 7} = -1.$$

$$95. \frac{2 \cdot 7^x + 5}{3 \cdot 49^x + 2 \cdot 7^x - 16} = 1. \quad 96. \frac{5\sqrt{7^x} + 1}{7^x - 3} = -3.$$

$$97. \frac{2^x - 5}{2^x + 8} = \frac{2^x + 1}{2^{x+1} + 32}. \quad 98. \frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}. \quad 99. \frac{4}{4^x + 2} = 2 + \frac{1}{4^x - 3}.$$

$$100. \frac{2}{0,75^x} + \frac{1}{2 - 0,75^x} = 3. \quad 101. \frac{2^x + 3}{\sqrt{2^{x-2}}} = \sqrt{2^{2-x}} + 6.$$

$$102. \frac{x^2}{3^x - 27} = \frac{9}{3^x - 27}. \quad 103. \frac{3^{x^2-5}}{33\sqrt{1-x}} = \frac{81}{33\sqrt{1-x}}. \quad 104. \frac{3^{x^2-7} - 9}{\sqrt{1-x} - 2} = 0.$$

Решить уравнения

105. $\frac{3^{2x-5}}{9} = \frac{4}{2^{2x-5}}$. 106. $\frac{2^{x^2-1}}{8} = \frac{27}{3^{x^2-1}}$.
107. $2^{x-2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x = \frac{16}{27}$. 108. $2^{7x+1} \cdot 7^{2x-1} = 4^{2x-1} \cdot 7^{5x+2}$.
109. $3^{9x-2} \cdot 8^{x+1} = 3^{5x+2} \cdot 8^{5x-3}$.
110. $3^{x+2} \cdot 4^{x+0,5} = 0,125 \cdot 12^{3x}$. 111. $\frac{5}{9} \cdot 3^{2x-1} \cdot 5^{3x} = 5^{2x-2} \cdot 3^{3x}$.
112. $2^{x+4} - 54 \cdot 3^x = 3^{x+3}$. 113. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.
114. $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$. 115. $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x$.
116. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$. 117. $4^{x+0,5} - 9^x = 6^x$.
118. $2 \cdot 9^{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}} = 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}}$. 119. $4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{x+\frac{1}{2}} = 5 \cdot 6^x$.
120. $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$. 121. $4 \cdot 27^x - 19 \cdot 12^x + 15 \cdot 8^x = 0$.
122. $27^{x+\frac{2}{3}} + 5 \cdot 8^{x+\frac{1}{3}} = 19 \cdot 12^x$.
123. $2 \cdot 4,5^{x+1} - 5 \cdot 3^{x+1} + 6 \cdot 2^x = 0$.
124. $25 \cdot 2^{2x+1} + 117 \cdot 5^{2x} = 20 \cdot 12,5^{2x}$.
125. $25^{2x^2-5x+1} + 71 \cdot 10^{2x^2-5x} - 3 \cdot 4^{2x^2-5x+1} = 0$.
126. $2 \cdot 25^{3x^2+2x} + 10^{3x^2+2x+1} = 3 \cdot 4^{3x^2+2x+1}$.

Решить уравнения

127. $3^{4x^2-x} = \sqrt{27} - \sqrt{12}$. 128. $2^{x^2-3x} = \sqrt{9+4\sqrt{2}} - 1$.
129. $3^{3x^2-x} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + 1$. 130. $3^{x^2-3x-3} = \sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$.
131. $2^{\frac{3}{x}-x} = \frac{2-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4} - 1$. 132. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x} + \sqrt{5} = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

$$133. \sqrt{2+\sqrt{3}}^x + \sqrt{2-\sqrt{3}}^x = 4.$$

$$134. \sqrt{5-\sqrt{24}}^x + \sqrt{5+\sqrt{24}}^x = 10.$$

$$135. \sqrt{7+\sqrt{48}}^x + \sqrt{7-\sqrt{48}}^x = 14. \quad 136. 2^{x+1} + 3^{x+1} = 13.$$

$$137. 8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0. \quad 138. x^2 \cdot 2^x + 32 = 4x^2 + 2^{x+3}.$$

$$139. 64^{\sqrt{x}} \cdot 3^x + 4 = 4 \cdot 3^x + 64^{\sqrt{x}}. \quad 140. \sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot \sqrt[4]{0,125}}} = 4\sqrt[3]{2}.$$

$$141. |x-3|^{3x^2-10x+3} = 1. \quad 142. \sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$$

**Решить уравнения и найти корни,
принадлежащие множеству**

$$143. 4^{x-1} + 2^3 = 3 \cdot 2^x, \quad [\sqrt{2}; \sqrt{5}].$$

$$144. 5^{x^2-4x} + 5^{x^2-4x-1} = 6, \quad [\sqrt{3}; 5\sqrt{5}].$$

$$145. 6^{x^2-4x+1} + 6^{x^2-4x} = 252, \quad [1; 5].$$

$$146. 7^{x^2-2x+1} + 7^{x^2-2x} = 392, \quad [-1; \sqrt{3}].$$

$$147. 9^{x^2-4x+\frac{1}{2}} + 7 \cdot 6^{x^2-4x} = 10 \cdot 4^{x^2-4x}, \quad \left[\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}; 7\sqrt{11} - 18 \right].$$

$$148. 5(4^{x^2+4x} + 4 \cdot 10^{x^2+4x-1}) = 7 \cdot 25^{x^2+4x}, \quad (-4; 0].$$

$$149. 9^{3x^2-4x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 6^{3x^2-4x} + 4^{3x^2-4x+\frac{1}{2}} = 0, \quad [-1; 1].$$

$$150. 2 \cdot 4 \cdot 5^{2x^2-x} + 3^{2x^2-x+1} = 9 \cdot 2^{2x^2-x}, \quad \left[\sqrt{7} - \sqrt{5}; \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1} \right].$$

$$151. 27^x - 1 = (3^x - 1) \cdot |3^x - 4|, \quad [-\sqrt{2}; 0].$$

Ответы к заданиям § 3

1. 3. 2. 3. 3. 11. 4. 1,5. 5. 2. 6. $\frac{5}{3}$. 7. -6. 8. 2. 9. ± 2 .
 10. -3; 5. 11. $\frac{9}{4}$. 12. $\frac{1}{2}$; 1. 13. -0,75. 14. $\frac{1}{10}$. 15. 1. 16. $\frac{11}{2}$.
 17. $-\frac{1}{12}$. 18. $\emptyset$. 19. ± 2 . 20. $\frac{5}{3}$. 21. $-\frac{3}{2}$; 1. 22. $\pm\sqrt{5}$. 23. 0.
 24. $\emptyset$. 25. -6; 1. 26. -2. 27. 1. 28. -1. 29. 4. 30. 3. 31. $\frac{1}{2}$.
 32. -5; -3. 33. -3. 34. $-\frac{1}{2}$. 35. 1. 36. -1. 37. 4; 7. 38. -1; 0,5.
 39. $\emptyset$. 40. -2. 41. -2; 4. 42. $\frac{11}{13}$. 43. $-\frac{11}{8}$; $\frac{1}{3}$. 44. 0; $\frac{17}{15}$. 45. 1; 2.
 46. -0,4; 2. 47. $\frac{11}{9}$; 2. 48. $-\frac{3}{2}$; 8. 49. -5; 1. 50. $\frac{11}{13}$. 51. -15.
 52. 1,5. 53. -1; 3. 54. 2. 55. 3. 56. 2. 57. -1. 58. -1. 59. -1.
 60. -3. 61. 2. 62. 2. 63. 2. 64. $\frac{1}{2}$. 65. 0; 1. 66. 0; 1. 67. 4.
 68. 0. 69. 0,5; 1. 70. ± 2 . 71. -1; 0. 72. 0. 73. ± 1 ; $\pm\sqrt{2}$. 74. 1.
 75. ± 1 . 76. 0; 1. 77. 1. 78. 0. 79. -1; 2. 80. ± 1 . 81. -1. 82. 2.
 83. 2. 84. 20. 85. $-\frac{4}{3}$. 86. 1. 87. 1. 88. -1. 89. -0,5. 90. $\frac{1}{2}$.
 91. -1. 92. 1. 93. 1. 94. 0. 95. $\frac{1}{2}$. 96. 0. 97. 3. 98. 3. 99. $\pm 0,5$.
 100. -1; 0. 101. 0; 2. 102. -3. 103. -3. 104. $\emptyset$. 105. $\frac{7}{2}$. 106. ± 2 .
 107. -3. 108. -1. 109. 1. 110. 1. 111. -3. 112. -4. 113. -1.
 114. $\frac{3}{2}$. 115. $\frac{1}{2}$. 116. 0; $\frac{1}{2}$. 117. 0. 118. ± 1 . 119. -1; 0. 120. 0.
 121. 0; 1. 122. -1; 0. 123. -1; 0. 124. 1. 125. $\frac{1}{2}$; 2. 126. $-\frac{2}{3}$;
 0. 127. $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$. 128. $\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$. 129. $\frac{1\pm\sqrt{7}}{6}$. 130. -1; 4. 131. -2; $\frac{3}{2}$.
 132. -1; $-\frac{1}{2}$. 133. ± 2 . 134. ± 2 . 135. ± 2 . 136. 1. 137. 2. 138. 2;
 $\pm 2\sqrt{2}$. 139. 0; $\frac{1}{9}$. 140. 3. 141. $\frac{1}{3}$; 2; 4. 141. $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; 1; 3. 142. 2;
 3; 4; 11. 143. 2; 3. 2. 144. $2 \pm \sqrt{5}$. $2 + \sqrt{5}$. 145. $2 \pm \sqrt{6}$. $2 + \sqrt{6}$.
 146. $1 \pm \sqrt{3}$. $1 - \sqrt{3}$. 147. 0; 4. 4. 148. -4; 0. 0. 149. 0; $\frac{1}{3}$; 1; $\frac{4}{3}$. 0;
 $\frac{1}{3}$; 1. 150. $-\frac{1}{2}$; 1. 1. 151. 0. 0.

*Раздвиньте свои границы! Я всегда
делаю то, что не умею, чтобы это-
му научиться.*

Пабло Пикассо

§4

Логарифмические уравнения

Логарифмом переменной $x > 0$ по основанию a ($a > 0$ и $a \neq 1$) называется функция, обозначаемая $y = \log_a x$, обратная к показательной функции $y = a^x$. Приведём некоторые следствия из этого определения.

Во-первых, область определения логарифма являются все положительные числа: $D(\log_a x) = \{x > 0\}$, множеством значений — все действительные числа: $E(\log_a x) = \mathbb{R}$.

Во-вторых, из определения следует, что

- $\Rightarrow a^{\log_a b} = b$ — основное логарифмическое тождество;
- $\Rightarrow \log_a x = b \Rightarrow x = a^b$ — пожалуй, лучший способ «избавиться» от логарифма в уравнении, если логарифм там один;
- $\Rightarrow \log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$ — взаимная однозначность логарифмической функции.

Другие нижеприведённые свойства логарифмов справедливы для $x, y > 0$. Для отрицательных x и y в эти формулы нужно ввести некоторые поправки, преподаватель вам расскажет, какие. По нашей скромной статистике, наибольшую опасность несёт в себе формула, перед которой стоит знак $\triangleup$, при чётных m .

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy); \quad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y};$$



$$\log_a x^m = m \log_a x; \quad \log_{a^b} x = \frac{1}{b} \log_a x;$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Решить уравнения

1. $\log_4 x = \frac{1}{2}$.
2. $\log_{\frac{1}{3}}(2 - x) = -2$.
3. $\log_{\frac{1}{4}}(3x - 1) = \frac{1}{2}$.
4. $2 \log_9 x = 1$.
5. $\log_8(x^2 + 7x) = 1$.
6. $\log_2(x(x - 2)) = 3$.
7. $\log_5 \sqrt{x} = 2$.
8. $\log_{\sqrt{2}}(x - 2) = 4$.
9. $\log_3 \sqrt{x + 5} = 2$.
10. $\log_4(x^2 + 3) = 1$.
11. $\lg(x^2 + 1) = 1$.
12. $\ln^2 x = 1$.
13. $\log_2^2(2x - 5) = 1$.
14. $\log_3 \frac{x - 5}{9} = 4$.
15. $\log_2(x^2 - 2x) = \log_2(2x - 3)$.
16. $\log_{\frac{1}{3}}(5x^2 - 2) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 5x)$.
17. $\lg \frac{4x^2 - 19}{5x} = \lg \left(x - \frac{2}{x} - 2\right)$.
18. $\log_3 x = \log_3 1,5 + \log_3 8$.
19. $\lg(x - 3) = \lg 0,6 + \lg 15$.
20. $\ln(x^2 + 4) = \ln x + \ln 5$.
21. $\ln x + \ln(x - 4) = \ln 12$.
22. $\log_3(x + 1) + \log_3 x = 1 + \log_3 2$.
23. $\lg(4x + 7) + \lg x = 1 - \lg 5$.
24. $2 \log_2 x = 1 + \log_2(x + 4)$.
25. $\lg(12 + 3x) - \lg x = 2 \lg \sqrt{7}$.
26. $\lg(16 + 4x) - 2 \lg(2\sqrt{2}) = \lg x$.
27. $\lg(12 - x) - \lg x = \frac{1}{\log_3 10}$.
28. $\log_2(x - 5) - \frac{1}{\log_7 2} = 2$.
29. $\log_2(x^2 - 1) + \log_{0,5}(1 - x) = 0$.
30. $\log_2(x^2 - 1) + \log_{0,5}(1 - x) = 2$.
31. $\log_2(x - 1) + \log_{0,5}(2 - x^2) = 1$.
32. $\log_5(x^3 + 3) - \log_{\sqrt{5}} x + \log_{0,2}(x + 3) = 0$.
33. $\frac{2 \lg x}{\lg(5x - 4)} = 1$.

$$\begin{aligned}
 34. \frac{\lg(56 - x^3)}{\lg(2 - x)} = 3. \quad 35. \frac{\lg x}{1 - \lg 2} = 2. \quad 36. \frac{\log_8(x^2 - 9x + 4)^3 - 2}{\log_8 x} = 0. \\
 37. \frac{(3x + 0,25) \log_3(x^2 - 8)}{\log_{0,2}(2 - x)} = 0. \quad 38. \frac{x \log_3^3(6x - \frac{1}{x} + 2)}{3x - 1} = 0.
 \end{aligned}$$

Решить уравнения

$$\begin{aligned}
 39. \log_2^2 x - 6 \log_2 x + 8 = 0. \quad 40. \log_3^2 x - 4 \log_3 x + 3 = 0. \\
 41. \frac{1}{12} \lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \lg x. \quad 42. \log_{\frac{1}{6}}^2 x + \log_{\frac{1}{6}} x^3 + 2 = 0. \\
 43. \lg(x^2 + 1) = 2 \lg^{-1}(x^2 + 1) - 1. \quad 44. (5 \ln x - 3)(\ln x^3 + 2) = 8. \\
 45. (\log_2(x + 1)^2 - 5)(4 \log_2(x + 1) - 5) = 3. \\
 46. 4 \lg \sqrt{\frac{1}{x}} = 2 - 5 \sqrt{\lg x}. \quad 47. 2 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 4. \\
 48. \frac{\log_{16} x - 2}{3 - 4 \log_{16}^2 x} = 1. \quad 49. \frac{\log_3^2 x - 5 \log_3 x}{\log_3 x - 8} = 1. \quad 50. \frac{\log_8 x + 1}{2 - \log_8^2 x} = -\frac{3}{2}. \\
 51. \frac{\lg x + 1}{\lg x - 1} = \lg x - 1. \quad 52. \frac{1}{\log_{\frac{1}{9}} x - 1} + 2 = \frac{6}{\log_{\frac{1}{9}} x + 6}. \\
 53. \frac{1}{\log_9(1 - x)} + 2 = \frac{6}{\log_9(1 - x) + 6}.
 \end{aligned}$$

**Решить уравнения и найти корни,
принадлежащие множеству**

$$\begin{aligned}
 54. 2^{\log_5 x^2} \cdot \sqrt{3}^{\log_5 x^2} = 144, \quad [\pi; 10\sqrt{7}]. \\
 55. 3^{1 + \log_2 x^3} \cdot \sqrt{5}^{\log_2 x^3} = 135, \quad [2; \pi]. \\
 56. 4^{x-1} - 2^{x+1} + 3 = 0, \quad [2; \log_2 7]. \\
 57. 9^{x+1} = 6 \cdot 3^{x+1} - 5, \quad [0; \log_3 2]. \\
 58. 2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 = 0, \quad [2; \sqrt{21}]. \\
 59. 4^x - 10 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0, \quad (-\infty; 4]. \\
 60. 5 \cdot 4^{x+1} - 10 \cdot 2^{x+1} = 4^x - 1, \quad (-5; 0).
 \end{aligned}$$

$$61. 8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0, \quad [1; 2]. \quad 62. \frac{8^x + 2^x}{4^x - 2} = 5, \quad [1; 2].$$

$$63. (4^x - 5)^2 + 4^{x-0,5} + 2 = 4 \cdot |4^x - 5|, \quad \left[\frac{2}{3}; 1\right].$$

$$64. (2^x - 6)^2 - 9 \cdot |2^x - 6| = 2 - 2^{x+1}, \quad [2; 3].$$

$$65. \log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6, \quad [1; 2].$$

$$66. \log_3 \frac{11 - 3^x}{2} = 2 - x, \quad \left[\frac{1}{2}; \log_3 10\right].$$

$$67. \log_2 (4^x + 3) = 2 + x, \quad [1, 5; 3].$$

$$68. \log_3 (5x + 3) = \log_9 (x^2 - 7)^2 - 1, \quad \left[\frac{\pi}{3}; \sqrt{259}\right].$$

$$69. 1 + \log_3 (5x + 3) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{4x^2 + 9}, \quad [\sqrt{5}; \log_2 17].$$

$$70. \ln^2 (2x - 3) = \ln (2x - 3) \ln (3 - x) + 2 \ln^2 (3 - x), \quad [-2; 2].$$

$$71. \lg^2 (4x - 3) + 3 \lg (4x - 3) \lg (2 - x) + 2 \lg^2 (2 - x), \quad [-1; 1].$$

Решить уравнения

$$72. \log_{0,5} (x^2 + 7x + 14)^8 = -16.$$

$$73. 2 \log_3 (2 - x) + \log_3 (x + 2)^2 = 4 \log_3 2.$$

$$74. \log_2 (3 - x)^2 + 2 \log_2 (x + 3) = 4 \log_2 3.$$

$$75. 2x^2 + \lg x + \lg \frac{10}{x} = x + 7. \quad 76. 3x^2 + \log_2 x + \log_2 \frac{8}{x} = 2x + 8.$$

$$77. \log_2^2 x + 2 \log_2^2 (2 - x) = 3 \log_2 x \log_2 (2 - x).$$

$$78. \lg (\lg x) = 0. \quad 79. \lg \lg \lg x = 0.$$

$$80. \log_2 \log_3 \log_4 x = 0. \quad 81. \lg (\lg x) + \lg (\lg x^3 - 2) = 0.$$

$$82. \log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2. \quad 83. 2^{\log_2 x} = 3^{1 + \log_3 5}.$$

$$84. \log_3 (3^x - 8) = 2 - x. \quad 85. \log_2 (4^x - 15) = 1 + x.$$

$$86. 5^{2x-1} = 7^{3-x}. \quad 87. \frac{1}{2} \log_3 (-x - 16) + \log_{\frac{1}{3}} (\sqrt{-x} - 4) = 1.$$

$$88. \log_2 (1 + \sqrt{1+x}) = \log_4 (2 - \sqrt{1+x}).$$

$$89. \sqrt{\log_{0,04}(x) + 1} + \sqrt{\log_{0,2}(x) + 3} = 1.$$

$$90. \log_x 1 = 2. \quad 91. \log_{\sqrt{x}} 4 = 4.$$

$$92. \log_{11}(x^2 - 48) = \log_{10x-x^2} 1. \quad 93. \log_{x^2-18} 4 = \log_{3x} 4.$$

$$94. \log_{x^2-2x-7} 6 = \log_{3+x} 6. \quad 95. \log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0.$$

$$96. \log_4 x - 2 \log_x 2 = 1,5. \quad 97. 2 \log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3 \log_{9x} 3 = 0.$$

$$98. \log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0,5 = 0. \quad 99. (x^2 + 2x - 3) \log_{4+x} (5 - x) = 0.$$

$$100. (x^2 - 3x - 10) \log_{3+x} (x^2 - 4x + 5) = 0.$$

$$101. \log_8 (x+2)^3 \cdot \log_{2x} 2 = 1. \quad 102. \log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$$

$$103. \frac{\log_{x-0,5} (3x-2)^2 + \log_6^2 (3x-2)}{\log_{x-0,5} (3x-2)^2 + \log_6^2 (x+1)} = 1.$$

$$104. \sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5. \quad 105. \log_2 (x+1)^2 + \log_2 |x+1| = 6.$$

$$106. \sqrt{2 \log_8 (-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0.$$

$$107. 5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}. \quad 108. 4^{\lg x} - 32 + x^{\lg 4} = 0.$$

$$109. 7^{\log_{25}^2 (5x) - 1} - x^{\log_5 7} = 0. \quad 110. |\log_{\sqrt{3}} x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2.$$

$$111. \left| \frac{1}{3} - \log_{\frac{1}{8}} x \right| - \frac{1}{3} = \left| \frac{2}{3} - \log_{\frac{1}{8}} x \right|.$$

$$112. x^{\lg x} = 10. \quad 113. |x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3.$$

$$114. x^{\log_x (x-2)^2} = 9. \quad 115. x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \frac{1}{x} = 0.$$

$$116. x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5+\lg x}. \quad 117. x^{2\lg^2 x} = 10 x^3.$$

Ответы к заданиям § 4

1. 2. 2. -7. 3. $\frac{1}{2}$. 4. 3. 5. -8; 1. 6. -2; 4. 7. 625. 8. 6. 9. 76.
 9. 10. -1; 1. 11. ± 3 . 12. $\frac{1}{e}$; e. 13. $\frac{7}{2}$; $\frac{11}{4}$. 14. 6; 86. 15. 3. 16. -2.
 17. 9. 18. 12. 19. 12. 20. 1; 4. 21. 6. 22. 2. 23. $\frac{1}{4}$. 24. 4. 25. 3.
 26. 4. 27. 3. 28. 33. 29. -2. 30. -5. 31. $\frac{\sqrt{41}-1}{4}$. 32. 1. 33. 4. 34. -2.
 35. 25. 36. 9. 37. -3. 38. -0,5. 39. 4; 16. 40. 3; 27. 41. 0,0001; 10.
 42. 6; 36. 43. ± 3 . 44. $\frac{1}{e}$; $\sqrt[15]{e^{14}}$. 45. 1; $4\sqrt[4]{8} - 1$. 46. 10^4 ; $\sqrt[4]{10}$.
 47. -100. 48. $\frac{1}{32}$; 16. 49. 9; 81. 50. $\frac{1}{16}$; 64. 51. 1; 1000. 52. 1;
 243. 53. $\frac{26}{27}$; $\frac{80}{81}$. 54. 25. 25. 55. $\sqrt[3]{4}$. $\emptyset$. 56. 1; $\log_2 6$. $1 + \log_2 3$.
 57. -1; $\log_3 \frac{5}{3}$. $\log_3 \frac{5}{3}$. 58. 1; $\log_2 5$. $\log_2 5$. 59. $\log_2 (10 \pm 3\sqrt{11})$.
 $\log_2 (10 - 3\sqrt{11})$. 60. $-\log_2 19$; 0. $-\log_2 19$. 61. $3\log_6 2$; 3. $3\log_6 2$.
 62. 1; $\log_2 (3 + \sqrt{29}) - 1$. 1. 63. $\frac{1}{2}$; $\log_4 \frac{7}{2}$. $\log_4 \frac{7}{2}$. 64. $\log_2 5$; 3; $\log_2 11$.
 $\log_2 5$; 3. 65. $\log_3 28 - 3$; $\log_3 10$. $\emptyset$. 66. $\log_3 2$; 2. $\log_3 2$; 2. 67. 0;
 $\log_2 3$. $\log_2 3$. 68. 16. 16. 69. 0; $\frac{15}{4}$. $\frac{15}{4}$. 70. 2; $\frac{5}{2}$. 2. 71. 1; $\frac{15-\sqrt{17}}{8}$;
 $\frac{7}{4}$. 1. 72. -5; -2. 73. $-2\sqrt{2}$; 0. 74. 0; $3\sqrt{2}$. 75. 2. 76. $\frac{5}{3}$. 77. 1.
 78. 10. 79. 10^{10} . 80. 64. 81. 10. 82. 16. 83. 15. 84. 2. 85. $\log_2 5$.
 86. $\frac{1+3\log_5 7}{2+\log_5 7}$. 87. -25. 88. $\frac{9-3\sqrt{13}}{2}$. 89. 25. 90. $\emptyset$. 91. 2. 92. 7.
 93. 6. 94. 5. 95. $\frac{1}{12}$. 96. 0,5; 16. 97. $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$. 98. $-\frac{5}{4}$. 99. 1; 4.
 100. 2; 5. 101. 2. 102. 4; $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$. 103. $\frac{\sqrt{37}-1}{6}$. 104. 0,04. 105. -5; 3.
 106. -64; -1. 107. 100. 108. 100. 109. 0,2; 125. 110. 9; $\frac{1}{9}$.
 111. $(0; \frac{1}{4}]$. 112. 10; 0,1. 113. 0,1; 2; 1000. 114. 5. 115. 10^{-3} ; 1; 10.
 116. 10^3 ; 10^{-5} . 117. 0,1; $10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$.

чтоб посчитать ортангутангенс
вам нужно псинус поделить
логарифмической линейкой
на сенокосинус угла

Бес

§5

Тригонометрические уравнения

Напомним таблицу значений основных тригонометрических функций для некоторых x :

x :	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi = 180^\circ$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$
$\operatorname{ctg} x$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\nexists$	0

Отсюда, в частности, следует, что $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ и т. д. Заметим, что функция $\cos x$ является чётной, а $\sin x$ — нечётной:

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Как следствие, функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ также являются нечётными.

В справочных материалах, доступных на ЕГЭ профильного уровня, приводятся следующие формулы:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

Две последние формулы (двойного угла) легко следуют из предыдущих формул синуса (косинуса) суммы. Из них же несложно получить важные на экзамене формулы синуса (косинуса) разности и формулы приведения:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + (-x)\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos(-x) - \sin \frac{\pi}{2} \sin(-x) = \\ &= 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin(-x) = \sin x.\end{aligned}$$

Ниже мы напоминаем реже встречающиеся формулы суммы, разности и произведения синусов и косинусов. Владение этими формулами мы считаем пусть и не самым необходимым, но весьма полезным навыком.

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)), \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).\end{aligned}$$

Решить уравнения

1. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$. 2. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 4x\right) = 0$. 3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5} + x\right) = 0$.
4. $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{3\pi}{7}\right) = 0$. 5. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. 6. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$.
7. $\cos\left(4x - \frac{\pi}{8}\right) = -1$. 8. $\sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = -1$.
9. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$. 10. $\operatorname{tg}\left(5x - \frac{2\pi}{5}\right) = -1$. 11. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$.
12. $\cos\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 13. $\cos\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
14. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 15. $\operatorname{tg}\left(6x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.
16. $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 17. $\sin\left(\frac{11x}{2} + \frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
18. $\cos\left(\frac{3\pi}{14} - 6x\right) = -\frac{3}{2}$. 19. $\cos 2x(2 - \sin 5x) = 0$.
20. $\sin 4x(\cos 7x + 5) = 0$. 21. $\sin(2x - 2\pi)(\sqrt{3} - 2 \cos x) = 0$.
22. $\operatorname{tg} 3x(1 + 2 \cos(2x + 4\pi)) = 0$. 23. $\sin^2 x - \sin(x - 6\pi) = 0$.
24. $\cos^2 2x + \cos 2x = 0$. 25. $\cos^3 4x + 2 \cos 4x = 0$.
26. $\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x = 0$. 27. $\cos^4 2x + \cos^2 2x = 0$.
28. $\sin^4 x + \sin^2 x = 0$. 29. $\sin 5x - \sin 3x = 0$.
30. $\cos 8x - \cos 2x = 0$. 31. $\sin 4x + \sin 16x = 0$.
32. $\cos 7x + \cos 3x = 0$. 33. $\sin(x + 4\pi) + \sin(x - 2\pi) = 1$.
34. $\cos(x + 2\pi) + \cos(x - 8\pi) = \sqrt{3}$.
35. $\sin(x - 4\pi) + \sin(x + 12\pi) = \sqrt{2}$.
36. $\cos(2\pi - x) + \cos(x - 2\pi) = -\sqrt{3}$.
37. $\sin(8\pi - x) - \sin(4\pi + x) = \sqrt{3}$.
38. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$. 39. $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
40. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. 41. $\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right) = 0$.

$$42. \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right). \quad 43. \sin(x + 70^\circ) - \cos(x - 70^\circ) = 0.$$

$$44. \sin 3x - \sin 4x + \sin 5x = 0. \quad 45. \cos 5x + \cos 6x + \cos 7x = 0.$$

$$46. \sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}. \quad 47. \cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}.$$

$$48. \sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x. \quad 49. \sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0.$$

$$50. \sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x. \quad 51. \cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x.$$

Решить уравнения

$$52. \sin^2 x - 3 \sin x - 4 = 0. \quad 53. \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0.$$

$$54. \cos^2 x - 4 \cos x + 3 = 0. \quad 55. \cos^2 x - 6 \cos x + 5 = 0.$$

$$56. \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0. \quad 57. \sin^3 x + \sin x = 0.$$

$$58. 2 \sin x - \sin^5 x = 0. \quad 59. 2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2.$$

$$60. \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0. \quad 61. 2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

$$62. 2 \sin^2 x = 3 \cos x. \quad 63. 2 \cos^2 x = \sin^2 x - 1.$$

$$64. \sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0. \quad 65. 1 + \cos x + \cos 2x = 0.$$

$$66. 2 \cos^2 x + \cos 2x + 3 \cos x = 0. \quad 67. 3 \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

$$68. 1 - \operatorname{tg}^2 x = 0. \quad 69. \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x. \quad 70. (1 + \operatorname{tg} x) \sin x = 0.$$

$$71. (1 + \operatorname{tg} x) \cos x = 0. \quad 72. \frac{\sin 2x - \cos x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0.$$

$$73. \sin 2x + \sin x = 0. \quad 74. \sin x \cos x = \frac{1}{2}. \quad 75. \sin 2x \operatorname{tg} x = 1.$$

$$76. \sin x = 1 + \frac{2}{\sin x}. \quad 77. \sin^4 x - 4 \sin^2 x + 3 = 0.$$

$$78. 4 \cos^4 x - 17 \cos^2 x + 4 = 0. \quad 79. \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2} - 3 = 0.$$

$$80. 2 \cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x. \quad 81. \sin \frac{x}{2} + \cos x = 1.$$

$$82. \cos^4 2x + 6 \cos^2 2x = \frac{25}{16}. \quad 83. 2 \operatorname{tg}^4 3x - 3 \operatorname{tg}^2 3x + 1 = 0.$$

$$84. \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{3}{\sin x \cdot \cos x} - 4 = 0. \quad 85. \frac{\sin 2x}{\cos x} = 2 \sin^2 x.$$

Решить уравнения

86. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$. 87. $\sin 5x - \sqrt{3} \cos 5x = 0$.
88. $4 \sin \frac{x}{3} + 7 \cos \frac{x}{3} = 0$. 89. $\cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 1 + \sin^2 x$.
90. $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0$.
91. $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x$. 92. $\sin 2x + 5 \cos^2 x = 0$.
93. $\sin^2 2x + 2 \sin 4x - 5 \cos^2 2x = 0$.
94. $\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$.
95. $3 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 2$.
96. $3 \sin^2 x + \sin 2x - \cos^2 x = 2$. 97. $\sin 2x + 5 \cos^2 x = 4$.
98. $4 \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + 3 \sin^2 \frac{x}{2} = 3$.
99. $8 \cos^2 \frac{x}{2} + \sin x + 6 \sin^2 \frac{x}{2} = 6$.
100. $6 \sin^2 3x - 7 \sin 3x \cos 3x + 3 \cos^2 3x = 1$.
101. $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin 2x$.
102. $2 \sin^2 4x - 3 \sin 4x \cos 4x + 5 \cos^2 4x = 2$.
103. $\sin x - \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} - \cos x$.
104. $2 \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0$.
105. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x$. 106. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$.

Решить уравнения

107. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$. 108. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$.
109. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. 110. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$.
111. $3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3$. 112. $3 \sin 2x - 4 \cos 2x = 5$.
113. $2 \sin x - \cos x = 0,4$. 114. $2 \sin 2x + 5 \cos 2x = 6$.

115. $8 \sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} = \sqrt{51}$. **116.** $\sin 7x + 2 \cos 7x = 3$.

117. $5 \sin \frac{x}{3} + 2 \cos \frac{x}{3} = 6$.

118. $4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} - 6 \sin \left(\frac{\pi - x}{2} \right) = \sqrt{10}$.

119. $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$.

120. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$.

121. $\sin 11x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7x + \frac{1}{2} \cos 7x = 0$.

122. $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2} \sin 15x$.

123. $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 3x$. **124.** $\cos x - \sqrt{3} \sin x = \cos 3x$.

125. $\sin 3x = \cos 2x$. **126.** $\cos 3x + \sin 5x = 0$.

127. $1 + \sin^2 2x = \cos^2 3x$. **128.** $\cos 4x = -2 \cos^2 x$.

129. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$. **130.** $4 \operatorname{tg}^2 3x - \cos^{-2} 3x = 2$.

131. $6 \sin^2 x + 2 \sin^2 2x = 5$. **132.** $1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x$.

133. $\operatorname{tg}^2 3x - 2 \sin^2 3x = 0$. **134.** $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$.

Ответы⁷ к заданиям § 5

1. $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$. 2. $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}$. 3. $-\frac{\pi}{5} + k\pi$. 4. $\frac{13\pi}{42} + \frac{\pi n}{3}$. 5. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.
6. $\frac{\pi}{6} + \pi n$. 7. $\frac{9\pi}{32} + \frac{\pi n}{2}$. 8. $\frac{6\pi}{5} + 4\pi n$. 9. $-\frac{\pi}{3} + 4\pi n$. 10. $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi n}{5}$.
11. $\frac{\pi}{12} + \pi k$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. 12. $\frac{3\pi}{28} + 2\pi n$; $-\frac{11\pi}{28} + 2\pi k$. 13. $\frac{10\pi}{9} + \frac{8\pi n}{3}$;
 $-\frac{2\pi}{3} + \frac{8\pi n}{3}$. 14. $-\frac{19\pi}{48} + \pi k$; $-\frac{11\pi}{48} + \pi n$. 15. $\frac{\pi}{72} + \frac{k\pi}{6}$. 16. $\frac{7\pi}{30} + k\pi$.
17. $\emptyset$. 18. $\emptyset$. 19. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. 20. $\frac{k\pi}{4}$. 21. $\frac{k\pi}{2}$; $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. 22. $\frac{k\pi}{3}$.
23. $k\pi$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. 24. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$. 25. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. 26. $\frac{k\pi}{3}$.
27. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. 28. πn . 29. πn ; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. 30. $\frac{\pi k}{5}$; $\frac{\pi n}{3}$. 31. $\frac{\pi k}{10}$;
 $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$. 32. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. 33. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. 34. $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.
35. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. 36. $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. 37. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.
38. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. 39. πk . 40. $\frac{\pi}{3} + \pi k$. 41. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$. 42. $\frac{\pi}{4} + \pi k$.
43. $45^\circ + 180^\circ \cdot k$. 44. $\frac{\pi k}{4}$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. 45. $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.
46. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$. 47. $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi k$. 48. $\frac{\pi k}{8}$. 49. $\frac{\pi k}{5}$;
 $\frac{\pi n}{7}$. 50. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$. 51. $\frac{\pi k}{10}$. 52. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. 53. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.
54. $2\pi k$. 55. $2\pi k$. 56. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. 57. πk . 58. πk . 59. πk . 60. $2\pi k$.
61. $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}$. 62. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. 63. $\frac{\pi}{2} + \pi k$. 64. $2\pi k$. 65. $\frac{\pi}{2} + \pi k$;
 $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. 66. $\pi + 2\pi k$; $\pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n$. 67. $\frac{\pi}{6} + \pi k$. 68. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.
69. πk ; $\frac{\pi}{4} + \pi n$. 70. πk ; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. 71. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$. 72. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.
73. πk ; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. 74. $\frac{\pi}{4} + \pi k$. 75. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. 76. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. 77. $\frac{\pi}{2} + \pi k$.
78. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$. 79. $4\pi k$. 80. $\pi + 2\pi k$; $4\pi n$. 81. $2\pi k$; $\frac{\pi}{3} + 4\pi l$; $\frac{5\pi}{3} + 4\pi n$.
82. $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. 83. $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$; $\pm \frac{1}{3} \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi n}{3}$. 84. $-\frac{\pi}{12} + \pi n$;
 $-\frac{5\pi}{12} + \pi n$. 85. πk . 86. $-\frac{\pi}{3} + \pi k$. 87. $\frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{5}$. 88. $-3 \arctg \frac{7}{4} + 3\pi k$.
89. $-\frac{\pi}{3} + \pi k$; πn . 90. $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\arctg 4 + \pi n$. 91. $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\arctg 3 + \pi n$.
92. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $-\arctg \frac{5}{2} + \pi n$. 93. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $-\frac{1}{2} \arctg 5 + \frac{\pi n}{2}$. 94. $\frac{\pi}{2} + \pi k$;
 $\arctg 2 + \pi n$. 95. $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\arctg 2 + \pi n$. 96. $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\arctg 3 + \pi n$.
97. $\arctg \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} + \pi k$. 98. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi n$. 99. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi n$.
100. $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$; $\frac{1}{3} \arctg \frac{2}{5} + \frac{\pi n}{3}$. 101. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$. 102. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$; $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$.
103. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$. 104. $\pm \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi l$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$. 105. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. 107. $2\pi k$;
 $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. 108. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi l$. 109. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. 110. $\frac{\pi}{12} + 2\pi k$;
 $\frac{7\pi}{12} + 2\pi l$. 111. $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $2\pi n$. 112. $\arctg 3 + \pi k$. 113. $(-1)^k \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{25} +$

⁷Если нет дополнительных оговорок, предполагается, что k , l , m и n принимают всевозможные целые значения.

$\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + \pi k$. **114.** $\emptyset$. **115.** $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + (-1)^k \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **116.** $\emptyset$.
117. $\emptyset$. **118.** $2 \operatorname{arctg} 3 + (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **119.** $\frac{\pi}{6} + \pi k$; $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{6}$.
120. $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{7}$. **121.** $-\frac{\pi}{108} + \frac{\pi k}{9}$; $\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$. **122.** $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$;
 $\frac{3\pi}{100} + \frac{2\pi n}{25}$. **123.** $\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$. **124.** πk ; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. **125.** $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$;
 $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **126.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$. **127.** πk . **128.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$.
129. $\frac{\pi k}{2}$. **130.** $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$. **131.** $\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **132.** $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$. **133.** $\frac{\pi k}{3}$;
 $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$. **134.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $2\pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Идея для стартапа: стучаться в квартиры свидетелей Иеговы с вопросами «Вы не хотели бы поговорить о математике?», «Открыто ли ваше сердце для тригонометрии?», «Вы знакомы с учением Исаака Ньютона, принявшего удар яблоком за невежество наше?».

Сетевой фольклор

§6

Тригонометрические уравнения. Отбор корней

В 13 задании профильного уровня ЕГЭ необходимо решить уравнение и найти корни, принадлежащие указанному промежутку. В данном параграфе мы будем отрабатывать оба эти навыка. Рассмотрим задание, близкое предложенному на экзамене 1 июня 2018 года.



Пример. а) Решить уравнение

$$\cos 2x + 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \sin x - 1.$$

б) Найти корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4} \right]$.

Решение. В справочных материалах, доступных на ЕГЭ профильного уровня, приводятся пять формул, три из которых нам сейчас понадобятся. Во-первых, воспользуемся формулой «косинус суммы»:

$$\begin{aligned} \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) &= \cos \left(x + \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = \\ &= \cos x \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) - \sin x \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \\ &= \cos x \cdot \frac{1}{2} - \sin x \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x. \end{aligned}$$

Во-вторых, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, и, в-третьих, вспомним основное тригонометрическое тождество $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$. С учётом этих трёх фактов исходное уравнение примет вид

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) = \sqrt{3} \sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3} \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x,$$

$$\cos x (2 \cos x + 1) = 0,$$

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad 2 \cos x + 1 = 0,$$

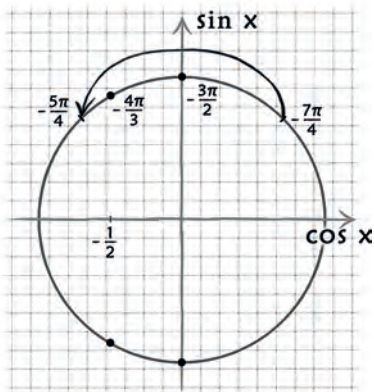
$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{и} \quad x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Один первичный балл заработан. Для получения ещё одного балла нужно выполнить задание б). Это можно сделать разными способами: и подставляя в $x_{1,2}$ различные целые значения k и n , и решив неравенства $-\frac{7\pi}{4} \leq x_i \leq -\frac{5\pi}{4}$, и при помощи различных видов чертежей. Ниже мы выполним отбор корней, принадлежащих отрезку $[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}]$, при помощи чертежа единичной окружности.



Чтобы эксперты сочли решение обоснованным, чертёж должен быть достаточно информативным.

На единичной окружности отметим все корни (x_1 и x_2), найденные выше. Отрезок $[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}]$ изобразим направленной дугой, стрелочка должна идти в положительном направлении (против часовой стрелки), от меньшего конца отрезка $(-\frac{7\pi}{4})$ — к большему $(-\frac{5\pi}{4})$. Все корни, охваченные этой дугой, нужно подписать. Если дуга пересекает координатную ось (оси), рекомендуем найти их точки пересечения. В нашем случае на пересечении дуги $[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}]$ и оси « $\sin x$ » как раз находится корень $(-\frac{3\pi}{2})$. Следующий корень, принадлежащий отрезку $[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}]$, можно получить, если к найденному корню прибавить $\frac{\pi}{6}$: $-\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3}$.



Ответ: а) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$;

$$\text{б) } -\frac{3\pi}{2}, -\frac{4\pi}{3}.$$

**Решить уравнения и найти корни,
принадлежащие множеству**

1. $\sin^2 x - 5 \sin x + 4 = 0, \quad \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right].$
2. $6 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0, \quad \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$
3. $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0, \quad \left[-\frac{5\pi}{4}; 0\right].$
4. $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0, \quad \left[\pi; \frac{9\pi}{4}\right].$
5. $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0, \quad \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{13\pi}{6}\right].$
6. $2 \sin x - 1 = \frac{1}{\sin x}, \quad \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right].$
7. $\cos x + 7 + \frac{6}{\cos x} = 0, \quad \left[-\frac{15\pi}{7}; \frac{15\pi}{7}\right].$
8. $\sqrt{2} \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x - 1 = \cos x, \quad \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$
9. $4 \cos^2 x + 2\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} = 2 \cos x, \quad \left[\frac{21\pi}{5}; \frac{27\pi}{5}\right].$
10. $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x - 3 = 0, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right].$
11. $4 \cos^2 x + 3\sqrt{2} \cos x + 1 = \cos 2x, \quad \left[\frac{13\pi}{2}; 7\pi\right].$
12. $\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0, \quad \left[\frac{13\pi}{4}; \frac{21\pi}{5}\right].$
13. $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 1 = 0, \quad [\pi; 2\pi].$
14. $\cos 2x + \sin x \cos x = \cos^2 x, \quad \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right].$
15. $5 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 3 + \cos 2x, \quad \left[3\pi; \frac{15\pi}{4}\right].$
16. $2 \cos^2 2x + \sin 2x - 1 = 0, \quad \left[-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right].$

**Решить уравнения и найти корни,
принадлежащие множеству⁸**

17. $\cos^2(\pi - x) + \sin(-x) = 1, \quad \left[-\frac{17\pi}{4}; -\frac{14\pi}{5}\right].$

18. $3\cos^2 x + \sin(x - \pi) + 1 = 0, \quad [3\pi; 6\pi].$

19. $4\cos^2 x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0, \quad [-3\pi; -2\pi].$

20. $2\cos^2 x + \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0, \quad \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right].$

21. $2\cos^2 x - 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos 2x - 1, \quad \left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right].$

22. $\cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1, \quad \left[-4\pi; -\frac{11\pi}{3}\right].$

23. $\cos 2x + \sin^2(\pi - x) = \frac{1}{2}, \quad \left[-\frac{9\pi}{2}; -\frac{11\pi}{3}\right].$

24. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) - \cos x = 0, \quad \left[\frac{4\pi}{3}; 4\pi\right].$

25. $\cos 2x = 1 + \sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right), \quad \left[\frac{8\pi}{9}; \frac{3\pi}{2}\right].$

26. $4\sin^2 x + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \frac{1}{2} = 0, \quad \left[-4\pi; -\frac{11\pi}{4}\right].$

27. $2\sin^3\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \left(-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right).$

28. $\sin^3\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \left[-\frac{9\pi}{4}; -\frac{2\pi}{3}\right].$

29. $4\cos^3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0, \quad \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{25\pi}{8}\right].$

30. $4\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad \left[\frac{7\pi}{2}; 4\pi\right].$

31. $2\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x - \pi) + 1 = 0, \quad \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{19\pi}{6}\right].$

32. $4\sin^2(-x) + 4\cos(\pi - x) = 1, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right].$

⁸По мотивам КИМ ЕГЭ-2019 и ЕГЭ-2020

$$33. 6 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 5 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 2, \quad \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6} \right].$$

$$34. 2 \sin^2 x - \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 0, \quad \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right].$$

$$35. 2 \sin(\pi + x) \sin(-x) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right), \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{2\pi}{3} \right].$$

$$36. 2\sqrt{3} \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + \sin(-2x) = 0, \quad \left[\frac{7\pi}{4}; \frac{8\pi}{3} \right].$$

$$37. 2 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) - \sqrt{3} \sin x = 0, \quad \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right].$$

$$38. \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + 2\sqrt{2} \cos(-x) - 2 = 0, \quad [0; 1].$$

$$39. \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin(\pi - x) = 0, \quad [-4, 9\pi; -4\pi].$$

$$40. \sin^2 \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) - \sin 3x = 1, \quad \left[-3\pi; -\frac{11\pi}{4} \right].$$

$$41. 2 \sin^4(x + \pi) + 3 \cos 2x + 1 = 0, \quad \left[-\frac{11\pi}{3}; -\frac{5\pi}{4} \right].$$

$$42. 2 \sin^4 2x = \sin^2 \left(2x - \frac{\pi}{2} \right), \quad \left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right].$$

$$43. \frac{\sin 2x}{\cos(x - \pi)} = 2 \sin \frac{\pi}{4}, \quad \left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2} \right].$$

$$44. \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(\pi - x) = -3, \quad \left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi \right].$$

$$45. \sqrt{2 \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) \sin(3\pi - 2x)} = -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}, \quad \left[-\pi; -\frac{\pi}{3} \right].$$

$$46. \operatorname{tg}^4 x - 6 \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 9 = 0, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{3\pi}{4} \right].$$

**Решить уравнения и найти корни,
принадлежащие множеству⁹**

$$47. \sin^2 x + \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x, \quad \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right].$$

$$48. 2 \sin \left(\frac{5\pi}{6} - x \right) + \sqrt{6} \sin^2 x = \cos x, \quad \left(3\pi; \frac{7\pi}{2} \right].$$

⁹По мотивам КИМ ЕГЭ-2018

$$49. \sin^2 x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right), \quad \left[\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right].$$

$$50. 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin x + \sqrt{2} \cos^2 x, \quad \left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2} \right].$$

$$51. 2 \cos^2 x + \sqrt{6} \sin x = \sqrt{8} \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right), \quad [3\pi; 4\pi].$$

$$52. 2\sqrt{3} \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) - 1 = \cos 2x + 3 \sin x, \quad \left[-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6} \right].$$

$$53. 2 \sin x + 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + 1 = \cos 2x + \cos x + \sqrt{3}, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{2\pi}{3} \right].$$

$$54. 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos 2x + 2 \sin x + \sqrt{3} \cos x, \quad \left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \right].$$

$$55. \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) + \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin x, \quad \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right].$$

$$56. \sin x - \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos^2 x, \quad \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{13\pi}{3} \right].$$

$$57. (\cos x - \sin x)^2 + \sqrt{2} \sin \left(\frac{3\pi}{4} - 2x \right) + \sqrt{3} \cos x = 0, \quad \left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} \right].$$

$$58. \cos 2x + 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \sin x - 1, \quad \left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4} \right].$$

$$59. \sqrt{2} \sin \left(\frac{3\pi}{4} - x \right) + 2 \cos^2 x = \sin x, \quad \left[\frac{9\pi}{4}; 3\pi \right].$$

$$60. 1 - \sqrt{2} \sin x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \cos 2x, \quad \left[\pi; \frac{5\pi}{3} \right].$$

$$61. \sin^2 x + \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 2 \sin x + \sin \frac{3\pi}{4} \cdot (\cos x + 2), \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right].$$

$$62. \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x - 1, \quad [3\pi; 4\pi].$$

$$63. 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2} \right) - \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = 1, \quad [2\pi; 3\pi].$$

$$64. 1 + 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \sin x = \cos 2x + \cos x + \sqrt{3}, \quad \left[\frac{9\pi}{2}; 5\pi \right].$$

$$65. \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{5}{4} = \cos 2x + \frac{1}{2} \sin x, \quad [3; \sqrt{3}\pi].$$

$$66. \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{tg} x = 0, \quad \left[\pi; \frac{7\pi}{4} \right].$$

**Решить уравнения и найти корни,
принадлежащие множеству**

67. $2 \sin^3 x + \sin^2 x + 12 \sin x + 6 = 0, \quad \left[\frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4} \right].$

68. $2 \cos^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x + 2 \cos x + \sqrt{3} = 0, \quad \left[-\frac{8\pi}{7}; -\frac{5\pi}{7} \right].$

69. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0, \quad \left[3\pi; \frac{15\pi}{4} \right].$

70. $\sin^3 x - \sin^2 x + 4 \sin x - 4 = 0, \quad \left[\frac{11\pi}{3}; \frac{14\pi}{3} \right].$

71. $2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \right].$

72. $2 \sin^3 x + 9 \sin^2 x + 3 \sin x - 4 = 0, \quad \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right].$

73. $\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0. \quad \left[-\frac{5\pi}{3}; -\pi \right].$

74. $\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \sin^2 x + \sqrt{2} \cos x. \quad \left[\frac{8\pi}{3}; \frac{19\pi}{6} \right].$

75. $\operatorname{ctg}^3 x - \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = 0, \quad \left[-\pi; -\frac{\pi}{2} \right].$

76. $2 \sin x - \sin 2x = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos x. \quad \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right].$

77. $2 \sin 2x - 2 \sin x - 6 \cos x + 3 = 0, \quad \left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right].$

78. $\sin^3 x + \cos^3 x - \sin x - \cos x = 0, \quad \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right].$

79. $\sin 2x = 2 \sin x - \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + 1, \quad \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right].$

80. $\sqrt{3} \operatorname{ctg}^3 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 3 = 0, \quad \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right].$

**Решить уравнения и найти корни,
принадлежащие множеству**

81. $\operatorname{tg}^3 x + 11 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 11 = 0, \quad \left[-1; \frac{2\pi}{3}\right].$
82. $5 \cos^2 x - 12 \cos x + 4 = 0, \quad \left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right].$
83. $9 \cos^2 x - 6 \cos x + 1 = 0, \quad \left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right].$
84. $\frac{1}{\cos x} + 2 = 3 \cos x, \quad \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right].$
85. $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0, \quad \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right].$
86. $8 \sin^2 x - 2 \cos x - 7 = 0, \quad [-181^\circ; -118^\circ].$
87. $\cos 2x + \sin(\pi - x) + 1 = 0, \quad \left[\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right].$
88. $2 \cos 2x + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0, \quad \left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right].$
89. $\sin^4 x - 3 \cos 2x + 1 = 0, \quad \left[-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right].$
90. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 2 \cos^2 x, \quad \left[-3\pi; -\frac{13\pi}{6}\right].$
91. $\sin 2x = 2 \cos^2 x + \cos 2x, \quad \left[-\frac{8\pi}{9}; \frac{\pi}{4}\right].$
92. $\sin^2 x + 3 \cos^2 x = 2 \sin 2x, \quad \left(\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right].$
93. $7 \sin^2 x + 2 \sin 2x - 3 \cos^2 x = 0, \quad [-\pi; 0].$
94. $\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 1 = 0, \quad \left[-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right].$
95. $\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0, \quad \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right].$
96. $2 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 3 + \sin^2 x, \quad \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$
97. $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x = 3, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right].$
98. $3 \sin^2 x - \sin 2x + 2 \cos^2 x = 3, \quad \left[-\frac{19\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}\right].$
99. $2 \sin^2 x + \sin x \cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \cos^2 x) = 0, \quad \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right].$

**Решить уравнения и найти корни,
принадлежащие множеству**

$$100. \sin x + \cos x = -1, \quad \left[\frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2} \right].$$

$$101. \sin x - \sqrt{3} \cos x = 1, \quad \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{2} \right].$$

$$102. \sin 3x + \cos 3x = 1, \quad \left[-\pi; -\frac{\pi}{2} \right].$$

$$103. \sin x - \cos x = \frac{1}{2}, \quad \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right].$$

$$104. \sqrt{3} \sin x + \cos x = -\frac{1}{3}, \quad [-3\pi; -2\pi].$$

$$105. 2 \sin x - 4 \cos x = 3, \quad \left[\frac{\pi}{6}; \pi \right].$$

$$106. 3 \sin x - 4 \cos x = 2,5, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6} \right].$$

$$107. \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin 4x, \quad \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right].$$

**Решить уравнения и найти корни,
принадлежащие множеству**

$$108. \frac{2 \cos^2 x - \cos x - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0, \quad \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right].$$

$$109. \frac{4 \sin^4 x + 7 \sin^2 x - 2}{\sqrt{-\cos x}} = 0, \quad [3\pi; 4\pi].$$

$$110. \operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 2, \quad \left[-\frac{\pi}{6}; \pi \right].$$

$$111. \frac{\cos 2x - \cos x}{2 \sin x + \sqrt{3}} = 0, \quad \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right].$$

$$112. \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 3 = \frac{3}{\sin x}, \quad \left[-\frac{5\pi}{3}; -\frac{7\pi}{8} \right].$$

$$113. \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin (2x - \pi) = -2, \quad \left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{4\pi}{7} \right].$$

$$114. \sin^2(-x) = \frac{1}{4 \operatorname{ctg} x}, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{2\pi}{3} \right].$$

$$115. \frac{\sin 2x - \cos x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{2\pi}{3} \right].$$

$$116. \frac{\cos x - \sin 2x}{\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}} = 0, \quad \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]. \quad 117. \frac{\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}}{\cos x - \sin 2x} = 0, \quad [3\pi; 5\pi].$$

$$118. \frac{2 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x}{\sin 2x + 5 \cos^2 x} = 0, \quad \left[\frac{4\pi}{11}; \frac{11\pi}{4} \right].$$

$$119. \frac{4 \operatorname{tg}^2 x - 9}{2 \sin x - 3 \cos x} = 0, \quad \left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right].$$

$$120. \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 6}{3 \cos x - \sin x} = 0, \quad \left[\frac{2\pi}{3}; 2\pi \right].$$

$$121. \sin x = \sqrt{\frac{\sqrt{3} \cos x + 2}{2}}, \quad \left[-\frac{5\pi}{4}; -\frac{2\pi}{3} \right].$$

$$122. \sin x = \sqrt{\frac{\sqrt{3} \cos x - 1}{2}}, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$$

$$123. \sqrt{\sin x + 1} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x)}{\cos \frac{\pi}{4}}, \quad \left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right].$$

$$124. \sqrt{2} \cos x = \sqrt{5 - 7 \sin x}, \quad \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2} \right].$$

$$125. \cos x = \sqrt{\frac{5 - \sin x}{6}}, \quad [-\pi; 0]. \quad 126. \frac{2 \sin^2 x - 1}{\sqrt{\frac{1}{11} - \sin x}} = 0, \quad \left[\frac{21\pi}{2}; 13\pi \right].$$

$$127. \frac{4 - 5 \cos x}{3 - 5 \sin x} = 0, \quad [-5\pi; -4\pi]. \quad 128. \frac{5 \sin x - 3}{5 \cos x - 4} = 0, \quad \left[\frac{9\pi}{2}; 5\pi \right].$$

$$129. \frac{5 \cos x + 4}{4 \operatorname{tg} x - 3} = 0, \quad \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{3} \right]. \quad 130. \frac{13 \cos x + 5}{12 \operatorname{ctg} x + 5} = 0, \quad \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right].$$

$$131. \frac{13 \sin x}{12 - 13 \cos x} = \frac{5}{12 - 13 \cos x}, \quad \left[\frac{11\pi}{9}; \frac{22\pi}{5} \right].$$

$$132. \frac{\sqrt{13} \sin x - 2}{\sqrt{13} \cos x - 3} = 0, \quad [-2\pi; -\pi].$$

Решить уравнения и найти корни,
принадлежащие множеству

$$133. 7^{\sin 2x} = \left(\frac{1}{7} \right)^{-\sqrt{2} \cos x}, \quad \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{3} \right].$$

$$134. 4^{\cos^2 x + \cos x} = 2^{\cos x}, \quad \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right].$$

$$135. 12^{1 + \sin x} = 3^{1 + \sin x} \cdot 4^{1 + \cos x}, \quad \left[\frac{6\pi}{7}; \frac{10\pi}{3} \right].$$

136. $14^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}, \quad \left[\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3} \right].$
137. $\left(\frac{4}{9} \right)^{\sin(x+3\pi)} = \left(\frac{9}{4} \right)^{\sqrt{3} \cos(x+\pi)}, \quad \left[-\pi; \frac{\pi}{3} \right].$
138. $49^{\cos^2 x} = 7^3 \cos^3 x, \quad [3\pi; 4\pi].$
139. $2^{4 \cos x} = 10 - 3 \cdot 4^{\cos x}, \quad \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{3} \right].$
140. $2^{\cos x - 1} + 2^{\sin(x + \frac{3\pi}{2}) + 1} = \frac{5}{2}, \quad \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{13\pi}{3} \right].$
141. $4^{\sin x} + \sqrt{2} = 2^{\sin x} (\sqrt{2} + 1), \quad \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right].$
142. $2 \cdot 9^{\operatorname{tg} x} - 5 \cdot 3^{\operatorname{tg} x} = 3, \quad \left[-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{2} \right].$
143. $9^{\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}} + \sqrt{3} = 3^{\operatorname{ctg} x + 1} + 3^{\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}}, \quad \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} \right].$
144. $\frac{4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{x+1} - 2^{x+\frac{1}{2}} + \sqrt{2}}{\sin x + \sin 2x} = 0, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$
145. $\frac{16^{\sin x} - 3 \cdot 4^{\frac{1}{2} + \sin x} + 8}{\log_2(1 - 3 \cos x)} = 0, \quad \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{6\pi}{5} \right].$
146. $(2x^2 - 5x - 12)(2 \sin 2x - 1) = 0, \quad \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right].$
147. $(3x^2 - 8x - 3) \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 0, \quad \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right].$
148. $\sqrt{x^2 - 1} \cdot (\sin^2 x - \sin 2x) = 0, \quad \left[0; \frac{\pi}{2} \right].$
149. $\sqrt{4 - 2 \cos^2 x - \sqrt{2} \sin x} = 2, \quad \left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right].$
150. $\sqrt{\cos 2x - 7\sqrt{3} \sin x + 12} = 1, \quad \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right].$
151. $\ln(3 - 2 \sin^2 x) = \ln(3 \cos x), \quad \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right].$
152. $\lg(\sin^2 x) = \lg(1 + \cos x), \quad \left[-\frac{7\pi}{4}; -\pi \right].$
153. $\log_2(\sin x) + \log_2^2(\sin x) = 0, \quad [-4\pi; -3\pi].$
154. $\log_2(4 \sin^2 x) + 1 = 3 \log_2(2 \sin x) = 0, \quad \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{8\pi}{3} \right].$

$$155. 2 \log_4^2(4 \sin x) - 11 \log_4(4 \sin x) + 5 = 0, \quad \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{4} \right].$$

$$156. 2 \log_2^2(2 \sin x) + 1 = 3 \log_2(2 \sin x), \quad \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right].$$

$$157. 2 \log_{0,5}^2(\sin x) + \log_{0,5}(\sin^7 x) = 4, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \right].$$

$$158. 2 \log_{0,25}^2(\cos x) + 15 \log_{0,25}(\cos x) - 8 = 0, \quad [-3\pi; -2\pi].$$

$$159. 2 \log_2^2(\sin x) - 7 \log_2(\sin x) - 4 = 0, \quad \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right].$$

$$160. 2 \log_8^2(4 \sin x) - 7 \log_8(4 \sin x) + 3 = 0, \quad \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right].$$

$$161. \log_9^2(4 \sin^2 x) - \log_9(2 \sin x)^5 + 1 = 0, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{3} \right].$$

$$162. 2 \log_{\frac{4}{3}}^2(\cos x) + 5 \log_{\frac{3}{4}}(\cos x) = 3, \quad \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right].$$

$$163. \log_{\frac{4}{3}}^2(\cos^2 x) + 5 \log_{\frac{3}{4}}(\cos^2 x) = 6, \quad \left[-3\pi; -\frac{7\pi}{3} \right].$$

$$164. \log_2(\sin x + \sin 2x + 16) = 4, \quad \left[-\frac{13\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4} \right].$$

$$165. \log_3(4 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \cos x - 6 \cos x) = 1,5, \quad \left[\frac{5\pi}{7}; \frac{8\pi}{7} \right].$$

$$166. \log_{27}(3^{3x} - 2 \cos^2 x - \sqrt{2} \sin x + 2) = x, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6} \right].$$

$$167. \ln(\cos 2x) = \ln(\cos x), \quad \left[3\pi; \frac{9\pi}{2} \right].$$

$$168. \log_{\cos x} \frac{1}{4} = 2, \quad \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{4} \right].$$

$$169. \log_{\sqrt{2} \sin x}(-3 \cos x) = 2, \quad [\pi; 4\pi].$$

$$170. \log_{\frac{1}{2}} \sin x = \log_{\cos x} \cos x, \quad [3\pi; 5\pi].$$

$$171. \log_{\sin x} \cos x + 2 \log_{\cos x} \sin x = 3, \quad \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right].$$

$$172. \log_{\sqrt{2} \sin x}(1 + \cos x) = 2, \quad \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right].$$

Ответы¹⁰ к заданиям § 6

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$. 2. $-\frac{\pi}{6} + 2\pi l$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$. $\frac{7\pi}{6}$. 3. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$;
 $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. $-\frac{7\pi}{6}$. 4. $2\pi n$. 2π . 5. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. $\frac{5\pi}{3}$. 6. $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$. $\frac{7\pi}{6}$.
7. $\pi + 2\pi n$. $\pm \pi$. 8. $\pi + 2\pi n$; $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. $-\pi$; $-\frac{7\pi}{4}$. 9. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$;
 $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{19\pi}{4}$; $\frac{21\pi}{4}$. 10. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi l$. $-\frac{2\pi}{3}$.
11. $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. $\frac{27\pi}{4}$. 12. $-\frac{\pi}{3} + \pi n$; πk . $\frac{11\pi}{3}$; 4π . 13. $\frac{\pi}{4} + \pi n$. $\frac{5\pi}{4}$. 14. πk ;
 $\frac{\pi}{4} + \pi n$. $\frac{5\pi}{4}$. 15. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. $\frac{11\pi}{3}$. 16. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}$. $-\frac{11\pi}{4}$. 17. πk ; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.
 -4π ; -3π . 18. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. $\frac{9\pi}{2}$. 19. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. $-\frac{8\pi}{3}$. 20. $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$.
 $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$. 21. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$. $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{25\pi}{6}$. 22. πk ; $\frac{\pi}{6} + 2\pi l$;
 $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. -4π ; $-\frac{23\pi}{6}$. 23. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{15\pi}{4}$. 24. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi l$;
 $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$. 25. πk ; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi m$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. π ; $\frac{5\pi}{4}$.
26. $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{19\pi}{6}$. 27. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$. $-\frac{11\pi}{4}$. 28. $\frac{\pi}{2} + \pi k$.
 $-\frac{3\pi}{2}$. 29. πk . 2π ; 3π . 30. $\frac{\pi m}{3}$. $\frac{11\pi}{3}$; 4π . 31. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. $\frac{7\pi}{4}$.
32. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. $-\frac{\pi}{3}$. 33. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. $-\frac{4\pi}{3}$. 34. πk ; $\frac{\pi}{6} + 2\pi l$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$.
 $\frac{5\pi}{6}$; π . 35. πn ; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$. $-\pi$; $-\frac{7\pi}{6}$. 36. πk ; $\frac{\pi}{6} + \pi n$. 2π ; $\frac{13\pi}{6}$.
37. πk ; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$. 38. $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. $\frac{\pi}{4}$. 39. πk ; $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi l$.
 $-\frac{17\pi}{4}$; -4π . 40. $\frac{\pi k}{3}$; $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$. -3π ; $-\frac{17\pi}{6}$. 41. $\frac{\pi}{2} + \pi k$. $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$;
 $-\frac{3\pi}{2}$. 42. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$. $\frac{7\pi}{8}$. 43. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$. $-\frac{11\pi}{4}$. 44. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$.
 $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. 45. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$. $-\frac{5\pi}{6}$. 46. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$. $-\frac{4\pi}{3}$. 47. πk ; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi l$.
 3π ; $\frac{7\pi}{2}$. 48. πk ; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi l$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$. $\frac{13\pi}{4}$. 49. πk ; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$;
 $-\frac{\pi}{4} + 2\pi m$. π ; $\frac{5\pi}{4}$. 50. $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi l$; $\frac{\pi}{2} + \pi m$. $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{4}$. 51. $\frac{\pi}{2} + \pi k$;
 $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi l$. $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{4}$. 52. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi l$. $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{3\pi}{2}$. 53. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$;
 $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$. $-\frac{4\pi}{3}$. 54. $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}$. $-\frac{5\pi}{6}$. 55. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$.
 $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$. 56. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l$. $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$. 57. $\frac{\pi}{2} + \pi k$;
 $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$. $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$. 58. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{4\pi}{3}$. 59. $\frac{\pi}{2} + \pi k$;
 $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m$. $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{8\pi}{3}$. 60. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi m$. $\frac{3\pi}{2}$. 61. $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$;
 $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. $-\frac{3\pi}{4}$. 62. $\pi + 2\pi k$; $\pm \frac{3\pi}{2} + 4\pi l$. 3π . 63. $\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3}$. 3π .
64. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi m$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. $\frac{14\pi}{3}$. 65. $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. $\frac{7\pi}{6}$. 66. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$.
 $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{3}$. 67. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. $\frac{19\pi}{6}$. 68. $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. $-\frac{5\pi}{6}$. 69. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$;
 $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$. $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{15\pi}{4}$. 70. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. $\frac{9\pi}{2}$. 71. $\pi + \frac{2\pi n}{3}$. $-\pi$; $-\frac{\pi}{3}$.
72. $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$. $\frac{5\pi}{6}$. 73. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$. $-\frac{3\pi}{2}$. 74. $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$.
 $\frac{11\pi}{4}$. 75. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$. $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{3\pi}{4}$. 76. $2\pi k$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$.

¹⁰Если нет дополнительных оговорок, предполагается, что k , l , m и n принимают всевозможные целые значения.

0. 77. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. $-\frac{\pi}{3}$. 78. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{\pi l}{2}$. $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; 2π . 79. $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi l$; $2\pi k$. $\frac{19\pi}{6}$. 80. $-\frac{\pi}{6} + \pi k$. $\frac{17\pi}{6}$. 81. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $-\arctg 11 + \pi n$. $\pm \frac{\pi}{4}$; $\pi - \arctg 11$. 82. $\pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n$. $\arccos \frac{2}{5}$. 83. $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$. $-\arccos \frac{1}{3}$. 84. $2\pi k$; $\pi \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$. $\pi + \arccos \frac{1}{3}$; 2π . 85. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$; $\arcsin \frac{1}{3} + 2\pi m$; $\pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n$. $\frac{5\pi}{6}$; $\pi - \arcsin \frac{1}{3}$. 86. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $\pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n$. $-\frac{2\pi}{3}$. 87. $\arcsin \frac{1-\sqrt{17}}{4} + 2\pi n$; $\pi + \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi m$. $\pi + \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4}$; $2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4}$. 88. $\pm \arccos \frac{\sqrt{2}-1}{2} + 2\pi n$. $\arccos \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. 89. $\pm \arcsin \sqrt{\sqrt{11}-3} + \pi k$. $\arcsin \sqrt{\sqrt{11}-3} - 3\pi$. 90. $-\arctg 2 + \pi k$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$. $-\arctg 2 - 2\pi$; $-\frac{11\pi}{4}$. 91. $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\arctg 3 + \pi n$. $-\frac{3\pi}{4}$; $-\arctg 3$; $\frac{\pi}{4}$. 92. $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\arctg 3 + \pi n$. $\arctg 3 + 2\pi$. 93. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\arctg \frac{3}{7} + \pi n$. $\arctg \frac{3}{7} - \pi$; $-\frac{\pi}{4}$. 94. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\arctg \frac{1}{3} + \pi l$. $\arctg \frac{1}{3} - \pi$. 95. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\arctg \frac{1}{2} + \pi n$. $\pi - \arctg \frac{1}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$. 96. $\arctg \frac{1+\sqrt{5}}{4} + \pi n$. $\arctg \frac{1-\sqrt{5}}{4}$; $\arctg \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. 97. $\arctg \frac{3+\sqrt{17}}{4} + \pi k$. $\arctg \frac{3-\sqrt{17}}{4}$. 98. $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $-\arctg \frac{1}{2} + \pi k$. $-3\pi - \arctg \frac{1}{2}$; $-2\pi - \arctg \frac{1}{2}$; $-\pi - \arctg \frac{1}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$. 99. $-\frac{\pi}{3} + \pi n$; $-\arctg \frac{1}{2} + \pi k$. $\pi - \arctg \frac{1}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$. 100. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi n$. 3π . 101. $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$. $\frac{5\pi}{2}$. 102. $\frac{2\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$. $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$. 103. $2 \arctg (-2 \pm \sqrt{7}) + 2\pi k$. $2\pi - 2 \arctg (2 + \sqrt{7})$. 104. $-\frac{2\pi}{3} \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi k$. $-\frac{8\pi}{3} \pm \arccos \frac{1}{6}$. 105. $(-1)^k \arcsin \frac{3\sqrt{5}}{10} + \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} + \pi k$. $\arcsin \frac{3\sqrt{5}}{10} + \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 106. $\pm \frac{2\pi}{3} - \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k$. $-\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{5}$. 107. $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{15}$; $\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$. $\emptyset$. 108. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. $-\frac{10\pi}{3}$. 109. $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. $\frac{19\pi}{6}$. 110. $\emptyset$. $\emptyset$. 111. $2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi l$. -2π . 112. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. $-\frac{7\pi}{6}$. 113. $\emptyset$. $\emptyset$. 114. $\frac{\pi}{12} + \pi k$; $\frac{5\pi}{12} + \pi l$. $-\frac{11\pi}{12}$. 115. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. $-\frac{7\pi}{6}$. 116. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. $\frac{\pi}{2}$. 117. $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. $\frac{19\pi}{6}$. 118. πk . π ; 2π . 119. $-\arctg \frac{3}{2} + \pi k$. $\pi - \arctg \frac{3}{2}$. 120. $\pi k - \arctg 2$. $2\pi - \arctg 2$. 121. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$. $-\frac{7\pi}{6}$. 122. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. $\frac{\pi}{6}$. 123. $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi l$. $\frac{19\pi}{6}$. 124. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. $-\frac{11\pi}{6}$. 125. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $-\arcsin \frac{1}{3} + 2\pi l$. $-\arcsin \frac{1}{3}$. 126. $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi l$. $\frac{45\pi}{4}$; $\frac{47\pi}{4}$. 127. $-\arccos \frac{4}{5} + 2\pi k$. $-4\pi - \arccos \frac{4}{5}$. 128. $\pi - \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k$. $5\pi - \arcsin \frac{3}{5}$. 129. $\pi - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi k$. $\pi - \arccos \frac{4}{5}$. 130. $\pi + \arccos \frac{5}{13} + 2\pi k$. $\pi + \arccos \frac{5}{13}$. 131. $\pi - \arcsin \frac{5}{13} + 2\pi k$. $3\pi - \arcsin \frac{5}{13}$. 132. $\pi - \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + 2\pi k$. $-\pi - \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$. 133. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + \pi l$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$. $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{4}$. 134. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi l$. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$. 135. $\frac{\pi}{4} + \pi k$. $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. 136. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$. $\frac{11\pi}{4}$. 137. $\pi k - \frac{\pi}{3}$. $-\frac{\pi}{3}$. 138. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi l$. $\frac{7\pi}{2}$; $4\pi - \arccos \frac{2}{3}$. 139. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$. 140. $\frac{\pi}{2} + \pi k$.

- $\frac{7\pi}{2}$. 141. πl ; $\frac{\pi}{6} + 2\pi m$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. 2π ; $\frac{13\pi}{6}$. 142. $\frac{\pi}{4} + \pi m$. $-\frac{3\pi}{4}$.
 143. $\frac{\pi}{2} + \pi m$; $-\arctg \frac{1}{2} + \pi l$. $-\frac{\pi}{2}$; $-\arctg \frac{1}{2}$. 144. $-\frac{1}{2}$. $-\frac{1}{2}$.
 145. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. $\frac{5\pi}{6}$. 146. $-\frac{3}{2}$; 4; $\frac{\pi}{12} + \pi k$; $\frac{5\pi}{12} + \pi n$. $\frac{13\pi}{12}$; 4; $\frac{17\pi}{12}$.
 147. $-\frac{1}{3}$; 3; $\frac{\pi}{6} + \pi k$. 3. 148. ± 1 ; πk , $k \neq 0$; $\arctg 2 + \pi l$. $\arctg 2$.
 149. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi l$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$. $\frac{13\pi}{4}$. 150. $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$. $-\frac{5\pi}{3}$.
 151. $2\pi k$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l$. $\frac{5\pi}{3}$. 152. $\frac{\pi}{2} + \pi k$. $-\frac{3\pi}{2}$. 153. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$;
 $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$. $-\frac{23\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{19\pi}{6}$. 154. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. $\frac{5\pi}{2}$. 155. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$.
 $\frac{13\pi}{6}$. 156. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$. $\frac{3\pi}{4}$. 157. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$. $-\frac{5\pi}{4}$.
 158. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. $-\frac{7\pi}{3}$. 159. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$. $\frac{9\pi}{4}$. 160. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$;
 $\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$. $\frac{3\pi}{4}$. 161. $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi l$. $-\frac{4\pi}{3}$. 162. $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi m$.
 $-\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{6}$. 163. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$. $-\frac{17\pi}{6}$. 164. πk ; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. -3π ; $-\frac{8\pi}{3}$.
 165. $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. $\frac{5\pi}{6}$. 166. πk ; $\frac{\pi}{4} + 2\pi l$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$. $-\frac{5\pi}{4}$. 167. $2\pi k$.
 4π. 168. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. $\frac{5\pi}{3}$. 169. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. $\frac{8\pi}{3}$. 170. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. $\frac{25\pi}{6}$.
 171. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$. $\frac{\pi}{4}$; $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 172. $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. $\frac{\pi}{3}$.

*Ты можешь достигнуть всего, чего
загочешь. Нужны только жела-
ние, упорство и плохая фантазия.
Сетевой фольклор*

§7

Алгебраические неравенства

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства называется множество всех x , для которых определены все функции, входящие в это неравенство. Неравенство B называется следствием неравенства A (пишем $A \Rightarrow B$), если всякое решение A является решением неравенства B (однако B может содержать решения, посторонние для A). Поскольку переход к неравенству-следствию (и, соответственно, получение посторонних решений) — вероятный манёвр при решении примеров № 15, перед записью ответа будет нелишним вспомнить, что

$$\text{Ответ} = \left\{ \begin{array}{c} \text{найденные решения} \\ \text{неравенства-следствия} \end{array} \right\} \cap \{\text{ОДЗ}\}.$$

Запись нескольких неравенств под знаком фигурной скобки называется системой неравенств. Решение системы есть пересечение решений всех входящих в неё неравенств. Запись нескольких неравенств, объединённых квадратной скобкой, называется совокупностью данных неравенств. Решение совокупности есть объединение решений входящих в неё неравенств.

Метод интервалов является основным методом решения неравенств; даже решение, основанное на переходах к равносильным системам, без него вряд ли обойдётся. Метод интервалов заключается в следующем.

① Находится ОДЗ¹¹ неравенства.

¹¹Сейчас по ряду причин аббревиатуру «ОДЗ» использовать не модно, вот и мы рекомендуем в экзаменационной работе вместо «ОДЗ» писать «Условие корректности неравенства» или, например, «Рассмотрим ограничения».

- ② Неравенство приводится к виду $f(x) > 0$ ($<$, $\leq$, $\geq$); т. е. правая часть переносится влево), и $f(x)$ максимально упрощается.
- ③ Решается уравнение $f(x) = 0$.
- ④ На числовой оси изображается: а) ОДЗ; б) непосторонние корни уравнения $f(x) = 0$. Они наносятся в виде пустых кружков, если исходное неравенство строгое, и закрашенных, если оно нестрогое. Все точки, ограничивающие ОДЗ и отмеченные на ней, разбивают ОДЗ на *интервалы знакопостоянства* функции $f(x)$. На каждом таком интервале определяется знак $f(x)$.
- ⑤ Записывается ответ: все интервалы соответствующего знака и все точки, отмеченные закрашенными кружками.



Пример. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-8x+15} \leq 0$.

Решение. ① Условие корректности неравенства:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0^{12}, \\ x^2-8x+15 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \neq 3, \\ x \neq 5; \end{array} \Rightarrow x \in [1; 3) \cup (3; 5) \cup (5; +\infty). \right. \end{cases} \quad (*)$$

② В правой части неравенства — 0 (т. е. ничего делать не нужно), а в левой — полезная привычка — разложим знаменатель на множители: $\frac{\sqrt{x-1}}{(x-3)(x-5)} \leq 0$, что поможет вычислениям знаков на 4-м шаге метода интервалов.

③ Решим уравнение $\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-3)(x-5)} = 0$. Перейдём к уравнению следствию: $\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1$; проверка показывает, что корень посторонним не является.

④ На числовой оси изобразим множество (*), найденное в пункте ① и корень уравнения $x = 1$ (чёрным кружком, т. к. неравенство нестрогое), найденный в пункте ③. Знаки, принимаемые

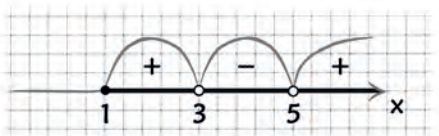
¹²Линейные неравенства $ax + b \geq 0$ ($>$, $<$, $\leq$) решаются практически так же, как и линейные уравнения, без применения метода интервалов.

функцией $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{(x-3)(x-5)}$ на интервалах $[1; 3)$, $(3; 5)$ и $(5; +\infty)$, можно определить по значениям в любых точках этих интервалов:

$$f(2) = \frac{\sqrt{2-1}}{(2-3)(2-5)} = \frac{+}{--} > 0,$$

$$f(4) = \frac{\sqrt{4-1}}{(4-3)(4-5)} = \frac{+}{+-} < 0,$$

$$f(6) = \frac{\sqrt{6-1}}{(6-3)(6-5)} = \frac{+}{++} > 0.$$



В ответ мы должны записать интервал $(3; 5)$ (там $f(x) < 0$) и не забыть добавить отдельно стоящую точку 1, где $f(x) = 0$.



Ответ: $x \in \{1\} \cup (3; 5)$.

В заключение отметим, что



Знаки функции на интервалах знакопостоянства не обязаны чередоваться.



И граничные точки ОДЗ, и корни уравнения $f(x) = 0$ требуют пристального внимания.

Решить неравенства

1. $2 - 3x + 2(x - 1) > 3(2x + 3) - x$.

2. $3(x - 4) - 5(2x + 1) < 4 + x$.

3. $x - \frac{1-7x}{3} \leq -2$. 4. $3x - \frac{1}{2} > \frac{2+x}{4}$. 5. $\frac{x-2}{3} - \frac{2x+1}{5} > 1$.

6. $\frac{2-5x}{3} + \frac{x}{21} < 1 + \frac{2x-5}{7}$. 7. $(x+10)^2 \geq (2-x)^2$.

8. $(x+7)(x+1) < (x+3)^2$. 9. $x^2 + 2x - 3 \geq 0$. 10. $x^2 - 3x + 2 < 0$.

11. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0$. 12. $(x+3)(x^2+x-6) < 0$.

13. $(x^2+3)(x^2+x+7) \geq 0$. 14. $\frac{x}{x^2-1} \geq 0$. 15. $\frac{x^2-3x-4}{x^2} \leq 0$.

16. $\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-6} > 0$. 17. $\frac{1}{x} < 1$. 18. $\frac{4+x}{x+2} < 3$. 19. $\frac{x^2}{x+6} \leq 1$.

20. $\frac{x+6}{x^2} > 1$. 21. $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$. 22. $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.
 23. $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$. 24. $\frac{15}{4+3x-x^2} > 1$. 25. $\frac{x-3}{x+5} - 1 \leq \frac{1}{x}$.
 26. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$. 27. $\frac{x^2-9}{x\sqrt{x}} \leq 0$. 28. $\frac{x^2-4x+4}{2x-5} < 0$.
 29. $\frac{x^2+2x+1}{\sqrt{4-x^2}} > 0$. 30. $\frac{x-1}{x+2} < x$. 31. $\frac{2x^2-10x+6}{x-5} \leq x$.
 32. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$. 33. $\frac{1}{x-2} + 4 < \frac{9}{x+2}$.
 34. $\frac{x-1}{x} - \frac{5x}{4x-3} \leq -\frac{3}{2}$. 35. $\frac{1}{x^2-10x+24} \leq \frac{2}{4x-x^2}$.

Решить неравенства

36. $x^3 - \sqrt{x} > x - \sqrt{x}$. 37. $x^2 - 5x + \frac{2}{2x-5} < \frac{2}{2x-5} - 6$.
 38. $\frac{4x-1}{x} + \sqrt{10-x} \leq \frac{x^2+2}{x} + \sqrt{10-x}$. 39. $\frac{(|x|+1)(x^2-4x)}{(x-1)\sqrt{x}} \leq 0$.
 40. $\frac{x^2-3}{\sqrt{x+4}} \geq \frac{1-3x}{\sqrt{x+4}}$. 41. $\frac{\sqrt{2x+3}}{x} \geq -1$. 42. $\frac{\sqrt{x+2}}{x+1} \leq 1$.
 43. $\frac{x^2-3x}{\sqrt{x+9}} + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} - \frac{x+1}{\sqrt{x+9}}$. 44. $x^2 - 3x + 1 \leq \frac{3}{x}$.
 45. $x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} > 0$. 46. $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x+8} \leq 0$.
 47. $\frac{4x^3 - x^2 - 4x + 1}{9x+2} > 0$. 48. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 > 0$.
 49. $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 < 0$. 50. $2x^3 + 11x^2 + 13x + 4 \geq 0$.
 51. $(x+10)^4 \leq (2-x)^2$. 52. $(x-7)^4 < (6-2x)^2$.
 53. $(2x-1)^4 \geq x^2$. 54. $\frac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1} < 0$. 55. $\frac{2-x}{x^3+x^2} > \frac{1-2x}{x^3-3x^2}$.
 56. $\frac{5x^2-13x+8}{x^2-x} + \frac{7}{x} \leq 0$. 57. $\frac{7x^2-13x+8}{x-x^2} \leq \frac{5}{x}$.
 58. $\frac{8x}{x^2-8x} - \frac{5}{x} \leq \frac{x}{x-3} - 1$. 59. $\frac{1}{x-2} \geq x$. 60. $\frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{x}$.
 61. $\frac{x-1}{x} < x-3$. 62. $x+2 < \frac{3}{x-3}$. 63. $\frac{1}{x} + \frac{2-x}{x+2} > \frac{2x+1}{x^2+2x}$.

$$\begin{aligned}
 64. \quad & \frac{3}{x-2} - 2 \geq \frac{7}{x+2}. & 65. \quad & \frac{1}{x-3} + 4 \geq \frac{9}{x+3}. \\
 66. \quad & \frac{x^2 - 15x - 13}{39} \leq \frac{x-1}{x^2 - 4x + 3}. & 67. \quad & \frac{x+1}{x^2 + 4x + 3} \leq \frac{x^2 - 3x + 5}{15}. \\
 68. \quad & \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3} \geq \frac{x^2 - 7x - 13}{20}. & 69. \quad & \frac{14x - 60}{x^2 - 10x + 24} + 1 \leq \frac{2}{x-4} - x. \\
 70. \quad & \frac{11x - 52}{x^2 - 7x + 10} \leq \frac{9x - 44}{x-5} - x.
 \end{aligned}$$

Решить неравенства

$$\begin{aligned}
 71. \quad & 2x^4 + 9x^2 - 11 \leq 0. & 72. \quad & 16x^4 - 41x^2 + 25 < 0. \\
 73. \quad & 2x^4 - 17x^2 + 36 \geq 0. & 74. \quad & 3(2x^2 + x) > (2x^2 + x)^2. \\
 75. \quad & 4(x^2 - 2x - 1) > (x^2 - 2x)^2 - 1. \\
 76. \quad & 2(x^2 - 3x)^2 < x^2 - 3(x - 5). & 77. \quad & \frac{25}{x^2 - 3x} + 10 \geq 3x - x^2. \\
 78. \quad & \frac{9}{x^2 - x} < x - x^2 - 10. & 79. \quad & \frac{10}{x^2 + 4x} + 23 \geq 5(x^2 + 4x). \\
 80. \quad & \frac{(x-6)^{-1} - 2}{1 - 5(x-6)^{-1}} \geq -\frac{1}{5}. & 81. \quad & \frac{(x-5)^{-1} - 3}{2 - 7(x-5)^{-1}} \geq -\frac{1}{4}. \\
 82. \quad & \frac{(x-1)^{-2} - 2}{(x-1)^{-2}} \leq -0,6.
 \end{aligned}$$

Решить неравенства

$$\begin{aligned}
 83. \quad & \frac{x^2 + 4}{x^2 - x + 14} \geq 1 - \frac{1}{x}. & 84. \quad & \frac{x^2 - x + 14}{x^2 + 4} \geq 1 - \frac{1}{x}. \\
 85. \quad & \frac{x^2 - 6x + 4}{x-5} + \frac{5x - 42}{x-9} \geq 4 + x. & 86. \quad & \frac{x^2 - 7x + 2}{x-6} + \frac{4x - 45}{x-11} \leq x + 3. \\
 87. \quad & \frac{x^2 - 3x - 2}{x-3} - \frac{2x^3 - 5x^2 + 4}{2x-5} \leq x - x^2. \\
 88. \quad & \frac{x^2 - 3x + 5}{x-7} + \frac{x^2 - 10x + 4}{x-11} \leq 2x + 1. \\
 89. \quad & \frac{x^2 - 3x - 9}{x-4} + \frac{x^2 - 8x + 4}{x-8} \leq 2x + 1.
 \end{aligned}$$

$$90. x^3 + 7x^2 + \frac{30x^2 + 7x - 42}{x - 6} \leq 7.$$

$$91. x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2 + 2x - 10}{x - 5} \leq 2.$$

$$92. x^3 + 5x^2 + \frac{18x^2 + 7x - 28}{x - 4} \leq 7. \quad 93. \frac{x^3 - 19x^2 + 54x - 26}{x^2 - 15x + 26} \geq x - 1.$$

$$94. \frac{x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 38x + 9}{x^2 - 10x + 16} \geq x^2 - 2x.$$

$$95. \frac{x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 14x + 11}{x^2 + 6x - 5} \leq x^2 - 2.$$

Решить неравенства¹³

$$96. \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2} \leq 0. \quad 97. \frac{x - 1}{x} \leq 3 + x. \quad 98. \frac{4x + 13}{x^2 - 9} \geq -1.$$

$$99. \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{7x + 2} \leq 0. \quad 100. x^2 + 2x \leq 4 + \frac{8}{x}.$$

$$101. x^3 - x^2 - 5x - 3 \geq 0. \quad 102. x^3 + x^2 - 5x + 3 \leq 0.$$

$$103. x^3 - 3x + 2 \leq 0. \quad 104. \frac{2x - 5}{x^2 - 4} \leq 1. \quad 105. \frac{x + 1}{3x - x^2} \leq 1.$$

$$106. \frac{12x + 73}{16 - x^2} \leq 4. \quad 107. 12 + \frac{1}{x - 4} \geq \frac{25}{x - 1}.$$

$$108. \frac{5}{x^2 - 5x + 6} \leq \frac{x + 1}{2 - x} + \frac{x}{3 - x}. \quad 109. \frac{x}{x - 3} \geq \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2 - 3x}.$$

$$110. \frac{64}{x + 3} \leq \frac{49}{x - 2} + 45. \quad 111. \frac{2x - 1}{x^2 - 26x + 25} \leq -\frac{1}{16}.$$

$$112. \frac{25}{x^2 - 6x} + 10 \geq 6x - x^2. \quad 113. x^2 - 3x + \frac{25}{x^2 - 3x - 3} + 7 \geq 0.$$

$$114. \frac{x^2 - 2x - 6}{18} \leq \frac{x - 5}{x^2 - 8x + 15}. \quad 115. \frac{x^2 - x + 1}{3} + \frac{x + 2}{x^2 - x - 6} \geq 0.$$

$$116. (1 - x)\sqrt{x - x^2 + 6} \leq 0 \quad 117. \frac{\sqrt{4x^2 - 7x}}{2x - 13} \geq 0$$

¹³Подборка неравенств с изолированными точками в ответах.

118. $\frac{\sqrt{x-1}(x^2-3x)}{x^2-12x+27} \geq 0$. 119. $\frac{(x^2-4x+4)\sqrt{x+21}}{x^2-6x+8} \leq 0$.
120. $\frac{(x^2-2x-3)\sqrt{x+24}}{x^2-x-6} \leq 0$. 121. $\frac{\sqrt{x^2-6x+9}(3x-1)}{4-x} \leq 0$.
122. $\frac{(x+1)\sqrt{x+11}}{(x^3-2x-1)(x-6)} \geq 0$. 123. $\frac{(x+1)(x^3+2x^2-1)}{\sqrt{x+9}} \geq 0$.
124. $x - x^2 \leq x\sqrt{x}$. 125. $\frac{(3x-1)(x-1)^2}{x+2} + 2x \geq x^2 + 1$.
126. $\frac{x^2-7x-21}{9} \leq \frac{7x+14}{x^2-x-6}$. 127. $x^3 + x^2 + \frac{3x^2-4x+4}{x-1} \geq -4$.
128. $x^3 + 12x^2 + \frac{16x^2+3x-15}{x-5} \leq 3$. 129. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \geq \frac{4x^2+8x-1}{8x^2-x}$.

Решить неравенства¹⁴

130. $\sqrt{x+2} < -7$. 131. $\sqrt{3x-2} \geq 4$.
132. $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$. 133. $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$.
134. $\sqrt{x-2}\sqrt{x+1} < \sqrt{x-1}$. 135. $\sqrt{x+2} \leq x$.
136. $\sqrt{x+2} \leq -x$. 137. $\sqrt{x+5} < 1-x$.
138. $\sqrt{3x-3} \leq 1+x$. 139. $\sqrt{2x+14} > x+3$.
140. $\sqrt{2x+5} > x+1$. 141. $\sqrt{x^2-4x} > x-3$.
142. $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$. 143. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$.
144. $\sqrt{x^3+3x+4} > -2$. 145. $\sqrt{x^2-x-12} < x$.
146. $\sqrt{x^2-4x+1} \leq 2x+1$. 147. $\sqrt{x^2-3x+2} \leq x-1$.

¹⁴С одной стороны, издание [3] содержит интересные иррациональные неравенства, но с другой стороны, «в реальном экзамене не будет иррациональных неравенств», [20]. Таким образом, экзаменационная актуальность заданий данного пункта туманна, но методическая полезность вполне очевидна.

148. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq x - 2$. 149. $\sqrt{x^3 - 4x^2 + 1} \geq x\sqrt{x} + 1$.
150. $\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 2\sqrt{x} + 1} \geq \sqrt{x} + 1$. 151. $\frac{x+4}{\sqrt{1+x}+1} > x - 5$.
152. $\sqrt{5+x} - \sqrt{2x+3} \leq \sqrt{4-x}$. 153. $\sqrt{12+x} - \sqrt{2x+7} > \sqrt{x}$.
154. $\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x} \geq 1$. 155. $\sqrt{8+x} - \sqrt{9-x} \geq 1$.
156. $\sqrt{3x-2} + \sqrt{5-x} \leq 3$. 157. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+1} < \sqrt{4-x}$.
158. $\sqrt{7-x} - \sqrt{x} > \sqrt{4-x}$. 159. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x+9} - \sqrt{6-x}$.
160. $\sqrt{x+3} - \sqrt{4x-1} \geq \sqrt{x-1}$. 161. $\sqrt{2x+8} - \sqrt{3x} \geq \sqrt{x-4}$.
162. $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x-3}$.
163. $\sqrt{x-1} \leq \sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}$. 164. $\sqrt{5-2x} + 1 \leq \frac{2}{\sqrt{5-2x}}$.
165. $\sqrt{x+7,7} + \frac{3}{\sqrt{x+7,7}} \geq \frac{7}{2}$. 166. $\sqrt{3,3 - \frac{x}{2}} + \frac{13}{4} \geq \frac{3}{\sqrt{3,3 - \frac{x}{2}}}$.
167. $\frac{\sqrt{x+1}}{x} < \frac{x}{\sqrt{x+1}}$. 168. $\frac{x-4}{\sqrt{7-x}} \leq \frac{\sqrt{7-x}}{x}$.
169. $\frac{x+2}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{\sqrt{x-1}}{2x-5}$. 170. $\frac{x^2-x}{\sqrt{x+9}} > \sqrt{x+9}$.
171. $\sqrt{x^2 - \frac{2}{x+1} - 4} > \sqrt{3x - \frac{8}{x+1}}$. 172. $\frac{\sqrt{3x-0,5}}{2 - \sqrt{1-3x-4x^2}} \geq 0$.
173. $\sqrt{3+3x} - 1 \leq x$. 174. $\sqrt{3-4x+x^2} \leq x-1$.
175. $\sqrt{x^3-x^2} \leq x\sqrt{x}$. 176. $x\sqrt{2-\sqrt[3]{x}} \leq 0$.
177. $x\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} \leq 0$. 178. $\sqrt{x^3-2x+1} \geq \sqrt{x^2-3x+2}$.
179. $\frac{\sqrt{x^2-7x+12} - \sqrt{x^2-2x-3}}{x^2-x-2} \leq 0$.
180. $\frac{\sqrt{x^2+3x-4} - \sqrt{x^2-10x+9}}{x^2-6x-5} \leq 0$.
181. $\frac{\sqrt{x^2+7x+6} - \sqrt{x^2+x}}{4x^2-25} \geq 0$. 182. $\frac{\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-3x-4} \leq 0$.

Решить неравенства

183. $|3 - 2x| < 5$. 184. $|x - 3| > -1$. 185. $|5 - 8x| \geq 11$.
 186. $|x^2 - 5x| < 6$. 187. $|x^2 - 3x - 1| \geq 3$. 188. $\left| \frac{3x+1}{x-3} \right| < 3$.
 189. $|x^2 - 2x| < x$. 190. $|x^2 - 2| \geq x + 4$. 191. $|x^2 - 3x + 2| \geq x - 1$.
 192. $|x| \geq 6 + 2x - x^2$. 193. $|x^2 - 4| \leq 2 - x$. 194. $|x^2 - 4x| \leq 4 - x$.
 195. $|x^3 - 1| \leq 1 - x$. 196. $|7 - |x|| \geq 1$. 197. $|2x - |x - 2|| \leq 3$.
 198. $|2 - |x + 1|| > 3 + x$. 199. $|x - |x - 1|| < 2 - x$.
 200. $|2 - |x^2 - x|| \leq 2 - x$. 201. $x^2 - 2|x| < 3$.
 202. $2x^2 + |x| \geq 6$. 203. $\frac{|1 - 2x| + 4}{|2x - 1| - 1} > 6$. 204. $\frac{2 - x^2}{1 + 2|x|} > -1$.
 205. $\frac{x^2 - 8}{2 - |x|} \leq |x| + 1$. 206. $\frac{x^2 - 5}{2 - |x|} \geq |x| - 7$. 207. $\sqrt{7 - 6x} < |x|$.
 208. $\sqrt{x^2 - 3x - 8} \geq |x - 4|$. 209. $\sqrt{2x^2 - 9x + 8} \geq |x - 2|$.
 210. $|8 - x^2| \leq |3x - 10|$. 211. $|x|^2 > |x^2 - 3x + 1|$.
 212. $|x^2 - 3x - 7| < |3x + 7|$. 213. $\frac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2$.
 214. $\frac{|2 - x|}{x^2 - 3x + 2} < x + 1$. 215. $|x + 4| - 5 \geq |2x + 1| - x^2$.
 216. $|x^2 - 6x| - 7x < 4 - |9 - x|$. 217. $\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{3 - |1 - x|} > 0$.
 218. $\frac{x^3 - 4x^2 - 5x + 20}{|x + 1| - 2} \leq 0$. 219. $|2x - 3| - \frac{x + 6}{|x + 2|} \leq 0$.
 220. $\frac{2 - |x + 2| - x}{3 - |x|} \leq 1$. 221. $|x - 4| + \frac{2}{|3 - 2x|} \leq 1$.
 222. $\frac{5x - |2x - 3|}{\sqrt{2x + 3}} \leq 0$. 223. $\frac{|x + 2| - |x|}{\sqrt{4 - x^3}} > 0$.
 224. $\frac{x^2 - |3x + 2|}{\sqrt{3x - 5} - 10} \leq 0$. 225. $\frac{\sqrt{4x - x^2 + 12}}{x^2 - |3x + 10|} \leq 0$.

Ответы к заданиям § 7

1. $(-\infty; -\frac{3}{2})$. 2. $(-\frac{21}{8}; +\infty)$. 3. $(-\infty; -0,5]$. 4. $(\frac{4}{11}; +\infty)$.
5. $(-\infty; -28)$. 6. $(0, 2; +\infty)$. 7. $[-4; +\infty)$. 8. $(-\infty; 1)$. 9. $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$. 10. $(1; 2)$. 11. $(-1; 2) \cup (2; 3)$. 12. $(-\infty; -3) \cup (-3; 2)$. 13. $(-\infty; +\infty)$. 14. $(-1; 0] \cup (1; +\infty)$. 15. $[-1; 0] \cup (0; 4]$. 16. $(-\infty; -3) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$. 17. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
18. $(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$. 19. $(-\infty; -6) \cup [-2; 3]$. 20. $(-2; 0) \cup (0; 3)$. 21. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. 22. $(-4, 5; -2) \cup (3; +\infty)$. 23. $(1; 3) \cup (3; 5)$. 24. $(-1; 4)$. 25. $(-5; -\frac{5}{9}] \cup (0; +\infty)$. 26. $(-\infty; -2) \cup (-1; 0]$.
27. $(0; 3]$. 28. $(-\infty; 2) \cup (2; \frac{5}{2})$. 29. $(-2; -1) \cup (-1; 2)$. 30. $(-2; +\infty)$. 31. $(-\infty; 2] \cup [3; 5)$. 32. $(-3; -2) \cup (-1; 1)$. 33. $(-2; 1) \cup (1; 2)$.
34. $(0; 0,3] \cup (0,75; 2]$. 35. $(0; 4) \cup (4; 6)$. 36. $(1; +\infty)$. 37. $(2; \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}; 3)$. 38. $(0; 1] \cup [3; 10]$. 39. $(1; 4]$. 40. $[1; +\infty)$. 41. $[-1,5; -1] \cup (0; +\infty)$.
42. $[-2; -1) \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty)$. 43. $(-9; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. 44. $(0; 3]$. 45. $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. 46. $(-8; 1]$. 47. $(-\infty; -1) \cup (-\frac{2}{9}; \frac{1}{4}) \cup (1; +\infty)$. 48. $(-3; 2) \cup (4; +\infty)$. 49. $(-\infty; -5) \cup (-2; 3)$.
50. $[-4; -1] \cup [-\frac{1}{2}; +\infty)$. 51. $[-14; -7]$. 52. $(5; 11)$. 53. $(-\infty; \frac{1}{4}] \cup [1; +\infty)$. 54. $(-2; -1) \cup (-1; 2)$. 55. $(-\infty; -7) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$. 56. $(0; \frac{1}{5}]$. 57. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. 58. $(0; \frac{24}{11}] \cup (3; 8)$.
59. $(-\infty; 1 - \sqrt{2}] \cup (2; 1 + \sqrt{2}]$. 60. $(-1; 1 - \sqrt{2}) \cup (0; 1 + \sqrt{2})$. 61. $(0; 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}; +\infty)$. 62. $(-\infty; \frac{1 - \sqrt{37}}{2}) \cup (3; \frac{1 + \sqrt{37}}{2})$.
63. $(-2; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}) \cup (0; \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$. 64. $[-1 - \sqrt{15}; -2) \cup (2; \sqrt{15} - 1]$. 65. $(-\infty; -3) \cup [\frac{2 - \sqrt{10}}{2}; \frac{2 + \sqrt{10}}{2}] \cup (3; +\infty)$. 66. $[0; 1) \cup (1; 2] \cup (3; 16]$.
67. $(-\infty; -3) \cup [-2; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty)$. 68. $(-1; \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}] \cup (3; \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}]$. 69. $(-\infty; 2] \cup [3; 4) \cup (4; 6)$. 70. $(-\infty; 2) \cup [4; 5) \cup (5; 7]$. 71. $[-1; 1]$. 72. $(-1,25; -1) \cup (1; 1,25)$. 73. $(-\infty; -\frac{3\sqrt{2}}{2}] \cup [-2; 2] \cup [\frac{3\sqrt{2}}{2}; \infty)$.
74. $(-1,5; -0,5) \cup (0; 1)$. 75. $(-1; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; 3)$. 76. $(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}; \frac{3 + \sqrt{21}}{2})$. 77. $(-\infty; 0) \cup (3; \infty)$. 78. $(0; 1)$.
79. $[-5; -4) \cup [-\frac{10 + 3\sqrt{10}}{5}; \frac{3\sqrt{10} - 10}{5}] \cup (0; 1)$. 80. $(6; 11)$. 81. $[4,7; 5) \cup$

- (5; 8,5). **82.** $\left(-\infty; \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left[\frac{5+2\sqrt{5}}{5}; \infty\right)$. **83.** $(0; 2] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$.
84. $(-\infty; -\frac{2}{5}] \cup (0; +\infty)$. **85.** $[3; 5) \cup (9; +\infty)$. **86.** $(6; 10] \cup (11; +\infty)$.
87. $\left(\frac{5}{2}; \frac{11}{4}\right] \cup (3; +\infty)$. **88.** $[-4; 7) \cup [10; 11)$. **89.** $(4; 8) \cup [24; +\infty)$.
90. $(-\infty; -4] \cup \{0\} \cup [3; 6)$. **91.** $(-\infty; -5] \cup \{0\} \cup [1; 5)$. **92.** $(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [1; 4)$. **93.** $[0; 2) \cup \left[\frac{13}{3}; 13\right)$. **94.** $(-\infty; 2) \cup \{3\} \cup (8; +\infty)$.
95. $(-3 - \sqrt{14}; \sqrt{14} - 3) \cup \{1\}$. **96.** $(-\infty; -2) \cup \{1\}$. **97.** $\{-1\} \cup (0; +\infty)$.
98. $(-\infty; -3) \cup \{-2\} \cup (3; +\infty)$. **99.** $[-1; -\frac{2}{7}] \cup \{1\}$. **100.** $\{-2\} \cup (0; 2]$.
101. $\{-1\} \cup [3; +\infty)$. **102.** $(-\infty; -3] \cup \{1\}$. **103.** $(-\infty; -2] \cup \{1\}$.
104. $(-\infty; -2) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$. **105.** $(-\infty; 0) \cup \{1\} \cup (3; +\infty)$.
106. $(-\infty; -4) \cup \left\{-\frac{3}{2}\right\} \cup (4; +\infty)$. **107.** $(-\infty; 1) \cup \left\{\frac{7}{2}\right\} \cup (4; +\infty)$.
108. $(2; 3) \cup \{1\}$. **109.** $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty) \cup \{2\}$. **110.** $(-\infty; -3) \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup (2; +\infty)$. **111.** $\{-3\} \cup (1; 25)$. **112.** $(-\infty; 0) \cup \{1\} \cup \{5\} \cup (6; +\infty)$.
113. $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \{1\} \cup \{2\} \cup \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$. **114.** $(3; 5) \cup \{0\}$.
115. $(-\infty; -2) \cup (-2; 0] \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$. **116.** $\{-2\} \cup [1; 3]$. **117.** $\{0; \frac{7}{4}\} \cup \left(\frac{13}{2}; +\infty\right)$. **118.** $\{1\} \cup (9; +\infty)$. **119.** $\{-21\} \cup (2; 4)$. **120.** $\{-24\} \cup (-2; -1)$.
121. $(-\infty; \frac{1}{3}] \cup \{3\} \cup (4; +\infty)$. **122.** $\{-11\} \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (6; +\infty)$.
123. $\left(-9; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \{-1\} \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$. **124.** $\{0\} \cup \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.
125. $(-\infty; -2) \cup \{1\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **126.** $\{0\} \cup (3; 10]$. **127.** $\{0\} \cup (1; +\infty)$.
128. $(-\infty; -11] \cup \{0\} \cup [4; 5)$. **129.** $(-1; 0) \cup (0; \frac{1}{8}) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **130.** $\emptyset$.
131. $[6; +\infty)$. **132.** $[1; +\infty)$. **133.** $(2; 2\sqrt{2}]$. **134.** $[2; 1 + \sqrt{2})$.
135. $[2; +\infty)$. **136.** $[-2; -1]$. **137.** $[-5; -1)$. **138.** $[1; +\infty)$.
139. $[-7; 1)$. **140.** $[-2; 5; 2)$. **141.** $(-\infty; 0] \cup (4; 5; +\infty)$. **142.** $(3; 5]$.
143. $[0; 3]$. **144.** $[-1; +\infty)$. **145.** $[4; +\infty)$. **146.** $[0; 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}; +\infty)$. **147.** $\{1\} \cup [2; +\infty)$. **148.** 2. **149.** 0. **150.** $\{0\} \cup [4; +\infty)$. **151.** $[-1; 8)$. **152.** $[-\frac{3}{2}; 4]$. **153.** $[0; \frac{1}{2})$. **154.** $\left[\frac{\sqrt{35}}{2}; 9\right)$.
155. $\left[\frac{1+\sqrt{33}}{2}; 9\right)$. **156.** $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$. **157.** $\left[-1; \frac{6-2\sqrt{29}}{5}\right)$. **158.** $\left[0; \frac{11-2\sqrt{19}}{5}\right)$.
159. $\left(\frac{6+6\sqrt{11}}{5}; 6\right]$. **160.** $[1; 1,05]$. **161.** $[4; 3\sqrt{2}]$. **162.** $\left[3; \frac{\sqrt{37}}{2}\right]$.
163. $\{1\} \cup [4; 2; 5]$. **164.** $[2; 2,5]$. **165.** $\left(-\frac{77}{10}; -\frac{109}{20}\right) \cup \left(-\frac{37}{10}; \infty\right)$.
166. $(-\infty; \frac{219}{40}]$. **167.** $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. **168.** $(-\infty; \frac{3-\sqrt{37}}{2}] \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{37}}{2}\right]$. **169.** $\left(\frac{5}{2}; \frac{1+\sqrt{19}}{2}\right]$. **170.** $(-9; 1 - \sqrt{10}) \cup (1 + \sqrt{10}; +\infty)$.

- 171.** $\left[-\frac{3+\sqrt{105}}{6}; -2\right) \cup (2+\sqrt{3}; +\infty)$. **172.** $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right]$. **173.** $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.
174. $\{1\} \cup [3; +\infty)$. **175.** $\{0\} \cup [1; +\infty)$. **176.** $(-\infty; 0] \cup \{8\}$. **177.** $\{0\} \cup [1; +\infty)$. **178.** $\{1\} \cup [2; +\infty)$. **179.** $\{3\} \cup [4; +\infty)$. **180.** $(-\infty; -4] \cup \{1\}$.
181. $\{-1\} \cup (2, 5; +\infty)$. **182.** $(-\infty; -1) \cup \{2\} \cup [3; 4)$. **183.** $(-1; 4)$.
184. $(-\infty; +\infty)$. **185.** $(-\infty; -\frac{3}{4}] \cup [2; +\infty)$. **186.** $(-1; 2) \cup (3; 6)$.
187. $(-\infty; -1] \cup [1; 2] \cup [4; +\infty)$. **188.** $(-\infty; \frac{4}{3})$. **189.** $(1; 3)$.
190. $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. **191.** $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. **192.** $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.
193. $[-3; -1] \cup \{2\}$. **194.** $[-1; 1] \cup \{4\}$. **195.** $[-1; 0] \cup \{1\}$.
196. $(-\infty; -8] \cup [-6; 6] \cup [8; +\infty)$. **197.** $\left[-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right]$. **198.** $(-\infty; -3)$.
199. $(-1; 1)$. **200.** $[-2; 0] \cup \{2\}$. **201.** $(-3; 3)$. **202.** $(-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$.
203. $(-\frac{1}{2}; 0) \cup (1; \frac{3}{2})$. **204.** $(-3; 3)$. **205.** $(-\infty; -\frac{5}{2}] \cup (-2; 2) \cup [\frac{5}{2}; +\infty)$.
206. $[-3; -2] \cup [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}] \cup (2; 3)$. **207.** $(-\infty; -7) \cup (1; \frac{7}{6}]$.
208. $[4, 8; +\infty)$. **209.** $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. **210.** $[-6; 1] \cup [2; 3]$.
211. $(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$. **212.** $(3 - \sqrt{23}; 0) \cup (0; 3 + \sqrt{23})$. **213.** $[\frac{3}{2}; 2)$.
214. $(1; 2) \cup (2; +\infty)$. **215.** $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$. **216.** $(\sqrt{6} - 1; 13)$.
217. $(-\infty; -2) \cup (2; 4)$. **218.** $(-\infty; -3) \cup [-\sqrt{5}; 1) \cup [\sqrt{5}; 4]$.
219. $[-\sqrt{6}; -2) \cup (-2; -1) \cup [0; \sqrt{6}]$. **220.** $(-\infty; -3) \cup [-1; 3)$.
221. $\left[\frac{7}{2}; \frac{13+\sqrt{33}}{4}\right]$. **222.** $(-\frac{3}{2}; \frac{3}{7}]$. **223.** $(-1; \sqrt[3]{4})$. **224.** $\left[\frac{3+\sqrt{17}}{2}; 35\right)$.
225. $(-2; 5) \cup \{6\}$.

§8

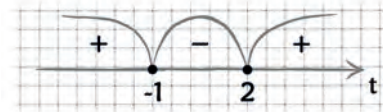
Показательные неравенства

При решении показательных неравенств часто используется метод подстановки (замены переменной). Подстановкой в математике называется введение новой переменной, т. е. переобозначение некоторой функции новой буквой. Подстановка позволяет свести решение неравенства или уравнения к цепочке двух, но более простых. Решая неравенство $f(x) > 0$ ($<$, $\leq$, $\geq$), можно сделать подстановку либо в самом неравенстве, либо при решении уравнения $f(x) = 0$ (т. е. на третьем шаге метода интервалов). Поясним это на примере.



Пример. Решить неравенство $4^x - 2^x - 2 \leq 0$.

Решение 1. Пусть $t = 2^x$. Решим неравенство $t^2 - t - 2 \leq 0$ методом интервалов. Условие корректности неравенства: $t \in \mathbb{R}$.
 $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -1, t_2 = 2$.



Перейдём в решении $t \in [-1; 2]$ к переменной x :

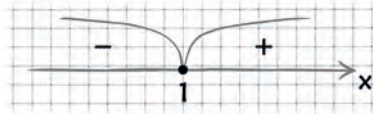
$$-1 \leq t \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2^x \leq 2,$$

$$\begin{cases} 2^x \geq -1, \\ 2^x \leq 2^1, \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ x \leq 1. \end{cases}$$



Ответ: $x \in (-\infty; 1]$.

Решение 2. Решим исходное неравенство методом интервалов. Условие корректности неравенства: $x \in \mathbb{R}$. Решим уравнение $4^x - 2^x - 2 = 0$. Пусть $t = 2^x$: $t^2 - t - 2 = 0$, отсюда $t_1 = -1 \Rightarrow 2^x = -1$ (нет корней); $t_2 = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$.



Определим знаки функции

$$f(x) = 4^x - 2^x - 2:$$

$$f(0) = 4^0 - 2^0 - 2 = -2 < 0;$$

$$f(2) = 4^2 - 2^2 - 2 = 10 > 0.$$

Решить неравенства

1. $4^x < 64$. 2. $4^{x+1} \geq \sqrt{2}$. 3. $2^{4x} < 16$. 4. $\left(\frac{1}{64}\right)^x > \sqrt{\frac{1}{8}}$.
5. $3^{\frac{x-5}{2}} \geq 3\sqrt{3}$. 6. $0,61^{x^2-4} > 1$. 7. $\left(\frac{3}{4}\right)^{3-4x} \geq 1\frac{7}{9}$.
8. $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-3} < 15\frac{5}{8}$. 9. $5^{x^2+21} \leq 5^{10x}$. 10. $2^{x^2-3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$.
11. $3^{x^2-3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$. 12. $81^{x^2} \leq \frac{1}{9}$. 13. $2^{x^2+14} < \left(\frac{1}{2}\right)^{15x}$.
14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x^2-15x+13} < 2^{3x-4}$. 15. $2^x > 5$. 16. $5^{x-3} \leq 2$.
17. $4^{x^2} \geq 9$. 18. $\sqrt{2}^{\frac{x^2}{3}+3} > \sqrt{7}$. 19. $3^{x^2-x+x\log_3 7} < 7$.
20. $6^{2x^2+x\log_6 \frac{6}{25}} \leq 5$. 21. $2^{x+2} - 2^x < 12$. 22. $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} < 140$.
23. $\frac{1}{x} + 3\frac{1}{x} + 3 \leq 84$. 24. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^x > 5$.
25. $9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 219$. 26. $9^{x+1} + 9^{x-0,5} - 3^{2x-4} < 755$.
27. $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$.
28. $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} \leq 56$. 29. $\frac{2^{x^2}}{4^x} < 8$. 30. $\frac{3^{x^2}}{81^x} \geq \frac{1}{27}$.

Решить неравенства

31. $5^{2x} > 4 \cdot 5^x + 5$. 32. $2 \cdot 16^x - 3 \cdot 4^x + 1 \leq 0$.
33. $2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 10 \geq 0$. 34. $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$.
35. $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 \geq 0$. 36. $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 \leq 0$. 37. $2^{x+1} + 4^x > 8$.
38. $2^{x+1} + 4^x \leq 80$. 39. $5^{2x-1} + 5^{x+1} > 250$. 40. $4^x - 2^{x+1} + 1 \leq 0$.
41. $4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8 \leq 0$. 42. $4^{x+\frac{1}{2}} - 17 \cdot 2^{x-1} + 2^1 > 0$.
43. $2^x + 4 \cdot 2^{-x} \leq 5$. 44. $3^{x-1} + 3^{3-x} - 10 < 0$. 45. $2^{x-1} + \frac{1}{2^{x-5}} > 17$.
46. $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} \geq \frac{4}{3}$. 47. $\sqrt[3]{5^x} - 126 \cdot (\sqrt[6]{5})^{x-6} + 5 > 0$.
48. $4^{\frac{1}{x}-2} - 4 \cdot 2^{\frac{1}{x}-3} \geq 8$. 49. $9^{\frac{2-3x}{2x}} - 4 \cdot 3^{\frac{1}{x}-2} + 1 \geq 0$.

Решить неравенства

50. $7^{x-1} + 7^x + 7^{x+1} \geq 228$. 51. $9^{x-3} + 9^{x-1} > 511 + 9^{x-2}$.
52. $9^{x-3} + 9^{x-1} \leq 146 + 9^{x-2}$. 53. $(3\sqrt{3})^{\frac{4(x-2)}{3}} + 8 > 3^{2(x-1)}$.
54. $5^{x^2-4x} + 5^{x^2-4x-1} > 6$. 55. $7^{x^2-2x+1} + 7^{x^2-2x} \leq 392$.
56. $7^{x^2-2x-1} + 7^{x^2-2x} > 392$. 57. $\frac{2}{5^x} + \frac{6}{5^{x+1}} < 5$.
58. $\frac{1}{3^{x-1}} + \frac{2}{3^x} + \frac{5}{3^{x+1}} \geq 5$. 59. $\frac{1}{2^{x-1}} + \frac{3}{2^x} + \frac{5}{2^{x+1}} > 5$.
60. $2^{1-x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^{x+1}} < 82$. 61. $8^{x-1} \cdot 32^{x+1} \leq 0,125$.
62. $3^{x-1} \cdot 4^{x+1} \geq 192$. 63. $2^{x-2} \cdot 6^{x+1} < 216$.
64. $9^{x-1} \cdot 5^{1-x} > \frac{3^{x+2}}{45}$. 65. $3^{x^2-5x} \cdot 4^{-x} \leq 1$. 66. $3^{x^2+x} \cdot 5^{-x} \leq 1$.
67. $4^{x^2+3x} \cdot 5^{-2x} > 1$. 68. $\sqrt{16^{2x-1}} \leq \sqrt[3]{8^{\frac{x+3}{x+1}}}$.
69. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{125}\right)^{x-\frac{7}{x}}} \geq 25^{\frac{2x+1}{x}}$. 70. $\sqrt[3]{27^{3x-5}} > \sqrt{\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{2x-7}{x}}}$.

Решить неравенства

71. $9^{x-2} - 92 \cdot 3^{x-4} + 11 \leq 0$.
72. $9^{x-1,5} - 36 \cdot 3^{x-2} + 60 > 0$. 73. $9^{x-1,5} - 37 \cdot 3^{x-2} + 90 > 0$.
74. $4^{x-1} + 2^{x+2} \leq 3$. 75. $4^{x-1} + 2^{x+1} \leq 3$. 76. $5^x + \frac{80}{5^x} < 21$.
77. $3^x + \frac{2}{3^{x-3}} - 29 \leq 0$. 78. $3 \cdot 2^{x+3} + 13 \cdot 2^{-x} \leq 38$.
79. $3^x + \frac{2}{3^{x-2}} > 11$. 80. $2^{x-2} + \frac{7}{2^{x-4}} \geq \frac{71}{4}$. 81. $\frac{2}{5^x} - \frac{2}{5^{x+1}} \leq 5^x$.
82. $\frac{1}{7^x} + \frac{2}{7^{x+1}} - \frac{3}{7^{x+2}} > 30 \cdot 7^{x-3}$. 83. $2^{x+2} + \frac{6}{2^x} \leq 10$.
84. $5^{x+2} - \frac{6}{5^x} \geq 25$. 85. $\frac{2^x + 10}{4} \geq \frac{9}{2^{x-2}}$. 86. $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$.
87. $\frac{3^{x+3} - 3^{-x}}{3^{4-x} - 9^{-x}} \leq 3^x$. 88. $\frac{81 - 9^{-x-1}}{27 - 3^{-x}} \leq 30$. 89. $\frac{640 - 4^{-x}}{256 - 2^{-x-2}} < \frac{5}{2}$.
90. $\frac{4 \cdot 3^{-x-1}}{3^{-x-1} - 2} \geq -3^{-x}$. 91. $\frac{25^x - 2 \cdot 5^{x+1}}{5^x} \leq 5^{1-x} - 6$.

92. $\frac{80 - 4^x}{16 - 2^x} \geq 4$. 93. $\frac{9^x - 3^x - 4}{3^x - 2} < 1$. 94. $\frac{4^x + 2^{x+1}}{2^{x+2} - 8} \geq 3$.
95. $\frac{12^x - 2 \cdot 3^{x+1}}{6^{x+1}} \leq 4$. 96. $\frac{32 \cdot 4^x - 31}{16^x - 9 \cdot 4^x + 8} \leq -4$.
97. $\frac{3 \cdot 5^x + 5}{25^x - 5^{x+2}} \geq -\frac{1}{5}$. 98. $\frac{25^x - 2 \cdot 5^{x+1}}{5^x} \leq 5^{x-1} + 1$.
99. $\frac{17 \cdot 2^x - 32}{4^{x+1} - 6 \cdot 2^{x+2} + 32} \leq -2^{x-2} - 1$. 100. $\frac{4^x - 2^x - 90}{2^x - 82} \leq 1$.
101. $\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$. 102. $\frac{8 \cdot 3^x - 23}{9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27} \leq -1$.
103. $\frac{3 \cdot 4^x - 2^{x+1} - 1}{2^x} + \frac{6 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 3}{2^x - 2} \leq 9 \cdot 2^x - 2$.
104. $25^x + 265 \geq 2 \cdot 5^{x+1} + \frac{24 \cdot 25^x + 360}{5^x - 1}$. 105. $4^x + \frac{2^x - 8}{2^x - 2} \leq 2^{x+3}$.
106. $27^x - 9^{x+1} + \frac{9^{x+1} - 486}{3^x - 6} \leq 81$.
107. $\frac{14 \cdot 3^{x+1} - 234}{9^x - 5 \cdot 3^x + 6} + 3^{x+2} + 39 \geq 0$.
108. $3^{x+2} + \frac{39 \cdot 9^x - 53 \cdot 3^x}{9^x - 5 \cdot 3^x + 6} \leq 0$. 109. $4^x + 40 - \frac{3 \cdot 4^x - 72}{2^x - 5} \leq 2^{x+3}$.
110. $(3 - 2\sqrt{2})^{2x} - \frac{4 - 2\sqrt{2}}{(3 + 2\sqrt{2})^x} + 3 \leq 2\sqrt{2}$.
111. $(6 + \sqrt{35})^{2x} - \frac{7 - \sqrt{35}}{(6 - \sqrt{35})^x} + 6 > \sqrt{35}$.
112. $(4 - \sqrt{15})^{2x} - 8 \left(\frac{1}{4 + \sqrt{15}} \right)^x + 1 \leq 0$.
113. $(2 + \sqrt{3})^{2x} + 2 + \sqrt{3} > \frac{3(3 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})^x}$.

Решить неравенства

114. $\frac{2x^2 - 3x - 1}{x^2 - 4x - 5} < 0$. 115. $(3^{2x^2 - 3x} - \frac{1}{3})(x^2 + 2x - 3) \leq 0$.
116. $\frac{5^x - 2}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} < 0$. 117. $\frac{(3x - 7) \cdot \sqrt{x^2 - x}}{6x^2 - 2} \geq 0$.
118. $\frac{(x + 2) \cdot \sqrt{x^2 - 3x}}{2x - \frac{6}{x} - 2} \geq 0$. 119. $3 \cdot 21^x - 3^{x+1} - 7^x + 1 \leq 0$.
120. $7 \cdot (21^x + 21) \leq 49 \cdot 3^x + 3 \cdot 7^{x+1}$.
121. $21^{x-1} - 7^x \leq 3^{x-1} - 7$. 122. $20^{x+1} + 2 > 5 \cdot 4^{x+1} + 2 \cdot 5^x$.
123. $\frac{30^{x^2} - 5^{x^2} - 5 \cdot 6^{x^2} + 5}{\sqrt{x + 3}} \geq 0$. 124. $\frac{7^{|x|} + 7 \cdot 6^{|x|} - 7 - 42^{|x|}}{\sqrt{x + 2} + 2} \leq 0$.

Решить неравенства

125. $2 \cdot 5^{x-1} > 3^{\frac{x}{2}+1} + 3^{\frac{x}{2}-1}$.
126. $2^{x+2} + 2^{x+1} - 2^x > 9^x + 9^{x-1}$.
127. $3^{x+2} - 3^{x+1} - 3^x \geq 5^{x+1} - 16 \cdot 5^{x-1}$.
128. $5 \cdot \left(\sqrt{7^{\frac{1}{x+2}+2}} - \sqrt{7^{\frac{1}{x+2}}} \right) < 3^{\frac{x+3}{x+2}} + 3^{\frac{1}{x+2}+3}$.
129. $3 \cdot 16^{x+1} + 2 \cdot 81^{x+1} - 5 \cdot 36^{x+1} > 0$.
130. $9^x + 4^x < 13 \cdot 6^{x-1}$. 131. $8 \cdot 9^{x+0,5} < 3 \cdot 16^{x+0,5} + 12^{x+1}$.
132. $25^x + 3 \cdot 10^x \leq 4^{x+1}$. 133. $16^{x+0,5} - 7 \cdot 12^x + 9^{x+0,5} > 0$.
134. $3^x + 2,5 \cdot \sqrt{6}^x > 3 \cdot 2^{x+1}$. 135. $3 \cdot 16^x + 9^{x+\frac{1}{2}} \geq 7 \cos \frac{\pi}{6} \cdot 12^x$.
136. $4^{x^2+4x-1} + 10^{x^2+4x-1} < 0,35 \cdot 25^{x^2+4x}$.
137. $2 \cdot 9^{x^2-4x+1} + 7 \cdot 6^{x^2-4x+1} \geq 60 \cdot 4^{x^2-4x}$.
138. $12,5^{4x^2-1} < 0,5 \cdot 5^{4x^2-1} + 4^{2x^2-1}$.
139. $2 \cdot 9^{x^2-4x+1} + 7 \cdot 6^{x^2-4x+1} \geq 60 \cdot 4^{x^2-4x}$.
140. $1,5 \cdot 2^{2x^2-x+1} - 0,5 \cdot 3^{2x^2-x} \leq 4,5^{2x^2-x}$.
141. $4 \cdot 25^{x^2-6x} + 4^{x^2-6x+1} \leq 11,6 \cdot 10^{x^2-6x}$.
142. $4^{x-4} + 10^{x-4} < 0,125 \cdot 25^{x-3}$.
143. $\frac{3^{x^2}}{27 \cdot 5^{\frac{x-11}{x-3}}} \leq 15^{x^2-3} \cdot 25^{\frac{x-7}{3-x}}$. 144. $\frac{11^{x-2}}{\sqrt{2^{\frac{x+3}{x+2}-1}}} \geq \frac{88^x \cdot \sqrt{2^{\frac{x+3}{x+2}-2}}}{121}$.
145. $\frac{16 \cdot 5^x \cdot (-x)^{-0,5}}{\sqrt{2^{\frac{x-2}{x+2}}}} \geq \frac{20^x \cdot \sqrt{2^{\frac{10-5x}{x+2}}}}{\sqrt{-x}}$.
146. $\frac{4 \cdot 7^x \cdot (x+3)^{-0,5}}{\sqrt{2^{\frac{x-2}{x+2}}}} \geq \frac{56^x \cdot \sqrt{2^{\frac{5x-10}{x+2}}}}{\sqrt{x+3}}$.
147. $\frac{54^x \cdot \sqrt{3^{\frac{5x-10}{x+2}}}}{\sqrt{2x+9}} \leq \frac{81 \cdot 2^x \cdot (2x+9)^{-0,5}}{3^{\frac{x-2}{x+2}}}$.

Ответы к заданиям § 8

1. $(-\infty; 3)$. 2. $[-\frac{3}{4}; +\infty)$. 3. $(-\infty; 1)$. 4. $(-\infty; \frac{1}{4})$. 5. $[8; +\infty)$.
6. $(-2; 2)$. 7. $[\frac{5}{4}; +\infty)$. 8. $(-\infty; 3)$. 9. $[3; 7]$. 10. $[-3; 1]$. 11. $(-3; 1)$.
12. $\emptyset$. 13. $(-14; -1)$. 14. $(-\infty; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$. 15. $(\log_2 5; +\infty)$.
16. $(-\infty; 3 + \log_5 2]$. 17. $(-\infty; -\sqrt{\log_2 3}] \cup [\sqrt{\log_2 3}; +\infty)$. 18. $x \in \mathbb{R}$.
19. $(\log_3 \frac{1}{7}; 1)$. 20. $[-\frac{1}{2}; \log_6 5]$. 21. $(-\infty; 2)$. 22. $(-\infty; 3)$.
23. $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$. 24. $(-\infty; -2)$. 25. $(3,5; +\infty)$. 26. $(-\infty; 2)$.
27. $(-\infty; 2]$. 28. $[0; 16]$. 29. $(-1; 3)$. 30. $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.
31. $(1; +\infty)$. 32. $[-\frac{1}{2}; 0]$. 33. $[1; +\infty)$. 34. $[-1; 1]$. 35. $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.
36. $(-\infty; 0]$. 37. $(1; +\infty)$. 38. $(-\infty; 3]$. 39. $(2; +\infty)$.
40. 0 . 41. $[-2; 3]$. 42. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. 43. $[0; 2]$. 44. $(1; 3)$.
45. $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$. 46. $[0; +\infty)$. 47. $(-\infty; -6) \cup (12; +\infty)$.
48. $(0; \frac{1}{4}]$. 49. $(-\infty; 0) \cup (0; \frac{1}{2}] \cup [1; +\infty)$. 50. $[1 + \log_7 4; +\infty)$.
51. $(3 + \log_9 7; +\infty)$. 52. $(-\infty; \log_3 \sqrt{2} + 3]$. 53. $(-\infty; 2)$.
54. $(-\infty; 2 - \sqrt{5}) \cup (2 + \sqrt{5}; +\infty)$. 55. $[1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}]$.
56. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. 57. $(4 \log_5 2 - 2; +\infty)$. 58. $(-\infty; 2 \log_3 2 - 1]$.
59. $(-\infty; \log_2 3 - 1)$. 60. $(\log_2 \frac{7}{41} - 2; +\infty)$. 61. $(-\infty; -\frac{5}{8}]$.
62. $[2; +\infty)$. 63. $(-\infty; 2)$. 64. $(-\infty; 2)$. 65. $[0; 5 + 2 \log_3 2]$.
66. $[0; \log_3 5 - 1]$. 67. $(-\infty; \log_2 5 - 3) \cup (0; +\infty)$. 68. $(-\infty; -\frac{5}{4}] \cup (-1; 1]$.
69. $(-\infty; -5] \cup (0; 1]$. 70. $(-2; 0) \cup (\frac{7}{3}; +\infty)$. 71. $[\log_3 11; 4]$.
72. $(-\infty; 2 + \log_3 2) \cup (2 + \log_3 10; +\infty)$. 73. $(-\infty; 1 + \log_3 10) \cup (4; +\infty)$.
74. $(-\infty; 1 + \log_2 (\sqrt{19} - 4)]$. 75. $(-\infty; 1 + \log_2 (\sqrt{7} - 2)]$.
76. $(1; 4 \log_5 2)$. 77. $[\log_3 2; 3]$. 78. $[-1; \log_2 \frac{13}{3} - 2]$.
79. $(-\infty; \log_3 2) \cup (2; +\infty)$. 80. $(-\infty; \log_2 7) \cup [6; +\infty)$.
81. $[\frac{3 \log_5 2 - 1}{2}; +\infty)$. 82. $(-\infty; \frac{1 + \log_7 2}{2})$. 83. $[0; \log_2 3 - 1]$.
84. $[\log_5 6 - 1; +\infty)$. 85. $[3; +\infty)$. 86. $(1; +\infty)$. 87. $(-4; 1]$.
88. $[-5; -3) \cup (-3; +\infty)$. 89. $(-10; 3 - \log_2 5)$. 90. $(-\infty; -1 - \log_3 2) \cup [-\log_3 2; +\infty)$.
91. $(-\infty; 1]$. 92. $(-\infty; \log_2 (2 + 2\sqrt{5})) \cup (4; +\infty)$.
93. $(\log_3 2; \log_3 (1 + \sqrt{3}))$. 94. $(1; 2] \cup [1 + \log_2 3; +\infty)$.
95. $(-\infty; \log_2 (12 + 5\sqrt{6}))$. 96. $(0; \frac{3}{2}) \cup \{-\frac{1}{2}\}$. 97. $\{1\} \cup (2; +\infty)$.
98. $(-\infty; 1 + \log_5 \frac{11}{4}]$. 99. $\{0\} \cup (1; 2)$. 100. $[2; 1 + \log_2 41)$.
101. $(-\infty; \log_3 \frac{1}{2}) \cup [\log_3 \frac{3}{5}; \log_3 \frac{5}{3})$. 102. $(1; 2) \cup \{\log_3 2\}$. 103. $(-\infty; 1)$.
104. $(-\infty; 0) \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$. 105. $(1; 3] \cup \{0\}$. 106. $\{1\} \cup (\log_3 6; 2]$.
107. $(\log_3 2; 1) \cup [\log_3 11 - 1; +\infty)$. 108. $\{-1\} \cup (\log_3 2; 1)$. 109. $\{2\} \cup$

$(\log_2 5; 3]$. **110.** $[0; 1]$. **111.** $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **112.** $[-1; 1]$.
113. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. **114.** $(-1; 0) \cup (3; 5)$. **115.** $[-3; \frac{1}{2}] \cup \{1\}$. **116.** $(-3; \log_5 2)$. **117.** $\{1\} \cup [\frac{7}{3}; +\infty)$. **118.** $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (3; +\infty)$. **119.** $[-1; 0]$. **120.** 1. **121.** $[1; 1 + \log_3 7]$.
122. $(-\infty; -\log_4 10) \cup (0; +\infty)$. **123.** $(-3; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$.
124. $[-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$. **125.** $(2; +\infty)$. **126.** $(-\infty; 1)$.
127. $(-\infty; 2]$. **128.** $(-2; +\infty)$. **129.** $(-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$.
130. $(-1; 1)$. **131.** $(0; +\infty)$. **132.** $(-\infty; 0]$. **133.** $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.
134. $(2; +\infty)$. **135.** $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$. **136.** $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.
137. $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. **138.** $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. **139.** $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.
140. $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty)$. **141.** $[3 - \sqrt{10}; 3 - 2\sqrt{2}] \cup [3 + 2\sqrt{2}; 3 + \sqrt{10}]$.
142. $(\log_{2,5} \frac{2+3\sqrt{6}}{5} + 3; +\infty)$. **143.** $(-\infty; -2] \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$.
144. $(-\infty; -2) \cup [-\frac{11}{6}; 0]$. **145.** $(-\infty; -2) \cup [-1; 0)$.
146. $(-2; 1]$. **147.** $(-\frac{9}{2}; -\frac{10}{3}] \cup (-2; \frac{3}{2}]$.

Если есть олимпиады по математике, то почему нет паралимпиад по математике? В них бы участвовали гуманитарии, а все бы восхищались их мужеством.

Сетевой фольклор

§9

Логарифмические неравенства

При решении логарифмических неравенств, как правило, используются три основных приёма: метод интервалов, метод подстановки и переход к равносильной системе. К последнему способу решения мы отнесём и т.н. метод рационализации, удобный для решения логарифмических неравенств с переменным основанием. Приведём его в виде двух формул.

$$\log_{h(x)} f(x) \lesseqgtr \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (h(x) - 1)(f(x) - g(x)) \lesseqgtr 0, \\ f(x) > 0, \quad g(x) > 0, \quad h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} h(x) \lesseqgtr \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1)(g(x) - 1)(h(x) - 1)(g(x) - f(x)) \lesseqgtr 0, \\ f(x) > 0, \quad g(x) > 0, \quad h(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \quad g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Вместо странного символа « $\lesseqgtr$ » в каждой формуле может стоять любой из знаков: « $<$ », « $\leq$ », « $>$ » или « $\geq$ ». Как любит говорить И. В. Яценко, «метода рационализации не существует в природе», но «...любое решение методом равносильных переходов — абсолютно корректное», [20]. Какой приём или факт стоит называть методом, а какой не стоит — вопрос терминологии и идеологии, но главное для нас сейчас: на ЕГЭ данными формулами пользоваться можно. Кстати, первая вышеприведённая формула даётся в учебнике [11], который включён в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования.

Решить неравенства

1. $\log_3(x-1) \leq 3$. 2. $\log_{\frac{1}{2}}(2x+21) < -2$.
3. $\log_2(2x-1) > -2$. 4. $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) > 0$. 5. $\log_3(4x+5) \leq 3$.
6. $\log_{\frac{1}{11}}(2x+21) < -2$. 7. $\log_2(x^2-3x) \geq 2$.
8. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6) > -1$. 9. $\lg(x^2-5x+7) < 0$.
10. $\log_2(x^2-2x) \geq 3$. 11. $\log_3(4x-x^2) \geq 1$.
12. $\log_5(x^2-11x+43) > 2$. 13. $\log_3(x^2-3x+5) > 1$.
14. $\log_{0,25}(x^2-x+0,5) < \frac{1}{2}$. 15. $\log_8(x^2-4x+3) \leq 1$.
16. $\log_2(11-2x-x^2) > 3$. 17. $\log_2(x^2-3x) > 1$.
18. $\log_{0,25}(x^2-5x) > -1$. 19. $\log_2(x^2-4x) < \log_2(x^2+x+4)$.
20. $\log_4(x^2-3x) \geq \log_4(x-3)$. 21. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x) < \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$.
22. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x) > \log_{\frac{1}{2}}(4+x)$. 23. $\ln(x^2-x) \leq \ln(3x^2+4x-3)$.
24. $\log_{\frac{3}{2}} \frac{2x-8}{x-2} < 0$. 25. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2-3x}{x} \geq -1$. 26. $\log_2 \frac{7x+1}{x+2} \leq 3$.
27. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2+4x}{2x-3} < 1$. 28. $\ln \frac{2}{2x+3} < \ln \frac{x+1}{x-1}$.
29. $\lg \frac{x-2}{3-x} > \lg \frac{1}{x}$. 30. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2-3x}{4x-7} \geq \log_{\frac{1}{3}} x$.

Решить неравенства

31. $\log_2(x-1) + \log_2 x \leq 1$. 32. $\log_4 x + \log_4(x+1) \leq \log_4 2$.
33. $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}}(x+3) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+15)$.
34. $1 - \log_2(2x+1) > \log_2(x-1)$.
35. $\log_2(x^2-1) - \log_2 x < 2$. 36. $1 + \log_6(4-x) \leq \log_6(16-x^2)$.
37. $\log_3(2x-1) + \log_3(x+7) - 3 < 0$.

38. $\log_3(2x - 3) + 4 \leq \log_3(3x + 11)$.
39. $\log_3(x - 2) + \log_3(3x - 1) \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{8 - x}$.
40. $\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) + \log_3(2x + 3) < \log_{\sqrt{3}}(2x + 3)$.
41. $\log_2(x^2 + 4) - \log_2(x^2 - x + 14) \geq \log_2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
42. $\log_3(x^2 + 3) - \log_3(x^2 - x + 13) \geq \log_3\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.
43. $\log_4(6x^2 + 5) - \log_4(x^2 + x + 1) \geq \log_4\left(\frac{x}{x + 4} + 5\right)$.
44. $\log_5(7x^2 + 6) - \log_5(x^2 + x + 1) < \log_5\left(\frac{x}{x + 5} + 6\right)$.
45. $\log_6\left(\frac{4}{x} + 3\right) - \log_6(x + 6) \leq \log_6\left(\frac{x + 5}{x^2}\right)$.
46. $\log_7(5 - x) + \log_7 \frac{1}{x} \leq \log_7\left(\frac{1}{x} - 2x + 5\right)$.
47. $\log_8(4 - x) + \log_8 \frac{1}{x + 1} \geq \log_8\left(\frac{1}{x + 1} - x + 4\right)$.
48. $\ln(3 - 2x) + \ln \frac{1}{x - 1} \leq \ln\left(\frac{1}{x - 1} - x + 3\right)$.
49. $\ln(3 - 2x) + \ln \frac{1}{1 - x} \leq \ln\left(\frac{1}{1 - x} - x + 2\right)$.
50. $\log_2(4x^2 - 1) - \log_2 x \leq \log_2\left(7x + \frac{3}{x} - 8\right)$.
51. $\lg(9x^2 - 1) - \lg x \geq \lg\left(9x + \frac{21}{x} - 2\right)$.
52. $\ln(3x^2 - 4x + 1) - \ln x \leq \ln\left(9x + \frac{1}{x} - 5\right)$.
53. $\log_{0,5}\left(\frac{2}{x} + 2\right) - \log_{0,5}(x + 9) \geq \log_{0,5}\left(\frac{x + 5}{x^2}\right)$.
54. $4\log_2 \frac{7x - 3}{3x - 7} + \log_2(3x - 7)^4 \leq 4$.
55. $2\log_2 \frac{x - 1}{x + \frac{5}{4}} + \log_2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 \geq 2$.
56. $2\log_2 \frac{x - 1}{x + \frac{7}{3}} + \log_2\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 \leq 4$.
57. $\ln x^2 + \ln(7 - x) \leq \log_{\sqrt{e}}(x + 3) + \ln(1 - x)$.
58. $2\lg x^2 - \lg(3 - 2x) \leq \lg \frac{x^2 + 12x + 36}{3 - 2x}$.
59. $\log_2 \frac{x^2 - 12x + 36}{x + 7} \leq 2\log_2 \frac{x^2}{3} - \log_2(x + 7)$.

Решить неравенства

60. $\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 \geq 0$. 61. $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \leq 0$.
62. $\log_{\sqrt{5}}^2 x - \log_{\sqrt{5}} x^2 - 8 < 0$. 63. $\frac{3}{\lg x + 2} \geq 1$.
64. $\frac{4}{\log_2 x - 5} < -1$. 65. $\log_3^2(2x - 3) - 5 \log_3(2x - 3) + 4 \leq 0$.
66. $\log_2^2(x + 1) - \log_2(x + 1) < 2$. 67. $\log_3(2x + 5) - \frac{3}{\log_3(2x + 5)} < 2$.
68. $\log_5^2(125 - 4x^2) - 3 \log_5(125 - 4x^2) \geq 0$.
69. $\log_3^2(9 - 4x^2) - 5 \log_3(9 - 4x^2) + 6 \leq 0$.
70. $\log_3 \sqrt{x} - 2 \log_{\frac{2}{9}} x + 1 \leq 0$. 71. $\log_2 \sqrt{x} - 5 \log_{\frac{2}{4}} x + 18 > 0$.
72. $\log_2(8 - 3x^2) + \frac{3}{\log_2(8 - 3x^2)} \geq 4$. 73. $\frac{3}{\log_4 x - 1} > 3 + 2 \log_4 x$.
74. $\frac{1}{\log_3 x - 1} \leq \frac{\log_3 x^2}{\log_3 x - 2}$. 75. $\frac{1}{\log_{16} x} \geq \frac{\log_{16} x}{\log_{16} x^2 - 1}$.
76. $\frac{\lg(2 - x) - 7}{1 - \lg(2 - x)} \leq \frac{4}{\lg(2 - x)}$. 77. $\frac{\log_{0,5}^2(2x + 3) - \log_{0,5}(2x + 3)^2}{1 - 2 \log_2(2x + 3)} \geq 1$.
78. $1 + \frac{6}{\log_5 x - 2} + \frac{5}{\log_5^2 x - \log_5(125x^4) + 7} \geq 0$.
79. $1 + \frac{14}{\log_2^2 x + \log_2 \frac{x^6}{\sqrt{2}} + 9,5} \geq \frac{9}{\log_2 x + 3}$.
80. $\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3^2 x + 2 \log_9 x^3} \geq -1$. 81. $\frac{8 - \log_2(16x)}{\log_{\frac{2}{3}} x - 3 \log_2 x} \geq -1$.
82. $\frac{\log_3(81x)}{\log_{\frac{2}{3}} x + \log_3 x^3} \geq -1$. 83. $\frac{\log_2(2x) - 4}{\log_2^2 x - \log_2 x^3} \geq -2$.
84. $\frac{\log_3(27x) + 1}{\log_3^2 x - \log_9 x^3} \geq 6$. 85. $\frac{\log_2 x^4}{\log_2 \frac{x}{16}} \geq \frac{12}{\log_2 x} + \frac{39}{\log_2^2 x - 2 \log_2 x^2}$.

Решить неравенства

86. $\frac{\log_2(x^2 - 4x)}{\log_3(11 - x)} > 0$. 87. $\frac{\log_2(3x^2 - 11x + 8) - 1}{\log_8(3x + 7)} \leq 0$.
88. $\frac{1 - \log_2(4x^2 - 17x + 15)}{\ln(3x + 11)} \geq 0$. 89. $\frac{\log_2(x^2 - 4x - 2) + 2}{\log_7(x + 9) - 1} \leq 0$.

90. $\frac{1}{\log_4(2x+3)} \leq -1$. 91. $\frac{\log_3(13-x)}{\log_3(2x+5)} \leq 1$.
92. $\frac{\log_4(10-2x+x^2)}{\log_4(2x-15)} \geq 2$. 93. $\frac{\lg(2x^2-3x+1)}{\lg(5x^2-6x+1)^5} \geq 0,2$.
94. $\frac{\log_2(x^2-2x-7)}{\log_4(21-x)} < 4$. 95. $\frac{\log_{0,2}(3x+5)}{\log_{25}(7-x-x^2)} \geq -2$.
96. $\log_5(x^2-49) \leq 3 \log_5 \frac{x+7}{x-7}$. 97. $\frac{\lg(2x^2-3x+1)}{\lg(5x^2-6x+1)} \geq 1$.
98. $\frac{\log_6(1-3x-4x^2)^3}{\log_6(4x^2-6x-4)} \leq \frac{\log_5 9}{\log_{125} 9}$. 99. $\frac{\log_6(x^2 + \frac{1}{x^2} - 10)}{\log_6(x + \frac{1}{x})} \geq 1$.

Решить неравенства¹⁵

100. $\log_3(x^3 - 13x + 9) > 2$. 101. $\log_2(x^3 - 7x^2 + 8) \geq 3$.
102. $\log_2\left(2x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}\right) \geq -1$.
103. $\log_5\left(\frac{3}{x} - 5x + 2\right) \leq \log_5\left(x^2 - 7x + \frac{3}{x} - 1\right)$.
104. $\log_{0,5}\left(x^2 - \frac{3}{x} + x - 5\right) \leq \log_{0,5}\left(x^2 - \frac{4}{x} - 4x + 1\right)$.
105. $\log_2\left(4x^2 + \frac{2}{x} - 3\right) - 3 > \log_2(1-x) + \log_2 x$.
106. $\log_6 \frac{3}{x-3} + \log_6(x^2 - 5x + 7) \leq \log_6\left(x^2 - 5x + \frac{3}{x-3} + 6\right)$.
107. $2 \log_2(\sqrt{2}x) - \log_2 \frac{x}{x+1} \leq \log_2\left(2x^2 + \frac{1}{x} - 1\right)$.
108. $\ln(3-2x) + \ln \frac{1}{(x-1)^2} \leq \ln\left(\frac{1}{(x-1)^2} - x + 3\right)$.
109. $\ln(3-2x) + \ln \frac{1}{(x-1)^2} \leq \ln\left(\frac{1}{(x-1)^2} - x - 3\right)$.
110. $\ln \frac{1}{x} + \ln(x^2 + 5x - 9) \leq \ln\left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 8\right)$.
111. $\lg \frac{3}{x} + \lg(x^2 - 7x + 11) \leq \lg\left(x^2 - 7x + \frac{11}{x} + 6\right)$.
112. $\log_9\left(18x^2 + \frac{1}{x} - 7\right) \geq \log_3(\sqrt{3}x) - \log_9 \frac{x}{1-x}$.

¹⁵По мотивам КИМ ЕГЭ-2018

$$113. \lg \left(7x^2 + \frac{2}{x} - 3 \right) \geq 2 \lg (\sqrt{14}x) - \lg \frac{x}{1-x}.$$

$$114. \log_{11} \left(4x^2 + \frac{1}{x} - 3 \right) \geq 2 \log_{11} (\sqrt{2}x) - \log_{11} \frac{x}{1-x}.$$

$$115. \log_{12} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{2} + 1 \right) \geq \log_{12} (5 - 2x) - 2 \log_{12} x.$$

Решить неравенства¹⁶

$$116. \log_2 (8 - 4x) > \log_2 (x^2 - 3x + 2) + \log_2 (x + 3).$$

$$117. 2 + \log_6 (3 - x) > \log_6 (x + 5) + \log_6 (x^2 - 10x + 21).$$

$$118. 1 + \log_4 (5 - x) > \log_4 (x - 1) + \log_4 (x^2 - 10x + 25).$$

$$119. 2 + \log_3 (6 - x) > \log_3 (x + 7) + \log_3 (x^2 - 5x - 6).$$

$$120. \log_{0,25} (2 - x) - 2 < \log_{0,25} (x^2 - 7x + 10) + \log_{0,25} (x + 3).$$

$$121. \log_{\frac{1}{3}} (4 - x) - 2 < \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 9x + 20) + \log_{\frac{1}{3}} (x + 1).$$

$$122. \log_{\frac{1}{2}} (4 - x) - 4 < \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 10x + 24) + \log_{\frac{1}{2}} (x + 2).$$

$$123. \log_{\sqrt{3}} (5 - x) + 4 > \log_{\sqrt{3}} (x^2 - 12x + 35) + \log_{\sqrt{3}} (x - 1).$$

$$124. \log_{\frac{1}{4}} (2 - x) - 1 < \log_{\frac{1}{4}} (2x + 1) + \log_{\frac{1}{4}} (2x^2 - 7x + 6).$$

$$125. \lg (80 - 16x) > \lg (2x + 5) + \lg (2x^2 - 13x + 15).$$

Решить неравенства¹⁷

$$126. (2x - 5) \log_5 (x^2 - 8) > 0. \quad 127. (x^2 - 7x) \lg \frac{1 - 2x}{x} \leq 0.$$

$$128. \frac{\ln (3x^2 - 2x)}{x} \leq 0. \quad 129. (2x - 7) \log_3 (x - 8) \geq x^2 \log_3 (x - 8).$$

$$130. (x^2 - 6) \ln (x + 6) < (6 - x) \ln (x + 6).$$

$$131. (x^2 - 6) \log_{243} (x + 6) \leq (6 - x) \log_3 (x + 6).$$

$$132. x^2 \log_{625} (x + 11) \leq \log_5 (x + 11)^2.$$

¹⁶По мотивам КИМ ЕГЭ-2019

¹⁷По мотивам КИМ ЕГЭ-2020

133. $x^2 \log_{128} (x+1) \geq \log_2 (x^2 + 2x + 1)$.
 134. $x^2 \log_{1024} (6-x) \leq \log_2 (x^2 - 12x + 36)$.
 135. $x^2 \log_{81} (x+7) \leq \log_{\sqrt{3}} (x^2 + 14x + 49)$.
 136. $x^2 \log_{64} (x+10) \leq 8 \log_2 (x^2 + 20x + 100)$.
 137. $x^2 \log_{256} (x-3) \leq \log_2 (x^2 - 6x + 9)$.
 138. $\frac{1}{x} \log_5 \sqrt{3-x} > x \log_{25} (x^2 - 6x + 9)$.
 139. $\sqrt{116-x} \log_{243} (6+x) \leq \log_3 (x^2 + 12x + 36)$.
 140. $(x^2 - x) \log_4 (x+1) \geq \log_2 (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$.
 141. $\ln (1 - 3x + 3x^2 - x^3) \leq (x^2 - 2x) \ln (1 - x)$.
 142. $x \log_2 (x+4)^3 + \log_2 (x+4) < 9x + 3$.
 143. $x^2 \log_{\sqrt{3}} (2-x) + 18 \geq 2x^2 + \log_{\sqrt{3}} (2-x)^9$.
 144. $\log_5 (5-x)^4 < \log_3 (x+17) \log_5 (5-x)$.
 145. $\log_2 (11-x)^3 \geq \log_2 (11-x) \log_5 (x+11)$.
 146. $\frac{\log_{0,3} (x-3)}{\sqrt{-x^2+2x+8}} \geq 0$. 147. $\frac{1-\sqrt{1-2x-3x^2}}{\log_7 (9x+8)} \geq 0$.
 148. $\frac{\sqrt{x+1}}{3+\log_3 (1-2x-3x^2)} \leq 0$. 149. $\frac{\log_{0,3} |x-2|}{x^2-4x} < 0$.

Решить неравенства

150. $\log_x 1 > 2$. 151. $\log_x 1 < 2$. 152. $\log_x 4 < 2$.
 153. $\log_{x-1} 1 < 5$. 154. $\log_{\frac{1}{x}} 3 \geq -1$. 155. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$.
 156. $\log_{\frac{2x}{x-2}} 4 < -2$. 157. $\log_{|x|}^2 x^2 + 2 \log_4 x^2 \leq 10$.
 158. $\log_{|x|}^3 (-x)^4 + \log_3 (x+2)^2 < 70$. 159. $\log_x 2 - 2 \log_{2x} \frac{1}{2} \geq 2$.
 160. $\log_2 x - \log_x 32 \leq 4$. 161. $\log_{x-2} 27 + \log_3 (x-2) \geq 4$.
 162. $2 + \log_{\sqrt[3]{x}} 7 \leq \log_7 x$. 163. $\log_{2x} 8 + \log_x 4 > 2$.

164. $\log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\sqrt{x}} 3 \leq 2$. 165. $\log_{x+19} 4 \leq \log_2(x+19) - 1$.
 166. $\log_3(2x+9)^3 + \log_{2x+9} 9 \geq 7$. 167. $\log_{x+9} 7 \geq 6 + \log_7(x+9)^7$.
 168. $\frac{\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{x^8} - 2}{\log_{64} x^{12}} \geq -\frac{5}{\log_x 16}$. 169. $\frac{\log_{\frac{1}{3}} x^{-8} - 2}{\log_{27} x^{12}} \leq 4 - \frac{7}{\log_x 9}$.

Решить неравенства

170. $\log_x(x+4) \leq \log_x(2x+1)$.
 171. $\log_{x+1}(3-2x-x^2) \geq \log_{x+1}(1-3x)$.
 172. $\log_{x+2}(x^2-3x+2) > \log_{x+2}(x^2-2x)$.
 173. $\log_{\frac{1}{x}}(2,5x-1) \geq -2$. 174. $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1$.
 175. $\log_{x-3}(x-1) \leq 2$. 176. $\log_x(x^2-3x+1) \leq 2$.
 177. $\log_{x^2}(3-2x) < 1$. 178. $\log_{x-3}(x^2-4x-3) < 2$.
 179. $\log_{\frac{3}{x}} \frac{x-1}{2-x} \leq 1$. 180. $\log_{4-x} \frac{x+6}{(x-4)^2} \leq -2$.
 181. $\log_{5-x} \frac{x+7}{(x-5)^4} \leq -4$. 182. $\log_{6-x} \frac{x+5}{(6-x)^{12}} \geq -12$.
 183. $\log_{x-3}(x^2-4x-3) < 2$. 184. $\log_{1-\frac{1}{(1-x)^2}} \frac{x^2+5x+8}{2-3x+x^2} \leq 0$.
 185. $\frac{1}{\log_{7-2x}(5x-1)} \leq 1$. 186. $\frac{1}{\log_{3-2x}(5+x)} \leq 1$.
 187. $\frac{2}{\log_{x+4}(-9x)} \leq 1$. 188. $\frac{2}{\log_{x+14}(6-x)} \leq 1$. 189. $\frac{1}{\log_{x^2}(11-x)} \leq 2$.
 190. $\frac{1}{\log_{x-1}(15-7x)} \geq -1$. 191. $\frac{1}{\log_{x+1}(1-7x)} \leq -1$.
 192. $\frac{1}{\log_{4x^2}(2x+1,6)} \geq -2$. 193. $\log_x^2(x+2) \geq 4$.
 194. $\log_{x-2}^2(x+1) \geq \log_{x+1}^2(x-2)$. 195. $\log_{x-2} 3 < \log_{x+3} 3$.
 196. $\log_x(x-1) < \log_{x+1}(x-1)$. 197. $\log_{x+4}(x+3) \leq \log_{2x+6}(x+3)$.
 198. $\log_{2x+5}(3x+2) \geq \log_{x+3}(3x+2)$.

Решить неравенства

199. $\log_{\frac{1}{3}}(x+3) \log_3 x > \log_{x+3} x$.
200. $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \log_2 x \leq \log_{x-2} x$.
201. $\log_{1-\frac{1}{x}}(5-x) \cdot \log_{1-\frac{1}{x}}(x+6) \leq 0$.
202. $\log_{\frac{1}{x}}(3-x) \cdot \log_{x+2}(x+1) \geq 0$.
203. $\log_{1+x}(2-x) \cdot \log_{x+3}(x+4) \geq 0$.
204. $\log_x(x^3+1) \cdot \log_{x+1} x > 2$. 205. $x \log_{1+x}(15-2x-x^2) > 0$.
206. $(x-2) \log_{\frac{1}{x}}(2x+3) \leq 0$. 207. $x \log_x(x^2-3x+1) \leq 0$.
208. $x \cdot \log_{x+1} x \cdot \ln(5-3x-x^2) \geq 0$.
209. $(x-3) \cdot \log_{x+3} x \cdot \log_{x+3}(x+4) \geq 0$. 210. $\frac{\sqrt{81-x^2} \log_{5-x} x^2}{2-x} < 0$.
211. $\frac{(x-\sqrt{2}) \cdot \log_{0,5}(2x+3)}{\log_{x+2}(x+3)} \geq 0$. 212. $\frac{\log_{x-1}(x^2-3x+2)}{(x+1) \cdot \lg(x+4)} \leq 0$.

Решить неравенства

213. $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0$. 214. $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4 > 0$.
215. $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$. 216. $\log_2(1 + \log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x) < 1$.
217. $\log_3(\log_2(2 - \log_4 x) - 1) < 1$. 218. $\log_8 \left(\log_{\frac{1}{4}} \frac{1-x}{3x+8} \right) \leq \frac{1}{3}$.
219. $\log_{\sqrt[3]{3}} \left(\log_{\frac{1}{2}}(9x-1) \right) > 3$. 220. $\log_3 \left(\log_2^2 x - \frac{20}{\log_4 x} + 3 \right) \geq 2$.
221. $\log_{\frac{1}{2}}^2(-\log_2 x) + \log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)^2 < 3$.
222. $\log_2^2(-\log_2 x) - \log_2(\log_2 x)^4 \leq 5$.
223. $\log_3(9^{x-1} - 8 \cdot 3^{-x} + 2) > -x$.

$$224. \log_3 (9^x + 4^x - 3 \cdot 2^{1+x}) \geq 2x.$$

$$225. \log_4 (3^x - 1) \log_{\frac{1}{4}} \frac{3^x - 1}{16} \leq \frac{3}{4}.$$

$$226. \log_3^3 (27^x + x + 9) + x^2 \log_3 (27^x + x + 9)^4 \geq 3x \log_3^2 (27^x + x + 9) + 12x^3.$$

$$227. \log_4 (2^x - 2) \log_{\frac{1}{4}} \frac{2^x - 2}{1024} > \frac{9}{4}.$$

$$228. \log_3 (\log_2 (4^x - 6)) \geq 1. \quad 229. \log_2 (\log_3 (5^x - 4)) \leq 1.$$

$$230. \log_5 \left(\log_2 \frac{2^x - 11}{5 - 2^x} \right) < 1. \quad 231. 2 \log_3 (2^{2x} + 1) + \log_{4^x + 1} 9 > 5.$$

$$232. \log_5 \log_3 \log_2 (2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 10) > 0.$$

$$233. \frac{x - 3}{\log_2 (8 - 2^x) - 4} \leq 1. \quad 234. \frac{x + 2,5}{4 - \log_2 (4 - 2^{-x})} < \frac{1}{2}.$$

$$235. \frac{2x + 5}{\log_3 (9^x - 5) - 1} \leq 1. \quad 236. \log_{3^{x-1}} 27^{\frac{2}{x^2-x}} \geq \frac{x + 1}{(x - 1)^2}.$$

$$237. \log_{7^{x+\frac{1}{2}}} 49^{\frac{1}{x^2+x}} \geq \frac{2}{2x+1}. \quad 238. \log_{\sqrt{7}^{x-3}} 7^{\frac{5}{x^2-3x}} \leq \frac{x+3}{(x-3)^2}.$$

$$239. \log_{4^{2x-1}} \sqrt{2^{\frac{x-1}{x+2}}} \leq \log_{0,2^{x-0,5}} 25^{x-1}.$$

$$240. 2 \log_3^2 (2 \cos x) - 5 \log_3 (2 \cos x) + 2 \leq 0.$$

$$241. \log_3^3 (\cos x) - \log_2 (\cos x) \leq 0. \quad 242. \log_4^2 (\sin^2 x) + \log_2 (\sin x) < 0.$$

$$243. \log_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^2 (\sin x) + 3 \log_2 (\sin x) - 1 \geq 0.$$

$$244. \log_{\frac{2}{3}}^2 (\sin x) - \log_{\frac{3}{2}} (\sin x) - 2 < 0.$$

$$245. \log_2^2 (\cos^6 x) + 7 \log_{\sqrt{2}} (\cos x) > 2.$$

$$246. \log_5 (100 - x^2) + \log_{\frac{1}{2}} (100 - x^2) \geq \log_5 64 - 6.$$

$$247. \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)^2 + \log_2 (x + 1)^2 \leq \log_3 2 - 1.$$

$$248. \frac{21^x}{\ln(3-x)^9} \geq \frac{(3,5 \cdot 2^x)^x}{\ln(x-3)^4}.$$

$$249. \sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2. \quad 250. 25^{\log_2 |x|} + 4 \cdot 5^{\log_2 x^2} < 5^{1+\log_2 (2x+3)}.$$

$$251. 3^{1+\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} \leq 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}.$$

$$252. \log_{|x-1|} 0,5 > 0,5. \quad 253. \log_{|x|}(x^2 - 5x) \leq 1.$$

$$254. \log_{|x-4|}(2x^2 - 9x + 4) > 1. \quad 255. \log_{|x|}(x^2 + 3x - 10) \leq 1.$$

$$256. \log_{|x-2|}(x^2 + 2x - 11) \leq 2. \quad 257. \log_{|x|-1}(21x - 18 - 3x^2) \leq 2.$$

$$258. \log_{\frac{1}{2}} \left| \frac{x+2}{x} \right| > 2. \quad 259. \log_2 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leq 1.$$

$$260. \lg \frac{x^3}{|x-12|} \geq \lg \frac{|x-12|}{x}. \quad 261. \log_5^2 x + |\log_5 x - 2| < 4.$$

$$262. 6^{\ln(x^2-3x)} \leq |8-x|^{\ln 6}. \quad 263. 4^{\lg(x^2-3x)} \leq |3-x|^{\lg 4}.$$

$$264. 5^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x)} \geq |2-3x|^{\log_{\frac{1}{2}} 5}. \quad 265. |8x-x^2|^{\log_3 7} \geq 7^{\log_3(2x-7)}.$$

$$266. \left| 2 + \log_{\frac{2}{3}}(2-x) \right| - \log_{\frac{1}{3}}(2-x) \geq 3 + \left| 3 - \log_{\frac{1}{3}}(2-x) \right|.$$

$$267. \frac{|\log_9(2x+1)|-2}{\log_3 \sqrt{2x+1}+1} < -1. \quad 268. \left| 2 - \log_2 \frac{4}{x+2} \right| < 2 - \left| \log_{\frac{1}{2}}(x+2) \right|.$$

$$269. |\log_3 x| < \left| \log_3 \frac{x}{9} \right|. \quad 270. \left| \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 6 \right| - \left| \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{x} + 1 \right| < 7.$$

$$271. |\log_3 |2x-3|| \leq \log_3(3x-2). \quad 272. |\log_2(x+8)| > \log_2|x-8|.$$

Ответы к заданиям § 9

1. $(1; 28]$. 2. $(-\frac{17}{2}; +\infty)$. 3. $(\frac{5}{8}; +\infty)$. 4. $(\frac{1}{5}; \frac{2}{5})$.
5. $(-\frac{5}{4}; 5, 5]$. 6. $(50; +\infty)$. 7. $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.
8. $(1; 2) \cup (3; 4)$. 9. $(2; 3)$. 10. $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.
11. $[1; 3]$. 12. $(-\infty; 2) \cup (9; +\infty)$. 13. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
14. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. 15. $[-1; 1) \cup (3; 5]$. 16. $(-3; 1)$.
17. $(-\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{17}}{2}; +\infty)$. 18. $(\frac{5-\sqrt{41}}{2}; 0) \cup (5; \frac{5+\sqrt{41}}{2})$.
19. $(-\frac{4}{5}; 0) \cup (4; +\infty)$. 20. $(3; +\infty)$. 21. $(-3; 2 - \sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}; +\infty)$.
22. $(2 - 2\sqrt{2}; 0) \cup (3; 2 + 2\sqrt{2})$. 23. $(-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$. 24. $(4; 6)$.
25. $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. 26. $(-\infty; -15] \cup (-\frac{1}{7}; +\infty)$. 27. $(-3; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$.
28. $(1; +\infty)$. 29. $(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 3)$. 30. $(0; \frac{4}{3}] \cup (3; +\infty)$. 31. $(1; 2]$. 32. $(0; 1]$.
33. $(0; 3]$. 34. $(1; \frac{3}{2})$. 35. $(1; 2 + \sqrt{5})$. 36. $[2; 4)$. 37. $(0, 5; 2)$.
38. $(\frac{3}{2}; \frac{254}{159}]$. 39. $(2; 1 + \sqrt{3}]$. 40. $(-1; +\infty)$. 41. $[-\frac{14}{9}; -1)$.
42. $(1; \frac{11-\sqrt{17}}{4}] \cup [\frac{11+\sqrt{17}}{4}; +\infty)$. 43. $(-\infty; -\frac{21}{2}) \cup (-\frac{10}{3}; 0]$.
44. $(-\frac{31}{2}; -5) \cup (0; +\infty)$. 45. $[-\frac{5}{2}; -\frac{4}{3}) \cup (0; 6]$. 46. $[1; 2]$.
47. $(-1; 2 - \sqrt{5}]$. 48. $(1; \frac{3}{2})$. 49. $(-\infty; 0]$. 50. $(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}) \cup [2; \infty)$.
51. $[11; \infty)$. 52. $[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}) \cup (1; \infty)$. 53. $[-3; -1) \cup (0; 15]$.
54. $[\frac{1}{7}; \frac{3}{7})$. 55. $(-\infty; -\frac{5}{4}) \cup [3; +\infty)$. 56. $[-3; -\frac{7}{3}) \cup (1; 5]$.
57. $[-1; 0) \cup (0; \frac{3}{4}]$. 58. $[-2; 0) \cup (0; \frac{3}{2})$. 59. $(-7; -6] \cup [3; 6) \cup (6; +\infty)$.
60. $(0; 3] \cup [9; +\infty)$. 61. $[0, 5; 4]$. 62. $(0, 2; 25)$. 63. $(0, 01; 10]$.
64. $(2; 32)$. 65. $[3; 42]$. 66. $(-\frac{1}{2}; 3)$. 67. $(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{3}) \cup (-2; 11)$.
68. $(-\frac{5\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{31}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{31}; \frac{5\sqrt{5}}{2})$. 69. 0 . 70. $(0; \frac{1}{3}) \cup [9; +\infty)$.
71. $(\frac{5\sqrt{4}}{16}; 16)$. 72. $(-\frac{\sqrt{21}}{3}; -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}; \frac{\sqrt{21}}{3})$. 73. $(0; \frac{1}{16}) \cup (4; 8)$.
74. $(0; 3) \cup (9; +\infty)$. 75. $(1; 4) \cup \{16\}$. 76. $(-\infty; -9998] \cup (-8; 1) \cup [1, 9; 2)$.
77. $[-\frac{5}{4}; \frac{\sqrt{2}-6}{4}) \cup [-\frac{1}{2}; +\infty)$. 78. $(0; \frac{1}{125}] \cup [5; 25) \cup (25; +\infty)$.
79. $(0; \frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{8}; \frac{1}{2}) \cup [16; +\infty)$. 80. $(0; \frac{1}{27}) \cup \{\frac{1}{3}\} \cup (1; +\infty)$.
81. $(0; 1) \cup \{4\} \cup (8; +\infty)$. 82. $(0; \frac{1}{27}) \cup \{\frac{1}{9}\} \cup (1; +\infty)$. 83. $(0; \frac{\sqrt{2}}{2}] \cup (1; 8) \cup (8; +\infty)$.
84. $[\frac{3\sqrt{9}}{3}; 1) \cup (3\sqrt{3}; 9]$. 85. $(0; 1) \cup \{2\sqrt{2}\} \cup (16; +\infty)$.
86. $(-\infty; 2 - \sqrt{5}) \cup (2 + \sqrt{5}; 10)$. 87. $(-\frac{7}{3}; -2) \cup [\frac{2}{3}; 1) \cup (\frac{8}{3}; 3]$.
88. $(-\frac{11}{3}; -\frac{10}{3}) \cup [1; \frac{5}{4}) \cup (3; \frac{13}{4}]$. 89. $(-9; -2) \cup [-\frac{1}{2}; 2 - \sqrt{6}) \cup$

- $(2 + \sqrt{6}; \frac{9}{2})$. **90.** $[-\frac{11}{8}; -1)$. **91.** $(-\frac{5}{2}; -2) \cup [\frac{8}{3}; 13)$. **92.** $(8; \frac{43}{3})$.
93. $(1; \frac{6}{5})$. **94.** $(-\infty; 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 + 2\sqrt{2}; 11, 2) \cup (20; 21)$.
95. $(-\frac{5}{3}; \sqrt{6} - 2] \cup (2; \frac{\sqrt{29}-1}{2})$. **96.** $(7; \frac{15+\sqrt{57}}{2}]$. **97.** $(1; 1, 2)$.
98. $(-1; -\frac{5}{8}) \cup (\frac{3-\sqrt{29}}{4}; -\frac{1}{2})$. **99.** $(0; 2 - \sqrt{3}) \cup [2 + \sqrt{3}; +\infty)$.
100. $(-\sqrt{13}; 0) \cup (\sqrt{13}; +\infty)$. **101.** $\{0\} \cup [7; +\infty)$. **102.** $\{0\} \cup [\frac{5}{2}; +\infty)$.
103. $(-\infty; -1]$. **104.** $(4; +\infty)$. **105.** $(0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}; 1)$. **106.** $[6; +\infty)$.
107. $(0; \frac{1}{2}]$. **108.** $(-\infty; 2 - \sqrt{3}] \cup (1; \frac{3}{2})$. **109.** $(-\infty; -1 - \sqrt{6}] \cup (1; \sqrt{6} - 1]$. **110.** $[2; +\infty)$. **111.** $[4 - \sqrt{5}; 2] \cup [4 + \sqrt{5}; +\infty)$.
112. $(0; \frac{1}{7}) \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}; 1)$. **113.** $(0; \frac{\sqrt{7}}{7}) \cup [\frac{2}{3}; 1)$. **114.** $(0; \frac{1}{3}) \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$.
115. **2.** **116.** $(-3; -1) \cup (-1; 1)$. **117.** $(-5; 1) \cup (1; 3)$. **118.** $(1; 3) \cup (3; 5)$.
119. $(-7; -4) \cup (-4; -1)$. **120.** $(-3; 1) \cup (1; 2)$. **121.** $(-1; 2) \cup (2; 4)$.
122. $(-2; 2) \cup (2; 4)$. **123.** $(1; 4) \cup (4; 5)$. **124.** $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.
125. $(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$. **126.** $(-3; -2\sqrt{2}) \cup (3; +\infty)$.
127. $(0; \frac{1}{3}]$. **128.** $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 1]$. **129.** $(8; 9]$.
130. $(-6; -5) \cup (-4; 3)$. **131.** $[-5; 4]$. **132.** $(-11; -10] \cup [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$.
133. $(-1; 0] \cup [\sqrt{14}; +\infty)$. **134.** $[-2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}] \cup [5; 6)$.
135. $(-7; -6] \cup [-4; 4]$. **136.** $(-10; -4\sqrt{6}) \cup [-9; 4\sqrt{6}]$. **137.** 4 .
138. $(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (0; \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (2; 3)$. **139.** $(-6; -5] \cup [16; 116]$.
140. $(-1; 0] \cup [3; +\infty)$. **141.** $(-\infty; -1] \cup [0; 1)$. **142.** $(-\frac{1}{3}; 4)$.
143. $(-\infty; -3] \cup [-1; 2)$. **144.** $(4; 5)$. **145.** $(-11; 10]$. **146.** $(3; 4)$.
147. $(-\frac{7}{9}; -\frac{2}{3}] \cup [0; \frac{1}{3}]$. **148.** $(-1; -\frac{3+\sqrt{35}}{9}) \cup (\frac{\sqrt{35}-3}{9}; \frac{1}{3})$.
149. $(-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$. **150.** $\emptyset$. **151.** $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.
152. $(0; 1) \cup (2; +\infty)$. **153.** $(1; 2) \cup (2; +\infty)$. **154.** $(0; 1) \cup [3; +\infty)$.
155. $(1; +\infty)$. **156.** $(-2; -\frac{2}{3})$. **157.** $[-8; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 8]$.
158. $(-29; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 25)$. **159.** $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}] \cup (1; 2]$.
160. $(0; \frac{1}{2}] \cup (1; 32]$. **161.** $(3; 5] \cup [29; +\infty)$. **162.** $[\frac{1}{7}; 1) \cup [343; +\infty)$.
163. $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (1; 4)$. **164.** $(0; 1) \cup [\sqrt{3}; 3] \cup [9; +\infty)$.
165. $[-18, 5; -18) \cup [-15; +\infty)$. **166.** $(-4; \frac{\sqrt[3]{3}-9}{2}] \cup [0; +\infty)$.
167. $(-9; -\frac{62}{7}] \cup (-8; \sqrt[7]{7} - 9]$. **168.** $[\frac{1}{4}; 1) \cup [\sqrt[5]{4}; +\infty)$.
169. $(0; 3^{\frac{2-\sqrt{11}}{7}}] \cup (1; 3^{\frac{2+\sqrt{11}}{7}}]$. **170.** $(0; 1) \cup [3; +\infty)$. **171.** $(0; \frac{1}{3})$.

172. $(-1; 0)$. 173. $[\frac{1}{2}; 1) \cup [2; +\infty)$. 174. $(\frac{1}{2}; 1)$. 175. $(3; 4) \cup [5; +\infty)$.
 176. $(0; \frac{1}{3}] \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$. 177. $(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \frac{3}{2})$.
 178. $(2 + \sqrt{7}; 6)$. 179. $(1; \sqrt{7} - 1]$. 180. $(-6; -5] \cup (3; 4)$.
 181. $(-7; -6] \cup (4; 5)$. 182. $[-4; 5)$. 183. $(2 + \sqrt{7}; 6)$. 184. $[-\frac{3}{4}; 0) \cup (2; +\infty)$.
 185. $(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}) \cup [\frac{8}{7}; 3) \cup (3; \frac{7}{2})$. 186. $(-5; -4) \cup [-\frac{2}{3}; 1) \cup (1; \frac{3}{2})$.
 187. $(-4; -3) \cup (-3; -1) \cup (-\frac{1}{9}; 0)$. 188. $(-14; -13) \cup (-13; -10) \cup (5; 6)$.
 189. $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 5,5] \cup (10; 11)$. 190. $(1; 2) \cup (2; \frac{15}{7})$.
 191. $(-1; -\frac{6}{7}]$. 192. $(-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; -\frac{3}{10}) \cup [\frac{\sqrt{41}-4}{10}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$.
 193. $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1) \cup (1; 2]$. 194. $[\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 3) \cup (3; +\infty)$. 195. $(2; 3)$.
 196. $(1; 2)$. 197. $(-3; -2,5) \cup \{-2\}$. 198. $(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}]$. 199. $(0; 1)$.
 200. $(3; +\infty)$. 201. $(-6; -5] \cup [4; 5)$. 202. $(0; 1) \cup [2; 3)$. 203. $(0; 1)$.
 204. $(2; +\infty)$. 205. $(-1; 0) \cup (0; \sqrt{15} - 1)$. 206. $(0; 1) \cup [2; +\infty)$.
 207. $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3]$. 208. 1. 209. $(0; 1] \cup [3; +\infty)$. 210. $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 4)$.
 211. $(-\frac{3}{2}; -1) \cup (-1; \sqrt{2}]$. 212. $(2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$. 213. $(1; \sqrt[3]{5})$.
 214. $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$. 215. $(4; 10)$. 216. $(\frac{1}{3}; 3)$. 217. $(4^{-14}; 1)$.
 218. $(-\frac{7}{4}; \frac{8}{19}]$. 219. $(\frac{1}{9}; \frac{1}{8})$. 220. $(0; 1) \cup [16; +\infty)$. 221. $(\frac{1}{256}; \frac{\sqrt{2}}{2})$.
 222. $[2^{-32}; 2^{-\frac{1}{2}}]$. 223. $(1; +\infty)$. 224. $[1 + \log_2 3; +\infty)$.
 225. $(0; 1] \cup [2; +\infty)$. 226. $[-9; +\infty)$. 227. $(2; 1 + \log_2 257)$.
 228. $[\log_4 14; +\infty)$. 229. $(1; \log_5 13)$. 230. $(\log_2 \frac{57}{11}; 3)$.
 231. $(-\infty; \log_4 (\sqrt{3} - 1)) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$. 232. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
 233. $[3 - \log_2 3; 3)$. 234. $(-2; -1)$. 235. $(\log_3 \sqrt{5}; 3 \log_3 \sqrt{2})$.
 236. $(-\infty; -3] \cup (0; 1) \cup (1; 2]$. 237. $(-\infty; -2] \cup (-1; -\frac{1}{2}) \cup (0; 1]$.
 238. $[-5; 0) \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$. 239. $[-\frac{33}{16}; -2) \cup (\frac{1}{2}; 1]$.
 240. $[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k]$. 241. $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k] \cup [\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup \{2\pi k\}$.
 242. $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$. 243. $(2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k] \cup [\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$.
 244. $(\arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k; \pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi k)$. 245. $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k) \cup (\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$.
 246. $(-10; -6] \cup [6; 10)$. 247. $[-\frac{\sqrt{2}+2}{2}; -1) \cup (-1; \frac{\sqrt{2}-2}{2}]$. 248. $[\log_2 3 - 1; 2) \cup (2; 3)$.
 249. $(0; \frac{1}{4}) \cup (4; +\infty)$. 250. $(-1; 0) \cup (0; 3)$. 251. $[-1; 0) \cup (0; 3]$.

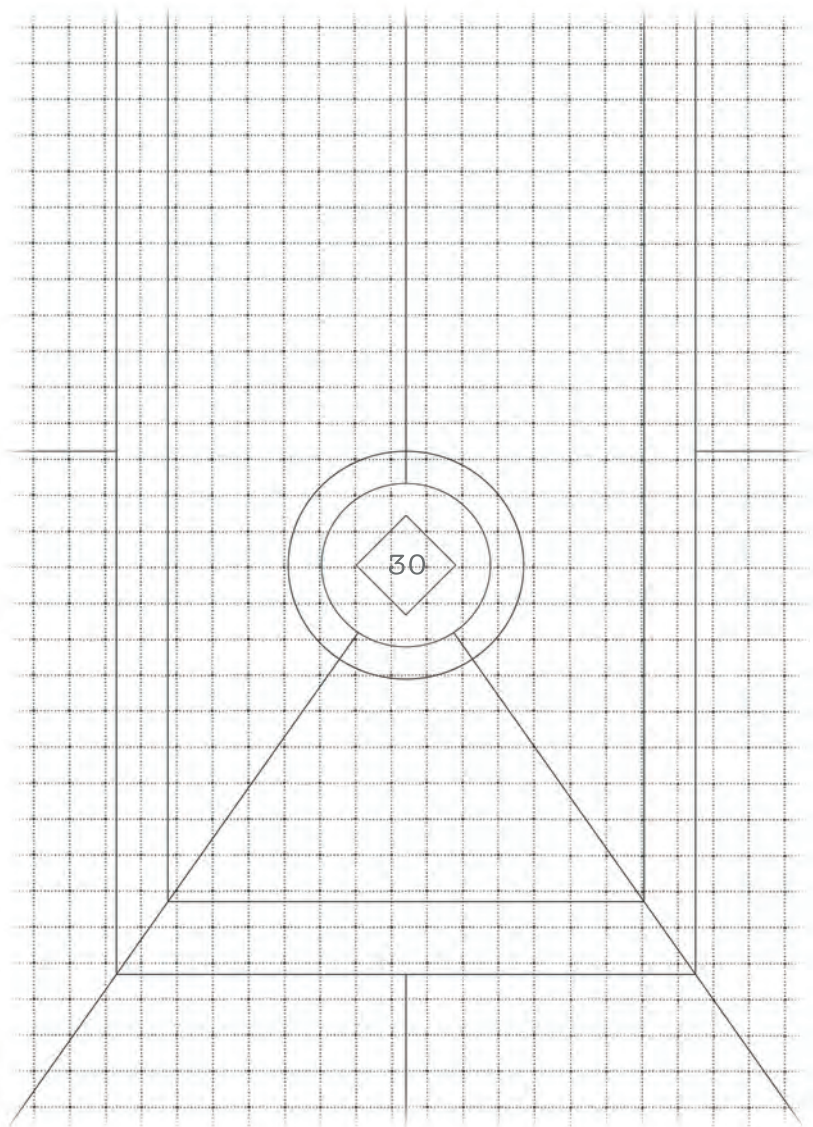
- 252.** $(0; \frac{3}{4}) \cup (\frac{5}{4}; 2)$. **253.** $(-1; 0) \cup (5; 6]$. **254.** $(-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$.
255. $[-2 - \sqrt{14}; -5) \cup (2; \sqrt{11} - 1]$. **256.** $(-\infty; -1 - 2\sqrt{3}) \cup [2, 5; 3)$.
257. $(1; 2) \cup [4, 75; 6)$. **258.** $(-\frac{8}{3}; -2) \cup (-2; -\frac{8}{5})$. **259.** $(-\infty; -3] \cup$
 $[-\frac{1}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$. **260.** $[3; 12) \cup (12; +\infty)$. **261.** $(\frac{1}{5}; 25)$.
262. $[-2; 0) \cup (3; 4]$. **263.** $[-1; 0)$. **264.** $[-2; 0) \cup (2; \frac{5+\sqrt{17}}{2}]$.
265. $(\frac{7}{2}; 7] \cup [5 + 3\sqrt{2}; +\infty)$. **266.** $(-\infty; -7] \cup [\frac{17}{9}; 2)$. **267.** $(-\frac{4}{9}; 1)$.
268. $(-\frac{3}{2}; 0)$. **269.** $(0; 3)$. **270.** $(0; \sqrt{27})$. **271.** $[1; \frac{7}{6}] \cup [\frac{5}{3}; +\infty)$.
272. $(-8; -3\sqrt{7}) \cup (0; 8) \cup (8; +\infty)$.

Литература

- [1] ЕГЭ 2014. Математика. Типовые тестовые задания. 10 вариантов / Под ред. А. Л. Семёнова, И. В. Яценко. — М.: Экзамен, 2014.
- [2] ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 10 вариантов. Типовые тестовые задания / Под ред. И. В. Яценко. — М.: Экзамен, 2019.
- [3] ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / Под ред. И. В. Яценко. — М.: Экзамен, МЦНМО, 2020.
- [4] ЕГЭ – 2019. Математика. 30 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену. Профильный уровень / Под ред. И. В. Яценко. — М.: АСТ – Астрель, 2018.
- [5] ЕГЭ. Математика. 3300 задач с ответами. Профильный уровень. Закрытый сегмент / Под ред. И. В. Яценко. — М.: Экзамен, 2016.
- [6] Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебраический тренажёр. — Киев: А.С.К., 1997.
- [7] Моденов П. С., Новосёлов С. И. Пособие по математике для поступающих в вузы. — М.: МГУ, 1963.
- [8] Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Математика. Пособие для поступающих в ВУЗы. — М.: «Экзамен», 1999. — 256 с.
- [9] Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10 – 11 классов. — М.: Экзамен, 1998.
- [10] Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В. Конкурсные задачи по математике. Справочное пособие. — М.: Наука, 1992.

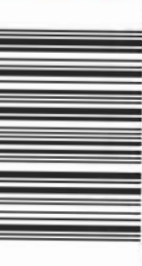
-
- [11] Пратусевич М. Я., Столбов К. М., Головин А. Н. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углублённый уровень. — М.: Просвещение, 2019.
- [12] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. — М., Мир, 1977.
- [13] Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Учебн. пособие / Под ред. М. И. Сканави. — 4-е изд. — М.: Высшая школа, 1980.
- [14] Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. — М.: Наука, 1983.
- [15] ALEXLARIN.NET. — <http://alexlarin.net/>.
- [16] BEEGEEK. Школа дистанционной подготовки. — <https://stepik.org/org/beegeek>.
- [17] Математика От-А-До-С. — https://vk.com/matematika_ot_a.
- [18] ФИПИ. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике. — <http://www.fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory/>.
- [19] ФИПИ. Открытый банк заданий ЕГЭ. — <http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege/>.
- [20] Яценко И. В. Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике. Стрим от 13.04.2020. — https://vk.com/video260491632_456239028/.

Для заметок





ISBN 978-5-0051-6907-5



STRAYED MOPPET

$(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
 $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$