ПОСОБИЕ ДЛЯ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Издание второе, стереотипное

Под редакцией академика РАН
В.А. Садовничего

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2017

УДК 514.1
ББК 22.151
П 37

Авторский коллектив:
Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Шестаков С.А.,
Юдина И.И.

Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики / Под ред. акад. В.А. Садовничего. — 2-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 488 с. — ISBN 978-5-9221-1743-2.

В настоящем пособии дается систематическое изложение углубленного курса планиметрии. Наряду с основными геометрическими сведениями, входящими в стандартную школьную программу по геометрии, содержится большой дополнительный материал, расширяющий и углубляющий основные сведения. Стиль изложения, принятый в пособии, заметно отличается от традиционного теорема–доказательство. В ряде случаев авторы не формулируют теоремы и аксиомы заранее, а ищут их формулировки вместе с читателем. Такой подход объясняется желанием авторов дать представление о том, как строится математика и как работают математики.

В книге значительное внимание уделяется геометрии Лобачевского, кривым постоянной ширины, изопериметрическим задачам, доказывается целый ряд замечательных теорем планиметрии.

Пособие ориентировано на учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, а также всех, кого привлекает красота геометрии. Оно может использоваться в классах с углубленным изучением математики, в работе математических кружков и факультативов, служить основным учебником в школах физико-математического профиля.

Книга подготовлена под научным руководством академика РАН В. А. Садовничего в рамках программы «МГУ — школе»

ISBN 978-5-9221-1743-2

Предисловие

Настоящее пособие ориентировано на учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, и предназначено, прежде всего, для классов с углубленным изучением математики, для математических кружков и факультативов. Оно состоит из 13 глав, соответствующих главам учебника «Геометрия 7–9» Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.Г. Позняка, И.И. Юдиной (М.: Просвещение, 1990 г. и последующие издания). Вместе с тем пособие вполне автономно, что позволяет использовать его как в тех классах, где преподавание геометрии ведется по другим учебникам, так и в качестве основного учебника в школах физико-математического профиля.

Следует отметить, что стиль изложения, принятый в пособии, отличается от традиционного: теорема — доказательство. В ряде случаев мы не формулируем теоремы и аксиомы заранее, а ищем их формулировки вместе с читателем. Такой подход объясняется желанием авторов дать представление о том, как строится математика и как работают математики.

В пособии наряду с основными геометрическими сведениями, входящими в стандартную школьную программу по геометрии, содержится большой дополнительный материал, расширяющий и углубляющий основные сведения. В частности, значительное внимание уделяется теории параллельных прямых и дается представление о связанной с ней геометрии Лобачевского. Так, уже в первой главе наряду с традиционным материалом, относящимся к начальным геометрическим сведениям, вводится понятие параллельных прямых, рассматриваются признаки параллельности прямых и обсуждается вопрос о существовании квадрата.

Вторая глава посвящена изучению тех свойств треугольников, которые справедливы как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского (т.е. в абсолютной геометрии). Здесь рассматриваются разнообразные (в том числе нетрадиционные) признаки равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольника, свойства серединного перпендикуляра к отрезку и биссектрисы угла, взаимное расположение прямой и окружности и двух окружностей, теорема об окружности, вписанной в треугольник, задачи на построение.

В третьей главе изучаются параллельные прямые. Здесь рассматриваются аксиомы и основные понятия геометрии, приводятся примеры решения задач на основе аксиом, подробно обсуждается связь между аксиомой параллельных прямых, фактом существования квадрата, пятым постулатом Евклида и связанной с ним задачей о построении треугольника по стороне и двум прилежащим углам. Здесь же впервые заходит речь о геометрии Лобачевского.

Четвертая глава существенно расширяет и углубляет геометрические сведения о треугольниках. Здесь практически единым рассуждением одновременно доказываются теорема о сумме углов треугольника и две теоремы о средней линии треугольника (свойство и признак), весьма подробно обсуждается специфика геометрии Лобачевского (например, объясняется, почему в этой геометрии имеет место признак равенства треугольников по трем углам), приводятся доказательства теорем о замечательных точках треугольника и об окружности, описанной около треугольника.

В пятой главе наряду с традиционным изучением параллелограмма и трапеции рассматриваются замкнутые выпуклые линии, вписанные и описанные по отношению к ним многоугольники, характеристические свойства некоторых четырехугольников (например, выпуклого четырехугольника), доказываются теорема Жордана (о внутренней области многоугольника), теоремы Вариньона и Гаусса.

В шестой главе, посвященной измерению площадей, вводятся понятия равновеликих и равносоставленных многоугольников и в связи с этим рассматривается ряд задач на разрезание многоугольников, а также приводится доказательство теоремы Бойяи–Гервина. Здесь же представлены задачи о площадях некоторых фигур, расположенных на целочисленной решетке. Особого внимания заслуживает теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу: с ее помощью удается построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины (причем как на евклидовой плоскости, так и на плоскости Лобачевского), вывести формулу Герона, дать три нетрадиционных доказательства теоремы Пифагора (всего в главе приведено девять различных доказательств этой теоремы), а позже (в главе «Окружность») вывести формулу, выражающую площадь треугольника через его стороны и радиус описанной окружности, что, в свою очередь, позволяет дать простое доказательство теоремы синусов в ее усиленной формулировке.

В седьмой главе рассматриваются разнообразные (в том числе нетрадиционные) признаки подобия треугольников, тригонометрические функции острого угла, обобщенная теорема Фалеса, теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике, теоремы Чевы и Менелая, ряд теорем о свойствах замечательных точек треугольника.

Восьмая глава посвящена изучению углов, связанных с окружностью, и примыкающих к этой теме теорем (например, теоремы Паскаля о вписанном шестиугольнике). Здесь же рассказывается о кривых постоянной ширины, что выходит за рамки обычной школьной геометрии.

Изложение темы «Векторы» в девятой главе отличается от традиционного, главным образом, пунктуальностью при доказательстве теорем, в частности, дано обоснование транзитивности сонаправленности.

В десятой главе рассматриваются вопросы, так или иначе связанные с методом координат: уравнения прямой и окружности, радикальная ось и радикальный центр, теорема Брианшона для описанного шестиугольника, построение касательной при помощи одной линейки.

В одиннадцатой главе выводятся теоремы синусов и косинусов, основные тригонометрические формулы, изучаются свойства скалярного произведения и в связи с этим доказывается ряд классических теорем геометрии (Эйлера, Лейбница, Морлея, Брахмагупты и др.).

В двенадцатой главе вводятся понятия длины линии (в частности, окружности), площади фигуры (в частности, круга), рассматриваются теорема Барбье, первый замечательный предел и изопериметрическая задача.

Последняя, тринадцатая глава книги посвящена изучению геометрических преобразований (движений, центрального подобия и инверсии) и их использованию при решении задач и доказательстве теорем, в том числе: при решении задачи Аполлония, при доказательстве теорем Наполеона, Птолемея, Фейербаха, теорем о прямой Симсона, о прямой и окружности Эйлера, об окружностях Аполлония, при выводе формулы Эйлера. Приложения в конце книги существенно расширяют и углубляют сведения учащихся о геометрии Лобачевского и теории вещественных чисел.

В каждой главе по мере изложения теоретического материала даются задачи с решениями, иллюстрирующие применение тех или иных утверждений. К каждому параграфу главы даны задачи для самостоятельной работы, снабженные ответами и указаниями. Наиболее трудные задачи и разделы отмечены звездочкой. Имеется также предметный указатель, позволяющий легко ориентироваться в книге.

Мы надеемся, что наша книга окажется интересной не только для учителей и учеников из классов с углубленным изучением математики, но и для всех, кого привлекает красота геометрии.

Авторы

Глава 1

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Точки, прямые, отрезки

1. Точка. Что такое *точка*? Наверное каждый ответит, что это нечто совсем маленькое. Возьмем остро отточенный карандаш и прикоснемся им к бумаге (рис. 1). Получим изображение точки. Это действительно только изображение точки, а сама точка еще меньше. Если мы посмотрим на рисунок 1 в увеличительное стекло, то увидим, что наша точка довольно большая. Есть предметы, которые вообще не видны невооруженным глазом, их можно увидеть только в микроскоп (например, бактерии). Но и это еще не точки. Бактерии хотя и маленькие, но имеют размеры. Точки же не имеют размеров, настолько они малы. В окружающем нас мире таких объектов, разумеется, нет. И все же каждый из нас отчетливо представляет, что такое точка — это геометрическая фигура, не имеющая размеров.

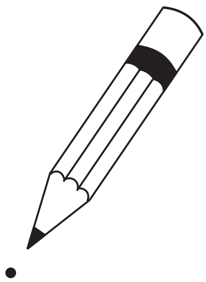


Рис. 1. Изображение точки

Обычно точки обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B и т. д. Точка — самая простая геометрическая фигура.

2. Прямая линия. Что такое *линия*? Можно сказать так: линия — это геометрическая фигура, не имеющая ширины.

Прямая дорога в степи, уходящая за горизонт, дает представление о *прямой* линии. Как и дорога, прямая линия представляется нам безграничной.

На рисунке мы не можем изобразить всю прямую линию. Но часть ее изобразить можно. Для этого надо взять линейку, приложить ее к бумаге и провести вдоль края линейки карандашом (рис. 2).

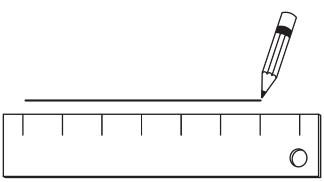


Рис. 2. Изображение прямой

Этим способом изображения прямых пользуются, например, в черчении. Как правило, прямые обозначаются малыми латинскими буквами: a, b и т. д.

На рисунке 3 изображена линия. Эта линия искривленная. Когда мы говорим о прямой, то представляем себе линию, не имеющую искривлений.

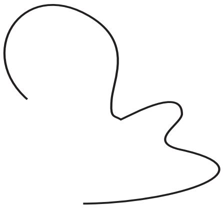


Рис. 3. Изображение линии

Отметим на листе бумаги две точки — A и B. Через точки A и B с помощью линейки проведем линию. Затем перевернем линейку (перевернутая линейка на рисунке 4 изображена пунктиром) и снова через точки A и B проведем линию. Если обе линии совпадают, то линейка не искривлена. Если же проведенные таким способом линии не совпадают, то этот край линейки искривлен и не пригоден для проведения прямых линий.

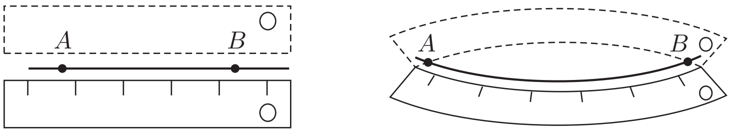


Рис. 4

Тем самым мысль о том, что прямая линия не имеет искривлений, можно выразить такой фразой:

через любые две точки [1] *проходит прямая и притом только одна* (рис. 5).

Рис. 5. Через две точки A и B проходит только одна прямая

Если на прямой отмечены две точки, обозначенные, например, буквами A и B, то прямую можно обозначить этими двумя буквами: AB или BA (рис. 5).

Две прямые могут пересекаться, т. е. иметь общую точку, а могут не пересекаться. На рисунке 6 прямые p и q пересекаются, а прямые a и b не пересекаются. Если две прямые не пересекаются, то они называются *параллельными*. Иногда вместо слов «прямые a и b параллельны» используют следующее обозначение: $a \parallel b$.

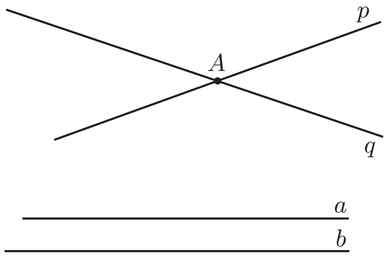


Рис. 6. Прямые p и q пересекаются в точке A. Прямые a и b не пересекаются, они параллельны

Прямые p и q на рисунке 6 пересекаются в точке A. Но, может быть, они пересекаются еще в одной точке? Конечно, нет! В другой

[1] Говоря «две точки», «три прямые» и т. д., мы считаем, что эти точки, прямые и т. д. различны.

точке B прямые p и q пересекаться не могут — тогда через точки A и B проходили бы две прямые, а этого не может быть. Теперь совершенно ясно, что

две прямые могут пересекаться только в одной точке.

Обратите внимание на то, что это свойство прямых мы установили путем рассуждений. Такие рассуждения называются *доказательством*. Мы доказали, что две прямые могут пересекаться только в одной точке.

Как уже отмечалось, прямые a и b, изображенные на рисунке 6, не пересекаются, т. е. параллельны. А можно ли это проверить? Это трудный вопрос. Ведь на рисунке изображены только части прямых a и b. Полностью их изобразить невозможно, так как прямые безграничны. А, может быть, и вообще нет параллельных прямых, т. е. любые две прямые пересекаются? На этот вопрос мы пока не можем ответить, но постараемся ответить тогда, когда будем знать больше о свойствах геометрических фигур. С подобной ситуацией нам предстоит столкнуться неоднократно. Поэтому советуем Вам завести специальный блокнот, чтобы записывать туда все вопросы — и те, которые возникнут у Вас, и те, на которые мы обратим Ваше внимание. В качестве первого мы рекомендуем записать такой вопрос:

есть ли параллельные прямые?

Рассмотрим на прямой a какие-нибудь три точки: A, B и C (рис. 7). Из этих точек только одна (в данном случае B) лежит между двумя другими (между A и C). Таким образом,

из любых трех точек прямой только одна лежит между двумя другими.

На первый взгляд кажется, что это, вроде бы, очевидное свойство можно не выделять. Но посмотрите на рисунок 8, где изображена окружность (замкнутая линия) и три точки A, B и C на ней. Можно ли сказать, что из трех точек на окружности только одна лежит между двумя другими? Конечно, нет! Наоборот, каждая из трех точек на окружности (а также на любой замкнутой линии, рис. 9) лежит между двумя другими.

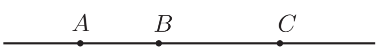


Рис. 7. Точка B лежит между точками A и C

Сказанное можно проиллюстрировать таким примером: если трое ребят сидят за круглым столом, то каждый из них сидит между двумя другими. Но если они сидят на скамейке, то только один из них сидит между двумя другими. Теперь понятно, в чем дело: выделенное нами свойство прямой указывает на то, что *прямая — незамкнутая линия*.

Иногда вместо слов «точка B лежит между точками A и C» используют слова «точки A и C лежат по разные стороны от точки B» или «точки A и B лежат по одну сторону от точки C».

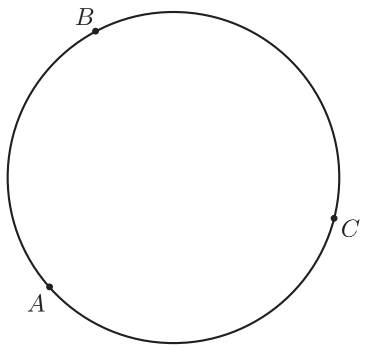


Рис. 8. Каждая из трех точек A, B и C на окружности расположена между двумя точками

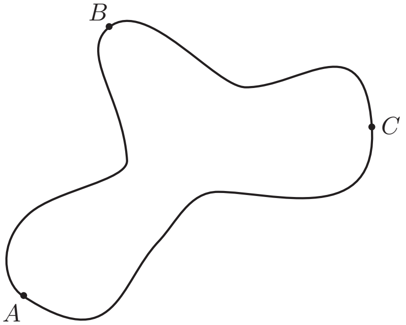


Рис. 9. Каждая из трех точек на любой замкнутой линии лежит между двумя другими точками

3. Луч и отрезок. Любая точка O прямой разделяет ее на две части (рис. 10). Каждая из этих частей называется *лучом, исходящим из точки O — начала луча*. Отметим очевидное свойство двух лучей, на которые прямая разделяется точкой O:

любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O.

Рис. 10. Точка O разделяет прямую на два луча. Один из них выделен жирной линией

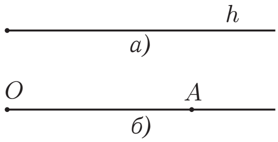


Рис. 11

Обычно луч обозначают либо малой латинской буквой (например, луч h на рисунке 11, *а*), либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на этом луче (например, луч OA на рисунке 11, *б*).

Обратимся к рисунку 7, на котором изображены два луча с общим началом (BA и BC), лежащие на одной прямой. В таком случае говорят, что каждый из этих лучей является *продолжением* другого луча.

Перейдем теперь к отрезкам. Каждый отрезок получается так: на прямой берут две точки A и B (рис. 12). Их называют *концами отрезка*. Сам же *отрезок* состоит из этих выделенных точек A и B и всех точек прямой, лежащих между ними. Точки, лежащие между концами отрезка, называются *внутренними точками отрезка*. Отрезок с концами A и B обозначается AB или BA.

Рис. 12. Точки A и B — концы отрезка. Любая точка C, лежащая между точками A и B, — внутренняя точка отрезка

4. Несколько задач.

Задача 1. *Даны четыре попарно пересекающиеся прямые* (т. е. каждая прямая пересекается с любой другой). *Известно, что через точку пересечения любых двух из них проходит по крайней мере еще одна из данных прямых. Найти число точек пересечения этих прямых.*

Решение. Обозначим данные прямые через a_1, a_2, a_3, a_4. Рассмотрим прямые a_1 и a_2. По условию они пересекаются в некоторой точке M, и через эту точку проходит по крайней мере еще одна из данных прямых. Пусть, например, через точку M проходит прямая a_3 (рис. 13, *а*).

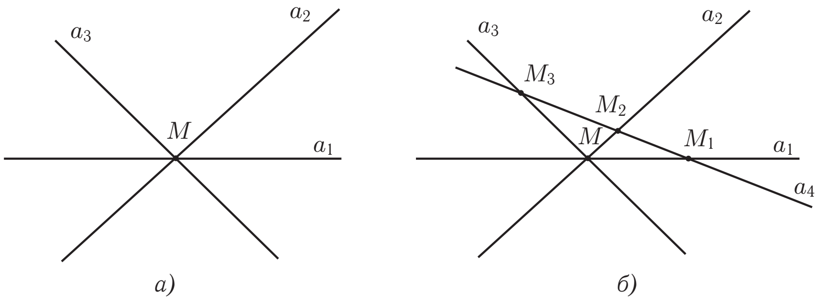


Рис. 13

Если прямая a_4 не проходит через точку M, то она пересекает прямые a_1, a_2 и a_3 в точках M_1, M_2 и M_3 (рис. 13, *б*). Рассмотрим одну из них, например точку M_1. Через нее проходят прямые a_1 и a_4, и не проходят прямые a_2 и a_3. Но по условию задачи через точку пересечения прямых a_1 и a_4 должна проходить по крайней мере еще одна из данных прямых, а такой третьей прямой для точки M_1 нет. Что же это означает? Это означает, что прямая a_4 должна проходить через точку M, иначе получается противоречие с условием задачи. Таким образом, все данные прямые проходят через точку M, т. е. имеют только одну точку пересечения.

Задача 2. *На плоскости проведены n прямых. Каждые две из них пересекаются. Кроме того, через точку пересечения каждых двух прямых не проходит больше ни одной из наших прямых. Найти число всех точек пересечения этих прямых.*

Решение. Будем рассуждать так. Проведем первую прямую (рис. 14, *а*). Затем проведем вторую прямую (рис. 14, *б*). Появится одна точка пересечения. Проведем третью прямую (рис. 14, *в*). Она пересечется с первой и второй прямыми, поэтому общее число точек пересечения станет равным $1+2$. Проведем четвертую прямую (рис. 14, *г*). Она пересечется с первой, второй и третьей. Количество точек пересечения станет равным $1+2+3$. После проведения пятой прямой число точек

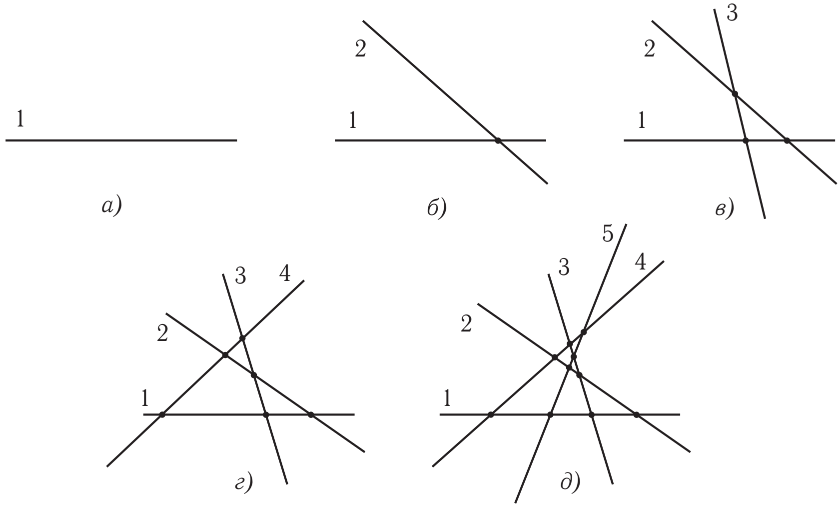


Рис. 14

пересечения станет равным $1 + 2 + 3 + 4$ (рис. 14, *д*). Теперь ясно, что поскольку всего проведено n прямых, то число точек пересечения равно $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1)$.

З а м е ч а н и е. С практической точки зрения выведенная нами формула не очень удобна — слишком громоздкая. Например, при $n = 101$ в ней 100 слагаемых! Можно ли получить более удобную формулу? Оказывается, можно.

Рассказывают, что однажды учителю младших классов гимназии в немецком городе Брауншвейге понадобилось по каким-то делам уйти с урока арифметики. Чтобы не оставлять класс без дела, он, недолго думая, предложил учащимся решить такую задачу: найти сумму всех целых чисел от 1 до 100. Будучи абсолютно уверенным в том, что теперь до конца урока можно заниматься своими делами, он уже сделал несколько шагов по направлению к выходу, как вдруг один из учеников поднял руку.

— У тебя какой-то вопрос? — спросил учитель.

— Нет, — ответил тот. — Я решил задачу. У меня получилось 5050.

— Как ты получил это число?! — спросил совершенно ошарашенный учитель.

— Очень просто, — сказал ученик и написал две строчки, одну под другой. — Теперь совершенно ясно, что наша сумма равна 5050.

Изумленный учитель некоторое время молча смотрел на написанные строчки, а затем произнес:

— Ты станешь великим математиком!

И не ошибся. Этот 9-летний ученик — Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — действительно стал одним из величайших математиков.

Какие же две строчки написал Гаусс? Не можем ли мы применить ту же идею к решению нашей задачи? Давайте попробуем. Поступим так. Запишем нашу формулу еще раз и под ней запишем ее же, но взяв слагаемые в обратном порядке:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots + & (n-3) & + & (n-2) & + & (n-1) \\ (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + \ldots + & 3 & + & 2 & + & 1. \end{array}$$

К. Ф. Гаусс

Сложим теперь эти две суммы следующим способом. Сначала сложим первое слагаемое 1 в первой строчке с первым слагаемым $(n-1)$ во второй строчке. Получим в сумме n. Затем ко второму слагаемому 2 в первой строчке прибавим второе слагаемое $(n-2)$ во второй строчке. Опять получим n. И так далее. В результате получим:

$$\underbrace{n+n+n+\ldots+n+n+n}_{n-1} = (n-1)n.$$

Итак, мы сложили две наши суммы и получили число $(n-1)n$. Следовательно, наша сумма в два раза меньше этого числа, т. е. равна $\dfrac{(n-1)n}{2}$. Например, для пяти прямых, т. е. когда $n=5$, число точек пересечения равно $\dfrac{(5-1)5}{2} = 10$ (см. рис. 14, *д*), а для 101 прямой число точек пересечения равно $\dfrac{(101-1)101}{2} = 5050$.

Задача 3*. *Точка C лежит на прямой между точками A и B, а точка D лежит между точками A и C. Лежит ли точка D между точками A и B?*

Решение. Проведем прямую, отметим на ней точки A и B, а затем C, лежащую между точками A и B, и точку D, лежащую между A и C (рис. 15). Мы лежит между точками A видим, что точка D и B. Тем самым ответ на вопрос задачи получен. Но давайте этим не ограничимся, а поставим вопрос так: можно ли путем рассуждений (а не с помощью рисунка) обосновать тот факт, что точка D лежит между A и B? Оказывается, можно. Но рассуждения не очень простые. Попытайтесь в них разобраться, чтобы проводить потом аналогичные рассуждения в других задачах. Будем рассуждать следующим образом.

Рис. 15

По условию точка C лежит между A и B. Как уже отмечалось ранее, это можно выразить другими словами:

1^0 *точки A и B лежат по разные стороны от точки C.*

Также по условию точка D лежит между A и C, что можно выразить так:

2^0 *точки A и C лежат по разные стороны от точки D*,

или так:

3^0 *точки A и D лежат по одну сторону от точки C.*

Сопоставим утверждения 1^0 и 3^0. Можно сделать вывод, что точки B и D лежат по разные стороны от точки C, т. е. точка C лежит между B и D, а значит,

4^0 *точки B и C лежат по одну сторону от точки D.*

Сопоставим теперь утверждения 2^0 и 4^0. Из них следует, что точки A и B лежат по разные стороны от точки D, т. е. точка D лежит между A и B.

Итак, тот факт, что точка D лежит между A и B, мы обосновали путем рассуждений. Иначе говоря, мы доказали, что точка D лежит между A и B.

5. Угол. Геометрическая фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки, называется *углом*. Лучи называются *сторонами угла*, а их общее начало — *вершиной угла*. На рисунке 16 изображен угол с вершиной O, на сторонах h и k которого отмечены точки A и B. Этот угол можно обозначить разными способами: $\angle hk$, или $\angle AOB$, или $\angle O$, или $\angle 1$.

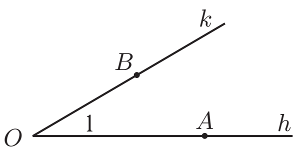


Рис. 16

Рис. 17. Развернутый угол

Если стороны угла лежат на одной прямой, то угол называют *развернутым* (рис. 17). Можно сказать, что каждая сторона развернутого угла является продолжением другой стороны.

Каждый угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвернутый, то одна из этих частей называется *внутренней*, а другая — *внешней* областью этого угла. На рисунке 18 изображен угол и указаны его внутренняя и внешняя области. Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

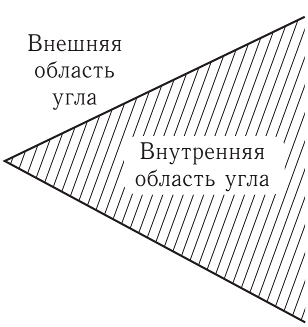


Рис. 18

Если луч исходит из вершины неразвернутого угла и проходит внутри этого угла (т. е. в его внутренней области), то он *делит угол на два угла*, внутренние области которых лежат по разные стороны от этого луча. На рисунке 19, *а* луч OC делит угол AOB на два угла: $\angle AOC$ и $\angle COB$. Если угол AOB — развернутый, то любой луч OC, не совпа-

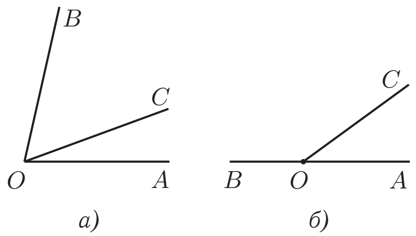


Рис. 19. Луч OC делит угол AOB на два угла: $\angle AOC$ и $\angle COB$

дающий с лучами OA и OB, делит этот угол на два угла: $\angle AOC$ и $\angle COB$ (рис. 19, *б*).

6. Полуплоскость. Наше представление о внутренней и внешней областях угла наглядное, оно связано с рисунком — изображением угла. А как описать словами, что такое внутренняя область угла? Это можно сделать с помощью понятия полуплоскости.

Любая прямая разделяет плоскость на две части, каждая из которых называется *полуплоскостью*, а сама прямая служит *границей* этих полуплоскостей. На рисунке 20, *а* одна из полуплоскостей с границей a заштрихована. Отметим такое очевидное свойство полуплоскостей:

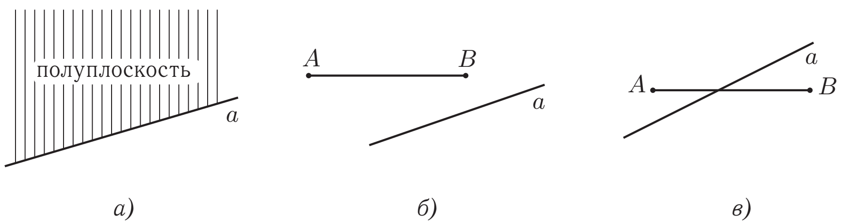


Рис. 20. а) Прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости; б) если точки A и B лежат в одной полуплоскости с границей a, то отрезок AB не пересекается с прямой a; в) если точки A и B лежат в разных полуплоскостях с границей a, то отрезок AB пересекается с прямой a

если две точки A и B лежат в одной полуплоскости с границей a, то отрезок AB не пересекается с прямой a (рис. 20, *б*), *а если в разных полуплоскостях, то отрезок AB пересекается с прямой a, т. е. имеет внутреннюю точку, общую с прямой a* (рис. 20, *в*).

В первом случае говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a (рис. 20, *б*), а во втором — что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a (рис. 20, *в*).

Обратимся теперь к рисунку 21. На нем изображен угол hk, внутренняя область которого заштрихована. Эту область можно получить так. Разрежем плоскость по прямой a, содержащей сторону h. Мы видим, что после разреза внутренняя область угла останется в полуплоскости α, которая содержит сторону k. Затем разрежем плоскость

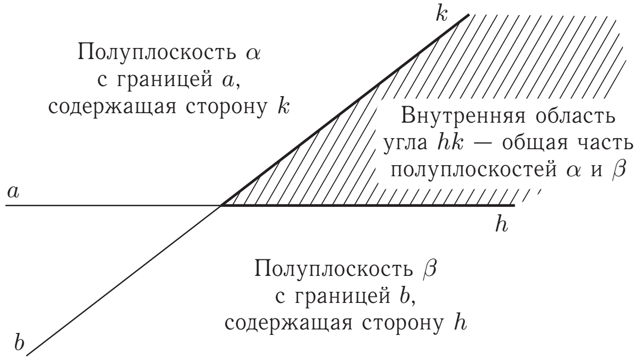


Рис. 21. Выделение внутренней области угла с помощью полуплоскостей

по прямой b, содержащей сторону k. После этого разреза внутренняя область угла останется в полуплоскости β, которая содержит луч h. Теперь ясно, что внутренняя область угла — это общая часть полуплоскостей α и β.

Разрезы, которые мы проводили, можно рассматривать как отрезание всего лишнего, того что не содержит точек внутренней области угла.

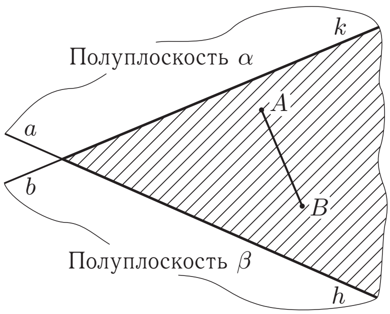


Рис. 22

Давайте теперь обсудим такой вопрос. Пусть точки A и B расположены во внутренней области угла hk (рис. 22). Как Вы думаете, будет ли отрезок AB также целиком расположен во внутренней области угла hk? Посмотрим еще раз на рисунок. Мы видим, что действительно отрезок AB целиком расположен во внутренней области угла hk. А можно ли путем рассуждений убедиться в том, что это действительно так? Мы только что обсудили, как с помощью полуплоскостей выделить внутреннюю область угла. Может быть, этим и воспользоваться? Попробуем.

Мы уже отмечали, что если две точки A и B лежат в одной полуплоскости с границей a, то отрезок AB не пересекается с прямой a, и следовательно, весь отрезок AB лежит в этой полуплоскости. Ну, теперь все ясно! Ведь внутренняя область угла — это общая часть полуплоскостей α и β (рис. 22). Так как отрезок AB лежит и в полуплоскости α, и в полуплоскости β, то он целиком расположен в их общей части, т. е. во внутренней области угла.

У Вас может возникнуть вопрос: а зачем нужно объяснять словами, что такое внутренняя область угла? Почему нельзя сказать просто:

внутренняя область угла — это то, что изображено на рисунке 18? Но любая ли фигура, изображенная на рисунке, есть изображение какой-то действительно существующей фигуры? Посмотрите на рисунки 23 и 24. На первом из них изображен куб, сделанный из деревянных реек. А что изображено на втором рисунке? Не знаете? То-то и оно! Оказывается, нарисовать можно такое, чего нет на самом деле.

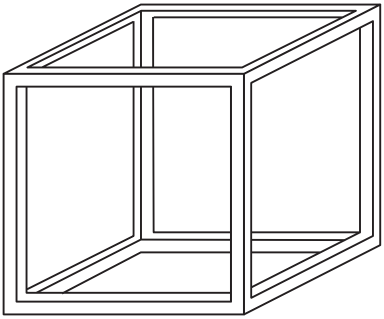


Рис. 23. Куб из реек

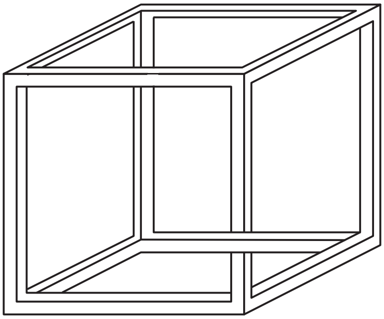


Рис. 24. А что изображено на этом рисунке?

Задачи

1. Даны четыре точки. Известно, что прямая, проходящая через любые две из них, содержит по крайней мере еще одну из данных точек. Докажите, что все данные точки лежат на одной прямой.

2. Даны пять попарно пересекающихся прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух из них проходит по крайней мере еще одна из данных прямых. Докажите, что все данные прямые проходят через одну точку.

3*. Решите задачу 1 для случая, когда даны пять точек.

4. Точки O, A и B лежат на одной прямой, причем точки A и B лежат по разные стороны от точки O. Лежат точки A и B на одном луче или на разных лучах с началом O? Ответ обоснуйте.

5*. Точка B лежит между точками A и C, а точка C лежит между точками B и D. Лежит ли точка C между точками A и D? Ответ обоснуйте.

6*. Точка N лежит между точками M и O, а точка O лежит между точками M и P. Лежит ли точка O между точками N и P? Ответ обоснуйте.

7*. Точка M — внутренняя точка отрезка AB. Докажите, что: а) все точки отрезка AM принадлежат отрезку AB; б) отрезки AM и MB не имеют общих внутренних точек.

8. Отрезок AB пересекается с прямой a, а отрезок AC не пересекается с этой прямой. Пересекается ли отрезок BC с прямой a? Ответ обоснуйте.

9*. Даны четыре точки A, B, C, D и прямая a, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что отрезки AB и CD пересекаются с прямой a, а отрезок BC не имеет общих точек с этой прямой. Пересекается ли отрезок AD с прямой a? Ответ обоснуйте.

§ 2. Измерение отрезков и углов

7. Равенство геометрических фигур. Среди окружающих нас предметов встречаются такие, которые имеют одинаковую форму и одинаковые размеры (одинаковые листы бумаги, книги, автомобили и т. п.). В геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными.

Каким образом можно проверить равенство фигур Φ_1 и Φ_2 (рис. 25 и 26)? Можно представить себе, что фигура Φ_1 накладывается на фигуру Φ_2 той или другой стороной. Если в результате фигуры Φ_1 и Φ_2 совместятся, то они равны.

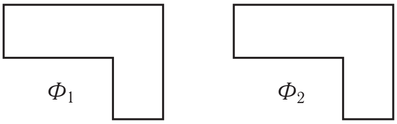


Рис. 25. Фигуры Φ_1 и Φ_2 равны

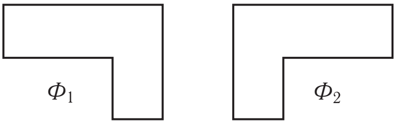


Рис. 26. Фигуры Φ_1 и Φ_2 также равны. Подумайте, как совместить их наложением

Итак, *две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.*

8. Сравнение отрезков и углов. Пусть даны два отрезка (рис. 27, *а, б*). Наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого. Если при этом совместятся и два других конца этих отрезков, то отрезки совместятся, и значит, они равны (рис. 27, *а*); если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составит часть другого (рис. 27, *б*).

Обратимся теперь к углам. Пусть даны два неразвернутых угла (углы 1 и 2 на рисунке 28). Наложим один угол на другой так,

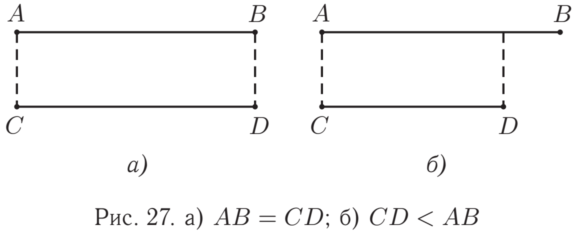


Рис. 27. а) $AB = CD$; б) $CD < AB$

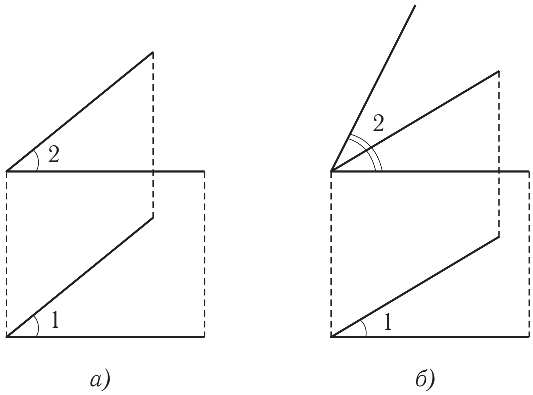


Рис. 28. а) $\angle 1 = \angle 2$; б) $\angle 1 < \angle 2$

чтобы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие стороны оказались по одну сторону от совместившихся сторон. Если при этом две другие стороны также совместятся, то и углы совместятся — значит, они равны (на рисунке 28, *а* $\angle 1 = \angle 2$). Если же две другие стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составит часть другого (на рисунке 28, *б* $\angle 1 < \angle 2$).

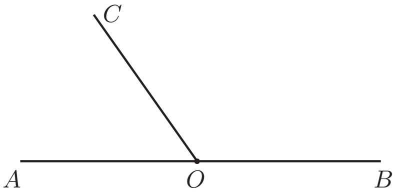


Рис. 29. $\angle AOC < \angle AOB$, $\angle BOC < \angle AOB$

Неразвернутый угол является частью развернутого угла (рис. 29). Поэтому развернутый угол больше любого неразвернутого угла. Любые два развернутых угла, очевидно, равны.

9. Середина отрезка и биссектриса угла. Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, называется *серединой* этого отрезка (рис. 30, *а*). Чтобы найти середину отрезка AB, изображенного на листе бумаги, можно поступить так: перегнуть лист таким образом, чтобы точки A и B совместились. Ес-

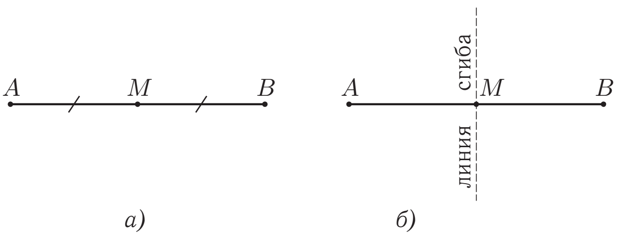


Рис. 30. $AM = MB$. Точка M — середина отрезка AB

ли теперь разогнуть лист и отметить точку M пересечения отрезка AB с линией сгиба (рис. 30, *б*), то эта точка и будет серединой отрезка AB. В самом деле, при повторном перегибании листа точка M останется на месте, а точки A и B совместятся. Следовательно, отрезок MA совместится с отрезком MB, а значит, $MA = MB$, т. е. точка M — середина отрезка AB.

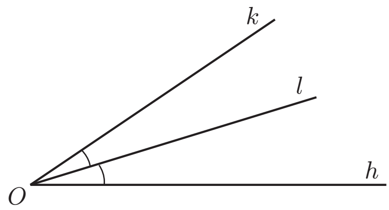


Рис. 31. $\angle hl = \angle lk$. Луч l — биссектриса угла hk

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется *биссектрисой* этого угла (рис. 31). Как провести биссектрису угла, изображенного на листе бумаги (рис. 32, *а*)? Можно поступить таким образом: перегнуть этот лист так, чтобы стороны p и q угла совместились (рис. 32, *б*). Тогда линия сгиба будет биссектрисой угла pq. Докажите это самостоятельно.

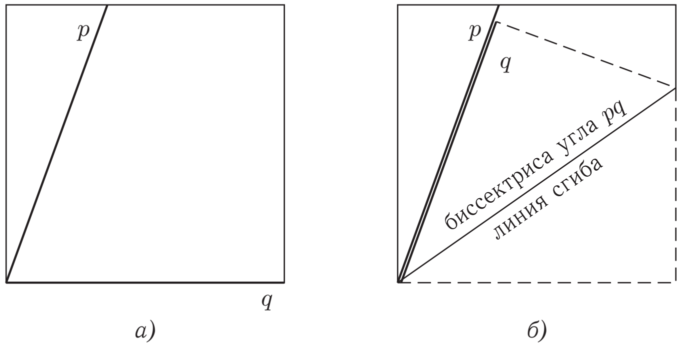


Рис. 32. Сторона q угла pq совпадает с нижним краем листа бумаги (а). После перегибания листа бумаги, сторона q должна совместиться со стороной p (б). Тогда линия сгиба — биссектриса угла pq

10. Измерение отрезков и углов. Как измеряются отрезки? Пусть A_0B_0 — измеряемый отрезок, PQ — выбранная единица измерения отрезков. На луче A_0B_0 отложим отрезок $A_0A_1 = PQ$, на луче A_1B_0 — отрезок $A_1A_2 = PQ$ и т. д. до того момента, когда либо точка A_n совпадет с точкой B_0, либо точка B_0 окажется лежащей между A_n и A_{n+1} (рис. 33). В первом случае говорят, что длина отрезка A_0B_0 при единице измерения PQ выражается числом n (или что отрезок PQ укладывается в отрезке A_0B_0 n раз). Во втором случае можно сказать, что длина отрезка A_0B_0 при единице измерения PQ приближенно выражается числом n. Для более точного измерения отрезок PQ делят на равные части, обычно на 10 равных частей,

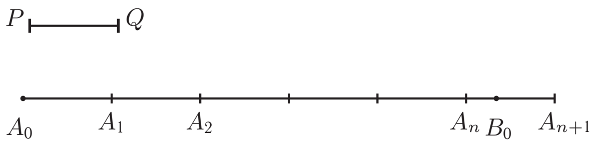


Рис. 33

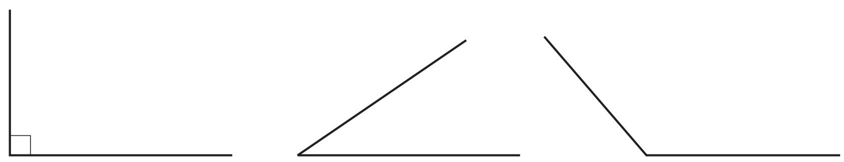
и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток A_nB_0. Если при этом десятая часть отрезка PQ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то ее также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Таким способом можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Иными словами,

при выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

Измерение углов аналогично измерению отрезков и основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают *градус* ($^\circ$) — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла. $\frac{1}{60}$ часть градуса называется *минутой* ($'$), а $\frac{1}{60}$ минуты — *секундой* ($''$). *Градусной мерой угла* называют положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле.

Развернутый угол равен 180° (так как градус — это $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла). Неразвернутый угол меньше 180°.

Угол называется *прямым*, если он равен 90°. Угол, который меньше прямого, называется *острым*, а угол, который больше прямого, но меньше развернутого, — *тупым* (рис. 34).



Прямой угол равен 90° Острый угол меньше 90° Тупой угол больше 90°, но меньше 180°

Рис. 34

11. О числах. Мы говорили, что при выбранной единице измерения длина отрезка выражается некоторым положительным числом. Таким образом, при измерении отрезков используются числа. В этом пункте мы поговорим о числах.

Вам знакомы разные числа. Это, прежде всего, целые положительные числа: 1, 2, 3 и т. д. Их называют также натуральными числами. Они возникли из потребностей счета. Можно сказать, что натуральные числа понадобились для *измерения* количества предметов. Если, например, на книжной полке находится какое-то количество книг, то измерить его (это количество) можно с помощью натурального числа: на этой полке находится 20 книг, а на другой полке — 23 книги.

Натуральных чисел для измерений недостаточно. Если разрезать яблоко пополам, то каждая половина равна $\frac{1}{2}$ яблока. Если же разрезать яблоко на четыре равные части, то каждая часть равна $\frac{1}{4}$ яблока. Обозначение $\frac{1}{4}$ показывает, что 1 (одно яблоко) разделили на 4 части. Число $\frac{3}{7}$ получается, если 3 разделить на 7. Такого рода числа, когда в числителе и в знаменателе стоят натуральные числа, называют рациональными положительными (рацио — значит деление). Итак, *рациональные положительные числа* — это числа вида $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа.

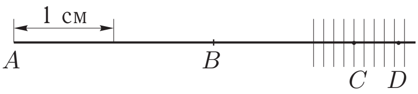


Рис. 35. $AB = 2$ см, $AC = 3{,}4$ см, $AD = 3{,}8$ см

На практике часто используют десятичные дроби, в частности, они появились у нас при измерении отрезков. Так, на рисунке 35 длина отрезка AC равна 3,4 см, а длина отрезка AD приближенно равна 3,8 см. Число 3,8 — десятичная дробь. Его можно записать в виде $3{,}8 = 3 + \frac{8}{10} = \frac{38}{10}$, поэтому десятичная дробь 3,8 — это рациональное число. Любая другая десятичная дробь также является рациональным числом. Например, $4{,}79 = 4 + \frac{7}{10} + \frac{9}{100} = \frac{479}{100}$, т. е. число 4,79 — рациональное число.

При измерении отрезков с определенной точностью, например с точностью до миллиметра, мы получаем их длины в виде рациональных чисел. Итак,

рациональных чисел достаточно для приближенных измерений с любой заданной точностью.

Но оказывается, что точное значение длины отрезка может не быть рациональным числом. Приведем пример.

Вспомним, что такое *квадрат*. Это четырехугольник, у которого стороны равны и все четыре угла — прямые (рис. 36, *а*). Из курса математики 6 класса известно, что площадь квадрата со стороной a равна a^2. Например, квадрат со стороной 10 мм имеет площадь 100 мм^2, что можно увидеть на миллиметровой бумаге (рис. 36, *б*).

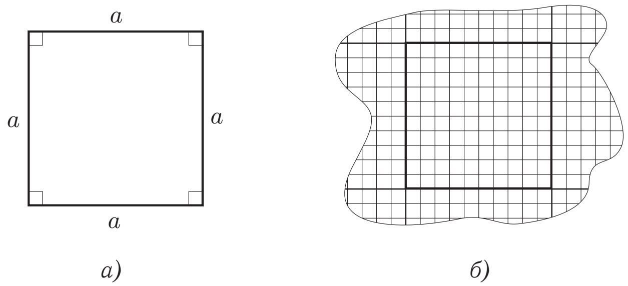


Рис. 36. а) Квадрат со стороной a, его площадь равна a^2; б) квадрат со стороной 10 мм имеет площадь 100 мм^2

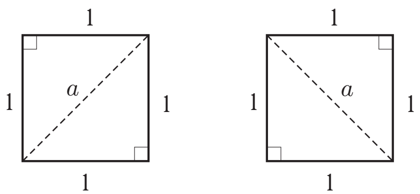


Рис. 37. Квадраты со стороной 1. Площадь каждого из них равна 1. Число a — длина диагонали, по которой разрезается каждый квадрат

Пусть имеются два одинаковых квадрата, стороны которых равны 1 (рис. 37). Разрежем каждый квадрат по диагонали (они проведены пунктиром) на два треугольника, а затем составим из получившихся четырех треугольников новый квадрат, который изображен на рисунке 38. Если мы обозначим длину диагонали квадрата на рисунке 37 буквой a, то площадь квадрата на рисунке 38 будет равна a^2. С другой стороны, площадь этого квадрата равна сумме площадей двух квадратов, изображенных на рисунке 37, т. е. равна 2. Итак,

$$a^2 = 2. \tag{1}$$

Докажем, что число a не является рациональным.

Будьте внимательны — может быть, это первое в Вашей жизни не простое доказательство! Напомним, что рациональное положительное число получается путем деления одного натурального числа на другое натуральное число. Например, число $\dfrac{3}{7}$ получается, когда натуральное число 3 делят на натуральное число 7. Отметим, что числитель (число 3) и знаменатель (число 7) не имеют общих множителей (отличных от единицы). А вот

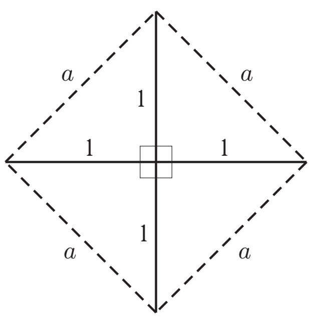


Рис. 38. Из треугольников, на которые разрезаны квадраты на рис. 37, составлен новый квадрат со стороной a. Площадь этого квадрата равна a^2 и, конечно, равна 2 (сумме площадей квадратов на рис. 37)

у рационального числа $\frac{8}{6}$ числитель (число 8) и знаменатель (число 6) имеют общий множитель 2, так как $8 = 2 \cdot 4$ и $6 = 2 \cdot 3$. На этот общий множитель числитель и знаменатель можно сократить, так что

$$\frac{8}{6} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{4}{3}.$$

Дальше сокращать невозможно, так как у числителя и знаменателя нет общих множителей.

Рассмотрим еще один пример. Число $\frac{30}{48}$ путем сокращения числителя и знаменателя на общие множители можно привести к виду, когда у числителя и знаменателя нет общих множителей:

$$\frac{30}{48} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{5}{8}.$$

Таким способом — путем сокращения на общие множители числителя и знаменателя — можно привести любое данное рациональное число к несократимому виду (у числителя и знаменателя нет общих множителей).

Посмотрим теперь, что получится, если мы предположим, что число a, квадрат которого равен 2, — рациональное. При этом, конечно, можно считать, что число a приведено к несократимому виду:

$$a = \frac{p}{q}, \tag{2}$$

где числа p и q не имеют общих множителей. Из равенства (2) получаем:

$$a^2 = a \cdot a = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p^2}{q^2}.$$

Но $a^2 = 2$ (см. (1)). Поэтому $\frac{p^2}{q^2} = 2$, т. е.

$$p^2 = 2q^2. \tag{3}$$

Из равенства (3) можно сделать вывод: *число p делится на* 2. Действительно, число p^2 делится на 2, так как оно равно числу 2, умноженному на натуральное число q^2. Но $p^2 = p \cdot p$, и если бы число p не делилось на 2, то и число p^2 не делилось бы на 2. Значит, число p делится на 2, и его можно записать в виде

$$p = 2r, \tag{4}$$

где r — натуральное число. Подставим это выражение для p в левую часть равенства (3). Получим:

$$(2r)^2 = 2q^2.$$

Но $(2r)^2 = 2r \cdot 2r = 2 \cdot 2 \cdot r^2$, поэтому

$$2 \cdot 2 \cdot r^2 = 2q^2.$$

Сократим на общий множитель 2 левую и правую части этого равенства. После этого оно запишется так:

$$2r^2 = q^2,$$

откуда следует, что q^2 делится на 2, а значит, и q делится на 2.

Что же мы получили? Мы предположили, что число a, квадрат которого равен 2, рациональное, т. е. равно $\frac{p}{q}$, причем числа p и q не имеют общих множителей. После этого путем рассуждений мы доказали, что числа p и q имеют общий множитель — число 2. Но это противоречит нашему предположению. Следовательно, наше предположение не верно, и поэтому число a не является рациональным.

Итак, кроме рациональных чисел есть еще и другие числа. Их называют *иррациональными*. Приставка «ир» в переводе означает «не». Примером такого числа служит наше число a, равное длине стороны квадрата, площадь которого равна 2. Это число обычно обозначают так: $a = \sqrt{2}$ (читается «корень из двух»).

Естественно возникает вопрос: как записать число $\sqrt{2}$ с помощью десятичной дроби? Иными словами, есть ли способ, с помощью которого можно найти:

1) целую часть числа $\sqrt{2}$;
2) число десятых числа $\sqrt{2}$;
3) число сотых числа $\sqrt{2}$ и т. д.?

Такой способ есть. Он заключается вот в чем: будем подбирать десятичные дроби, квадраты которых будут все ближе и ближе к числу 2.

Так как квадрат числа $\sqrt{2}$ равен 2, то целая часть должна быть меньше 2, и значит, равна 1. Итак, $\sqrt{2} = 1,\ldots$

Далее, мы знаем, что $(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2$, $(1{,}5)^2 = 2{,}25 > 2$. Следовательно, $\sqrt{2} = 1{,}4\ldots$

Возьмем теперь числа 1,41 и 1,42. Имеем: $(1{,}41)^2 = 1{,}9881 < 2$, $(1{,}42)^2 = 2{,}0164 > 2$. Поэтому $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$

Ясно, что таким способом можно найти любой десятичный знак числа $\sqrt{2}$. Найдите самостоятельно третий после запятой десятичный знак этого числа.

Задачи

10. Пусть a — число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения CD, а b — число, выражающее длину отрезка CD при единице измерения AB. Как связаны между собой числа a и b?

11. Длина отрезка AB при единице измерения E_1F_1 выражается числом m, а при единице измерения E_2F_2 — числом n. Каким числом выражается длина отрезка E_1F_1 при единице измерения E_2F_2?

12. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC = 2MN$.

13*. На луче с началом A отмечены последовательно точки B, C, D, E и F. Длина отрезка AF равна $7a$, расстояние между серединами отрезков AB и EF равно $6a$, а между серединами отрезков BC и DE — $4a$. Найдите длину отрезка CD.

14*. Из вершины угла в $160°$ проведены три луча, разделяющие данный угол на четыре части. Угол между биссектрисами крайних частей равен $140°$. Найдите угол между биссектрисами средних частей.

15*. Докажите, что число a, удовлетворяющее условию $a^2 = 3$, является иррациональным числом.

16. Запишите число $\frac{3}{7}$ с помощью десятичной дроби.

17. Напишите три десятичных знака числа a, удовлетворяющего условию $a^2 = 3$.

§ 3. Перпендикулярные и параллельные прямые

12. Перпендикулярные прямые. Два угла, у которых одна сторона — общая, а две другие являются продолжениями друг друга, называются *смежными* (рис. 39). Рассуждения, приведенные под рисунком 39, показывают, что

сумма смежных углов равна $180°$.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. На рисунке 40 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные. Рассуждения, приведенные под рисунком 40, показывают, что

вертикальные углы равны.

Две пересекающиеся прямые образуют четыре неразвернутых угла (углы 1, 2, 3, 4 на рисунке 40). Если один из них — прямой, то и остальные — прямые (рис. 41). Докажите это.

Две прямые называются перпендикулярными (или *взаимно перпендикулярными*), *если они образуют четыре прямых угла.*

Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$ (читается: «прямая AC перпендикулярна к прямой BD»). Отрезки

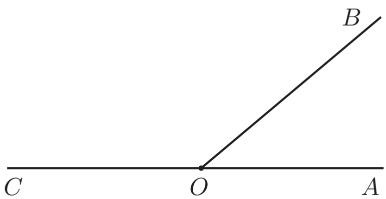


Рис. 39. Углы AOB и BOC — смежные. Общая сторона OB этих углов делит развернутый угол AOC на два смежных угла. Поэтому сумма смежных углов равна $180°$

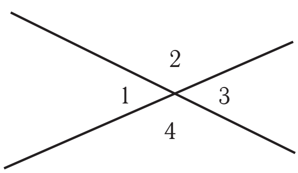


Рис. 40. Углы 1 и 3 — вертикальные. Углы 2 и 4 — также вертикальные. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Поэтому $\angle 1 = \angle 3$. Точно также доказывается, что $\angle 2 = \angle 4$

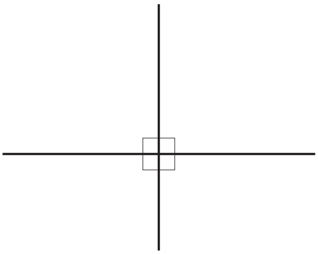
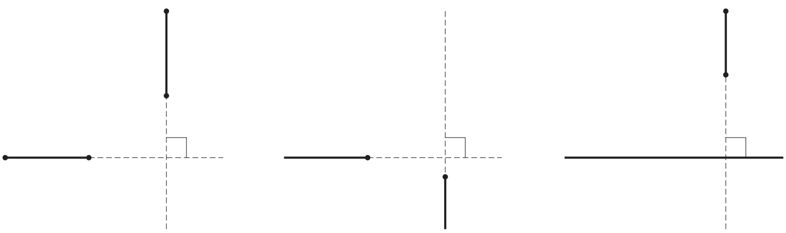


Рис. 41. Перпендикулярные прямые

называются перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых (рис. 42). Аналогично можно определить перпендикулярные лучи, луч и отрезок, луч и прямую, отрезок и прямую (см. рис. 42).

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на ней (рис. 43). Отрезок, соединяющий точку A с точкой H прямой a, называется *перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой a*, если прямые AH и a перпендикулярны. При этом точка H называется *основанием перпендикуляра* или *проекцией точки A на прямую a*.



а) *б)* *в)*

Рис. 42. а) Перпендикулярные отрезки; б) перпендикулярные лучи; в) перпендикулярные отрезок и прямая

Мы ввели понятие перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой. А есть ли такой перпендикуляр? И если есть, то сколько перпендикуляров можно провести из данной точки к данной прямой? Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо провести рассуждения.

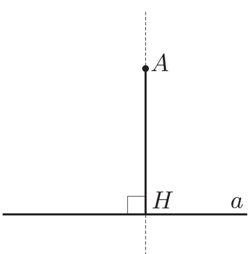


Рис. 43. Отрезок AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a, а точка H — основание этого перпендикуляра

В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений, называется *теоремой*, а сами эти рассуждения называются *доказательством теоремы*. Обычно сначала формулируют теорему (т. е. то утверждение, которое хотят доказать), а затем ее доказывают. Например, когда мы рассматривали число a, удовлетворяющее условию $a^2 = 2$, то сначала сформулировали теорему (хотя и не называли ее теоремой): число a не является рациональным. Затем мы привели доказательство этой теоремы.

Докажем теперь *теорему о перпендикуляре к прямой.*

Теорема. *Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой и притом только один.*

Доказательство. Пусть A — точка, не лежащая на данной прямой a (рис. 44). Докажем сначала, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой a. Мысленно перегнем плоскость по прямой a и отметим точку A_1, на которую наложится при этом точка A. Проведем через точки A и A_1 прямую и обозначим буквой H точку пересечения прямых AA_1 и a. При перегибании плоскости по прямой a все точки этой прямой останутся на месте, а луч HA совместится с лучом HA_1. Следовательно, угол 1 совместится с углом 2. Таким образом, эти углы равны, а поскольку они являются смежными, то каждый из них — прямой. Итак, отрезок AH — перпендикуляр к прямой a.

Докажем теперь, что из точки A нельзя провести другой перпендикуляр к прямой a. Предположим, что можно провести еще один перпендикуляр AB (рис. 45). При перегибании плоскости по прямой a точка B останется на месте, а точка A наложится на точку A_1, поэтому луч BA совместится с лучом BA_1, и следовательно, прямой угол 3 совместится с углом 4. Таким образом, угол 4 — также прямой, а значит, угол ABA_1 — развернутый. Отсюда следует, что точки A, B и A_1 лежат на одной прямой. Тем самым, мы получили, что через точки A и A_1 проходят две прямые (одна из них пересекается с прямой a в точке H, а другая — в точке B). Но через две точки проходит только одна прямая. Следовательно, наше предположение неверно, а значит, из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой a. Теорема доказана.

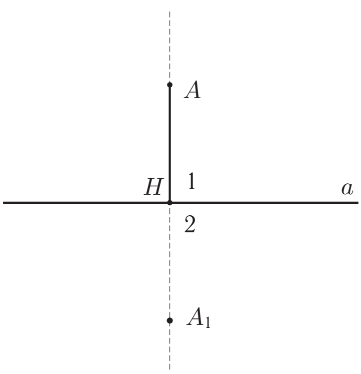


Рис. 44. После перегибания плоскости по прямой a точка A наложится на точку A_1

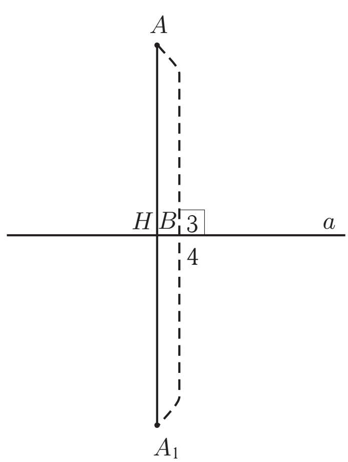


Рис. 45

З а м е ч а н и е. Мы сказали, что обычно сначала формулируют теорему (т. е. то утверждение, которое хотят доказать), а затем ее доказывают. На самом деле это не совсем так. Ведь тому, кто впервые формулирует и доказывает теорему, заранее неизвестна ее формулировка! В действительности все начинается с того, что в виде гипотезы формулируется утверждение, которое кажется правильным. Это утверждение пытаются доказать на «черновике». Если в ходе доказательства выясняется, что утверждение ошибочно, то возвращаются назад, т. е. формулируют новую гипотезу с учетом допущенных ошибок и вновь пытаются доказать ее справедливость. Иногда этот процесс повторяется многократно. Когда же, наконец, доказательство истинности очередной гипотезы удается провести до конца, ее формулируют в виде теоремы и доказывают на «чистовике».

13. Признаки параллельности двух прямых. Теперь мы можем утвердительно ответить на один из поставленных ранее вопросов: а есть ли параллельные прямые? В самом деле, рассмотрим две прямые a и b, каждая из которых перпендикулярна к прямой c (рис. 46). Если бы прямые a и b пересекались, то из точки их пересечения оказались бы проведенными два перпендикуляра к прямой c, что невозможно. Следовательно, прямые a и b не пересекаются, т. е. параллельны. Итак,

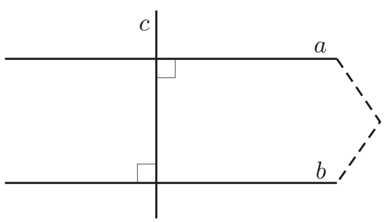


Рис. 46

две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, параллельны.

Сформулированное утверждение выражает признак (перпендикулярность двух прямых к третьей прямой), по которому можно сделать вывод о параллельности двух прямых, или, коротко говоря, *признак параллельности двух прямых*.

Рассмотрим теперь прямые a и b, а также прямую c, которая пересекает их в точках A и B (рис. 47). Прямую c назовем *секущей* по отношению к прямым a и b, а углы 1 и 2 и также углы 3 и 4 на рисунке 47 — *накрест лежащими углами*. Глядя на рисунок, можно предположить, что если накрест лежащие углы равны, то прямые a и b параллельны. Но так ли это?

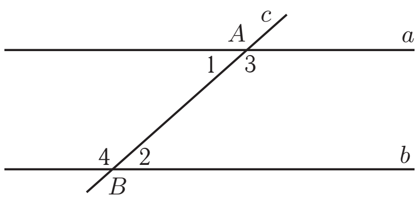


Рис. 47. Прямая c — секущая. Углы 1 и 2 — накрест лежащие. Углы 3 и 4 — накрест лежащие

Давайте рассуждать. Если накрест лежащие углы — прямые (рис. 46), то прямые a и b перпендикулярны к прямой c и поэтому параллельны, это мы знаем. А можно ли это доказать, не ссылаясь на теорему о перпендикуляре к прямой? Можно, и весьма просто. Если мысленно перегнуть плоскость по прямой c (см. рис. 46), то одна половина рисунка совместится с другой. Поэтому если бы прямые a и b пересекались по одну сторону от прямой c, то они пересекались бы и по другую сторону от этой прямой, чего не может быть, так как через две точки можно провести только одну прямую.

Допустим теперь, что накрест лежащие углы 1 и 2 равны, но прямыми не являются. Ясно, что смежные с ними накрест лежащие углы 3 и 4 также равны (рис. 48, *а*). Разрежем плоскость по прямой c (рис. 48, *б*) и повернем одну из половин рисунка на 180° (рис. 48, *в*). Теперь наложим одну половину на другую так,

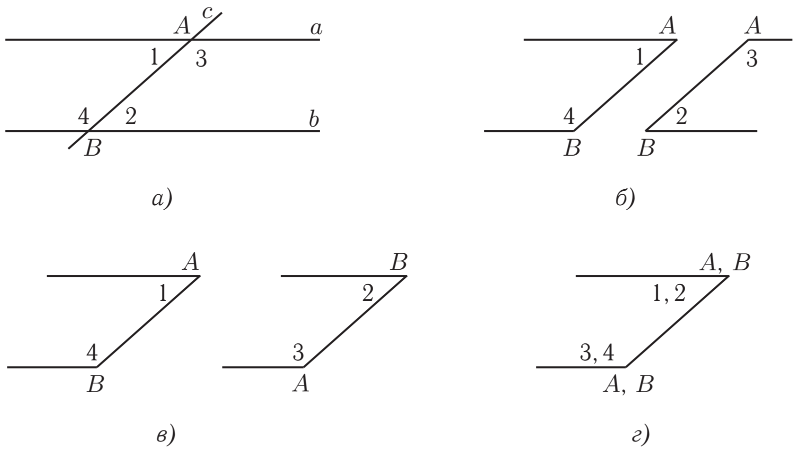


Рис. 48. а) $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $\angle 3 = \angle 4$; б) разрезали плоскость по прямой c; в) правую половину рисунка повернули на 180°; г) совместили две половины рисунка

чтобы точка A на одной половине совместилась с точкой B на другой половине, и наоборот (рис. 48, *г*). Поскольку углы 1 и 2 равны, то они совместятся. По аналогичной причине совместятся углы 3 и 4. Таким образом, одна половина рисунка полностью совместится с другой его половиной. Теперь все ясно! Осталось сформулировать теорему и, пользуясь нашими наблюдениями, доказать ее.

Теорема. *Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны.*

Доказательство. Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы 1 и 2 равны. Тогда смежные с ними углы 3 и 4 также равны (рис. 49, *а*). Мысленно разрежем плоскость по прямой AB, повернем одну из полуплоскостей на 180° и наложим ее на вторую полуплоскость так, чтобы точки A и B на ней совместились соответственно с точками B и A на второй полуплоскости. Поскольку

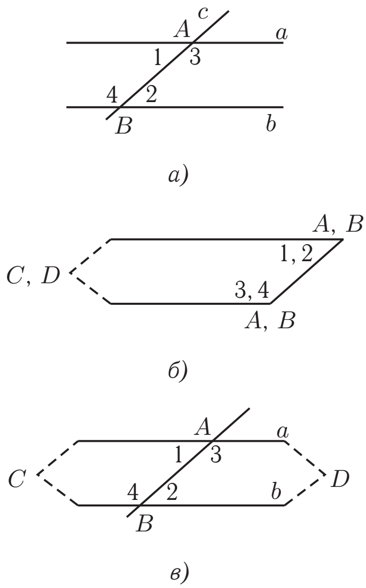


Рис. 49. а) $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $\angle 3 = \angle 4$; б) совместили две половины рисунка. Если C — общая точка прямых a и b, то точка D, которая на нее наложилась, — также общая точка прямых a и b; в) через точки C и D проходят две прямые — a и b, чего не может быть

углы 1 и 2 равны, то угол 1 совместится с углом 2. Углы 3 и 4 также равны, поэтому и они совместятся.

Если предположить, что прямые a и b пересекаются в точке C одной из полуплоскостей, то точка D, с которой совместится точка C при нашем наложении, также окажется общей точкой прямых a и b (рис. 49, *б*). Тем самым окажется, что через точки C и D проходят две различные прямые — a и b (рис. 49, *в*). Но этого не может быть — через две точки проходит только одна прямая. Следовательно, прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

Доказанная теорема является еще одним *признаком параллельности двух прямых*, причем ранее установленный признак является его частным случаем. В самом деле, если две прямые перпендикулярны к третьей прямой, то накрест лежащие углы, образованные при пересечении этих двух прямых третьей, равны (эти углы — прямые), поэтому прямые параллельны.

Прежде чем сформулировать еще два признака параллельности прямых, обратимся к рисунку 50, на котором прямые a и b пересечены секущей c. Образовавшиеся при этом углы обозначены цифрами. Назовем углы 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 *соответственными*, а углы 4 и 5, 3 и 6 — *односторонними*.

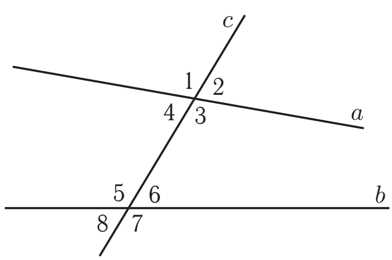


Рис. 50

Утверждения, которые непосредственно вытекают из теоремы, называют *следствиями*. Из доказанной теоремы вытекают такие следствия.

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то эти прямые параллельны.

Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°*, то эти прямые параллельны.*

Доказательства этих утверждений приведены под рисунками 51 и 52.

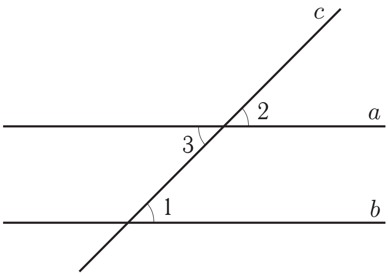


Рис. 51. Пусть соответственные углы $\angle 1$ и $\angle 2$ равны: $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 2 = \angle 3$ (как вертикальные углы), то $\angle 1 = \angle 3$, т. е. равны накрест лежащие углы. Следовательно, $a \parallel b$

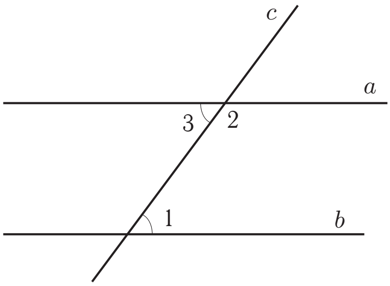


Рис. 52. Пусть сумма односторонних углов 1 и 2 равна $180°$. Так как сумма смежных углов 3 и 2 также равна $180°$, то $\angle 1 = \angle 3$, т. е. равны накрест лежащие углы. Следовательно, $a \parallel b$

14. Практические способы построения параллельных прямых. Признаки параллельности двух прямых лежат в основе практических способов построения параллельных прямых с помощью различных инструментов. Рассмотрим, например, способ построения параллельных прямых с помощью чертежного угольника и линейки.

Чтобы построить прямую, проходящую через точку M и параллельную данной прямой a, сначала приложим чертежный угольник к прямой a, а к нему линейку так, как показано на рисунке 53. Затем, передвигая угольник вдоль линейки, добьемся того, чтобы точка M оказалась на стороне угольника, и проведем прямую b. Прямые a и b параллельны, так как соответственные углы, обозначенный на рисунке 53 буквами α и β, равны.

На рисунке 54 показан способ построения параллельных прямых при помощи *рейсшины*. Этим способом пользуются в чертежной практике.

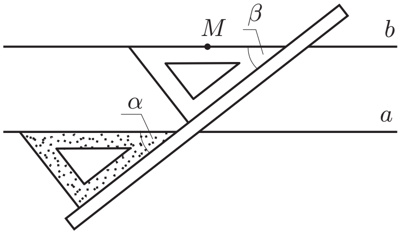


Рис. 53

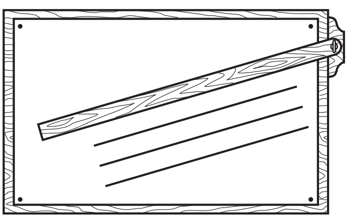


Рис. 54

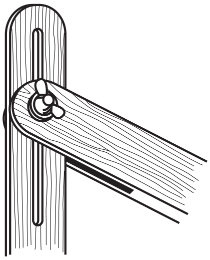


Рис. 55

Аналогичный способ применяется при столярных работах, где для разметки параллельных прямых используется *малка*, представляющая собой две деревянные планки, скрепленные шарниром (рис. 55).

15. А есть ли квадрат?. Вернемся к нашим геометрическим конструкциям, связанным с числом $\sqrt{2}$ (см. п. 11). Мы разрезали каждый из двух одинаковых квадратов с площадью 1 по диагонали и из получившихся четырех треугольников составили квадрат с площадью 2 (см. рис. 37 и 38). А почему получился квадрат? Если внимательно посмотреть на рисунок 38, то видно, что стороны получившегося четырехугольника одинаковы, так как каждая из них равна диагонали a исходного квадрата. Но ведь четырехугольник, все стороны которого равны, может и не быть квадратом (рис. 56). У квадрата каждый из углов — прямой. А вот являются ли у составленного нами четырехугольника все углы прямыми? Это нужно доказать!

Можно поступить так. Разрежем квадрат $ABCD$ со стороной 1 по диагонали (рис. 57). Докажем, что полученные при этом треугольники ABD и CBD равны. Для этого треугольник ABD наложим на треугольник CBD так, чтобы прямой угол при вершине A совместился с прямым углом при вершине C (рис. 58). Тогда сторона AB совместится со стороной CB, а сторона AD совместится со стороной CD. Теперь уже ясно, что треугольник ABD полностью совместится с треугольником CBD. Следовательно, эти треугольники равны. Поэтому $\angle ABD = \angle CBD$ (эти углы отмечены дугами на рисунках 57 и 58) и $\angle ADB = \angle CDB$. Равенство этих углов означает, что диагональ квадрата делит пополам каждый из углов квадрата, через вершины

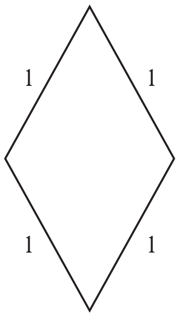


Рис. 56. Четырехугольник, у которого все стороны равны, называется *ромбом*. Ромб может и не быть квадратом

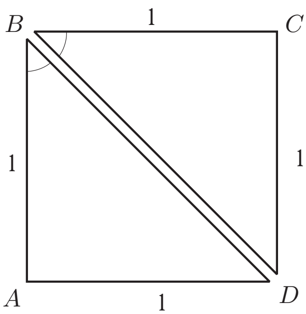


Рис. 57. Квадрат $ABCD$ разрезан по диагонали на два треугольника ABD и CBD

которых она проходит. Взглянув теперь еще раз на рисунок 38, мы сразу увидим, что углы при вершинах построенного нами четырехугольника (он изображен штрихами) — прямые, так как каждый из них составлен из двух половинок прямого угла. Стороны же четырехугольника равны, и поэтому этот четырехугольник — квадрат.

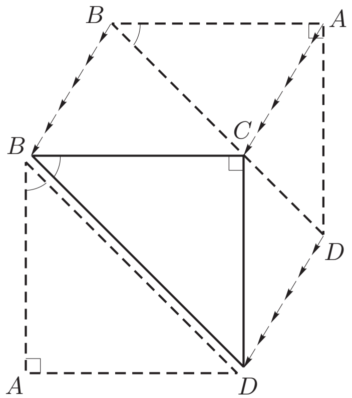


Рис. 58. На этом рисунке показан процесс наложения треугольника ABD на треугольник CBD. Начальное и промежуточное положения треугольника ABD показаны пунктиром. Стрелками указан путь вершин

Но возникает другой вопрос. При конструировании квадрата со стороной a мы исходили из того, что у нас есть квадрат со стороной 1, т. е. есть четырехугольник, все стороны которого равны 1 и все углы — прямые. А есть ли такой четырехугольник, т. е. есть ли квадрат со стороной 1? И вообще, существует ли квадрат с данной стороной d? Можно попытаться ответить на этот вопрос так: попробовать построить квадрат со стороной d.

Рассмотрим отрезок AD длины d (рис. 59). Через точку A под прямым углом к прямой AD проведем луч h и отложим на нем отрезок $AB = d$. Через точку B под прямым углом к лучу h проведем луч k и отложим на нем отрезок $BC = d$. Далее через точку C под прямым углом к лучу k проведем луч l. Теперь на этом луче отложим отрезок $CD_1 = d$. Наше построение завершено, но что мы получили? Если точка D_1 совпадет с точкой D, то мы получим четырехугольник с равными сторонами. Но откуда следует, что угол при вершине D этого четырехугольника будет прямым? А может быть и точка D_1 не совпадет с точкой D. Тогда даже четырехугольник не получится.

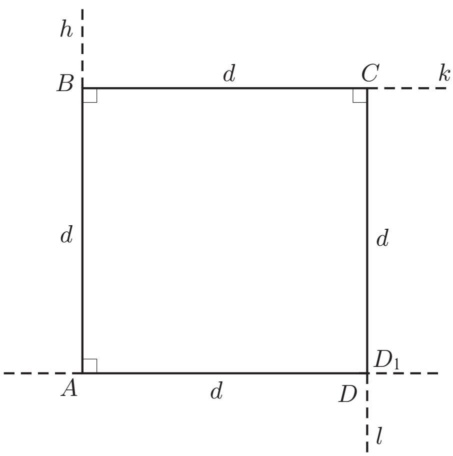


Рис. 59. Построение квадрата с заданной стороной d

Можно предложить иную конструкцию — через точку C не проводить луч l под прямым углом к лучу k, а просто соединить точки C и D отрезком. Но будет ли сторона CD равна d и будут ли углы при вершинах C и D прямыми? Самое удивительное, что без дополнительных предположений нельзя ответить ни на один из этих вопросов. Эти предположения мы обсудим в нашей книге позже и тогда докажем, что квадрат с заданной стороной есть, он существует. А пока запишите в свой блокнот вопрос:

есть ли квадрат?

16. Заключительные замечания. Мы познакомились с некоторыми начальными геометрическими понятиями. И уже появились вопросы, на которые мы пока не знаем ответа. Например, мы не знаем, есть ли квадрат.

Наполеон

В наших доказательствах мы широко использовали рисунки. Хотя, наверное, Вы почувствовали, что рисунки только поясняют суть дела, но не заменяют рассуждения. К рисункам надо относиться с осторожностью. Об этом уже говорилось в пункте 6. Вот еще два рисунка — 60 и 61, показывающие, что рисункам можно доверять далеко не всегда.

Геометрия развивает наши пространственные представления. Но не только для этого она нужна. Она важна для нашей практической деятельности. Но, пожалуй, и это не главное. Доказывая что-то, решая задачи, мы учимся рассуждать, а это важно в любом деле. Геометрия, как мы вскоре увидим, поражает воображение тем, что путем рассуждений в ней устанавливаются совершенно неожиданные факты. Не удивительно, что на протяжении многих столетий люди самых разнообразных профессий посвящали часы досуга занятиям геометрией. Даже Наполеон Бонапарт, будучи императором и великим полководцем, оставил свой след в геометрии в виде теоремы Наполеона.

Задачи

18. Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

19. Пусть $\angle hk$ — меньший из двух смежных углов hk и hl. Докажите, что $\angle hk = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$, а $\angle hl = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$.

20. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

21. Пять прямых пересекаются в одной точке (рис. 62). Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

22. Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n так, что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые m и n не совпадают.

23. Квадрат разрезан по диагонали. Докажите, что сумма углов в каждом из полученных треугольников равна 180°.

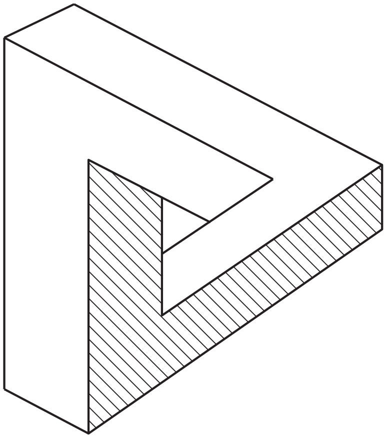


Рис. 60. Такая пространственная фигура невозможна. А на рисунке она есть. Этот рисунок придумал ученый Р. Пенроуз

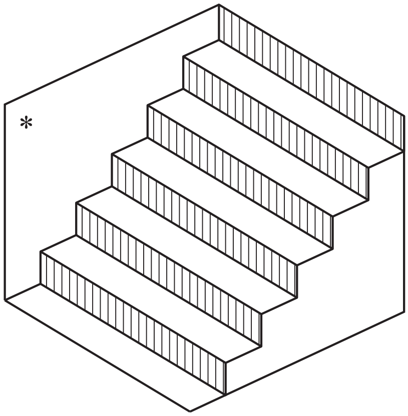


Рис. 61. Лестница Схоутена (по имени ученого, придумавшего этот рисунок). Звездочкой отмечена стена, в которую упирается лестница. Поверните рисунок на 180° и посмотрите, во что превратится стена, отмеченная звездочкой

24. Прямоугольник, составленный из двух равных квадратов (рис. 63), разрезан по диагонали на два треугольника (один из них на рисунке 63 заштрихован). Докажите, что эти треугольники равны. Докажите также, что сумма углов каждого из этих треугольников равна 180°.

25. На рисунке 64 прямые a и b пересечены секущей c. Докажите, что $a \parallel b$, если: а) $\angle 1 = 37°$, $\angle 7 = 143°$; б) $\angle 1 = \angle 6$; в) $\angle 1 = 45°$, а $\angle 7$ в три раза больше $\angle 3$.

26. Дан квадрат $ABCD$. Докажите, что $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$.

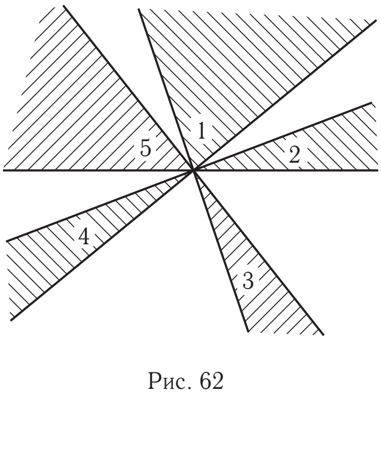


Рис. 62

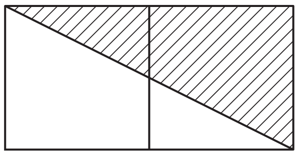


Рис. 63

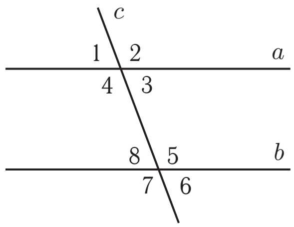


Рис. 64

27. На рисунке 65 $\angle BAC = \angle BCA$ и $\angle DCE = \angle DEC$. Докажите, что $AB \parallel DE$.

28. Исходя из рисунка 66, докажите, что: а) $BC \parallel DE$; б) прямые, содержащие биссектрисы углов ABC и DEF, параллельны.

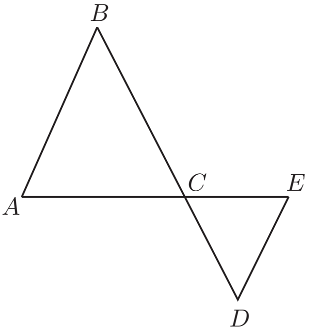


Рис. 65

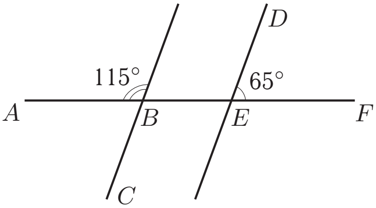


Рис. 66

29. Исходя из рисунка 67, докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла BCD, параллельна прямой AB.

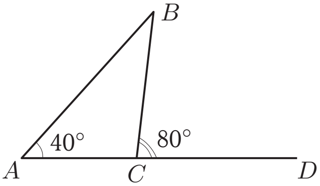


Рис. 67

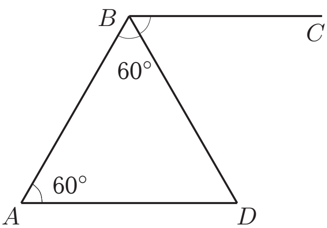


Рис. 68

30. На рисунке 68 луч BD — биссектриса угла ABC. Докажите, что $AD \parallel BC$.

Глава 2

ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 1. Треугольники и их виды

17. Треугольник. Вспомним, что такое треугольник. Это фигура, состоящая из трех отрезков — *сторон* треугольника, соединяющих три точки — *вершины* треугольника. К этому надо добавить еще, что вершины треугольника не должны лежать на одной прямой. Итак, *треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех отрезков, соединяющих три точки, не лежащие на одной прямой*. Треугольник с вершинами A, B и C условимся обозначать так: ΔABC (рис. 69).

Углы $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ называют *углами треугольника* ABC. Эти углы часто обозначают одной буквой: $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$. Сумма трех сторон треугольника называется его *периметром*.

Каждый треугольник разделяет плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю области (рис. 70). Как сказать словами, что такое *внутренняя область треугольника*? Можно сказать так: это общая часть внутренних областей трех его углов (рис. 71). Фигуру, состоящую из сторон треугольника и его внутренней области, также называют треугольником.

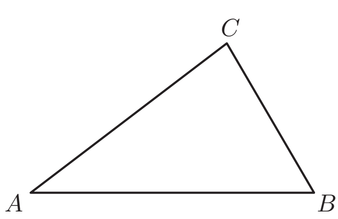


Рис. 69. Треугольник ABC

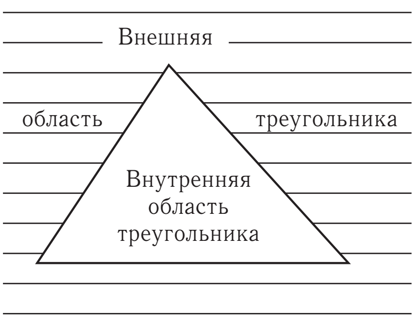


Рис. 70

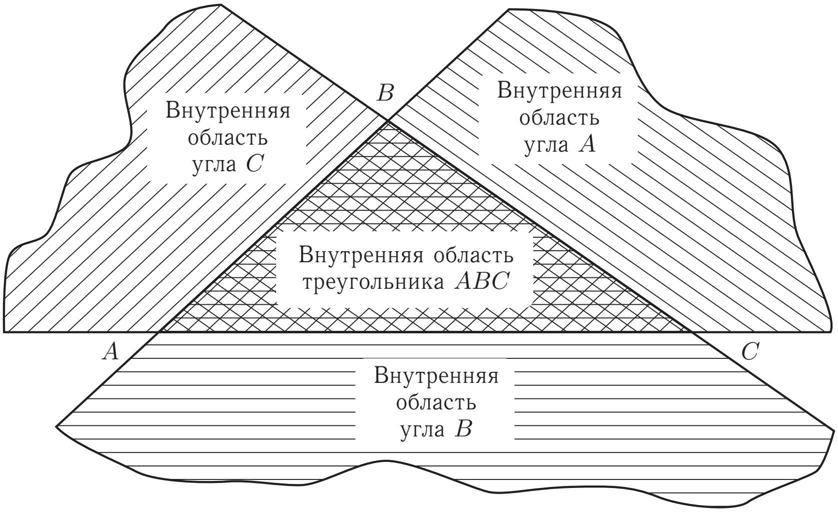


Рис. 71. Внутренняя область треугольника ABC — общая часть внутренних областей трех углов A, B и C этого треугольника

18. Внешний угол треугольника. В следующих пунктах мы получим ряд важных соотношений между сторонами и углами треугольника. При выводе этих соотношений нам понадобится понятие внешнего угла треугольника и его свойство.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника. При каждой вершине треугольника имеются два внешних угла. На рисунке 72 изображены внешние углы треугольника ABC.

Докажем *теорему о внешнем угле треугольника.*

Теорема. *Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с этим внешним углом.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 73) и докажем, например, что внешний угол BCD больше угла B. Проведем луч BA_1 так, чтобы углы A_1BC и BCD оказались равными накрест

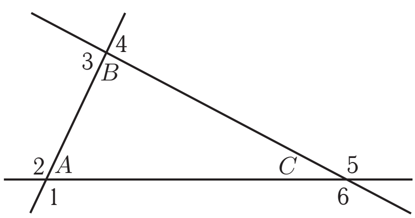


Рис. 72. Углы 1, 2, 3, 4, 5, 6 — внешние углы треугольника ABC

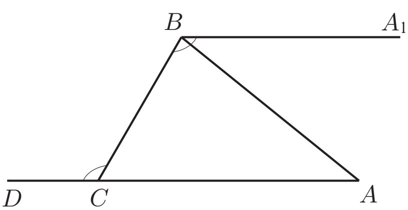


Рис. 73

лежащими углами, образованными при пересечении прямых A_1B и CD секущей BC. По признаку параллельности двух прямых прямые A_1B и CD параллельны.

Следовательно, угол BCD не может быть равен углу B. Иначе прямая A_1B совпала бы с прямой AB и потому не была бы параллельной прямой CD, поскольку прямая AB пересекает прямую CD в точке A.

Если бы угол BCD, а значит и равный ему угол A_1BC, был меньше угла B, то луч BA_1 делил бы угол B на два угла и, следовательно, пересекал бы отрезок AC, а значит, и прямую CD. Этого также не может быть, поскольку прямые A_1B и CD параллельны. Поэтому угол BCD больше угла B. Теорема доказана.

Следствие. *Сумма двух углов треугольника меньше* $180°$.

В самом деле, рассмотрим треугольник ABC и докажем, например, что $\angle A + \angle B < 180°$. Внешний угол при вершине A равен $180° - \angle A$. Поскольку этот угол больше угла B, то $180° - \angle A > \angle B$, откуда $180° > \angle A + \angle B$, или $\angle A + \angle B < 180°$.

19. Классификация треугольников. Из теоремы о внешнем угле треугольника следует, что если в треугольнике один из углов — прямой или тупой, то два других угла — острые. В самом деле, пусть в треугольнике ABC угол A — прямой или тупой (рис. 74). Тогда внешний угол BAD — прямой или острый. По теореме о внешнем угле треугольника углы B и C треугольника ABC меньше угла BAD, поэтому они — острые. Таким образом,

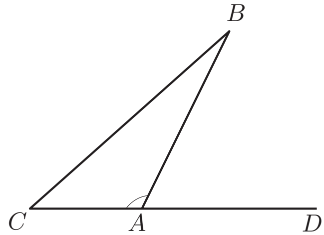


Рис. 74

в любом треугольнике либо все три угла — острые, либо два угла — острые, а третий — прямой или тупой.

Если все углы треугольника — острые, то его называют *остроугольным* (рис. 75, *а*). Если один из углов треугольника — прямой, то его называют *прямоугольным* (рис. 75, *б*), а если один из углов

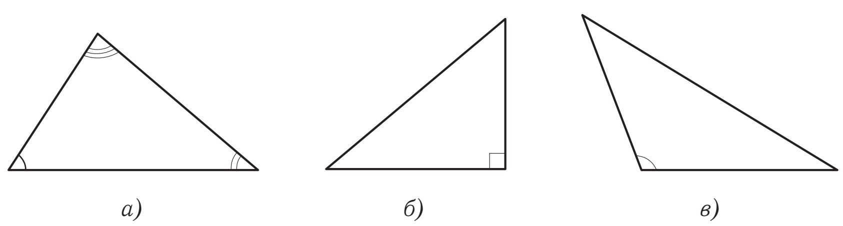


Рис. 75. а) Остроугольный треугольник — все его углы острые; б) прямоугольный треугольник — у него один угол прямой; в) тупоугольный треугольник — у него один угол тупой

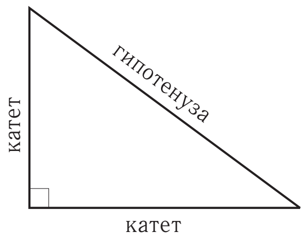


Рис. 76. Прямоугольный треугольник

треугольника — тупой, то *тупоугольным* (рис. 75, *в*). Сторону прямоугольного треугольника, лежащую против прямого угла, называют *гипотенузой*, а две другие стороны — *катетами* (рис. 76).

Эта классификация треугольников, т. е. разделение их на три вида (класса), основана на сравнении углов треугольника. Можно дать классификацию треугольников, опираясь на сравнение их сторон.

Если длины всех сторон треугольника разные, то его называют *разносторонним* (рис. 77, *а*). Если две стороны равны, то треугольник называют *равнобедренным* (рис. 77, *б*). Равные стороны равнобедренного треугольника обычно называют *боковыми сторонами*, а третью сторону — *основанием*. Треугольник, у которого все стороны равны, называют *равносторонним* (рис. 77, *в*).

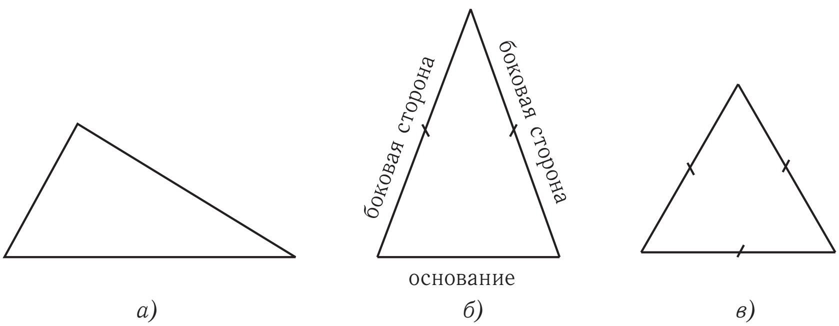


Рис. 77. а) Разносторонний треугольник — длины всех его сторон разные; б) равнобедренный треугольник — у него две стороны равны; в) равносторонний треугольник — у него все стороны равны

20. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. С каждым треугольником связаны несколько отрезков, которые имеют специальные названия.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой* треугольника (рис. 78, *а*).

Отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой* треугольника (рис. 79, *а*).

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется *высотой* треугольника (рис. 80, *а*).

Посмотрим на рисунки 78, 79, 80. Мы видим, что три медианы треугольника на рисунке 78, *б* пересекаются в одной точке, три бис-

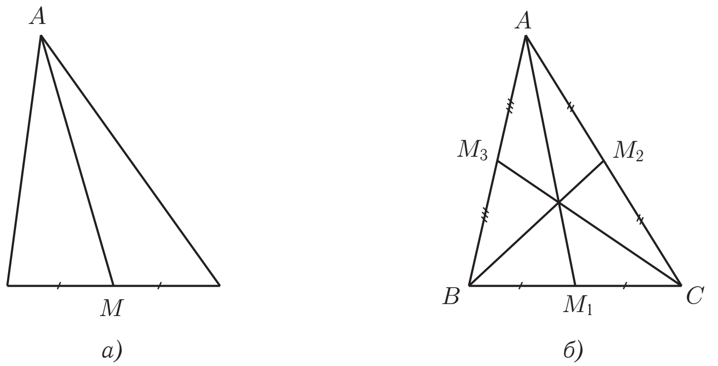


Рис. 78. а) AM — медиана треугольника; б) AM_1, BM_2, CM_3 — медианы треугольника ABC

сектрисы на рисунке 79, *б* пересекаются в одной точке, три высоты или их продолжения на рисунках 80 *б, в, г* также пересекаются в одной точке. Случайно ли это, или так будет в любом треугольнике? Пока мы не можем ответить на эти вопросы, поэтому запишем их в блокнот:

Верно ли, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке?

Верно ли, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке?

Верно ли, что три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке?

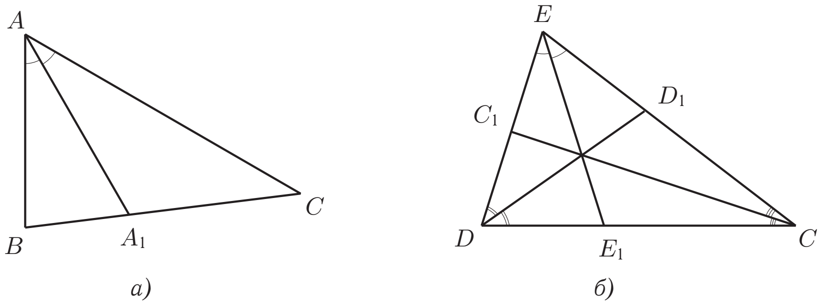


Рис. 79. а) AA_1 — биссектриса треугольника ABC; б) CC_1, DD_1, EE_1 — биссектрисы треугольника CDE

Задачи

31. Может ли в треугольнике один угол быть острым, другой — прямым, а третий — тупым? Ответ обоснуйте.

32. В треугольнике ABC угол A — прямой. Докажите, что внешние углы при вершинах B и C — тупые.

33. Докажите, что в любом треугольнике сумма двух внешних углов при разных вершинах больше 180°.

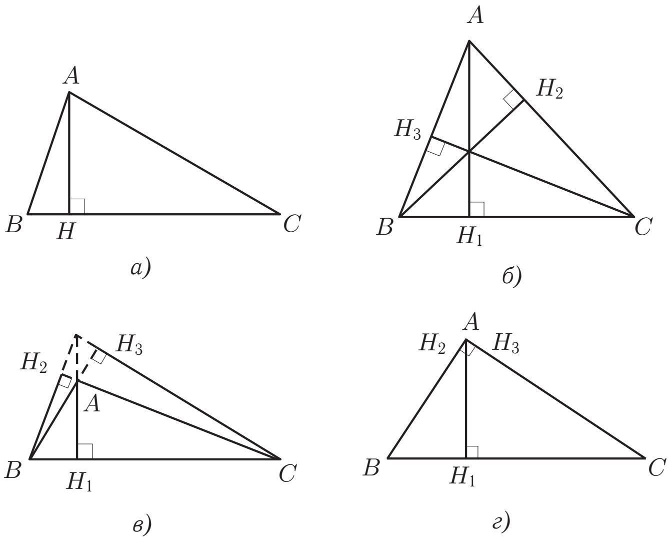


Рис. 80. а) AH — высота треугольника; б), в), г) AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC

34. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точка D лежит на катете BC. Докажите, что $\angle ADB > \angle ABC$ и $\angle ADB > \angle BAC$.

35*. Точка M лежит во внутренней области треугольника ABC. Докажите, что $\angle BAC < \angle BMC$.

36. Вершина C треугольника ABC лежит между вершиной B и основанием высоты AH. Докажите, что углы A и B — острые.

37. Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен 40 см, а периметр равностороннего треугольника BCD равен 45 см. Найдите стороны AB и BC.

38. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена медиана AM. Найдите AM, если периметр треугольника ABC равен 32 см, а периметр треугольника ABM равен 24 см.

39. Основание равнобедренного треугольника равно 8 см. Медиана, проведенная к боковой стороне, разбивает треугольник на два треугольника так, что периметр одного треугольника на 2 см больше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника.

40*. Докажите, что в остроугольном треугольнике основания высот лежат на сторонах треугольника и не совпадают с его вершинами.

41*. Докажите, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведенной из вершины тупого угла, лежит на стороне треугольника, а основания высот, проведенных из вершин острых углов, — на продолжениях сторон.

§ 2. Равнобедренный треугольник

21. Теорема об углах равнобедренного треугольника.

Теорема. *Углы при основании равнобедренного треугольника равны.*

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC (рис. 81, a) и докажем, что $\angle B = \angle C$.

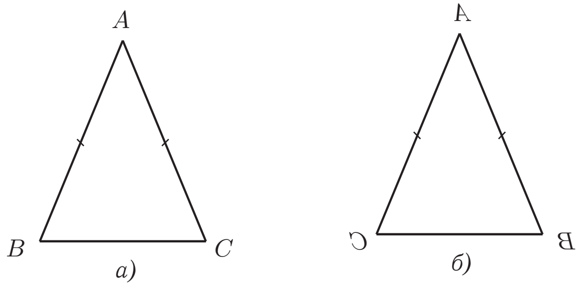


Рис. 81

Мысленно наложим на рисунок 81, a прозрачный лист, скопируем рисунок, перевернем лист (рис. 81, *б*) и вновь наложим на рисунок так, чтобы вершина A на листе совместилась с вершиной A на рисунке, а луч AB на листе совместился с лучом AC на рисунке. Ясно, что при этом луч AC на листе совместится с лучом AB на рисунке, а поскольку $AB = AC$, то точка B совместится с точкой C, а точка C — с точкой B. Иными словами, треугольник на листе полностью совместится с треугольником на рисунке. При этом угол B совместится с углом C, а значит, эти углы равны. Теорема доказана.

22. Признак равнобедренного треугольника.

Теорема. *Если два угла треугольника равны, то такой треугольник — равнобедренный.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, углы B и C которого равны (рис. 82), и докажем, что $AB = AC$.

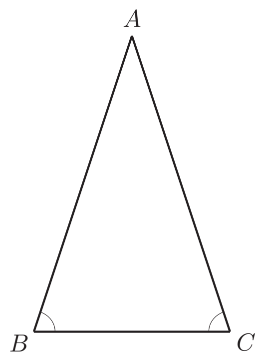


Рис. 82

Воспользуемся идеей доказательства теоремы об углах равнобедренного треугольника. Мысленно наложим на рисунок 82 прозрачный лист, скопируем рисунок, перевернем лист и вновь наложим на рисунок так, чтобы вершина B на листе совместилась с вершиной C на рисунке, а вершина C на листе — с вершиной B на рисунке. Поскольку углы B и C равны, то луч BA на листе совместится с лучом CA на рисунке, а луч CA на листе — с лучом BA на рисунке. Поэтому треугольник на листе полностью совместится с треугольником на рисунке. При этом сторона AB совместится со стороной AC, а значит, эти стороны равны. Теорема доказана.

Таким образом, равенство у треугольника двух углов является признаком, по которому можно сделать вывод о том, что этот треугольник — равнобедренный, т. е. доказанная теорема выражает *признак равнобедренного треугольника*.

23. Теорема о высоте равнобедренного треугольника.

Теорема. *Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.*

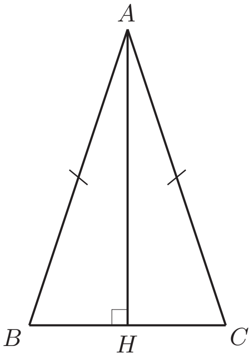


Рис. 83

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором AH — высота, проведенная к основанию BC (рис. 83). Докажем, что отрезок AH является также медианой и биссектрисой треугольника ABC.

Мысленно наложим на треугольник ABC прозрачный лист, скопируем треугольник и отрезок AH, перевернем лист и вновь наложим на треугольник ABC так, чтобы вершины A, B и C на листе совместились соответственно с вершинами A, C и B треугольника (см. доказательство теоремы об углах равнобедренного треугольника). Из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC. Следовательно, отрезок AH на листе совместится с высотой AH треугольника ABC. Поэтому отрезок BH совместится с отрезком CH, а угол BAH — с углом CAH. Значит, $BH = CH$ и $\angle BAH = \angle CAH$. Из этого следует, что отрезок AH является медианой и биссектрисой треугольника ABC. Теорема доказана.

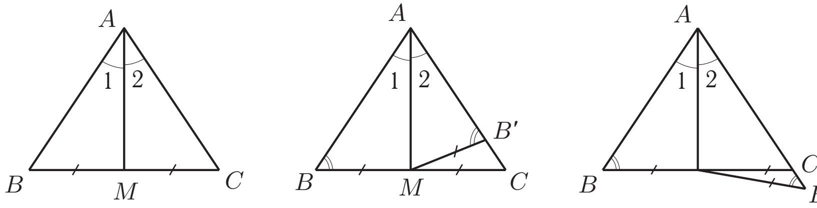
Итак, мы установили, что высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника, проведенные к основанию, совпадают. Поэтому следствиями из доказанной теоремы являются следующие утверждения:

1^0 *биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и медианой*;

2^0 *медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.*

Задача. *Доказать, что если в треугольнике биссектриса является медианой, то этот треугольник — равнобедренный.*

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором биссектриса AM является одновременно медианой (рис. 84, a), т. е. $\angle 1 = \angle 2$ и $MB = MC$. Требуется доказать, что $AB = AC$.



а) *б)* *в)*

Рис. 84

Попробуем рассуждать так. Мысленно перегнем плоскость по прямой AM так, чтобы треугольник ABM наложился на треугольник ACM. При этом луч AB совместится с лучом AC, поскольку $\angle 1 = \angle 2$, и, следовательно, точка B совместится с какой-то точкой на луче AC. Если мы докажем, что точка B совместится с точкой C, то из этого будет следовать, что $AB = AC$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный, и тем самым задача будет решена.

Но как доказать, что точка B совместится с точкой C? Допустим, что точка B совместится не с точкой C, а с какой-то другой точкой B' на луче AC. Предположим сначала, что точка B' лежит между A и C (рис. 84, *б*). Поскольку в результате перегибания угол ABM совмещается с углом $AB'M$, то $\angle ABM = \angle AB'M$, т. е.

$$\angle B = \angle AB'M. \tag{1}$$

Отрезок MB совмещается с отрезком MB', поэтому $MB' = MB$, а так как по условию $MB = MC$, то $MB' = MC$. Это означает, что треугольник $MB'C$ — равнобедренный и, следовательно, его углы при основании $B'C$ равны:

$$\angle C = \angle CB'M. \tag{2}$$

Заметим теперь, что углы $AB'M$ и $CB'M$ — смежные, поэтому $\angle AB'M + \angle CB'M = 180°$. Из этого равенства, учитывая равенства (1) и (2), получаем:

$$\angle B + \angle C = 180°. \tag{3}$$

Итак, мы получили, что сумма двух углов треугольника ABC равна $180°$. Но этого не может быть — сумма двух углов треугольника меньше $180°$ (см. п. 18).

Таким образом, наше предположение о том, что в результате перегибания по прямой AM точка B совместится с точкой B', лежащей между A и C, привело к противоречию с установленным ранее свойством углов треугольника. Это означает, что наше предположение не верно.

Если мы предположим, что точка B совместится с такой точкой B', что точка C лежит между точками A и B' (рис. 84, *в*), то снова придем к равенству (3), которое не может быть выполнено. Рассуждения для этого случая проведите самостоятельно.

Следовательно, в результате перегибания точка B обязательно совместится с точкой C. Поэтому $AB = AC$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный, что и требовалось доказать.

Задачи

42. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

43. Медиана AM треугольника ABC равна отрезку BM. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен сумме двух других углов.

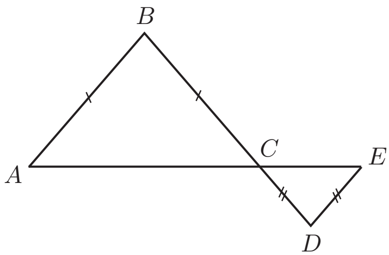


Рис. 85

44. На рисунке 85 $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что $\angle BAC = \angle CED$.

45. В треугольнике ABC $\angle A = 38°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 32°$. На стороне AC отмечены точки D и E так, что точка D лежит на отрезке AE, $BD = DA$, $BE = EC$. Найдите $\angle DBE$.

46*. Даны три точки A, B и C, лежащие на одной прямой, и точка D, не лежащая на этой прямой. Докажите, что по крайней мере два из трех отрезков AD, BD, CD не равны друг другу.

47. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC — равнобедренный.

48. В равнобедренном треугольнике DEK с основанием DK отрезок EF — биссектриса, $DK = 16$ см, $\angle DEF = 43°$. Найдите KF, $\angle DEK$, $\angle EFD$.

49*. Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его высотой, то этот треугольник — равнобедренный.

50. Докажите, что если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то медиана AM этого треугольника не является его высотой.

51*. Докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник — равнобедренный.

§ 3. Соотношения между сторонами и углами треугольника

24. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника. Рассмотрим треугольник ABC. Если стороны AB и AC равны, т. е. треугольник равнобедренный, то, как мы знаем, углы B и C также равны. А что можно сказать об углах B и C, если стороны AB и AC не равны? Пусть, например, сторона AB больше стороны

AC (рис. 86). Тогда лежащие против этих сторон углы C и B также не равны. В самом деле, если эти углы равны, то треугольник ABC — равнобедренный, а стороны AB и AC — его равные боковые стороны, т. е. $AB = AC$, что противоречит условию.

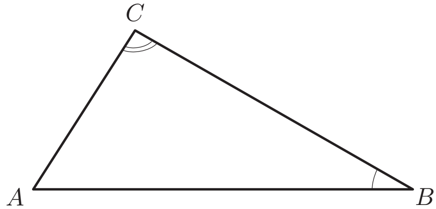


Рис. 86. Если $AB > AC$, то $\angle C > \angle B$: против большей стороны лежит больший угол

Итак, если сторона AB больше стороны AC, то углы C и B не равны друг другу. А какой из этих углов больше? На нашем рисунке видно, что больше угол C, т. е. тот угол, который лежит против большей стороны. А всегда ли это так? Оказывается, всегда. Докажем это утверждение.

Теорема. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.*

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC. Докажем, что $\angle C > \angle B$ (рис. 86).

Отложим на луче AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 87). Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B. Следовательно, угол 1 является частью угла C, а значит, $\angle C > \angle 1$. Но $\angle 1 = \angle 2$ (как углы при основании CD равнобедренного треугольника ACD), поэтому $\angle C > \angle 2$.

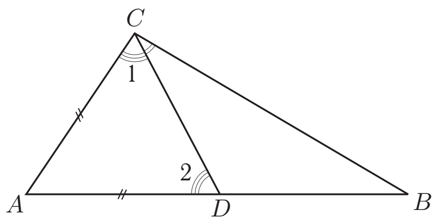


Рис. 87

Рассмотрим теперь треугольник BCD. Так как угол 2 — внешний угол этого треугольника, то $\angle 2 > \angle B$. Таким образом, $\angle C > \angle 2$, а $\angle 2 > \angle B$, поэтому $\angle C > \angle B$. Теорема доказана.

25. Обратные теоремы. Во всякой теореме различают две части: *условие* и *заключение*. Условие теоремы — это то, что дано, заключение — то, что требуется доказать.

Рассмотрим, например, теорему об углах равнобедренного треугольника. Для того чтобы выделить условие теоремы, сформулируем ее так: «если треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны». В этой теореме условием является первая часть утверждения: «если треугольник равнобедренный», а заключением — вторая часть: «то углы при его основании равны». Иными словами, дан равнобедренный треугольник и требуется доказать, что углы при его основании равны.

Теоремой, *обратной данной*, называется такая теорема, в которой условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы. Теоремой, обратной теореме об углах равнобедренного треугольника, является теорема о признаке равнобедренного треугольника: если два угла треугольника равны, то этот треугольник — равнобедренный.

Отметим, что если доказана прямая теорема, то отсюда еще не следует справедливость обратной теоремы. Более того, обратная теорема не всегда имеет место. Приведем простой пример. Мы знаем, что если $a^2 = 2$, то число a — иррациональное. Обратное утверждение: «если число a — иррациональное, то $a^2 = 2$», конечно же, неверно (см, например, задачу 15).

Докажем теорему, обратную теореме предыдущего пункта.

Теорема. *В треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона.*

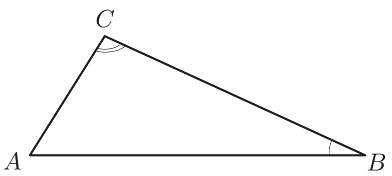


Рис. 88. Если $\angle C > \angle B$, то $AB > AC$: против большего угла лежит большая сторона

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол C больше угла B. Докажем, что $AB > AC$ (рис. 88).

Допустим, что это не так. Тогда либо $AB = AC$, либо $AB < AC$. В первом случае треугольник ABC — равнобедренный, а значит, $\angle C = \angle B$. Во втором случае по теореме предыдущего пункта $\angle C < \angle B$. И то, и другое противоречит условию теоремы: $\angle C > \angle B$. Поэтому сторона AB не может быть равной стороне AC и не может быть меньше стороны AC. Следовательно, $AB > AC$. Теорема доказана.

Следствие. *В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.*

В самом деле, гипотенуза лежит против прямого угла, а катет — против острого. Так как прямой угол больше острого, то гипотенуза больше катета.

Замечание. При доказательстве теоремы мы использовали способ рассуждений, который называется *методом доказательства от противного*. Мы предположили, что $AB \leqslant AC$, т. е. предположили противоположное (противное) тому, что хотим доказать. Исходя из этого предположения, путем рассуждений мы пришли к противоречию с условием теоремы. Это означает, что наше предположение неверно, а значит, $AB > AC$.

Такой способ рассуждений часто используется в математике при доказательстве утверждений. Может быть Вы заметили, что мы уже неоднократно им пользовались.

З а д а ч а 1. *Отрезок соединяет вершину треугольника с внутренней точкой противоположной стороны. Доказать, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник ABC, в котором отрезок AM соединяет вершину A с точкой M стороны BC (рис. 89). Пусть $AB > AC$. Требуется доказать, что $AM < AB$.

Отрезки AM и AB являются сторонами треугольника AMB. В треугольнике же из двух сторон та больше, которая лежит против большего угла. Поэтому если мы докажем, что $\angle B < \angle 1$, то из этого будет следовать, что $AM < AB$.

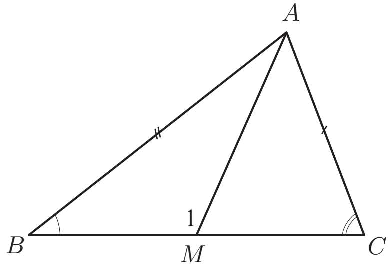


Рис. 89

Сравнить углы B и 1 можно таким образом. Угол B меньше угла C (так как $AC < AB$ по условию), а угол C меньше угла 1, так как угол 1 — внешний угол треугольника AMC. Итак, $\angle B < \angle C$ и $\angle C < \angle 1$. Следовательно, $\angle B < \angle 1$, поэтому $AM < AB$, что и требовалось доказать.

26. Неравенство треугольника. Теперь мы знаем несколько соотношений между сторонами и углами треугольника. А существует ли какое-нибудь соотношение между тремя сторонами треугольника или между тремя его углами? Начнем со сторон, а вопрос о соотношении между тремя углами запишем пока в блокнот.

Нарисуем треугольник ABC (рис. 90, *а*) и представим себе, что нам нужно по кратчайшему пути вдоль сторон треугольника ABC пройти из точки A в точку B. Как мы пойдем: по стороне AB, или сначала по AC, а затем по CB? Ясно, что по AB — этот путь короче. Вот мы и получили соотношение между тремя сторонами треугольника: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Сформулируем это утверждение в виде теоремы и докажем ее.

Т е о р е м а. *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.*

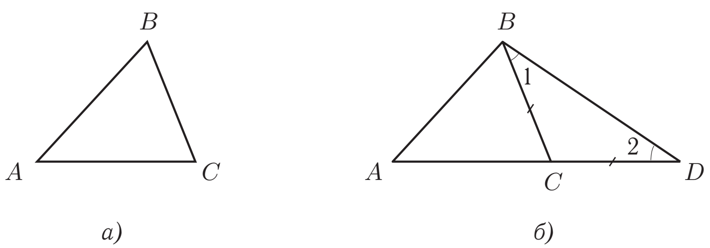


Рис. 90

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и докажем, например, что $AB < AC + CB$. Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный стороне CB (рис. 90, *б*). Так как треугольник BCD — равнобедренный ($BC = CD$), то $\angle 1 = \angle 2$, а поскольку $\angle ABD > \angle 1$, то $\angle ABD > \angle 2$. В треугольнике ABD против большего угла лежит бо̀льшая сторона, поэтому $AB < AD$. Но $AD = AC + CD = AC + CB$. Следовательно, $AB < AC + CB$. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно сформулировать иначе:
для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства:

$$AB < AC + CB, \quad BC < BA + AC, \quad CA < CB + BA.$$

Каждое из этих неравенств называется *неравенством треугольника*.

Воспользуемся неравенством треугольника для решения такой задачи.

Задача 2. *Доказать, что если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $MB + MC < AB + AC$.*

Решение. Обратимся к рисунку 91, на котором отрезок MD является продолжением отрезка BM. Воспользуемся неравенством треугольника применительно к треугольникам ABD и MDC. В треугольнике ABD $BD < AB + AD$, или $MB + MD < AB + AD$. Отсюда получаем:

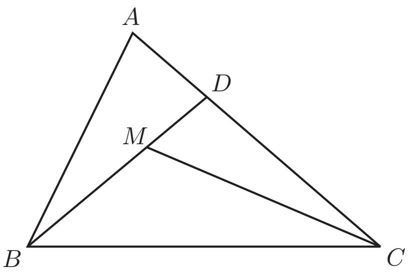


Рис. 91

$$MB < AB + AD - MD. \tag{1}$$

В треугольнике MDC

$$MC < MD + DC. \tag{2}$$

Ясно, что сумма слагаемых, стоящих в левых частях неравенств (1) и (2), меньше суммы слагаемых, стоящих в правых частях этих неравенств, т. е. $MB + MC < AB + AD - MD + MD + DC$, или $MB + MC < AB + AD + DC$. Но $AD + DC = AC$, поэтому $MB + MC < AB + AC$, что и требовалось доказать.

Задачи

52. Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершины, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.

53. Докажите, что медиана треугольника не меньше высоты, проведенной из той же вершины.

54*. Высота AA_1 треугольника ABC не меньше стороны BC, а высота BB_1 не меньше стороны AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный и прямоугольный.

55. Дан треугольник ABC с тупым углом C, K — произвольная внутренняя точка стороны AC. Докажите, что $BK > BC$ и $BK < AB$.

56*. Докажите, что любой отрезок с концами на разных сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон этого треугольника.

57*. Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $AD = AB$. Докажите, что $AC > AB$.

58. Отрезок BB_1 — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BA > B_1A$ и $BC > B_1C$.

59. Отрезок AH — перпендикуляр к прямой a, точки M_1 и M_2, отличные от точки H, лежат на прямой a. Докажите, что: а) если $HM_1 = HM_2$, то $AM_1 = AM_2$; б) если $HM_1 < HM_2$, то $AM_1 < AM_2$; в) если $AM_1 = AM_2$, то $HM_1 = HM_2$; г) если $AM_1 < AM_2$, то $HM_1 < HM_2$.

60*. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, $AB > AC$. Докажите, что $\angle ADB > \angle ADC$ и $BD > CD$.

61. В треугольнике ABC проведены биссектриса AD и высота AH, $AB < AC$. Докажите, что точка H лежит на луче DB.

62*. Отрезки AM, AD и AH — медиана, биссектриса и высота треугольника ABC, $AB \neq AC$. Докажите, что точка D лежит между точками M и H.

63. Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 8 см и 2 см; б) 10 см и 5 см; в) 5 см и 3 см.

64. Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

65. Докажите, что если $AB = AC + CB$, то точки A, B и C лежат на одной прямой.

66. Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух сторон равна 4 см, а один из его внешних углов — острый. Найдите стороны треугольника.

67. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отмечены соответственно точки A_1, B_1 и C_1, отличные от вершин треугольника. Докажите, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ меньше периметра треугольника ABC.

68. Стороны BC и AD треугольников ABC и ABD пересекаются. Докажите, что $BC + AD > AC + BD$.

69. Одна сторона треугольника равна 1,9 дм, а другая — 0,7 дм. Найдите третью сторону, зная, что ее длина в дециметрах выражается целым числом.

70. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин меньше периметра треугольника.

71*. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе его угла A, и на этой прямой взята произвольная точка M, отличная от A. Докажите, что периметр треугольника MBC больше периметра треугольника ABC.

72*. Точки B и C лежат по одну сторону от прямой a. Укажите на прямой a такую точку A, что сумма $AB + AC$ меньше суммы $MB + MC$, где M — любая точка прямой a, отличная от A.

§ 4. Признаки равенства треугольников

27. Три признака равенства треугольников. Рассмотрим три признака равенства треугольников.

Теорема 1 (*первый признак равенства треугольников*). *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 92). Докажем, что эти треугольники равны. Мысленно наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложились на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Это можно сделать, так как углы A и A_1 равны. Поскольку $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC совместится со стороной A_1C_1, в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники полностью совместятся, а значит, они равны. Теорема доказана.

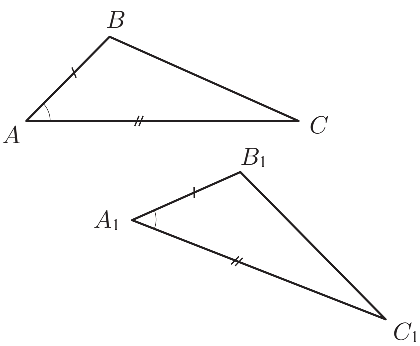


Рис. 92

Теорема 2 (*второй признак равенства треугольников*). *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 93). Докажем, что эти треугольники равны. Мысленно наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AB — с равной ей стороной A_1B_1, а вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то сторона AC наложится на луч A_1C_1, а сторона BC —

на луч B_1C_1. Поэтому вершина C — общая точка сторон AC и BC — совместится с общей точкой сторон A_1C_1 и B_1C_1, т. е. с точкой C_1. Значит, стороны AC и BC совместятся соответственно со сторонами A_1C_1 и B_1C_1. Итак, треугольники полностью совместятся, и следовательно, они равны. Теорема доказана.

Теорема 3 (*третий признак равенства треугольников*). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. При доказательстве двух предыдущих теорем мы накладывали один треугольник на другой так, чтобы совместились их равные углы. Но сейчас нам ничего не известно об углах данных треугольников. Поэтому мы окажемся в затруднительном положении, если попытаемся совместить их наложением.

Попробуем рассуждать иначе. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (рис. 94).

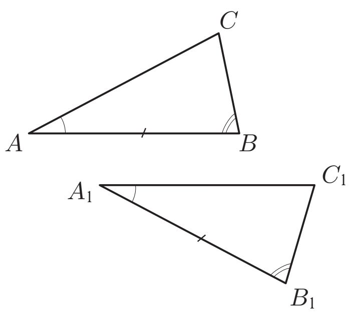


Рис. 93

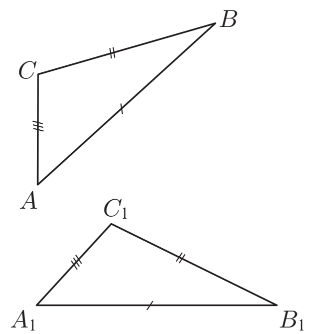
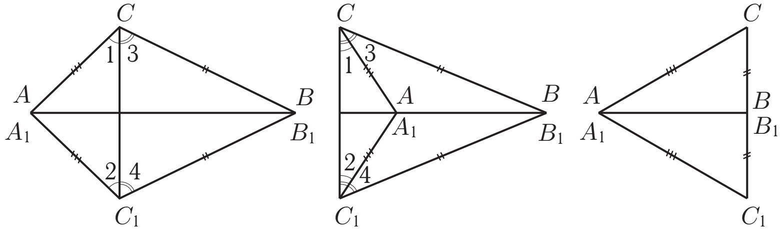


Рис. 94

Приложим треугольник ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершины A и A_1, B и B_1 совместились, а вершины C и C_1 оказались по разные стороны от прямой A_1B_1 (рис. 95). Проведем отре-



а) *б)* *в)*

Рис. 95

зок CC_1. В результате получим два равнобедренных треугольника: A_1C_1C и B_1C_1C (рис. 95, *а, б*), или один равнобедренный треугольник (рис. 95, *в*; этот случай рассмотрите самостоятельно). Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, а значит, $\angle C = \angle C_1$. Итак, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle C = \angle C_1$, поэтому треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Теорема доказана.

Воспользуемся признаками равенства треугольников для решения двух задач.

Задача 1. *На сторонах угла MON отмечены точки A, B, C и D так, что $OA = OB$, $AC = BD$* (рис. 96, *а*). *Отрезки AD и BC пересекаются в точке E. Доказать, что луч OE — биссектриса угла MON.*

Решение. Глядя на рисунок 96, *а*, можно предположить, что $\Delta OAE = \Delta OBE$, $\Delta OCE = \Delta ODE$, $\Delta ACE = \Delta BDE$. Но как доказать хотя бы одно из этих равенств? Ни одним из признаков равенства треугольников здесь воспользоваться не удается.

Приглядимся к рисунку внимательнее. Рассмотрим треугольники OAD и OBC. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. В самом деле, угол O у них общий, $OA = OB$ по условию, $OD = OB + BD = OA + AC = OC$. Из равенства этих треугольников следует, что (рис. 96, *б*)

$$\angle OAD = \angle OBC, \quad \angle ODA = \angle OCB. \tag{1}$$

Теперь мы можем доказать одно из выписанных выше равенств: $\Delta ACE = \Delta BDE$. Действительно, $AC = BD$ по условию, $\angle OCB = \angle ODA$, $\angle CAD = 180^\circ - \angle OAD = 180^\circ - \angle OBC = \angle DBC$ (см. (1)). Следовательно, треугольники ACE и BDE равны по второму признаку равенства треугольников. Поэтому $CE = DE$ (рис. 96, *в*).

Теперь мы видим, что треугольники OCE и ODE равны по третьему признаку равенства треугольников. Из этого следует, что $\angle EOC = \angle EOD$, т. е. луч OE — биссектриса угла MON, что и требовалось доказать.

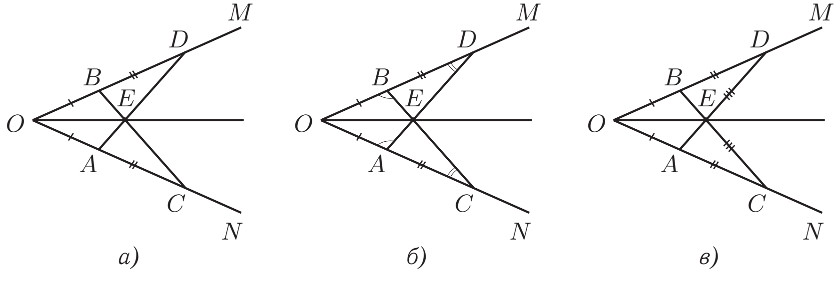


Рис. 96

На этой задаче основан один из способов построения биссектрисы угла (рис. 97).

Один из способов построения середины отрезка (рис. 98) основан на следующей задаче.

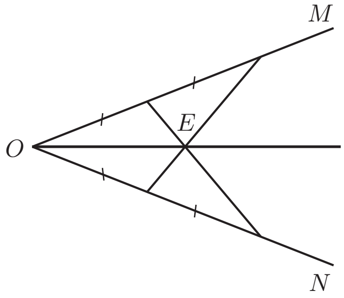


Рис. 97. Луч OE — биссектриса угла MON

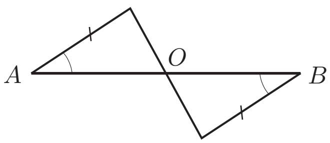


Рис. 98. Точка O — середина отрезка AB

З а д а ч а 2. *Точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB и расположены так, что $AC = BD$ и $\angle BAC = \angle ABD$* (рис. 99, *а*). *Доказать, что отрезки AB и CD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*

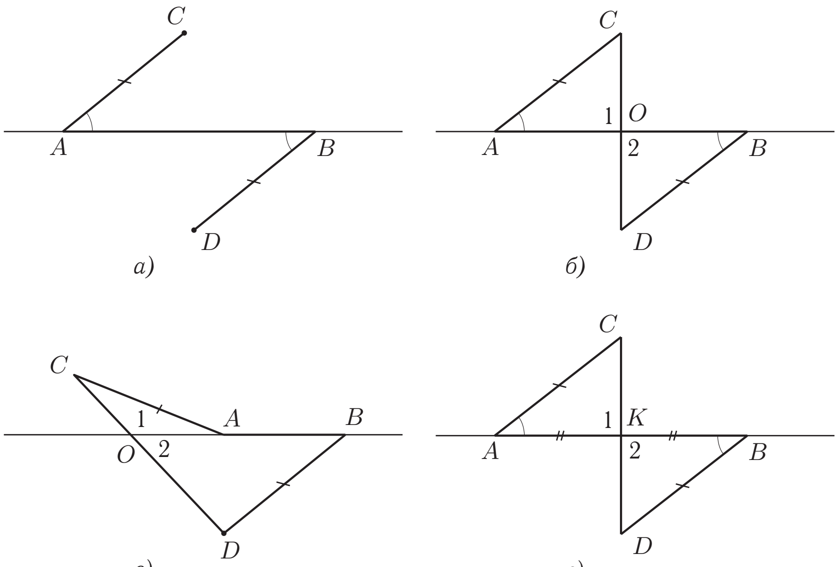


Рис. 99

Решение. Проведем отрезок CD, обозначим буквой O точку пересечения этого отрезка с прямой AB и попытаемся сравнить треугольники ACO и BDO (рис. 99, *б*). В этих треугольниках $AC = BD$, $\angle A = \angle B$ (по условию) и $\angle 1 = \angle 2$ (как вертикальные углы). Можно ли на основании этих равенств сделать вывод о равенстве треугольников ACO и BDO? Мы знаем признак равенства двух треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам. Но в данном случае угол 1 является не прилежащим, а противолежащим стороне AC (и точно также угол 2 — противолежащий стороне BD). Поэтому на основе этих равенств мы не можем сделать заключение о равенстве треугольников ACO и BDO. Кроме того, на нашем рисунке отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Но всегда ли так будет? Не может ли в каком-то случае получиться так, что отрезок CD пересечет прямую AB в точке O, лежащей вне отрезка AB (рис. 99, *в*)? В таком случае углы 1 и 2 окажутся вовсе не вертикальными, а смежными. Итак, рассмотренный подход не привел нас к решению задачи.

Попробуем применить другой способ. Отметим середину K отрезка AB (рис. 99, *г*) и соединим ее с точками C и D. Получим треугольники ACK и BDK. Они равны по двум сторонам и углу между ними ($AC = BD$ и $\angle CAK = \angle DBK$ по условию, $AK = KB$, поскольку точка K — середина отрезка AB). Следовательно, $CK = DK$ и $\angle 1 = \angle 2$. Угол CKB является смежным с углом 1, поэтому $\angle CKB + \angle 1 = 180^\circ$, а так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle CKB + \angle 2 = 180^\circ$. Отсюда следует, что угол CKD — развернутый, а значит, точки C, K и D лежат на одной прямой.

Таким образом, отрезки AB и CD пересекаются в точке K и делятся этой точкой пополам, что и требовалось доказать.

Замечание. При решении этой задачи мы столкнулись с весьма любопытной ситуацией. Путем рассуждений мы установили, что середина K отрезка AB на рисунке 99, *г* и точка O пересечения прямой AB с отрезком CD на рисунке 99, *б* — это одна и та же точка. Иными словами, указанные рисунки отличаются друг от друга только обозначениями. Тем не менее, первый рисунок не привел нас к доказательству утверждения, а второй — привел. Подумайте об этом. Как ни странно, подобные ситуации в математике встречаются довольно часто.

28. Есть ли другие признаки равенства треугольников?. При решении задачи 2 предыдущего пункта мы сначала провели отрезок CD и обозначили буквой O точку его пересечения с прямой AB (рис. 99, *б*). В результате образовались два треугольника, причем сторона и два угла — прилежащий и противолежащий для этой стороны — одного треугольника оказались соответственно равными стороне и двум углам — прилежащему и противолежащему для этой стороны — другого треугольника (если, конечно, углы 1 и 2 — вертикальные, как на рисунке 99, *б*, а не смежные, как на рисунке 99, *в*). Путем сложных рассуждений мы доказали, что эти треугольники равны.

Может быть, мы обнаружили новый признак равенства треугольников? Давайте поставим вопрос шире.

Условимся называть стороны и углы треугольника *элементами* этого треугольника. Каждый из трех известных нам признаков равенства треугольников позволяет сделать вывод о равенстве двух треугольников, если установлено, что три элемента одного треугольника соответственно равны трем элементам другого треугольника. В первом признаке такими элементами были две стороны и угол между ними, во втором — сторона и два прилежащих к ней угла, в третьем — три стороны. Возникает вопрос: а будут ли равны два треугольника, если какие-то другие три элемента одного треугольника равны соответствующим элементам другого треугольника? Иначе говоря, есть ли другие признаки равенства двух треугольников по трем элементам?

Сначала подумаем, какие еще есть возможности. Если взять одну сторону и два угла, то оба они могут быть прилежащими к этой стороне (такой случай рассматривается во втором признаке равенства треугольников), и может быть другой вариант: один из углов является прилежащим, а другой — противолежащим для этой стороны (с этим мы столкнулись при решении задачи 2). Таким образом, возможен признак равенства треугольников по стороне и двум углам, один из которых является прилежащим, а другой — противолежащим для этой стороны.

Далее, если взять две стороны и угол, то он может быть заключен между этими сторонами (такой случай рассматривается в первом признаке равенства треугольников), а может быть противолежащим одной из сторон. Тем самым, возникает вопрос о признаке равенства треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

Наконец, в качестве трех элементов треугольника можно взять три угла и рассмотреть вопрос о признаке равенства треугольников по трем углам.

Итак, есть три возможности. Посмотрим, какие из них дают признаки равенства треугольников. Начнем с первой.

Гипотеза. *Если сторона и два угла — прилежащий и противолежащий для этой стороны — одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам — прилежащему и противолежащему для этой стороны — другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Попробуем доказать, что эта гипотеза верна. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 100, a). Мы хотим доказать, что эти треугольники равны.

Мысленно наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась вершиной A_1, а стороны AB и AC наложились на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Это можно сделать, так как углы A и A_1 равны. Поскольку $AB = A_1B_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, в частности, совместятся вершины B и B_1. Остается доказать, что вершины C и C_1 также совместятся. Если предположить,

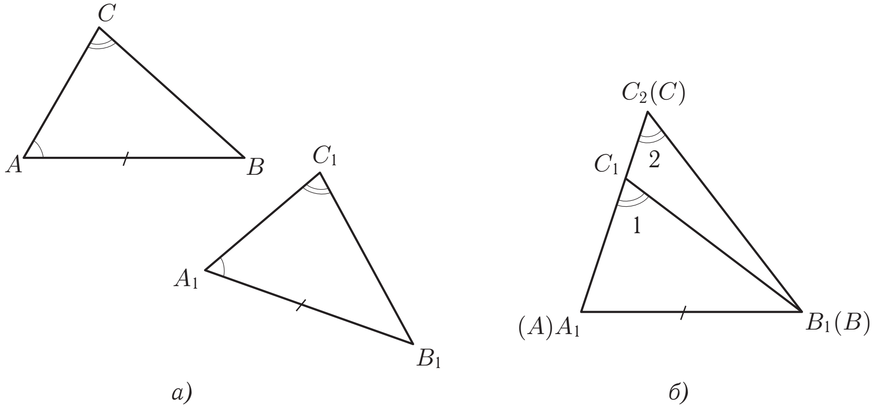


Рис. 100. а) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$

что вершина C совместится не с точкой C_1, а с какой-то другой точкой C_2 на луче A_1C_1 (рис. 100, *б*), то получится треугольник $B_1C_1C_2$, у которого внешний угол равен углу треугольника, не смежному с этим внешним углом (на рисунке 100, *б* $\angle 1 = \angle 2$). Но этого не может быть, поэтому вершина C совместится с вершиной C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, а значит, они равны.

Таким образом, наша гипотеза оказалась верной: имеет место еще один признак равенства треугольников — по стороне и двум углам, один из которых является прилежащим, а другой — противолежащим для этой стороны. Назовем его *четвертым признаком равенства треугольников*.

Попробуем теперь доказать следующее утверждение.

Гипотеза. *Если две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны*.

Попробуем доказать, что эта гипотеза верна. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle C = \angle C_1$ (рис. 101, *а*). Мысленно наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина C совместилась с вершиной C_1, а стороны CA и CB наложились на лучи C_1A_1 и C_1B_1. Это можно сделать, так как углы C и C_1 равны. Поскольку $AC = A_1C_1$, то сторона AC совместится со стороной A_1C_1, в частности, совместятся вершины A и A_1. Остается доказать, что вершины B и B_1 также совместятся. Но так ли это? Допустим, что точка B совместилась не с точкой B_1, а с какой-то другой точкой B_2 на луче C_1B_1 (рис. 101, *б*). Тогда треугольник $A_1B_1B_2$ — равнобедренный.

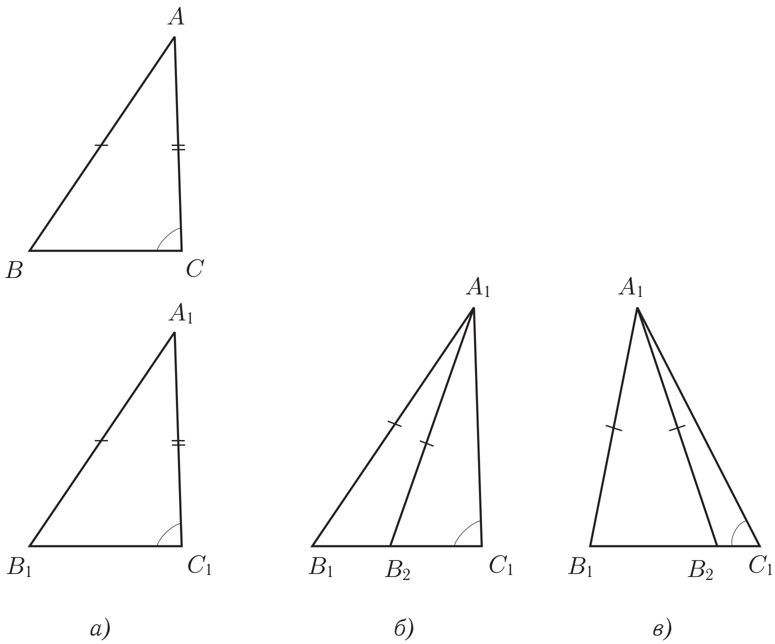
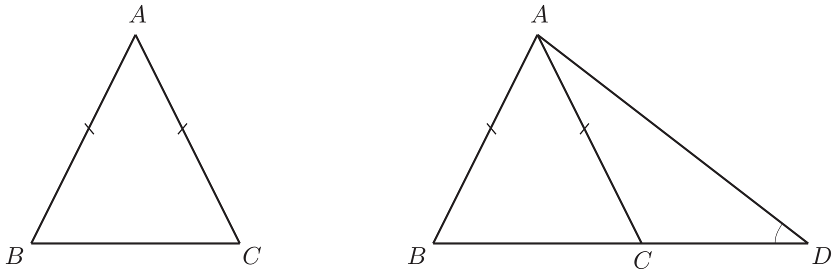


Рис. 101

Поскольку углы при основании равнобедренного треугольника — острые, то смежные с ними углы — тупые. Поэтому либо угол B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ — тупой (если точка B_1 лежит между C_1 и B_2), либо угол B_2 треугольника $A_1B_2C_1$ — тупой (если точка B_2 лежит между C_1 и B_1). Принимая во внимание соотношение между сторонами и углами треугольника, и в том и в другом случае получаем: $A_1B_1 = A_1B_2 < A_1C_1$. Следовательно, если $A_1B_1 \geqslant A_1C_1$, то точки B и B_1 должны совместиться. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, а значит, они равны.

Если же $A_1B_1 < A_1C_1$ (и следовательно, $AB < AC$) (рис. 101, *в*), то никакого противоречия не видно. Похоже, что в этом случае наша гипотеза неверна. Попробуем это доказать, т. е. указать два таких треугольника, которые удовлетворяют всем нашим условиям, но не равны друг другу.

Рассмотрим какой-нибудь равнобедренный треугольник ABC с основанием BC (рис. 102, *а*). Продолжим сторону BC, возьмем на ее продолжении произвольную точку D (рис. 102, *б*) и проведем отрезок AD. Мы получим два треугольника: ABD и ACD, у которых общие сторона AD и угол D и, кроме того, равны стороны AB и AC. Таким образом, стороны AD и AB и угол D, противолежащий стороне AB, треугольника ABD соответственно равны сторонам AD



а) *б)*

Рис. 102

и AC и углу D, противолежащему стороне AC, треугольника ACD. Однако сами треугольники, очевидно, не равны.

Итак, наша гипотеза в том виде, как мы ее сформулировали, не верна. Вместе с тем мы доказали, что

признак равенства треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них (назовем его *пятым признаком равенства треугольников*), *имеет место в том случае* (*и*, как мы увидим в п. 41, *только в этом случае), когда сторона, противолежащая этому углу, не меньше второй из данных сторон*. В частности, он имеет место тогда, когда указанный угол — прямой или тупой.

Осталось выяснить, имеет ли место признак равенства треугольников по трем углам. На первый взгляд кажется, что этот признак не имеет места. В самом деле, рассмотрим два неравных квадрата (рис. 103, *а*). Проведем диагонали AC и A_1C_1 и рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 103, *б*). Углы этих треугольников соответственно равны: в каждом треугольнике один угол — прямой, а два другие по 45°. Но сами треугольники, очевидно, не равны.

А теперь откроем наш блокнот. Мы видим в нем такой вопрос: есть ли квадрат? На этот вопрос мы пока не нашли ответа. Следовательно, проведенное только что рассуждение не дает ответа и на вопрос о справедливости признака равенства треугольников по трем углам. Поэтому, пока наш блокнот открыт, запишем в него еще один вопрос:

имеет ли место признак равенства треугольников по трем углам?

Замечание 1. Мы обнаружили, что вторая из наших гипотез (в том виде, как она была сформулирована) неверна: мы привели пример двух неравных треугольников, которые, однако, удовлетворяют всем нашим условиям. Такой пример, который показывает, что какое-то утверждение неверно, называется *контрпримером* для этого утверждения.

Замечание 2*. Вспомним задачу, которую мы решили в пункте 23: «Доказать, что если в треугольнике биссектриса является медианой, то этот треугольник — равнобедренный». Решив эту зада-

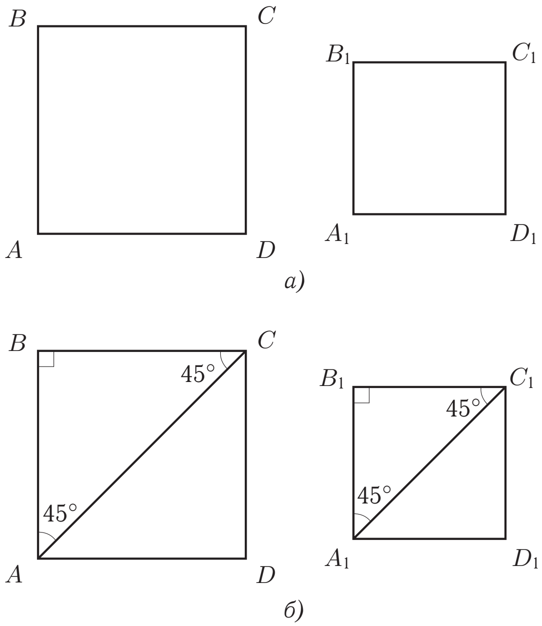


Рис. 103. $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — квадраты, $AB \neq A_1B_1$

чу, мы фактически доказали, что треугольники ABM и ACM равны (см. рис. 84). При этом мы пользовались тем, что в этих треугольниках $\angle 1 = \angle 2$, $MB = MC$ и сторона AM — общая. Таким образом, мы исходили из того, что две стороны (MB и AM) и угол, противолежащий одной из этих сторон (стороне MB), одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, т. е. исходили из условий, которые сформулированы в пятом признаке равенства треугольников. Но пятый признак равенства треугольников имеет место *только в том случае*, когда сторона, противолежащая данному углу, не меньше второй из данных сторон. В нашем же случае неравенство $MB \geqslant AM$ может и не выполняться. Почему же, несмотря на это обстоятельство, нам удалось доказать равенство указанных треугольников?

Разгадка здесь состоит вот в чем. Помимо упомянутых соотношений между элементами треугольников ABM и ACM, нам было дано еще одно равенство: $\angle AMB + \angle AMC = 180°$. Попробуйте самостоятельно разобраться в том, к чему это приводит.

29. Признаки равенства треугольников, использующие медианы, биссектрисы и высоты. Количество признаков равенства треугольников возрастает, если наряду с элементами (сторонами и углами) треугольника использовать другие отрезки, связанные с треугольником: медианы, биссектрисы и высоты. Рассмотрим несколько примеров.

З а д а ч а 3. *Доказать, что два треугольника равны, если две стороны и медиана, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, где AM и A_1M_1 — медианы этих треугольников (рис. 104). Докажем, что эти треугольники равны.

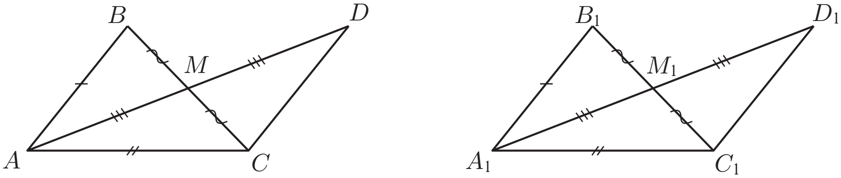


Рис. 104

На продолжениях медиан AM и A_1M_1 отметим точки D и D_1 так, что $DM = AM = A_1M_1 = D_1M_1$. Треугольники ABM и CDM равны по двум сторонам и углу между ними ($AM = DM$ по построению; $BM = CM$, так как точка M — середина отрезка BC; углы с вершиной M в этих треугольниках равны как вертикальные). Поэтому $AB = CD$.

Аналогично, из равенства треугольников $A_1B_1M_1$ и $C_1D_1M_1$ следует, что $A_1B_1 = C_1D_1$, а так как $AB = A_1B_1$, то $CD = C_1D_1$.

Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трем сторонам ($AC = A_1C_1$ по условию; $CD = C_1D_1$ согласно доказанному; $AD = 2AM = 2A_1M_1 = A_1D_1$). Поэтому $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$. Следовательно, треугольники CAM и $C_1A_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $CM = C_1M_1$. Из этого следует, что $BC = 2CM = 2C_1M_1 = B_1C_1$.

Итак, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеем: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам. Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е. Мы установили, что имеет место признак равенства треугольников по двум сторонам и медиане, проведенным из одной вершины. Возникает такой вопрос: а что, если медиану в этом признаке заменить на биссектрису или на высоту — сохранится ли признак равенства треугольников? Иначе говоря, справедливы ли следующие утверждения:

1^0 если две стороны и биссектриса, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники равны;

2^0 если две стороны и высота, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники равны?

Попробуем доказать эти утверждения. Начнем с первого.

1^0. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с биссектрисами AM и A_1M_1, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$ (рис. 105, *а*). Если бы удалось доказать, что углы A и A_1 или стороны BC и B_1C_1 равны, то эти треугольники оказались бы равными по первому или третьему признакам равенства треугольников. Интуитивно понятно, что если стороны AB и AC треугольника ABC сдвинуть или раздвинуть (рис. 105, *б*), то точки B, C и M перестанут лежать на одной прямой, поэтому углы A и A_1, а также стороны BC и B_1C_1 не могут быть неравными. Но как это доказать?

Допустим, что углы A и A_1 не равны друг другу. Пусть, например, $\angle A < \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Попробуем доказать, что в этом случае $AM \neq AM_1$.

Мысленно наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы луч AM наложился на луч A_1M_1, а вершины B и B_1 оказались лежащими по одну сторону от отрезка AM (рис. 105, *в*). Обозначим буквами P и Q точки пересечения отрезка B_1C_1 с лучами AB и AC. В треугольнике APQ хотя бы один из углов P, Q — острый. Если, например, угол P — острый, то смежный с ним угол APB_1 — тупой. Поэтому сторона AB_1 треугольника APB_1 больше, чем AP. Но $AB_1 =$ $= AB$. Следовательно, $AB > AP$, а значит, точка P лежит на отрезке AB. Если и угол Q треугольника APQ — острый, то точка Q лежит

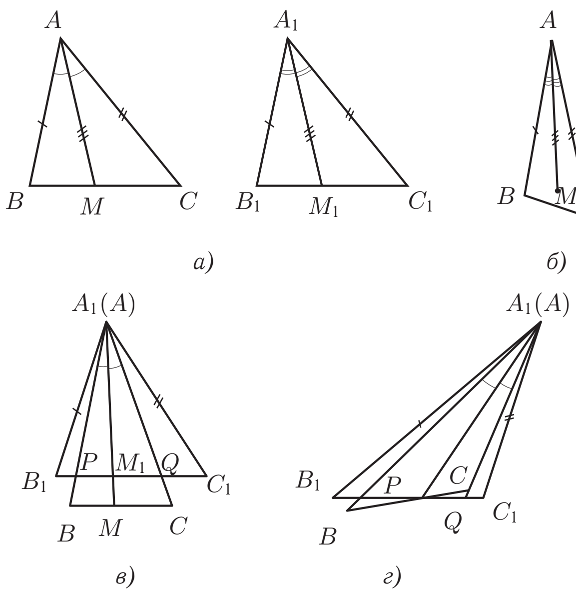


Рис. 105

на отрезке AC — это доказывается аналогично. Итак, в этом случае точки P и Q лежат по одну сторону от прямой BC. Поэтому точка M_1 пересечения отрезка B_1C_1 с лучом AM является внутренней точкой отрезка AM, т.е. $AM \neq AM_1$, что и требовалось доказать.

Наши рассуждения останутся в силе и в том случае, когда угол Q треугольника APQ — прямой (объясните, почему). Но если этот угол — тупой, то ничего не получится: точки P и Q в этом случае могут оказаться лежащими по разные стороны от прямой BC (рис. 105, *г*). Здесь требуются какие-то другие, более сложные рассуждения. Обратим внимание и на такое обстоятельство: мы фактически не пользовались тем, что луч AM — биссектриса угла A! По-существу, нам важно было лишь, что точки B_1 и C_1 лежат вне угла BAC. Ясно, что для доказательства нашего утверждения в общем случае нужно знать какие-то свойства биссектрисы угла, которые нам пока не известны. Поэтому откроем блокнот и запишем в него вопрос:

имеет ли место признак равенства треугольников по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины?

Обратимся ко второму утверждению.

2^0. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с высотами AH и A_1H_1, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AH = A_1H_1$ (рис. 106). Попробуем доказать, что углы A и A_1 этих треугольников равны, а затем воспользуемся первым признаком равенства треугольников.

Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по пятому признаку равенства треугольников ($AB = A_1B_1$, $AH = A_1H_1$, $\angle AHB = \angle A_1H_1B_1 = 90°$). Следовательно, $\angle BAH = \angle B_1A_1H_1$. Аналогично доказывается, что $\angle CAH = \angle C_1A_1H_1$. Казалось бы, из этого можно сделать такой вывод: $\angle A = \angle BAH + \angle CAH = \angle B_1A_1H_1 + \angle C_1A_1H_1 = \angle A_1$. Но не может ли получиться так, например, что $\angle A = \angle BAH + \angle CAH$, а $\angle A_1 = \angle B_1A_1H_1 - \angle C_1A_1H_1$? Если может, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ окажутся неравными, а утверждение 2^0 — ошибочным!

Попробуем привести контрпример для утверждения 2^0, основанный на наших соображениях. Рассмотрим произвольный равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC$, отрезок AH — высота треугольника (рис. 107). Отметим на продолжении стороны BC какую-

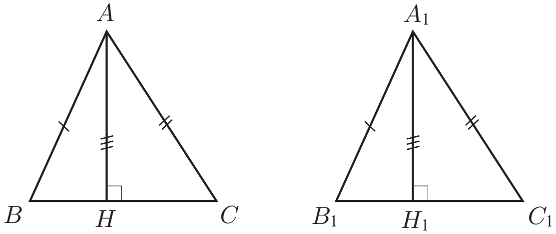


Рис. 106

нибудь точку D. Тогда в треугольниках ABD и ACD имеем: $AB = AC$, AD — общая сторона, AH — общая высота. Таким образом, треугольники ABD и ACD удовлетворяют условию утверждения 2^0, но при этом сами треугольники, очевидно, не равны. Следовательно, утверждение 2^0 ошибочно.

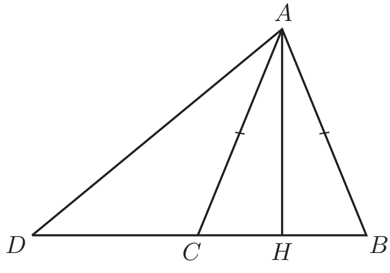


Рис. 107

Приведем теперь пример признака равенства треугольников, в формулировке которого используются не только отрезки, но и углы.

З а д а ч а 4. *Доказать, что два треугольника равны, если сторона, прилежащий к ней угол и высота, проведенная к этой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне, другого треугольника.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $BH = B_1H_1$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников (рис. 108). Докажем, что эти треугольники равны.

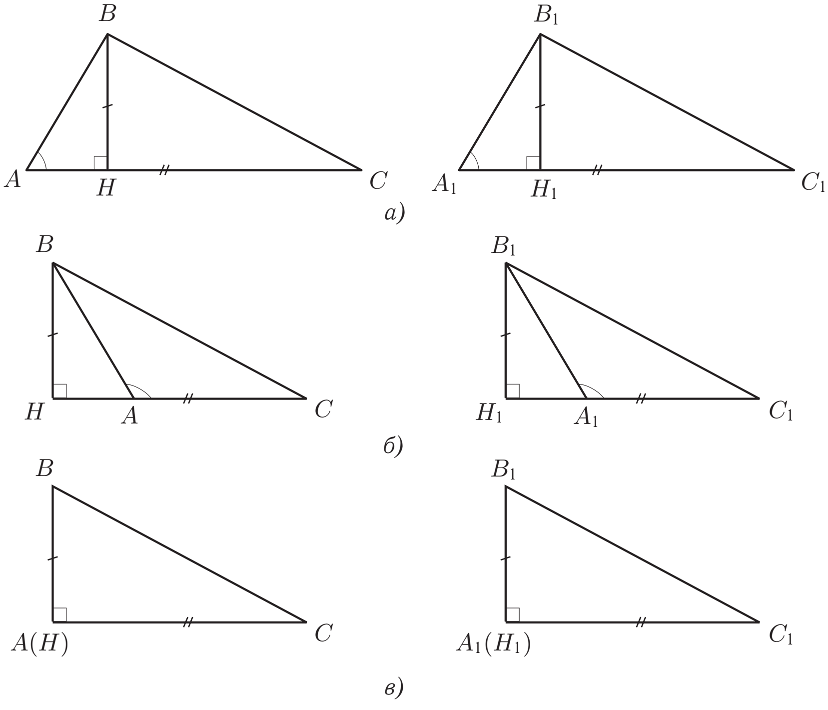


Рис. 108

Рассмотрим сначала случай, когда углы A и A_1 — острые (рис. 108, *а*). В этом случае треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по четвертому признаку равенства треугольников ($BH = B_1H_1$, $\angle BHA = \angle B_1H_1A_1 = 90^\circ$, $\angle A = \angle A_1$). Отсюда следует, что $AB = A_1B_1$.

Так как $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

Если углы A и A_1 — тупые (рис. 108, *б*), то снова треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по четвертому признаку равенства треугольников, но только теперь равенство углов BAH и $B_1A_1H_1$ не является данным по условию задачи, а следует из того, что эти углы — смежные с равными углами CAB и $C_1A_1B_1$. Дальнейший ход рассуждений такой же, как и в случае, когда углы A и A_1 — острые.

Наконец, если углы A и A_1 — прямые (рис. 108, *в*), то высота BH совпадает со стороной BA треугольника ABC (т. е. совпадают точки H и A), а высота B_1H_1 совпадает со стороной B_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$. В этом случае треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$).

Итак, во всех случаях треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Утверждение доказано.

Задачи

73. На сторонах равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF так, как показано на рисунке 109. Точки D, E и F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

74. Стороны равностороннего треугольника ABC продолжены так, как показано на рисунке 110, на равные отрезки BD, CE и AF. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

75. Докажите, что в равных треугольниках: а) медианы, проведенные к равным сторонам, равны; б) биссектрисы, проведенные из вер-

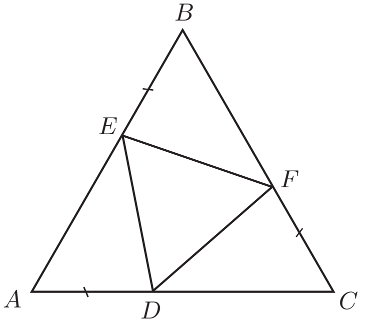


Рис. 109

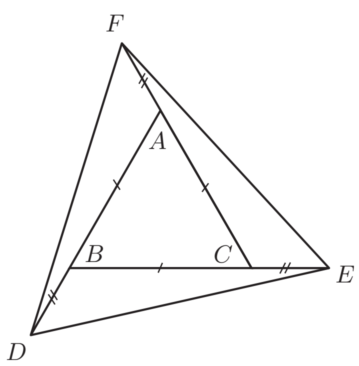


Рис. 110

шин равных углов, равны; в) высоты, проведенные из вершин равных углов, равны.

76. Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) медианы, проведенные к боковым сторонам, равны; б) биссектрисы, проведенные из вершин основания, равны; в) высоты, проведенные из вершин основания, равны.

77. Точки M и P лежат по одну сторону от прямой b. Перпендикуляры MN и PQ, проведенные к прямой b, равны. Точка O — середина отрезка NQ. Докажите, что $\angle OMP = \angle OPM$; найдите $\angle NOM$, если $\angle MOP = 105°$.

78. Начертите равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, проведите медиану BD и отметьте на сторонах AB и CB точки E и F так, что $AE = CF$. Проведите отрезки ED и FD и назовите все пары равных треугольников, которые получились на рисунке. Ответ обоснуйте.

79. Начертите отрезки AC и BD, пересекающиеся в точке O и делящиеся этой точкой пополам. Проведите отрезки AB, BC, CD, DA и назовите все пары равных треугольников, которые получились на рисунке. Ответ обоснуйте.

80. Начертите угол с вершиной A и отметьте на одной его стороне точки B и C, а на другой — точки E и D так, что $AB = AE$, $AC = AD > AB$. Проведите отрезки BD, CE, CD, обозначьте точку пересечения отрезков BD и CE буквой O и назовите все пары равных треугольников, которые получились на рисунке. Ответ обоснуйте.

81. В треугольниках ABC и ADC стороны BC и AD равны и пересекаются в точке O, $\angle OAC = \angle OCA$. Докажите, что треугольники ABO и CDO равны.

82. На рисунке 111 $\angle DBC = \angle DAC$, $BO = AO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

83. На рисунке 112 $AB = CD$, $AC = BD$. Назовите все пары равных треугольников, изображенных на этом рисунке. Ответ обоснуйте.

84. На рисунке 113 $AB = CD$, $AD = BC$, BE — биссектриса угла ABC, DF — биссектриса угла ADC. Назовите все пары равных треугольников, изображенных на этом рисунке. Ответ обоснуйте.

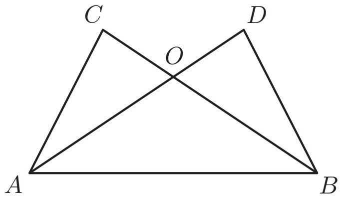


Рис. 111

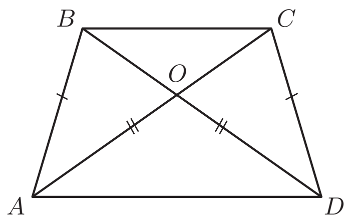


Рис. 112

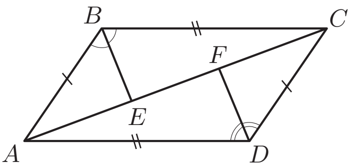


Рис. 113

85. Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. На отрезках AC и BD отмечены точки K и K_1 так, что $AK = BK_1$. Докажите, что: а) $OK = OK_1$; б) точка O лежит на прямой KK_1.

86. На рисунке 114 $OC = OD$, $OB = OE$. Докажите, что $AB = EF$. Объясните способ измерения ширины озера (отрезка AB), основанный на этом факте.

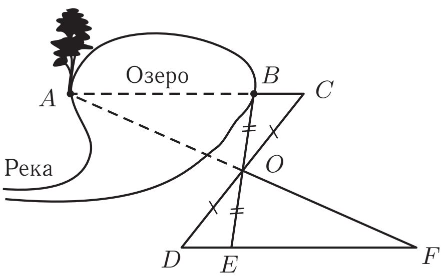


Рис. 114

87. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что $OC = OD$, если $AC = AO = BO = BD$.

88. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

89*. Докажите, что если угол, прилежащая к нему сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.

90*. Две стороны треугольника не равны друг другу. Докажите, что медиана, проведенная из их общей вершины, составляет с меньшей из сторон больший угол.

91*. В треугольнике ABC проведен отрезок AM, соединяющий вершину A с произвольной точкой M стороны BC. Докажите, что если $AB \neq AC$, то треугольники AMB и AMC не равны друг другу.

§ 5. Признаки равенства прямоугольных треугольников

30. Пять признаков равенства прямоугольных треугольников. В прямоугольном треугольнике угол между катетами — прямой, а любые два прямых угла равны. Поэтому из первого признака равенства треугольников следует:

1^0 *если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны* (рис. 115).

Из второго признака равенства треугольников следует:

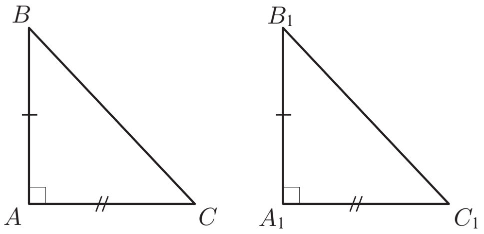


Рис. 115. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум катетам ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$)

2^0 *если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны* (рис. 116).

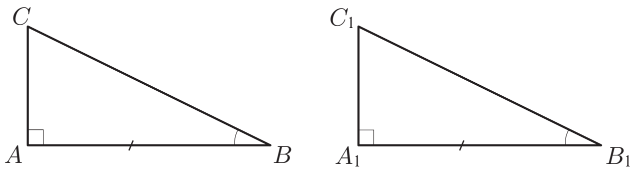


Рис. 116. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по катету и прилежащему острому углу ($AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$)

Из четвертого признака равенства треугольников следуют сразу два признака равенства прямоугольных треугольников:

3^0 *если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны* (рис. 117);

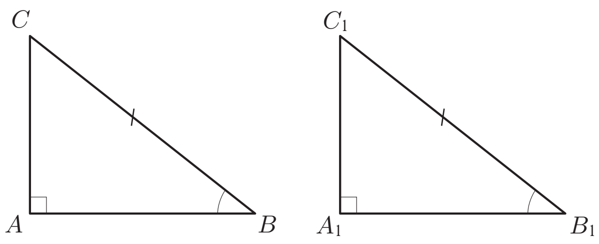


Рис. 117. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по гипотенузе и острому углу ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$)

4^0 *если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему углу другого, то такие треугольники равны* (рис. 118).

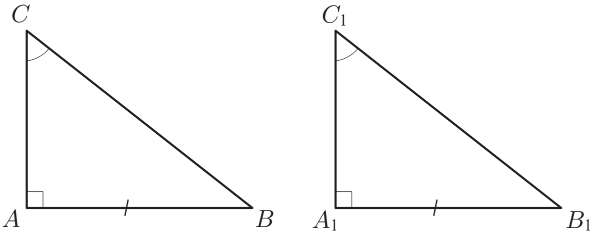


Рис. 118. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по катету и противолежащему углу ($AB = A_1B_1$, $\angle C = \angle C_1$)

Вспомним теперь пятый признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. Этот признак имеет место, в частности, в том случае, когда указанный угол — прямой или тупой. Поскольку один из углов прямоугольного треугольника — прямой, а сторона, противолежащая этому углу, — гипотенуза, то мы получаем еще один признак равенства прямоугольных треугольников:

5^0 *если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны* (рис. 119).

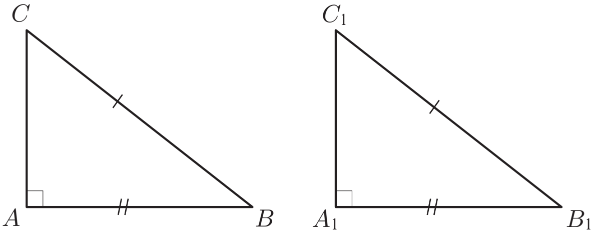


Рис. 119. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по гипотенузе и катету ($BC = B_1C_1$, $AB = A_1B_1$)

Задача. *Доказать, что два остроугольных треугольника равны, если сторона и высоты, проведенные из концов этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и высотам, проведенным из концов этой стороны, другого треугольника.*

Решение. Рассмотрим остроугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AH = A_1H_1$, $BK = B_1K_1$, где AH, BK и A_1H_1, B_1K_1 — высоты треугольников (рис. 120). Требуется доказать, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Отметим, что так как данные треугольники — остроугольные, то основания их высот (точки H, K, H_1, K_1) лежат на соответствующих сторонах, а не на продолжениях сторон (см. задачу 40).

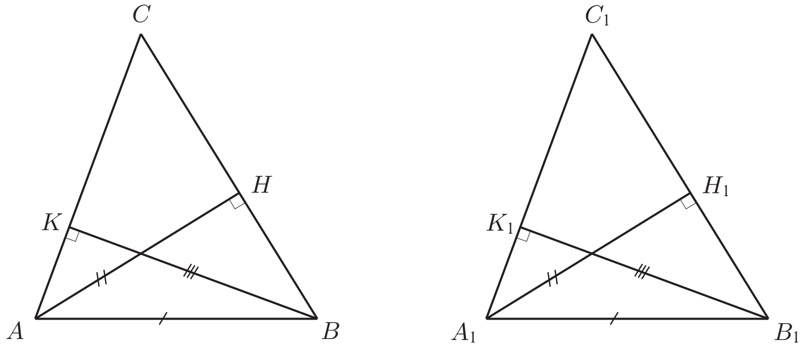


Рис. 120

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABK и $A_1B_1K_1$. Они равны по гипотенузе и катету ($AB = A_1B_1$ и $BK = B_1K_1$ по условию). Следовательно, $\angle A = \angle A_1$.

Аналогично из равенства прямоугольных треугольников ABH и $A_1B_1H_1$ (они равны также по гипотенузе и катету) следует, что $\angle B = \angle B_1$.

Итак, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, поэтому треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников. Утверждение доказано.

Замечание. Обратим внимание на то, что по условию треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — остроугольные. В ходе решения мы действительно использовали этот факт. Возникает, однако, такой вопрос: если в формулировке задачи опустить слово «остроугольных», будет ли утверждение верным?

Попробуем привести контрпример. Рассмотрим треугольник ABC с тупым углом A и проведем его высоты AH и BK (рис. 121, a). На стороне BC возьмем произвольную точку C_1 и рассмотрим тре-

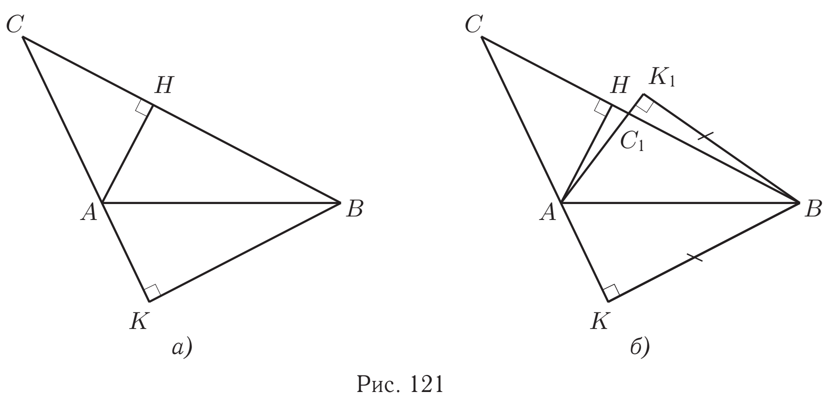


Рис. 121

угольники ABC и ABC_1 (рис. 114, *б*). Сторона AB и высота AH у этих треугольников — общие. Поэтому если нам удастся выбрать точку C_1 так, чтобы высоты BK и BK_1 оказались равными, то контрпример (треугольники ABC и ABC_1) будет построен.

Давайте рассуждать. Из равенства $BK = BK_1$ следует, что прямоугольные треугольники ABK и ABK_1 равны по гипотенузе и катету, поэтому $\angle BAK = \angle BAK_1$. Теперь все ясно: нужно провести луч AC_1 так, чтобы $\angle BAK = \angle BAK_1$. Тогда прямоугольные треугольники ABK и ABK_1 окажутся равными по гипотенузе и острому углу, откуда и будет вытекать равенство $BK = BK_1$. Таким образом, неравные треугольники ABC и ABC_1 будут удовлетворять всем условиям задачи. Следовательно, если в условии задачи опустить слово «остроугольных», то утверждение станет неверным.

31. Серединный перпендикуляр к отрезку. Осевая симметрия. *Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину этого отрезка и перпендикулярная к нему* (рис. 122).

Докажем *теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.*

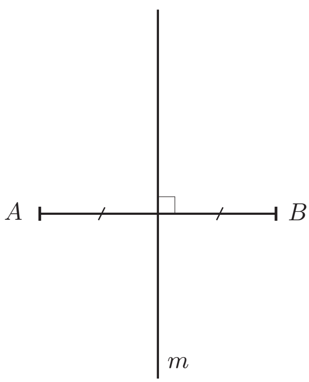


Рис. 122. Прямая m — серединный перпендикуляр к отрезку AB

Теорема 1. *Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.*

Доказательство. Пусть прямая m — серединный перпендикуляр к отрезку AB, точка O — середина этого отрезка (рис. 123). Возьмем произвольную точку M на серединном перпендикуляре m и докажем, что $MA = MB$.

Если точка M совпадает с точкой O, то это равенство верно, поскольку O — середина отрезка AB. Если же точка M не совпадает с точкой O, то рассмотрим прямоугольные треугольники AOM и BOM. Эти треугольники равны по двум катетам: $AO = OB$, OM — общий катет. Отсюда следует, что $MA = MB$. Теорема доказана.

Докажем теперь обратную теорему.

Теорема 2. *Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку M, равноудаленную от концов отрезка AB (рис. 124). Докажем, что она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

Если точка M лежит на прямой AB, то она совпадает с серединой O отрезка AB. Если же точка M не лежит на прямой AB, то треугольник MAB — равнобедренный, поскольку $MA = MB$. Следовательно,

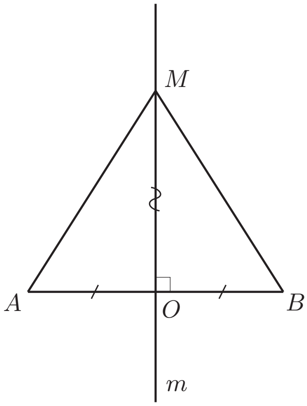


Рис. 123

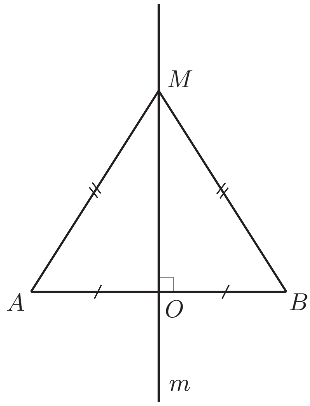


Рис. 124

медиана MO этого треугольника является также высотой, а значит, прямая MO — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Итак, точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Теорема доказана.

Две точки A и A_1 называются *симметричными относительно прямой* a, если эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1 (рис. 125, a). При этом каждая точка прямой a считается

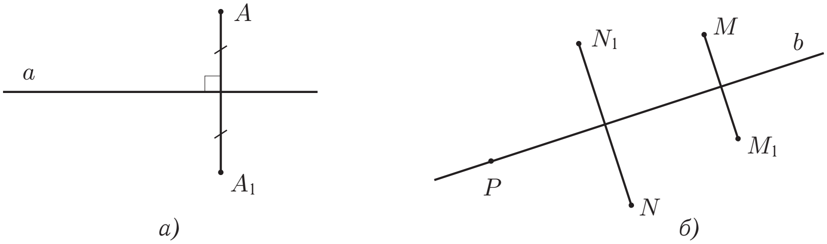


Рис. 125

симметричной самой себе. На рисунке 125, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно прямой b, а точка P симметрична самой себе относительно этой прямой.

Фигура называется симметричной относительно прямой a, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой a также принадлежит этой фигуре. Прямая a называется *осью симметрии фигуры*. Говорят также, что фигура *обладает осевой симметрией*.

На рисунке 126 изображена фигура, обладающая осевой симметрией. Если перегнуть этот рисунок по оси симметрии (прямой a), то левая по отношению к прямой a часть фигуры в точности совместится

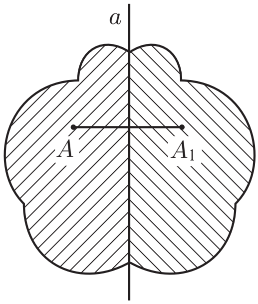


Рис. 126

с правой частью фигуры, в частности, произвольная точка A фигуры наложится на симметричную ей точку A_1.

Приведем примеры фигур, обладающих осевой симметрией (рис. 127). У неразвернутого угла одна ось симметрии — прямая, на которой расположена биссектриса угла. Равнобедренный (но не равносторонний) треугольник имеет также одну ось симметрии, а равносторонний треугольник — три оси симметрии. Имеются фигуры, у которых нет ни одной оси симметрии, например разносторонний треугольник.

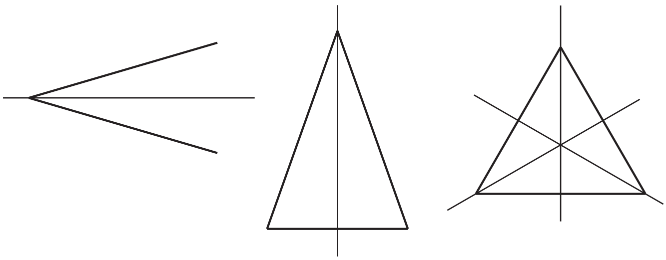


Рис. 127

Изображения на плоскости многих предметов окружающего нас мира имеют ось симметрии. Некоторые листья деревьев и лепестки цветов симметричны относительно стебля (рис. 128). С симметрией мы встречаемся в искусстве, архитектуре, технике, быту. Так, фасады многих зданий обладают осевой симметрией (рис. 129). В большинстве случаев симметричны относительно оси узоры на коврах, тканях, комнатных обоях.

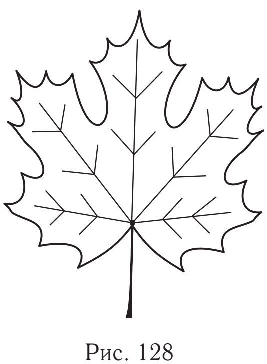


Рис. 128

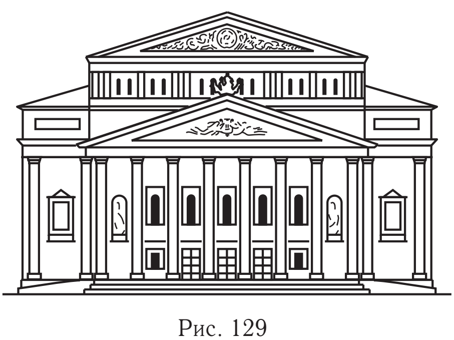


Рис. 129

32. Расстояние от точки до прямой. Рассмотрим произвольную прямую a и точку A, не лежащую на ней. Пусть точка H — основание перпендикуляра, проведенного из точки A к прямой a, а M — любая другая точка прямой a (рис. 130). Отрезок AM называется *наклонной, проведенной из точки A к прямой a.*

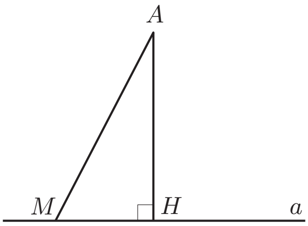


Рис. 130

Перпендикуляр AH является катетом, а наклонная AM — гипотенузой прямоугольного треугольника AHM. Так как в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы, то *перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой.*

Длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой, называется расстоянием от этой точки до прямой.

Ясно, что расстояние от точки до прямой равно наименьшему из расстояний между данной точкой и всевозможными точками этой прямой.

33. Свойство биссектрисы угла. Докажем *теорему о биссектрисе угла.*

Теорема 1. *Любая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.*

Доказательство. Рассмотрим неразвернутый угол A и возьмем произвольную точку M на его биссектрисе. Проведем из точки M перпендикуляры MB и MC к сторонам угла (рис. 131). Требуется доказать, что $MB = MC$.

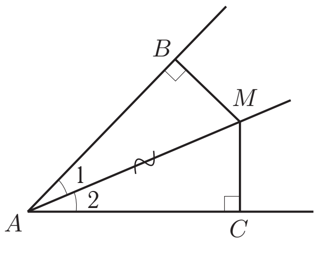


Рис. 131

Рассмотрим прямоугольные треугольники AMB и AMC. Они равны по гипотенузе и острому углу (AM — их общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$, так как луч AM — биссектриса угла A). Отсюда следует, что $MB = MC$. Теорема доказана.

Замечание 1. На рисунке 131 основания перпендикуляров MB и MC (точки B и C) лежат на сторонах угла A. Возникает вопрос: не может ли получиться так, что основание перпендикуляра, проведенного к стороне неразвернутого угла из точки его биссектрисы, окажется не на стороне угла, а на ее продолжении (рис. 132)? Докажем, что этого не может быть.

Предположим, что основание перпендикуляра MB лежит на продолжении стороны угла A. Тогда получится прямоугольный треугольник ABM (см. рис. 132), у которого угол B — прямой, а внешний угол 1 — острый, так как он равен половине неразвернутого угла.

Таким образом, окажется, что внешний угол треугольника меньше угла треугольника, не смежного с этим внешним углом. Но этого не может быть. Поэтому основание перпендикуляра MB, проведенного из точки M биссектрисы неразвернутого угла к его стороне, всегда лежит на самой стороне, а не на ее продолжении.

Задача-загадка. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB \neq BC$ (рис. 133). Проведем биссектрису угла B, серединный

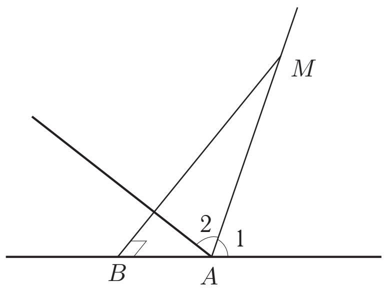


Рис. 132

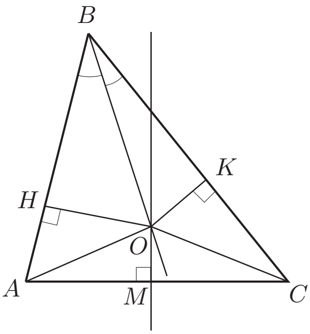


Рис. 133

перпендикуляр к стороне AC и обозначим буквой O точку их пересечения (на рисунке 133 точка M — середина отрезка AC). Из точки O проведем перпендикуляры OH и OK к прямым AB и BC.

Так как точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC, то $OA = OC$, а поскольку она лежит также на биссектрисе угла B, то $OH = OK$. Следовательно, прямоугольные треугольники AOH и COK равны по гипотенузе ($AO = OC$) и катету ($OH = OK$), а значит,

$$AH = CK. \tag{1}$$

Прямоугольные треугольники BOH и BOK также равны (объясните, почему), откуда следует, что

$$HB = KB. \tag{2}$$

Складывая равенства (1) и (2), получаем:

$$AH + HB = CK + KB,$$

т. е. $AB = BC$. Но по условию задачи $AB \neq BC$! Значит, в наших рассуждениях где-то имеется ошибка. Постарайтесь ее найти.

Докажем теперь теорему, обратную теореме о биссектрисе угла.

Теорема 2. *Любая точка, лежащая внутри неразвернутого угла и равноудаленная от сторон этого угла, лежит на его биссектрисе.*

Доказательство. Пусть точка M лежит внутри угла A и равноудалена от его сторон. Докажем, что луч AM — биссектриса угла A.

Проведем перпендикуляры MB и MC к сторонам угла (рис. 134) и рассмотрим прямоугольные треугольники AMB и AMC. Они равны по гипотенузе и катету (AM — общая гипотенуза, $MB = MC$ по условию). Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 2$, т. е. луч AM — биссектриса угла A. Теорема доказана.

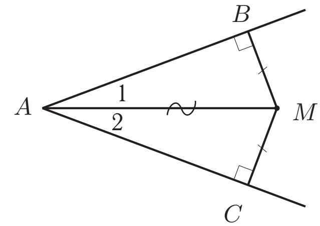


Рис. 134

Замечание 2. В ходе доказательства мы фактически предполагали, что основания перпендикуляров MB и MC (точки B и C) лежат на сторонах угла (см. рис. 134). Снова возникает вопрос: а не может ли получиться так, что основание какого-то из перпендикуляров, проведенных из точки M к сторонам угла, окажется не на стороне, а на ее продолжении или совпадет с точкой A? Докажите самостоятельно, что этого не может быть. Помните при этом, что точка M — не произвольная точка, лежащая внутри угла, а равноудаленная от его сторон (т. е. от прямых, содержащих стороны угла).

34. Теорема о пересечении биссектрис треугольника. Теперь мы можем ответить на один из вопросов, записанных в блокноте.

Теорема. *Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис AA_1 и BB_1 (рис. 135). Проведем из точки O перпендикуляры OK, OL и OM к прямым AB, BC и CA. Так как любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон, то $OK = OM$ и $OK = OL$. Отсюда следует, что $OM = OL$. Таким образом, точка O лежит внутри угла C и равноудалена от его сторон AC и BC. Следовательно, точка O лежит на биссектрисе угла C. Но это и означает, что все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Теорема доказана.

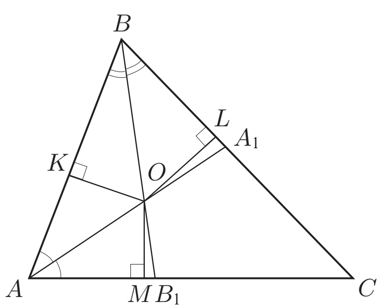


Рис. 135

Замечание. Ясно, что точка пересечения биссектрис треугольника равноудалена от его сторон. Справедливо и обратное утверждение:

если точка лежит внутри треугольника и равноудалена от его сторон, то она является точкой пересечения биссектрис этого треугольника.

В самом деле, указанная точка должна лежать на каждой из биссектрис треугольника, т. е. совпадать с точкой их пересечения.

Задачи

92. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 — прямые, BD и B_1D_1 — биссектрисы. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $\angle B = \angle B_1$ и $BD = B_1D_1$.

93. Докажите, что треугольники равны, если сторона и проведенные к ней высота и медиана одного треугольника соответственно равны стороне и проведенным к ней высоте и медиане другого треугольника.

94. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке D стороны BC. Докажите, что: а) D — середина стороны BC; б) $\angle A = \angle B + \angle C$.

95. Серединный перпендикуляр к стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке E. Найдите основание AC треугольника, если периметр треугольника AEC равен 27 см, а $AB = 18$ см.

96. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

97. Высоты AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC, проведенные к боковым сторонам, пересекаются в точке M. Докажите, что прямая MC — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

98. Серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются в некоторой точке. Докажите, что серединный перпендикуляр к третьей стороне проходит через эту точку.

99. Точка O — середина отрезка AB, OM — прямая, не перпендикулярная к прямой AB. Докажите, что если точка X лежит на прямой OM и отлична от точки O, то $AX \neq XB$.

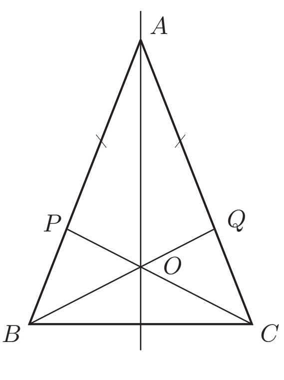


Рис. 136

100. Прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AB, M — точка, принадлежащая той же полуплоскости с границей a, что и точка A. Докажите, что $MA < MB$.

101. На рисунке 136 $AB = AC$, $AP = AQ$, отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Докажите, что: а) треугольник BOC — равнобедренный; б) прямая AO — серединный перпендикуляр к стороне BC.

102. Через середину отрезка проведена прямая. Докажите, что концы отрезка равноудалены от этой прямой.

103. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку является осью симметрии этого отрезка.

104. Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) прямая; в) луч?

105. Какие из следующих букв имеют ось симметрии: А, Б, Г, Е, О, F?

106. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, является осью симметрии этого треугольника.

107. Из точки M биссектрисы неразвернутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $AB \perp OM$.

108. Что представляет собой множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых?

109*. Отрезок BC — основание равнобедренного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает прямую BC в точке D так, что точка B лежит между C и D. На прямой AD взята точка E так, что $AE = BD$ и точка A лежит между точками E и D. Докажите, что треугольник CDE — равнобедренный.

110. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O, а биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ — в точке O_1. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AO = A_1O_1$ и $BO = B_1O_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

111. Точка пересечения биссектрис треугольника лежит на его высоте. Докажите, что этот треугольник — равнобедренный.

112. Точка пересечения биссектрис треугольника лежит на его медиане. Докажите, что этот треугольник — равнобедренный.

§ 6. Задачи на построение

35. Окружность. Центральная симметрия. Предложение, в котором разъясняется смысл того или иного выражения или названия, называется *определением*. Мы уже встречались с определениями, например с определением угла, смежных углов, равнобедренного треугольника и т. д. Дадим определение еще одной геометрической фигуры — окружности.

О п р е д е л е н и е. *Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.*

Данная точка называется *центром* окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, — *радиусом* окружности (рис. 137). Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом* (рис. 138).

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ее *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*.

На рисунке 139 отрезки AB и EF — хорды окружности, отрезок CD — диаметр окружности.

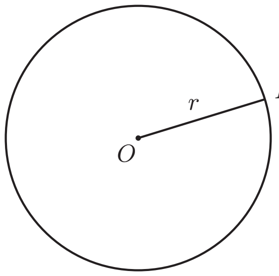


Рис. 137. Окружность с центром O радиуса r

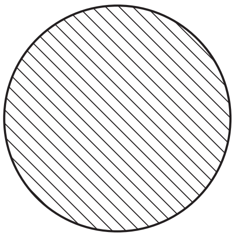


Рис. 138

Любые две точки окружности делят ее на две части. Каждая из этих частей называется *дугой* окружности. На рисунке 140 ALB и AMB — дуги, ограниченные точками A и B.

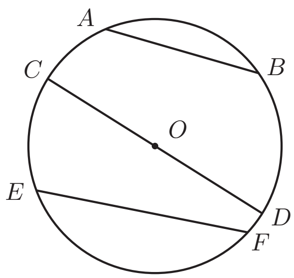


Рис. 139. AB и EF — хорды, CD — диаметр окружности

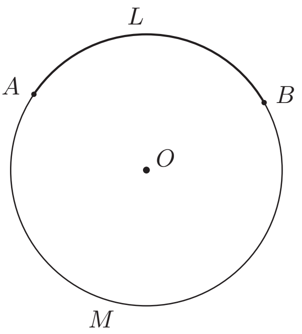


Рис. 140. Точки A и B делят окружность на две дуги. Одна из них выделена жирной линией

Отметим, что окружность симметрична относительно любой прямой, проходящей через ее центр. Докажите это утверждение самостоятельно.

Две точки A и A_1 называются *симметричными относительно точки* O, если точка O — середина отрезка AA_1 (рис. 141, *а*). Точка O считается симметричной самой себе. На рисунке 141, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно точки O, а точки P и Q не симметричны относительно этой точки.

Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется *центром симметрии фигуры*. Говорят также, что фигура *обладает центральной симметрией*.

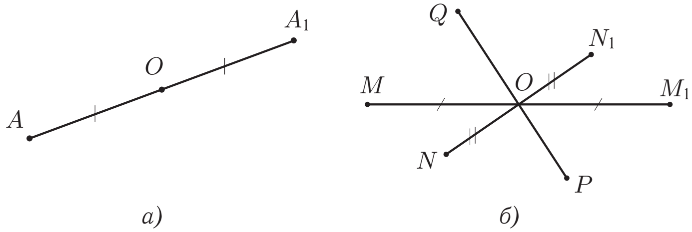


Рис. 141

На рисунке 142 изображена фигура, обладающая центральной симметрией. Если повернуть эту фигуру на 180° вокруг центра симметрии — точки O, то она совместится сама с собой, в частности, произвольная точка A фигуры перейдет в симметричную ей точку A_1, а точка A_1 — в точку A.

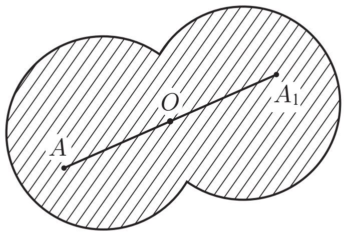


Рис. 142

Примером фигуры, обладающей центральной симметрией, является окружность. Центром симметрии окружности является центр окружности. Прямая также обладает центральной симметрией, однако в отличие от окружности, которая имеет только один центр симметрии, у прямой их бесконечно много — любая точка прямой является ее центром симметрии. Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, является треугольник.

36. Взаимное расположение прямой и окружности. Выясним, сколько общих точек могут иметь прямая и окружность в зависимости от их взаимного расположения. Рассмотрим прямую p и окружность радиуса r с центром O. Допустим сначала, что прямая p не проходит через точку O. Проведем из точки O перпендикуляр OH к прямой p (рис. 143) и обозначим длину этого перпендикуляра, т. е. расстояние от точки O до прямой p, буквой d. Возможны три случая.

1^0. $d > r$. Поскольку перпендикуляр OH, проведенный из точки O к прямой p, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки O к прямой p, то для каждой точки A прямой p $OA \geqslant OH = d$ (рис. 143, *а*). Но $d > r$, поэтому $OA > r$. Следовательно, точка A не лежит на окружности. Таким образом,

если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.

2^0. $d = r$. Поскольку $OH = d = r$, то точка H лежит на окружности, т. е. является общей точкой прямой и окружности (рис. 143, *б*). Для любой другой точки A прямой p $OA > OH = r$, так как перпендикуляр OH меньше наклонной OA. Следовательно, точка A не лежит на окружности. Таким образом,

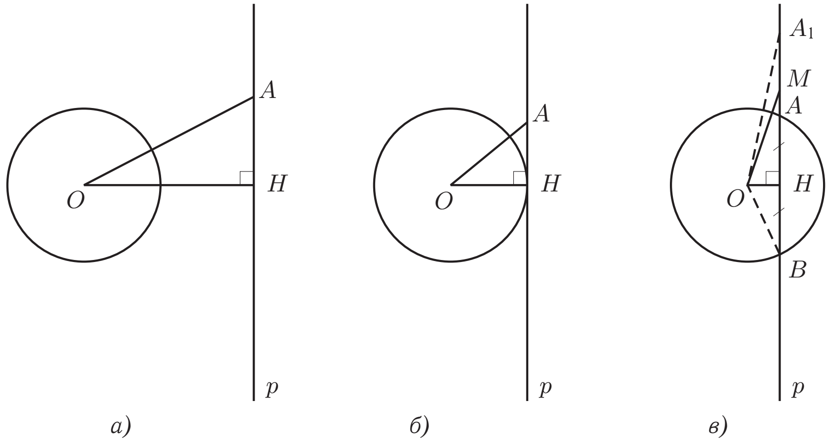


Рис. 143. а) $OH = d > r$; общих точек нет; б) $OH = d = r$; одна общая точка — точка H; в) $OH = d < r$; две общие точки — точки A и B

если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют единственную общую точку.

3^0. $d < r$. Поскольку $OH = d < r$, то точка H лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью. Отметим на прямой p точку M, для которой $MH = r$ (рис. 143, *в*). Гипотенуза OM прямоугольного треугольника MOH больше катета MH, поэтому $OM > r$, а значит, точка M лежит вне круга, ограниченного данной окружностью. Таким образом, один конец отрезка MH (точка H) лежит внутри указанного круга, а другой (точка M) — вне этого круга. Следовательно, на отрезке MH должна быть точка A, являющаяся общей точкой прямой p и окружности.

На луче HM не может быть другой общей точки прямой p и окружности. В самом деле, допустим, что такая точка A_1 нашлась (см. рис. 143, *в*). Тогда $OA_1 = OA = r$, следовательно, прямоугольные треугольники AHO и A_1HO равны по гипотенузе ($OA = OA_1$) и катету (OH — общий катет). Поэтому $HA = HA_1$, и значит, точка A_1 совпадает с точкой A. Итак, на луче HM есть только одна общая точка прямой p и окружности — точка A.

Точка B, симметричная точке A относительно прямой OH, также является общей точкой прямой p и окружности (объясните, почему). Таким образом,

если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют ровно две общие точки.

Ясно, что если прямая p проходит через центр O окружности, то она пересекает окружность в двух точках — концах диаметра окружности, лежащего на этой прямой.

Замечание 1. Если прямая и окружность имеют только одну общую точку, то говорят, что *окружность касается прямой*, прямая называется *касательной к окружности*, а общая точка касательной и окружности называется *точкой касания*. Из наших рассуждений следует, что

если $d = r$, т. е. *если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной*;

и обратно: если прямая является касательной, то $d = r$, т. е. *касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания*.

Отметим еще один факт, связанный с касательной. Для этого рассмотрим две касательные к окружности с центром O, проходящие через точку A и касающиеся окружности в точках B и C (рис. 144). Отрезки AB и AC назовем *отрезками касательных, проведенными из точки* A. Они обладают следующим свойством:

отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

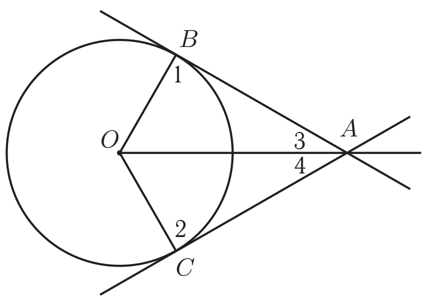


Рис. 144

Для доказательства этого утверждения обратимся к рисунку 144. Поскольку углы 1 и 2 — прямые, то треугольники ABO и ACO — прямоугольные. Они равны, так как имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC. Следовательно, $AB = AC$ и $\angle 3 = \angle 4$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. При рассмотрении случая 3^0 ($d < r$) может возникнуть вопрос: нельзя ли более точно найти местоположение точки A на луче HM, например выразить длину отрезка AH через d и r? Пока ответить на этот вопрос мы не можем. Впрочем, можно указать способ, позволяющий найти длину отрезка AH с любой точностью. Разделим отрезок HM (напомним, что $HM = r$) точками на 10 равных частей и выберем из этих точек две соседние точки A_1 и B_1, для которых $OA_1 \leqslant r$, а $OB_1 \geqslant r$. Тогда можно сказать так: длина отрезка AH приближенно равна длине отрезка A_1H. Так, на рисунке 145 длина отрезка AH приближенно равна $0{,}7HM = 0{,}7r$. Если требуется найти длину отрезка AH с большей точностью, то можно разделить отрезок A_1B_1 точками на 10 равных частей и выбрать из этих точек

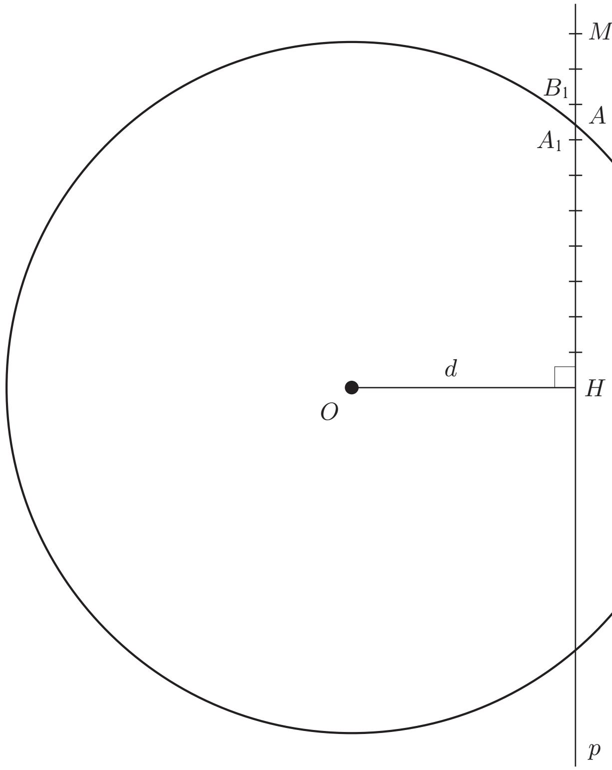


Рис. 145

две соседние точки A_2 и B_2, для которых $OA_2 \leqslant r$, а $OB_2 \geqslant r$. Тогда можно будет сказать, что длина отрезка AH приближенно равна длине отрезка A_2H и т. д.

37. Окружность, вписанная в треугольник. Если все стороны треугольника касаются окружности, то окружность называется *вписанной* в треугольник, а треугольник — *описанным* около этой окружности. На рисунке 146 треугольник ABC описан около окружности радиуса r с центром O. Приглядимся к этому рисунку. Что можно сказать о точке O? Из результатов предыдущего пункта следует, что эта точка находится на расстоянии r от каждой из сторон треугольника. Тем самым, точка O равноудалена от сторон треугольника ABC.

Рассмотрим теперь произвольный треугольник и поставим такой вопрос: можно ли вписать в этот треугольник окружность? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно прежде всего понять, существует ли точка, равноудаленная от сторон этого треугольника? Как мы знаем, такая точка существует, и притом только одна — точка пересечения биссектрис треугольника. Это наводит на мысль о том, что должна быть верна следующая теорема.

Теорема. *В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведем из точки O перпендикуляры OK, OL и OM к сторонам AB, BC и CA (рис. 147). Поскольку точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, то $OK = OL = OM$. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M. Стороны треугольника ABC находятся от точки O на расстоянии, равном радиусу этой окружности. Следовательно, указанная окружность касается сторон треугольника ABC, т. е. является окружностью, вписанной в этот треугольник.

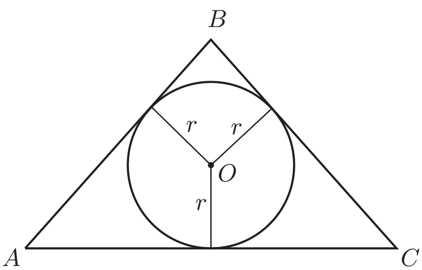


Рис. 146

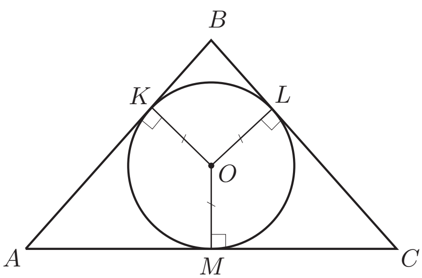


Рис. 147

Допустим, что в треугольник ABC можно вписать еще одну окружность. Тогда центр этой окружности равноудален от сторон треугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника ABC, а ее радиус равен расстоянию от точки O до сторон этого треугольника. Тем самым, эта окружность совпадает с первой окружностью. Теорема доказана.

Замечание. Как мы только что обнаружили, центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения биссектрис этого треугольника. По этой причине точку пересечения биссектрис треугольника часто называют *центром вписанной окружности*.

38. Взаимное расположение двух окружностей. Начнем с такого вопроса: могут ли две окружности иметь три общие точки? Видимо, нет. Во всяком случае, нарисовать такой рисунок не удается. Тогда попробуем доказать, что не могут.

Теорема. *Две окружности не могут иметь три общие точки.*

Доказательство. Допустим, что две окружности имеют три общие точки — A, B и C. Что можно сказать о центре и радиусе

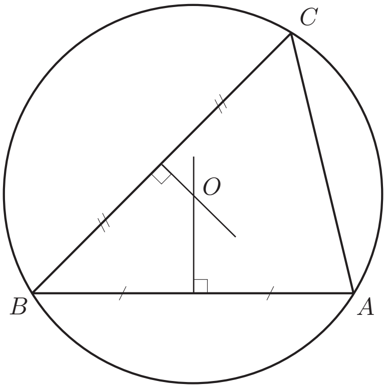


Рис. 148

первой окружности (рис. 148)? Поскольку центр этой окружности равноудален от точек A и B, то он лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. По аналогичной причине он лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Следовательно, центр O первой окружности — это точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC. А чему равен радиус этой окружности? Он равен, например, расстоянию от точки O до точки A.

Теперь применим те же рассуждения ко второй окружности. В результате мы обнаружим, что центр этой окружности совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC, а ее радиус равен расстоянию от точки O до точки A. Таким образом, центры и радиусы наших окружностей совпадают, а значит, совпадают и сами окружности.

Итак, если две окружности имеют три общие точки, то эти окружности обязательно совпадают. Но это и означает, что две (различные) окружности не могут иметь три общие точки. Теорема доказана.

Следствие. *Две окружности не могут иметь более двух общих точек.*

Перейдем теперь к решению следующего вопроса: как могут быть расположены относительно друг друга две окружности?

Рассмотрим две окружности радиусов r_1 и r_2, центры O_1 и O_2 которых находятся на расстоянии d друг от друга (рис. 149). Для определенности будем считать, что $r_1 \geqslant r_2$.

Начнем со случая, когда $d > r_1 + r_2$ (рис. 149, *а*), т. е. $d - r_2 > r_1$. Так как для каждой точки A второй окружности, в соответствии с неравенством треугольника, выполняется неравенство $O_1A + r_2 \geqslant d$ (знак равенства возможен в том случае, когда точка A лежит на отрезке O_1O_2), то $O_1A \geqslant d - r_2 > r_1$. Следовательно, все точки второй окружности лежат вне круга, ограниченного первой окружностью. В этом случае говорят, что *одна окружность лежит вне другой.*

Пусть $d = r_1 + r_2$ (рис. 149, *б*), т. е. $d - r_2 = r_1$. Так как для каждой точки A второй окружности $O_1A + r_2 \geqslant d$, то $O_1A \geqslant d - r_2 = r_1$, причем знак равенства возможен только в том случае, когда точка A лежит на прямой O_1O_2 между точками O_1 и O_2. Следовательно, наши окружности имеют единственную общую точку, а все остальные точки второй окружности лежат вне круга, ограниченного первой окружно-

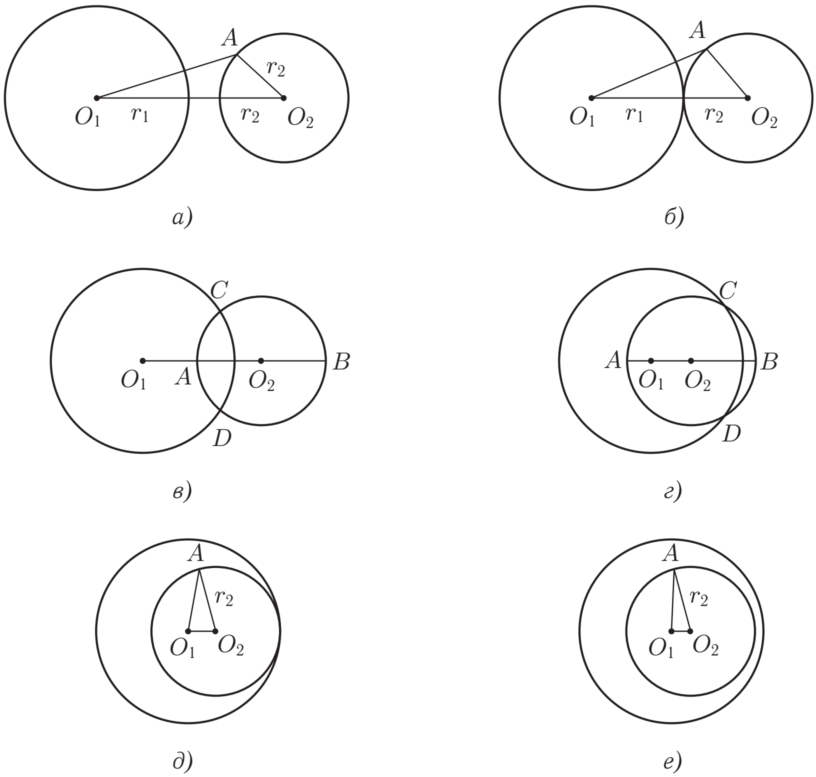


Рис. 149. а) $d > r_1 + r_2$; б) $d = r_1 + r_2$; в) $d < r_1 + r_2$ и $d > r_1 - r_2$; г) $d < r_1 + r_2$ и $d > r_1 - r_2$; д) $d = r_1 - r_2$; е) $d < r_1 - r_2$

стью. В этом случае говорят, что *окружности касаются друг друга извне*.

Далее, если $d < r_1 + r_2$ и $d > r_1 - r_2$ (рис. 149, *в, г*), т. е. $d - r_2 < r_1$ и $d + r_2 > r_1$, то для точки A второй окружности, лежащей на прямой O_1O_2 по ту же сторону от точки O_2, что и O_1, получаем: либо $O_1A = d - r_2 < r_1$ (рис. 149, *в*), либо $O_1A = r_2 - d < r_2 \leqslant r_1$ (рис. 149, *г*), т. е. точка A лежит внутри круга, ограниченного первой окружностью. Для точки B второй окружности, расположенной на прямой O_1O_2 так, что точка O_2 лежит между точками O_1 и B (см. рис. 149, *в, г*), получаем: $O_1B = d + r_2 > r_1$, т. е. точка B лежит вне круга, ограниченного первой окружностью. Таким образом, часть точек второй окружности лежит внутри круга, ограниченного первой окружностью, а часть — вне этого круга. Следовательно, на второй окружности есть такая точка C, отличная от A и B, которая лежит на первой окружности. Иными словами, точка C является общей точкой наших окружностей, не лежащей на прямой O_1O_2. Точка D, симметричная точке C относительно прямой O_1O_2, также является общей точкой наших окружностей (объясните, почему). Поскольку две окружности не могут иметь более двух общих точек, то можно сделать вывод: в этом случае *окружности пересекаются в двух точках*.

Допустим теперь, что $r_1 > r_2$. Если $d = r_1 - r_2$ (рис. 149, *д*), т. е. $d + r_2 = r_1$, то для каждой точки A второй окружности $O_1A \leqslant d + r_2 = r_1$, причем знак равенства возможен только в том случае, когда точка A расположена на прямой O_1O_2 так, что точка O_2 лежит между точками O_1 и A. Следовательно, наши окружности имеют единственную общую точку, а все остальные точки второй окружности лежат внутри круга, ограниченного первой окружностью. В этом случае говорят, что *окружности касаются друг друга изнутри*.

Наконец, если $d < r_1 - r_2$ (рис. 149, *е*), т. е. $d + r_2 < r_1$, то для каждой точки A второй окружности $O_1A \leqslant d + r_2 < r_1$. Следовательно, все точки второй окружности лежат внутри круга, ограниченного первой окружностью. В этом случае говорят, что *одна окружность лежит внутри другой*. В частности, если центры окружностей совпадают (случай $d = 0$), то окружности называются *концентрическими*.

Назовем *линией центров* двух неконцентрических окружностей прямую, на которой лежат центры этих окружностей. Тогда полученные нами результаты можно кратко сформулировать так:

если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше разности радиусов, то окружности общих точек не имеют;

если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме их радиусов или равно разности радиусов, то окружности имеют ровно одну общую точку, лежащую на линии центров;

если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы их радиусов, но больше разности радиусов, то окружности имеют равно две общие точки, не лежащие на линии центров.

39. Построение треугольника по трем сторонам. В геометрии принято выделять те задачи на построение, которые решаются с помощью только циркуля и линейки без масштабных делений. Их называют *задачами на построение*. При этом предполагается, что:

линейка позволяет провести произвольную прямую, а также построить прямую, проходящую через две данные точки;

с помощью циркуля можно провести окружность произвольного радиуса, а также окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.

Из всевозможных задач на построение можно выделить несколько основных — тех, которые используются при решении других, более сложных задач. Важнейшей из основных задач является следующая.

Задача 1. *Построить треугольник по трем сторонам.*

Решение. Эту задачу нужно понимать так: даны три отрезка — MN, PQ и RS (рис. 150, *а*); требуется построить треугольник, стороны

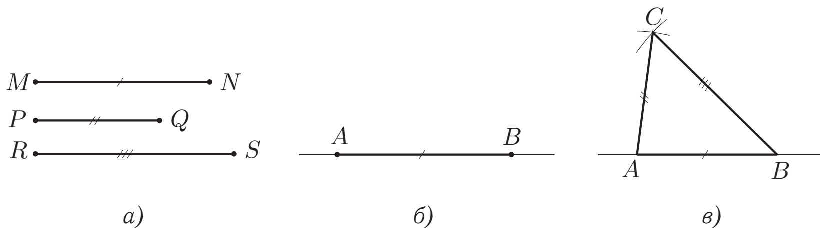


Рис. 150. а) Данные отрезки MN, PQ и RS; б) на прямой отложили отрезок $AB = MN$; в) окружность радиуса PQ с центром A и окружность радиуса RS с центром B пересекаются в точке C. Треугольник ABC искомый: $AB = MN$, $AC = PQ$, $BC = RS$

которого соответственно равны этим трем отрезкам.

Построение искомого треугольника можно провести следующим образом. Проведем произвольную прямую, отметим на ней точку A и отложим отрезок AB, равный MN (рис. 150, *б*). Затем построим две окружности: радиуса PQ с центром в точке A и радиуса RS с центром в точке B. Одну из точек пересечения этих окружностей обозначим буквой C (рис. 150, *в*). Соединив точку C отрезками с точками A и B, получим искомый треугольник ABC. В самом деле, в этом треугольнике по построению $AB = MN$, $AC = PQ$, $BC = RS$, т. е. треугольник ABC удовлетворяет условию задачи.

Исходную прямую и точку A на ней можно выбрать произвольно, поэтому существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условию задачи. Однако все эти треугольники равны друг другу по третьему признаку равенства треугольников, поэтому принято говорить, что *данная задача имеет единственное решение*.

З а м е ч а н и е 1. Обычно когда говорят: «Построить треугольник по каким-то его элементам», то имеют в виду, что данные элементы — отрезки, углы и т. д. — действительно являются элементами некоторого треугольника. Иными словами, считают, что треугольник, который требуется построить, существует. Можно, однако, встать на другую точку зрения — считать, что заранее неизвестно, существует ли треугольник с данными элементами. В этом случае может оказаться, что задача на построение не имеет решения, или имеет решение, но не всегда. Например, если в нашей задаче заранее неизвестно, что искомый треугольник существует, то данная задача не всегда имеет решение. Действительно, в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон. Поэтому если какой-нибудь из данных отрезков больше или равен сумме двух других, например $MN > PQ + RS$, то нельзя построить треугольник, стороны которого равны данным отрезкам. Если мы попытаемся это сделать, то обнаружим, что окружности с центрами A и B не пересекутся (рис. 151).

Возникает вопрос: а имеет ли задача решение, если каждый из данных отрезков меньше суммы двух других, т. е. $MN < PQ + RS$, $PQ <$

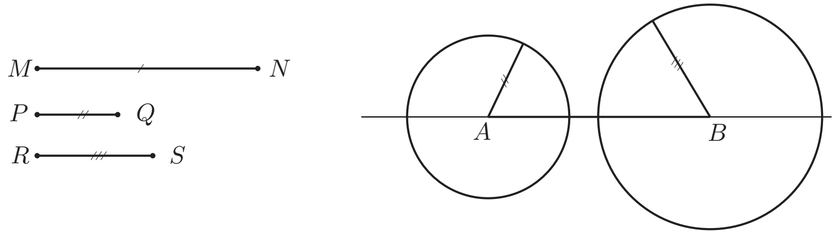


Рис. 151. Если $MN > PQ + RS$, то окружности с центрами A и B и радиусами PQ и RS не пересекаются

$< RS + MN$, $RS < MN + PQ$? На этот вопрос можно ответить утвердительно — задача имеет решение. В самом деле, в этом случае расстояние MN между центрами наших окружностей меньше суммы $PQ + RS$ их радиусов, но больше их разности: $MN < PQ + RS$ и $MN > RS - PQ$. Следовательно, эти окружности пересекаются в двух точках, причем эти точки не лежат на прямой AB (п. 38).

З а м е ч а н и е 2. Если требуется выяснить, существует ли треугольник, стороны которого равны данным отрезкам MN, PQ и RS, то не обязательно проверять справедливость всех трех неравенств: $MN < PQ + RS$, $PQ < RS + MN$, $RS < MN + PQ$. Действительно, пусть, например, $MN \geqslant PQ$ и $MN \geqslant RS$. Тогда неравенства $PQ < RS + MN$ и $RS < MN + PQ$ выполняются автоматически (объясните, почему), поэтому остается проверить справедливость только одного неравенства: $MN < PQ + RS$. Таким образом, *если наибольший из трех данных отрезков меньше суммы двух других, то существует треугольник, стороны которого равны данным отрезкам.*

З а м е ч а н и е 3. Возьмем три произвольных отрезка с длинами x, y, z и положим

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y. \tag{1}$$

Ясно, что выполняются неравенства $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, поэтому

для любых положительных x, y и z существует треугольник, стороны a, b и c которого выражаются формулами (1).

Верно и обратное утверждение:

если a, b и c — стороны данного треугольника ABC, то существуют такие положительные величины x, y и z, что a, b и c выражаются формулами (1).

Чтобы убедиться в этом, нужно из уравнений (1) выразить x, y и z через a, b и c. В результате получим:

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a) = p - a, \quad y = \frac{1}{2}(c + a - b) = p - b,$$
$$z = \frac{1}{2}(a + b - c) = p - c, \tag{2}$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр треугольника ABC. Так как стороны a, b и c треугольника ABC удовлетворяют неравенству треугольника, т. е. $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$, то найденные x, y и z, как видно из формул (2), положительны.

Возникает вопрос: как геометрически связаны отрезки x, y, z с треугольником ABC? Чтобы ответить на этот вопрос, отметим точки K, L и M касания вписанной в треугольник окружности со сторонами AB, BC и CA, равными соответственно c, a и b (рис. 152). Поскольку отрезки касательных, проведенные из одной точки, равны, то $AK = AM$, $BK = BL$ и $CL = CM$. Если теперь положить $x = AM$, $y = BK$, $z = CL$, то получим: $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, откуда следует, что x, y и z выражаются через a, b и c формулами (2).

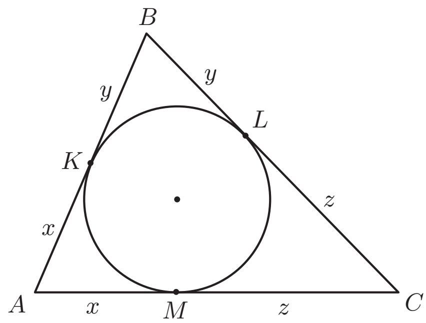


Рис. 152. $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$

40. Основные задачи на построение. К числу основных задач на построение обычно относят еще четыре задачи: 1) построение угла, равного данному; 2) построение биссектрисы данного угла; 3) построение серединного перпендикуляра к данному отрезку; 4) построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.

Решения первых двух задач приведены на рисунках 153 и 154. Обратим особое внимание на то, что в основе этих решений лежит построение треугольника по трем сторонам. Займемся теперь следующей задачей.

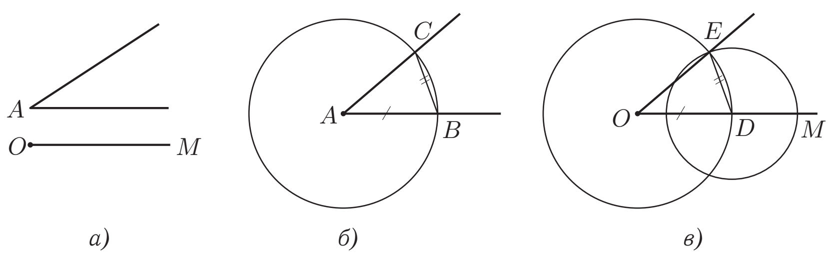
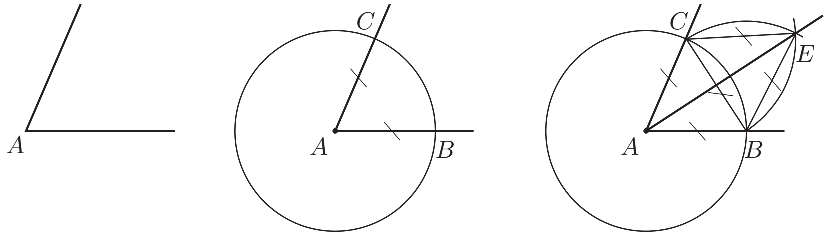


Рис. 153

Задача 2. *Построить серединный перпендикуляр к данному отрезку.*

Решение. Данный отрезок AB изображен на рисунке 155, *а*. Проведем две окружности радиуса AB с центрами A и B. Они



а) *б)* *в)*

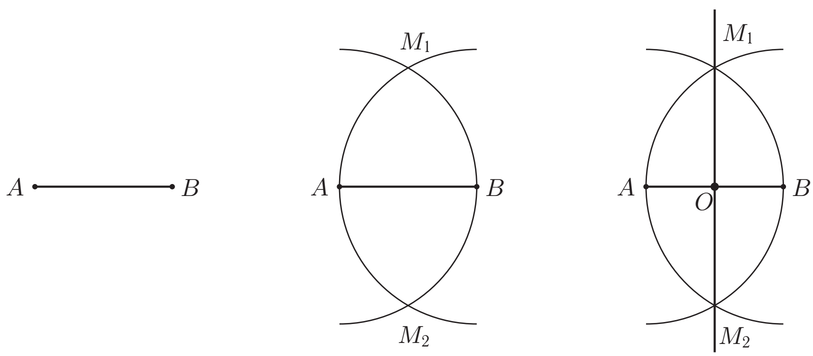
Рис. 154

пересекутся в двух точках: M_1 и M_2 (рис. 155, *б*). Проведем прямую M_1M_2 (рис. 155, *в*). Она и является искомым серединным перпендикуляром к отрезку AB.

В самом деле, точки M_1 и M_2 по построению равноудалены от концов отрезка AB ($AM_1 = BM_1 = AM_2 = BM_2$) и поэтому лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Таким образом, серединный перпендикуляр к отрезку AB проходит через точки M_1 и M_2, т. е. совпадает с прямой M_1M_2.

З а м е ч а н и е 1. Построив серединный перпендикуляр к данному отрезку AB, мы решили попутно еще одну задачу: разделить данный отрезок AB пополам, т. е. найти его середину. Действительно, точка O пересечения серединного перпендикуляра с отрезком AB и есть середина этого отрезка (см. рис. 155, *в*).

Если отрезки AO и OB также разделить пополам, то отрезок AB будет разделен на четыре равные части. Возникает вопрос: а можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный отрезок на три равные части, на пять равных частей и вообще на произвольное чис-



а) *б)* *в)*

Рис. 155

ло n равных частей? Сейчас мы не можем ответить на этот вопрос, но вернемся к нему в дальнейшем. А пока запишем его в блокнот.

Отметим, что аналогичный вопрос для углов (можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на произвольное число n равных частей?) решается отрицательно. Например, с помощью циркуля и линейки нельзя осуществить *трисекцию угла*, т. е. разделить любой данный угол на три равных угла. Это было доказано французским математиком Пьером Лораном Ванцелем (1814–1848) в 1837 году, когда ему было 23 года. Правда, некоторые углы, например углы в 135° и 54°, можно разделить с помощью циркуля и линейки на три равных угла. Подумайте, как это сделать.

Невозможность трисекции угла стала, по-видимому, одной из причин, по которым до начала XX века оставался незамеченным такой удивительный факт. *Если через вершины произвольного треугольника ABC провести лучи AB_1, AC_1, BA_1, BC_1, CA_1, CB_1, делящие каждый из его углов на три равные части* (так, как показано на рисунке 156), *то точки A_1, B_1 и C_1 их пересечения окажутся вершинами равностороннего треугольника*. Эта теорема называется теоремой Морлея в честь открывшего ее в 1904 году американского математика Франка Морлея (1862–1937). Пока мы не можем ее доказать. Поэтому запишем в блокнот вопрос:

как доказать теорему Морлея?

Перейдем теперь к последней из перечисленных основных задач на построение.

Задача 3. *Через данную точку провести прямую, перпендикулярную к данной прямой.*

Решение. Данная точка может лежать на данной прямой и может не лежать на ней. В любом из этих двух случаев построение прямой,

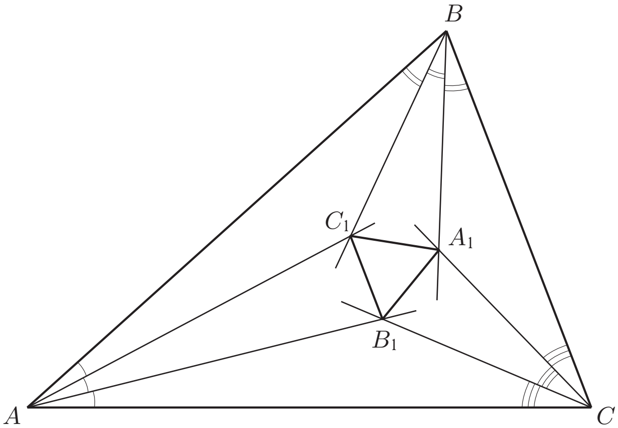


Рис. 156. Треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний

проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой, можно свести к построению серединного перпендикуляра к отрезку. Рассмотрим данную точку M и данную прямую p (на рисунке 157, *а* точка M не лежит на прямой p, а на рисунке 157, *б* — лежит на прямой p). Построим окружность с центром в точке M, пересекающую

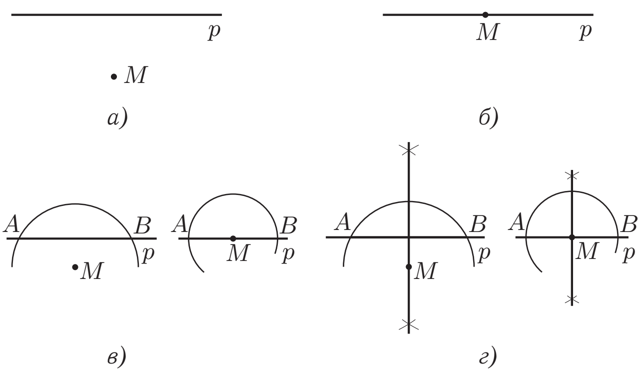


Рис. 157

прямую p в двух точках: A и B (рис. 157, *в*). Точка M равноудалена от точек A и B (так как $MA = MB$) и, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Остается построить серединный перпендикуляр к отрезку AB (как это сделать, мы знаем). Он и будет искомой прямой, проходящей через данную точку M перпендикулярно к данной прямой p (рис. 157, *г*).

Замечание 2. Теперь мы можем построить с помощью циркуля и линейки биссектрисы, высоты и медианы данного треугольника, а также построить треугольник по двум сторонам и углу между ними или по стороне и двум прилежащим к ней углам. Объясните, как выполнить соответствующие построения. Отметим, что последняя из перечисленных задач, в отличие от остальных, может и не иметь решения (если заранее неизвестно, что искомый треугольник существует). Например, если заданные углы составляют в сумме $180°$, или их сумма больше $180°$, то эта задача решений не имеет, поскольку в каждом треугольнике сумма двух углов меньше $180°$. Возникает вопрос: а если сумма данных углов меньше $180°$, можно ли утверждать, что наша задача всегда имеет решение? Пока мы не можем ответить на этот вопрос, так что запишем его в блокнот.

41. Еще несколько задач на построение треугольника.

Задача 4. *Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.*

Решение. Эту задачу нужно понимать так. Даны два отрезка MN и PQ и угол hk (рис. 158, *а*). Требуется с помощью циркуля и ли-

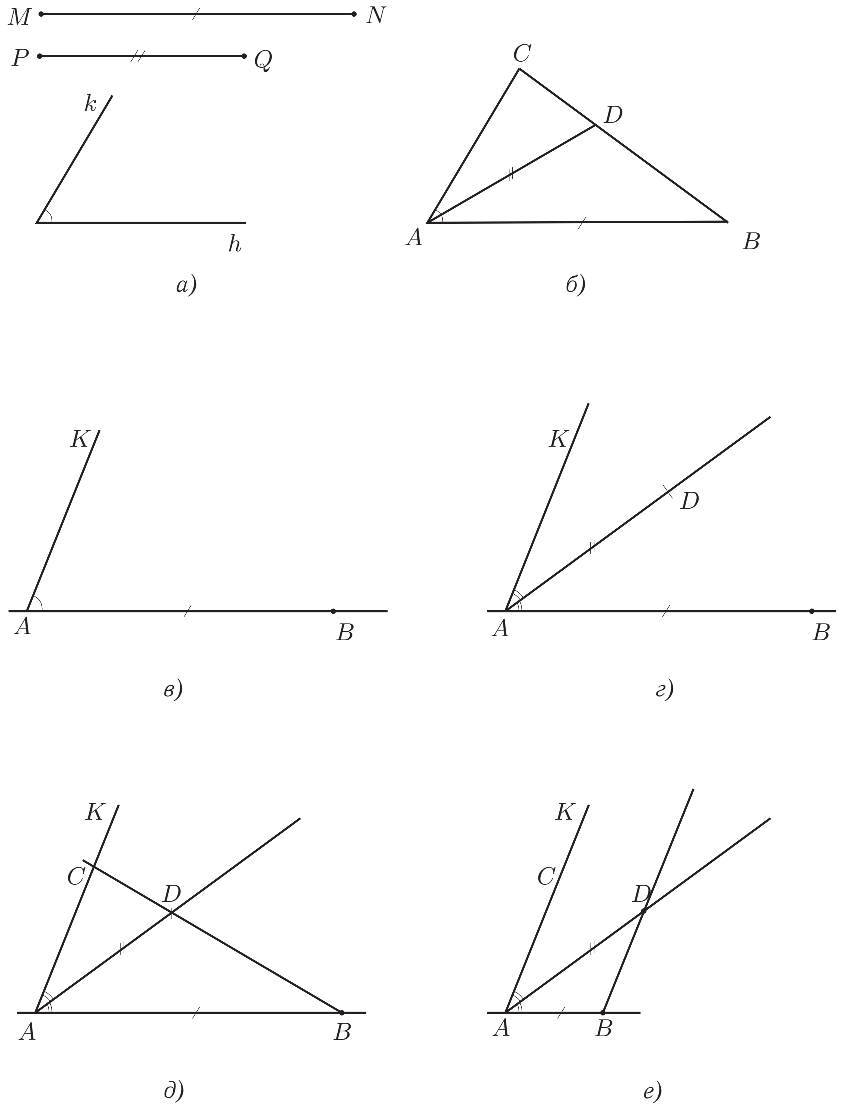


Рис. 158

нейки построить такой треугольник ABC, у которого одна сторона, например AB, равна отрезку MN, один из прилежащих к ней углов, например угол A, равен углу hk, а биссектриса AD равна отрезку PQ (рис. 158, *б*).

Давайте подумаем, как это можно сделать. Поступим так, как обычно делают, когда ищут путь решения задачи на построение. Предположим, что мы уже построили искомый треугольник ABC. Рассматривая этот треугольник и обращая внимание на те его элементы, которые нам заданы по условию задачи, попытаемся отыскать ход построения. Ясно, что мы можем провести произвольную прямую, отложить на ней отрезок AB, равный данному отрезку MN, а затем построить угол KAB, равный данному углу hk. На рисунке 158, *в* изображен результат этого этапа построения. Что же делать дальше? Как найти положение точки C на луче AK? Давайте посмотрим, что нам еще дано. Нам дан отрезок PQ, которому должна равняться биссектриса AD искомого треугольника ABC. Поэтому нужно поступить так: построить биссектрису угла KAB (как это сделать, мы знаем) и отложить на ней отрезок AD, равный данному отрезку PQ (рис. 158, *г*). После этого остается провести прямую BD и обозначить буквой C точку пересечения этой прямой с лучом AK. Получившийся треугольник ABC (рис. 158, *д*) и есть искомый треугольник. В самом деле, в этом треугольнике по построению сторона AB равна отрезку MN, угол A — углу hk, а биссектриса AD — отрезку PQ.

Итак, мы указали способ построения искомого треугольника. Заметим, что поскольку прямая BD не может пересечь луч AK в двух точках, то данная задача имеет единственное решение.

Отметим еще один момент. Если заранее неизвестно, существует ли искомый треугольник, то может получиться так, что прямая BD не пересечется с лучом AK (см. рис. 158, *е*) — данный отрезок PQ слишком велик. В таком случае невозможно построить треугольник ABC, у которого сторона AB, биссектриса AD и угол A равнялись бы заданным отрезкам и углу, т. е. треугольника с такими элементами не существует.

Задача 5. *Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.*

Решение. Эту задачу нужно понимать так. Даны два отрезка MN и PQ и угол hk (рис. 159, *а*). Требуется с помощью циркуля и линейки построить такой треугольник ABC, у которого одна сторона, например AB, равна отрезку MN, один из прилежащих к ней углов, например угол A, равен углу hk, а сумма $AC + CB$ равна отрезку PQ (рис. 159, *б*).

Допустим, что искомый треугольник ABC уже построен. Продолжим сторону AC на отрезок CD, равный CB (рис. 159, *в*). В получившемся треугольнике ABD мы знаем две стороны (AB и $AD = AC + CB = PQ$) и угол между ними, поэтому этот треугольник мы можем построить. Осталось понять, как на его стороне AD найти такую точку C, что $CD = CB$, т. е. точку C, равноудаленную от концов отрезка BD. Как это сделать, тоже ясно — нужно провести серединный перпендикуляр к отрезку BD.

Итак, приступим к построению. Построим сначала треугольник ABD, угол A которого равен данному углу hk, а стороны AB и AD соответственно равны данным отрезкам MN и PQ (рис. 159, *г*).

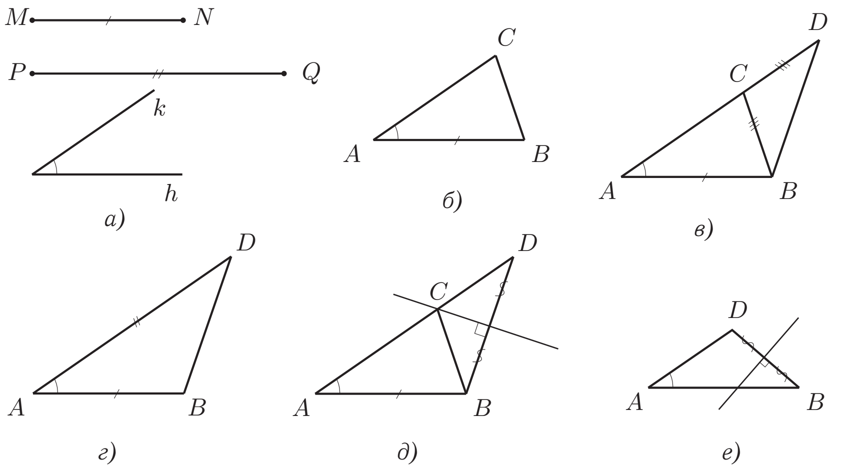


Рис. 159

Затем построим серединный перпендикуляр к отрезку BD и обозначим буквой C точку его пересечения с отрезком AD (рис. 159, *д*). Поскольку $BC = CD$, то треугольник ABC — искомый.

Если заранее неизвестно, что искомый треугольник существует, то данная задача может не иметь решения. Так, если $PQ \leqslant MN$, то искомый треугольник не существует, поскольку сторона AB треугольника ABC должна быть меньше суммы двух других его сторон. Если выполнить наше построение в этом случае, то мы обнаружим, что серединный перпендикуляр к отрезку BD не пересекает отрезок AD (рис. 159, *е*). Если же $PQ > MN$, то данная задача имеет решение. В самом деле, из условия $PQ > MN$ следует, что в треугольнике ABD $AD > AB$, и поэтому угол B больше угла D. Следовательно, $\angle DBC = \angle D < \angle DBA$ (рис. 159, *д*). Это означает, что луч BC проходит внутри угла DBA, поэтому он пересекает отрезок AD.

Из построения ясно также, что данная задача имеет единственное решение, поскольку серединный перпендикуляр к отрезку BD не может пересечь прямую AD в двух точках.

Замечание 1. Задачи на построение интересны еще и тем, что они в ряде случаев помогают найти формулировку теоремы или установить, что какое-то утверждение правильным не является. Приведем пример. Как мы помним, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, имеет место только в том случае, когда сторона, противолежащая этому углу, не меньше второй из данных сторон. Попробуем установить это путем построений. Для этого сформулируем такую задачу.

Задача 6. *Построить треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.*

Р е ш е н и е. На рисунке 160 изображены два данных отрезка MN и PQ и данный угол hk, причем на рисунке 160, *а* $PQ < MN$, на рисунке 160, *б* $PQ = MN$, а на рисунке 160, *в* $PQ > MN$. Требуется

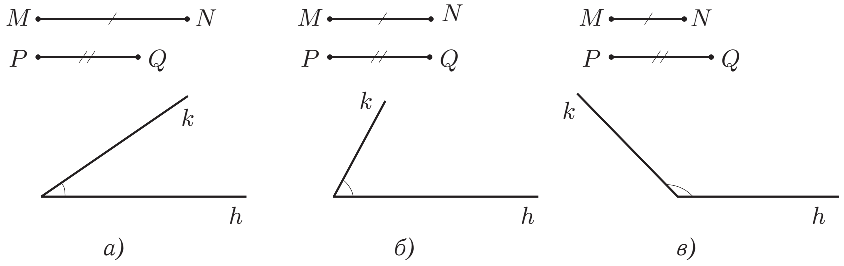


Рис. 160

построить треугольник ABC, в котором $AB = MN$, $BC = PQ$, $\angle A = \angle hk$. Имея в виду нашу цель, будем исходить из того, что искомый треугольник существует.

Возьмем произвольный луч, начало которого обозначим буквой A, и отложим от него угол, равный данному углу hk (рис. 161). На одной из сторон этого угла отложим отрезок AB, равный MN, и проведем окружность с центром B радиуса PQ. Поскольку по предположению искомый треугольник существует, то проведенная окружность либо пересекает прямую, содержащую вторую сторону угла, в двух точках C_1 и C_2, либо касается этой прямой. Рассмотрим сначала первый случай. Если $PQ < MN$, то точка A лежит вне круга, ограниченного этой окружностью, поэтому точки C_1 и C_2 лежат на одном луче с началом A, т. е. на второй стороне построенного угла (рис. 161, *а*). Следовательно, каждый из треугольников ABC_1 и ABC_2 является искомым. Эти треугольники не равны друг другу, поскольку $AC_1 \neq AC_2$. Таким образом, наша задача имеет два решения. Теперь совершенно ясно, что признак равенства треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, в этом случае не имеет места. Иначе по этому признаку треугольники ABC_1 и ABC_2 были бы равны друг

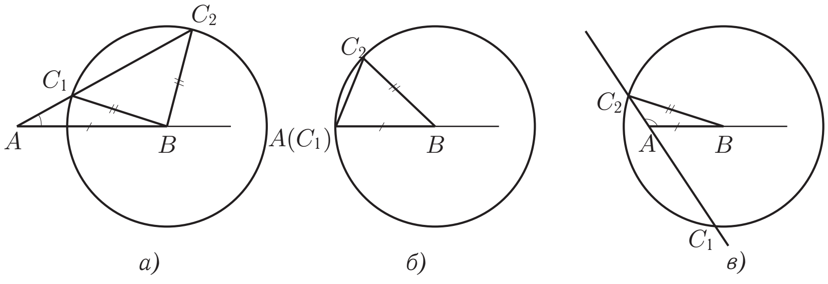


Рис. 161

другу, а это не так. Если же $PQ = MN$ или $PQ > MN$, то точка A лежит на границе или внутри проведенной окружности (рис. 161, *б*, *в*). Следовательно, эта окружность пересекает вторую сторону угла только в одной точке (точка C_2 на рисунках 161, *б*, *в*). В этом случае наша задача имеет единственное решение, поэтому признак равенства треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, имеет место.

Рассмотрим теперь случай, когда окружность радиуса PQ с центром B касается прямой, содержащей сторону угла в некоторой точке C. Тогда задача на построение имеет единственное решение, причем угол C искомого треугольника ABC оказывается прямым. Заметим, однако, что в этом случае постановка задачи отличается от нашей: требуется *построить треугольник по двум сторонам и углу*, *противолежащему одной из них*, *если известно*, *что существует прямоугольный треугольник*, *острый угол которого равен данному углу*, *противолежащий ему катет равен одной из данных сторон*, *а гипотенуза — другой стороне*. Ясно, что эта задача уже не является задачей 6.

Замечание 2. Решив задачи 4 и 5, мы фактически обнаружили еще два признака равенства треугольников:

если сторона, прилежащий к ней угол и биссектриса, проведенная из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе, проведенной из вершины этого угла, другого треугольника, то такие треугольники равны;

если сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.

Попробуйте объяснить, как доказать эти утверждения, опираясь на наши построения.

Задачи

113. Докажите, что перпендикуляр, проведенный из центра окружности к хорде, делит эту хорду пополам.

114. Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

115. Имеют ли центр симметрии: а) отрезок; б) луч; в) пара пересекающихся прямых?

116. Какие из следующих букв имеют центр симметрии: А, О, М, Х, К?

117. Приведите примеры фигур, имеющих бесконечно много центров симметрии.

118. Расстояние от точки A до центра окружности меньше радиуса окружности. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность в двух точках.

119. Окружность касается прямых AB и AC в точках B и C. Через произвольную точку дуги BC проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и P. Найдите периметр треугольника AMP, если $AB = a$.

120. Прямая пересекает две концентрические окружности. Докажите, что отрезки прямой, заключенные между этими окружностями, равны.

121*. Окружность пересекает одну из двух концентрических окружностей в точках A и B, а другую — в точках C и D. Докажите, что $AB \parallel CD$.

122. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга извне, и каждая из них касается изнутри окружности радиуса 10 см с центром O_3. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

123. Дан тупой угол AOB. Постройте луч OX так, чтобы углы XOA и XOB были равными тупыми углами.

124. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при основании.

125*. Постройте треугольник: а) по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне; б) по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне; в) по стороне, высоте и медиане, проведенным к этой стороне; г) по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла.

126. На данной окружности постройте точку, равноудаленную от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

127. Даны прямая a и две точки A и B, лежащие по одну сторону от нее. На прямой a постройте точку M, равноудаленную от точек A и B. Всегда ли задача имеет решение?

128. Даны точки A, B, C и отрезок PQ. Постройте такую точку M, чтобы выполнялись равенства: $AM = BM$ и $CM = PQ$. Сколько решений может иметь задача?

129. Даны угол и отрезок. Постройте точку, лежащую внутри угла, равноудаленную от его сторон и равноудаленную от концов данного отрезка.

130. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. Постройте точку M прямой a так, чтобы сумма $AM + MB$ была бы меньше суммы $AX + XB$, где X — любая точка прямой a, отличная от M.

131*. Постройте прямую, которая проходит через данную точку M, лежащую вне данной окружности, и пересекает эту окружность в таких точках A и B, что $AM = AB$.

Глава 3

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

§ 1. Аксиома параллельных прямых

42. Аксиомы. Изучая свойства геометрических фигур, мы доказали ряд теорем. При этом мы опирались, как правило, на доказанные ранее теоремы. Например, в п. 34 мы доказали такую теорему: три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. При этом мы опирались на ранее доказанные теоремы о свойствах биссектрисы, но не только на них. Прочитав еще раз доказательство, мы обнаружим, что в наших рассуждениях использовался такой факт: биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в некоторой точке. А как это доказать? Видимо, нужно сначала вспомнить определение биссектрисы треугольника: отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника. Но откуда следует, что биссектриса угла треугольника пересекает противоположную сторону? Давайте вспомним, что такое биссектриса угла: луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется биссектрисой угла. Будем теперь рассуждать так. Поскольку биссектриса AA_1 угла BAC делит этот угол на два угла, то стороны AB и AC лежат по разные стороны от прямой AA_1 (рис. 162), или, иными словами, стороны AB и AC лежат в разных полуплоскостях с границей AA_1. Тем самым, если мы хотим доказать, что прямая AA_1 пересекает отрезок BC, то нам нужно доказать следующее утверждение:

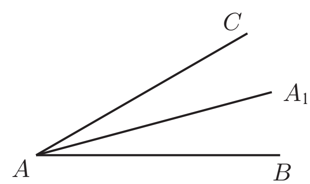


Рис. 162

если точки B и C лежат в различных полуплоскостях с границей AA_1, то прямая AA_1 пересекает отрезок BC.

А как доказать это утверждение? С одной стороны, сам факт, вроде бы, не вызывает сомнений. С другой стороны, как это доказать — не ясно. Все это наводит на мысль, что не все утверждения можно доказать. Некоторые из них, самые очевидные, следует принять на веру в качестве исходных положений, а затем уже на их основе доказывать теоремы и вообще строить всю геометрию. Такие исходные положения называются *аксиомами*.

Некоторые аксиомы были сформулированы еще в первой главе (хотя и не назывались там аксиомами). Например, аксиомой является утверждение:

через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Многие другие аксиомы, хотя и не были выделены особо, фактически использовались в наших рассуждениях. Это относится, в частности, к аксиомам о наложении и равенстве отрезков и углов. Так, сравнение двух отрезков основано на наложении одного отрезка на другой. Возможность такого наложения вытекает из следующей аксиомы:

на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Сравнение углов основано на аналогичной аксиоме:

от любого луча в заданную сторону можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

Отметим, наконец, что сформулированное выше утверждение вытекает из следующей аксиомы:

каждая прямая a разделяет плоскость на две части (полуплоскости) так, что любые две точки A и B одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a (т. е. отрезок AB не пересекается с прямой a), *а любые две точки C и D разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a* (т. е. отрезок CD пересекается с прямой a).

Мы видим, что все перечисленные аксиомы являются наглядно очевидными и не вызывают сомнений. Само слово «аксиома» происходит от греческого «аксиос», что означает «ценный», «достойный».

43. Основные понятия. Возникает еще один вопрос. Можно ли дать определения всем понятиям, которыми мы пользуемся в геометрии? Например, треугольником мы назвали геометрическую фигуру, которая состоит из трех отрезков, соединяющих три точки, не лежащие на одной прямой. Тем самым понятие треугольника вводится с помощью следующих трех понятий: «точка», «прямая», «отрезок». А что такое отрезок? Вспомним, что отрезком AB называется геометрическая фигура, состоящая из точек A и B и всех точек прямой AB, лежащих между ними. Итак, отрезок определяется с помощью понятий: «точка», «прямая», «лежать между». Конечно, когда мы говорим: «Точка M лежит между точками A и B», то наглядно себе представляем, что это означает (рис. 163), однако никакого определения этому понятию мы не даем. Аналогично обстоит дело с понятиями «точки» и «прямой». Правда, может показаться, что точку и прямую мы определили в первой главе. Но вдумаемся в эти определения. Мы сказали, что точка — это

Рис. 163. Точка M лежит между точками A и B

геометрическая фигура, не имеющая размеров, а что такое «размеры»? Мы сказали, что линия — это геометрическая фигура, не имеющая ширины, а прямая линия безгранична и не имеет искривлений. Но что такое «ширина», что такое «искривление» и что означает «безгранична»? Определений этих понятий не было. Но предположим, что такие определения мы дадим. Тогда в них обязательно будут использоваться другие понятия, которые, в свою очередь, также будут нуждаться в определениях. Ясно, что эта цепь не может продолжаться бесконечно, где-то она должна иметь начало (подобно тому, как цепь вытекающих друг из друга теорем имеет своим началом аксиомы). Таким началом должны служить понятия, определения которым не даются — так называемые *основные понятия*.

Но здесь возникает сомнение: ведь если мы не определяем основные понятия, то как ими пользоваться? Вроде бы получается, что про основные понятия мы вообще ничего не знаем! На самом деле это не так. Свойства основных понятий как раз и выражаются в аксиомах, и тем самым основные понятия как бы определяются аксиомами. Рассмотрим, например, понятия «точка», «прямая» и «лежать между». Эти понятия естественно считать основными и определений им не давать. Означает ли это, что про них мы ничего не знаем? Конечно же, нет! Мы знаем, например, аксиому: через две точки проходит прямая, и притом только одна. Приведем еще три аксиомы о взаимном расположении точек и прямых:

на каждой прямой имеются по крайней мере две точки;

имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой;

из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Вот и получается, что мы уже кое-что знаем о наших основных понятиях.

К числу основных понятий естественно отнести также понятие «наложение». В главе 1 мы сказали: две фигуры называются равными, если их можно совместить наложением. При этом мы опирались на наглядные представления о наложении фигур и допускали, что всякая геометрическая фигура может перемещаться как единое целое, наподобие того, как перемещаются материальные тела. Но геометрические фигуры — не материальные тела, а воображаемые объекты, поэтому наложение геометрических фигур следует понимать в особом смысле.

Чтобы выяснить этот смысл, заметим, что при наложении фигуры Φ на равную ей фигуру Φ_1, как мы представляем его наглядно, каждая точка фигуры Φ накладывается на некоторую точку фигуры Φ_1. Иначе говоря, каждая точка фигуры Φ сопоставляется некоторой точке фигуры Φ_1. Но мы можем сопоставить каждую точку фигуры Φ некоторой точке фигуры Φ_1 и без непосредственного наложения Φ на Φ_1 (рис. 164). Такое сопоставление называется *отображением фигуры Φ на фигуру Φ_1* (при этом подразумевается, что каждая точка

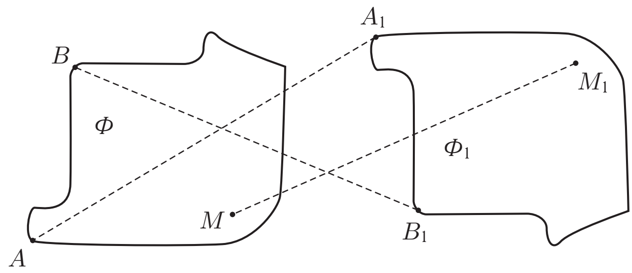


Рис. 164

фигуры Φ_1 оказывается сопоставленной некоторой точке фигуры Φ). Под наложением фигуры Φ на фигуру Φ_1 мы понимаем отображение Φ на Φ_1. Более того, мы считаем, что при этом не только точки фигуры Φ, но и любая точка плоскости отображается на определенную точку плоскости, т. е. *наложение — это отображение плоскости на себя*. Однако не всякое отображение плоскости на себя мы называем наложением. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах. Приведем одну из них:

если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

Евклид

Такой подход к построению геометрии, когда сначала формулируются исходные положения — аксиомы, а затем на их основе путем логических рассуждений доказываются другие утверждения, зародился еще в глубокой древности и был изложен в знаменитом сочинении «Начала» древнегреческого ученого Евклида (ок. 365–300 гг. до н. э.). Некоторые из аксиом Евклида (часть из них он называл *постулатами*) и сейчас используются в курсах геометрии в современной формулировке, а сама геометрия, изложенная в «Началах», называется *евклидовой геометрией*.

Сколько же аксиом и основных понятий нужно для построения геометрии? Этот вопрос был детально исследован великим немецким математиком Давидом Гильбертом (1862–1943), который, в частности, привел полный список аксиом и основных понятий геометрии, или, как говорят, построил *систему аксиом геометрии*.

Д. Гильберт

44. Система аксиом планиметрии. Итак, аксиомами называются те основные положения геометрии, которые принимаются в качестве исходных. Вместе с основными понятиями они образуют фундамент для построения геометрии. Определения основных понятий не даются, а их свойства выражаются в аксиомах. Используя основные понятия и аксиомы, мы даем определения новых понятий, формулируем и доказываем теоремы и таким образом изучаем свойства геометрических фигур.

В нашей системе аксиом (несколько отличной от системы аксиом Гильберта) основных понятий четыре: «точка», «прямая», «лежать между» и «наложение».

Первыми основными понятиями, с которыми мы познакомились, были понятия точки и прямой. В соответствии с этим первые три аксиомы характеризуют взаимное расположение точек и прямых:

1^0 *каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки* [1];

2^0 *имеются по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой*;

3^0 *через любые две точки проходит прямая, и притом только одна*.

Следующие три аксиомы связаны с понятием «лежать между», относящемуся к трем точкам, лежащим на одной прямой.

4^0. *Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

Говоря: «Точка B лежит между точками A и C», мы имеем в виду, что A, B, C — различные точки прямой и точка B лежит между C и A. Иногда вместо этих слов мы говорим, что точки A и B лежат по одну сторону от точки C (аналогично точки B и C лежат по одну сторону от точки A) или что точки A и C лежат по разные стороны от точки B.

5^0. *Каждая точка O прямой разделяет ее на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O.*

При этом точка O не принадлежит ни одному из указанных лучей.

Напомним, что отрезком AB называется геометрическая фигура, состоящая из точек A и B и всех точек прямой AB, лежащих между A и B. Если отрезок AB не имеет общих точек с прямой a, то говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a; если же отрезок AB пересекается с прямой a (в некоторой точке C, лежащей между A и B), то говорят, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a.

6^0. *Каждая прямая a разделяет плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной полуплоскости*

---

[1] Такие понятия, как «принадлежать», «множество», «отображение», относятся не только к геометрии, но и к другим разделам математики. Поэтому мы считаем их известными и не относим к числу основных понятий геометрии.

лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a.

Прямая a называется *границей* каждой из указанных полуплоскостей; ее точки не принадлежат ни одной из этих полуплоскостей.

Следующие аксиомы связаны с понятием «наложение». Как уже отмечалось в п. 43, наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах. Чтобы сформулировать эти аксиомы, введем понятие равенства фигур. Пусть Φ и Φ_1 — две фигуры. Если существует наложение, при котором фигура Φ отображается на фигуру Φ_1, то мы говорим, *что фигуру Φ можно совместить наложением с фигурой Φ_1*, или что *фигура Φ равна фигуре Φ_1*. Сформулируем теперь аксиомы о свойствах наложений:

7^0 *любая фигура равна самой себе*;

8^0 *если фигура Φ равна фигуре Φ_1, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ*;

9^0 *если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3*;

10^0 *если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки*;

11^0 *на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один*; это означает, что если даны какой-то отрезок AB и какой-то луч h с началом в точке O, то на луче h существует, и притом только одна, точка C такая, что отрезок AB равен отрезку OC;

12^0 *от любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один*; это означает, что если даны какой-то луч OA и какой-то неразвернутый угол hk, то в каждой из двух полуплоскостей с границей OA существует, и притом только один, луч OB такой, что угол AOB равен углу hk;

13^0 *любой угол hk можно совместить наложением с равным ему углом h_1k_1 двумя способами*: 1) *так, что луч h совместится с лучом h_1, а луч k — с лучом k_1*; 2) *так, что луч h совместится с лучом k_1, а луч k — с лучом h_1.*

Следующие две аксиомы связаны со сравнением отрезков. Множество точек, лежащих на одной прямой, называется *ограниченным*, если существует отрезок, содержащий все эти точки.

14^0. *Для любого ограниченного множества точек, лежащих на одной прямой, существует наименьший отрезок, содержащий все эти точки.*

Иными словами, существует такой отрезок AB, что все точки данного ограниченного множества ему принадлежат, а для любого отрезка CD, меньшего AB (см. п. 8), в данном множестве найдется хотя бы одна точка, не принадлежащая отрезку CD.

Рассмотрим теперь произвольный отрезок AB. На продолжении луча BA отложим отрезок $BB_1 = AB$, на продолжении луча B_1A — отрезок $B_1B_2 = AB$, ..., на продолжении луча $B_{n-1}A$ — отрезок $B_{n-1}B_n = AB$ (рис. 165). Говорят, что отрезок BB_n равен произведению отрезка AB на число n: $BB_n = nAB$.

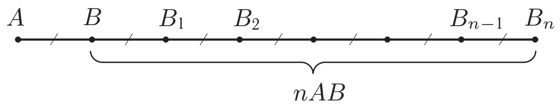


Рис. 165

15^0. *Для любых двух отрезков AB и CD существует такое натуральное число n, что $nAB > CD$.*

Эту аксиому связывают с именем древнегреческого ученого Архимеда (ок. 287–212 до н. э.). Отметим, что *аксиома Архимеда* позволяет осуществить процесс измерения отрезков, описанный в п. 10.

Систему аксиом планиметрии завершает *аксиома параллельных прямых*, речь о которой пойдет в п. 48.

Замечание 1. Как уже отмечалось, система аксиом Гильберта отличается от нашей. Несколько иные системы аксиом используются в других учебниках геометрии (например, в учебнике А. В. Погорелова). Но все эти системы аксиом эквивалентны друг другу, т. е. приводят к одним и тем же выводам.

Замечание 2. Иногда стремятся к тому, чтобы аксиомы были независимы, т. е. ни одну из них нельзя было вывести из остальных. Мы не ставили перед собой такой цели. Например, утверждение аксиомы 5^0 может быть доказано на основе остальных аксиом, т. е. фактически это утверждение является теоремой, а не аксиомой. Подумайте, как доказать эту теорему.

Замечание 3. При доказательстве некоторых утверждений (теоремы о перпендикуляре к прямой в п. 12 и утверждения задачи п. 23) мы использовали термин «перегибание плоскости по прямой». При этом мы исходили из наглядных представлений о перегибании плоскости рисунка. С точки зрения аксиом, перегибание плоскости по прямой представляет собой наложение, которое определяется следующим образом. Рассмотрим произвольную прямую a. На этой прямой есть по крайней мере две точки (аксиома 1^0), обозначим их буквами A и B. Кроме того, существует по крайней мере одна точка, не лежащая на прямой a (аксиома 2^0), обозначим ее буквой C. Прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости (аксиома 6^0). В ту из них, которая не содержит точку C (рис. 166), отложим от луча AB

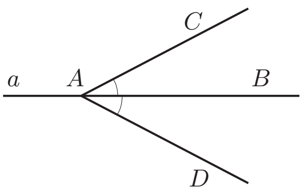


Рис. 166

угол BAD, равный углу BAC (аксиома 12^0). Согласно аксиоме 13^0 существует такое наложение, при котором луч AB накладывается на луч AB (т. е. луч AB остается на месте), а луч AC накладывается на луч AD. Это наложение и называется перегибанием плоскости по прямой a. Оно вполне соответствует нашим наглядным представлениям о перегибании плоскости рисунка.

Отметим, что при перегибании плоскости по прямой a каждая точка плоскости переходит в точку, симметричную ей относительно прямой a. По этой причине перегибание плоскости по прямой a обычно называют *осевой симметрией*, прямую a — *осью симметрии*, а фигуры, совмещающиеся этим наложением — *симметричными относительно прямой* a.

45. Два следствия из аксиом. Выведем два наглядно очевидных следствия из наших аксиом.

С л е д с т в и е 1. *На каждом луче есть хотя бы одна точка.*

В самом деле, рассмотрим луч с началом A, являющийся частью прямой a (на рисунке 167 он выделен жирной линией). На прямой a есть хотя бы одна точка B, отличная от точки A (аксиома 1^0). Если точка B лежит на нашем луче (рис. 167, *а*), то она и является той точкой, существование которой мы доказываем. Если же точка B лежит на продолжении нашего луча (рис. 167, *б*), то поступим так: на нашем луче от его начала отложим отрезок AC, равный AB. Это можно сделать согласно аксиоме 11^0. Тогда точка C будет лежать на нашем луче, что и доказывает справедливость утверждения.

С л е д с т в и е 2. *Если точка A лежит на прямой a, а точка B не лежит на этой прямой, то все точки луча AB лежат в одной полуплоскости с границей a.*

Действительно, пусть C — произвольная точка луча AB, отличная от B (а есть ли такая точка? Положительный ответ на этот вопрос обоснуйте самостоятельно). Докажем, что точка C лежит в той же полуплоскости с границей a, что и точка B (рис. 168). Прежде всего отметим, что прямые BC и a пересекаются в точке A. Но поскольку точки B и C лежат по одну сторону от точки A, то согласно аксиоме 4^0, точка A не лежит на отрезке BC. Следовательно, отрезок BC не пересекается с прямой a. Если же мы предположим, что точки B

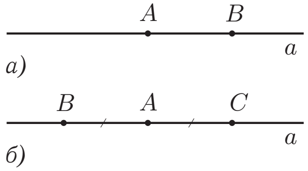


Рис. 167

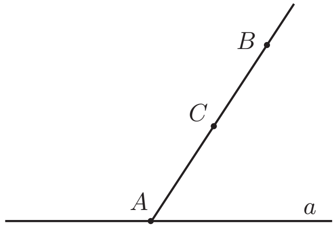


Рис. 168

и C лежат в разных полуплоскостях с границей a, то по аксиоме 6^0 отрезок BC будет пересекаться с прямой a. Полученное противоречие означает, что наше предположение ошибочно, т. е. точки B и C лежат в одной полуплоскости с границей a, что и требовалось доказать.

46. О теоремах. Как мы только что видели, опираясь на аксиомы, можно доказывать утверждения без привлечения наглядных представлений о свойствах геометрических фигур. Это относится, в частности, ко всем рассмотренным ранее теоремам. Возьмем, например, теорему, выражающую первый признак равенства треугольников. Ее доказательство опиралось на наглядные представления о наложении и равенстве фигур, понятие «аксиомы» тогда еще не было введено. Напомним это доказательство и рассмотрим его с точки зрения принятых нами аксиом.

Нужно было доказать, что если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. С этой целью мы рассматривали такое наложение, при котором вершина A совмещается с вершиной A_1, а стороны AB и AC треугольника ABC накладываются соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. При этом мы опирались на очевидный факт, что такое наложение существует, поскольку углы A и A_1 равны. Теперь можно сказать, что существование такого наложения следует из аксиомы 13^0. Далее мы рассуждали так: поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1, в частности совместятся точки B и B_1, C и C_1. Как обосновать этот факт, опираясь на аксиомы? Очень просто. По аксиоме 11^0 на луче A_1B_1 от точки A_1 можно отложить только один отрезок, равный отрезку AB. Но по условию теоремы $AB = A_1B_1$, поэтому при нашем наложении точка B совместится с точкой B_1. Аналогично точка C совместится с точкой C_1. Остается сослаться на аксиому 10^0, чтобы обосновать тот факт, что сторона BC совместится со стороной B_1C_1. Теперь можно сделать вывод: треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместились и, следовательно, они равны, что и требовалось доказать.

Отметим, что на той же идее основаны доказательства теорем об углах и высоте равнобедренного треугольника (проведите эти доказательства, опираясь на аксиомы).

Рассмотрим теперь теорему, выражающую второй признак равенства треугольников. Требуется доказать, что если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Как и прежде, рассмотрим такое наложение, при котором луч AB наложится на луч A_1B_1, а луч AC — на луч A_1C_1 (такое наложение существует в силу аксиомы 13^0). При этом точка B совместится с некоторой точкой B_2 луча A_1B_1, а точка C — с некоторой точкой C_2 луча A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, то $A_1B_2 = A_1B_1$. Следовательно, точка B_2 совпадает с точкой B_1 (аксиома 11^0). Далее, точка C_2, а значит и все точки луча B_1C_2, лежат в полуплоскости с границей A_1B_1, содержащей точку C_1 (и то, и другое утверждение вытекает из следствия 2 п. 45), причем $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1$. Поэтому (аксиома 12^0) луч B_1C_2 совпадает с лучом B_1C_1. Итак, точка C_2 лежит как на прямой A_1C_1, так и на прямой B_1C_1, откуда по аксиоме 3^0 следует, что эта точка совпадает с точкой C_1. Таким образом, при рассматриваемом наложении треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся (аксиома 10^0), что и требовалось доказать.

По существу, на той же идее основаны доказательства теорем, выражающих признак параллельности двух прямых и признак равнобедренного треугольника (проведите эти доказательства, опираясь на аксиомы).

Приведенные примеры показывают, что доказательства теорем о первом и втором признаках равенства треугольников, опирающиеся на аксиомы, по сути, не отличаются от наших прежних доказательств, основанных на наглядных представлениях. Аналогично обстоит дело и с остальными ранее доказанными утверждениями (проверьте это). Исключения здесь составляют лишь доказательства двух утверждений — о взаимном расположении прямой и окружности и двух окружностей, где требуются более аккуратные рассуждения (см. раздел «Снова о числах» в конце книги).

47*. Несколько задач. Попробуем теперь доказать те два утверждения, которые были упомянуты в начале главы:

биссектриса угла треугольника пересекает противоположную сторону этого треугольника;

любые две биссектрисы треугольника пересекаются.

Начнем с трех вспомогательных задач.

Задача 1. *Доказать, что если луч исходит из вершины неразвернутого угла и проходит через точку внутренней области этого угла, то все точки луча лежат во внутренней области угла.*

Решение. Рассмотрим угол AOB и луч OC, проходящий через точку C внутренней области этого угла (рис. 169). Поскольку точка C принадлежит полуплоскости с границей OA, содержащей точку B, то все точки луча OC также принадлежат этой полуплоскости (следствие 2 п. 45). По аналогичной причине все точки луча OC принадлежат полуплоскости с границей OB, содержащей точку A. Следовательно, все точки луча OC принадлежат общей части указанных полуплоскостей, т. е. внутренней области угла AOB.

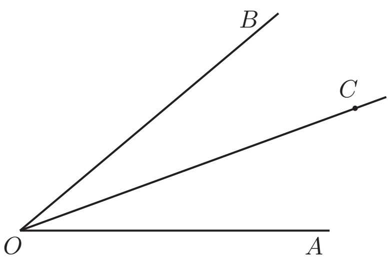


Рис. 169

З а д а ч а 2. *Доказать, что если прямая a пересекает сторону AB треугольника ABC и не проходит через вершину этого треугольника, то она пересекает либо сторону BC, либо сторону AC.*

Р е ш е н и е. Данная прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости (аксиома 6^0), причем точки A и B лежат в разных полуплоскостях (рис. 170). Поэтому если точка C лежит в одной полуплоскости

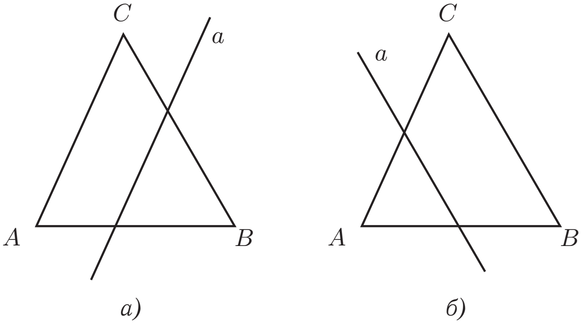


Рис. 170

с точкой A, то точки B и C лежат в разных полуплоскостях, а значит, прямая a пересекает отрезок BC (рис. 170, *а*). Если же точка C лежит в одной полуплоскости с точкой B, то точки A и C лежат в разных полуплоскостях, а значит, прямая a пересекает отрезок AC (рис. 170, *б*).

З а д а ч а 3. *Доказать, что если точка C лежит во внутренней области неразвернутого угла AOB, то луч OC пересекает отрезок AB.*

Р е ш е н и е. Пусть D — произвольная точка луча, являющегося продолжением луча OA (рис. 171). Прямая OC пересекает сторону AD треугольника ABD и не проходит через его вершину. Следовательно, она пересекает либо сторону AB, либо сторону BD (см. задачу 2) в точке, лежащей на луче OC (поскольку точки B и C лежат в одной

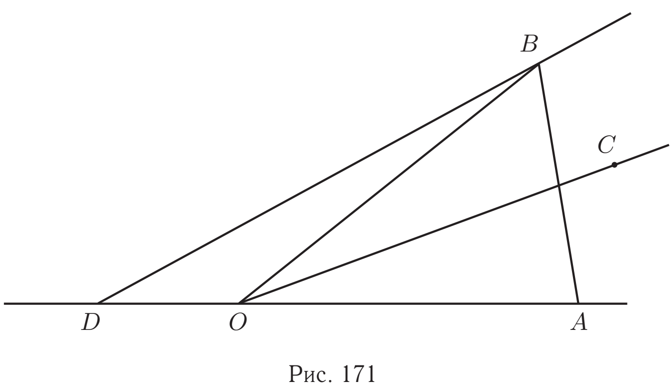


Рис. 171

полуплоскости с границей AD). Но точка D не лежит во внутренней области угла AOB — она лежит в полуплоскости с границей OB, не содержащей точку A. Поэтому все точки луча BD не принадлежат внутренней области угла AOB (следствие 2 п. 45), а значит, луч OC не может пересечь сторону BD — все точки этого луча принадлежат внутренней области угла AOB (см. задачу 1). Следовательно, он пересекает сторону AB, что и требовалась доказать.

Задача 4. *Доказать, что биссектриса угла треугольника пересекает противоположную сторону этого треугольника.*

Решение. Биссектриса AD делит угол A треугольника ABC на два угла (рис. 172, *а*). Следовательно, лучи AB и AC, а значит, и точки B и C лежат по разные стороны от прямой AD. Иными сло-

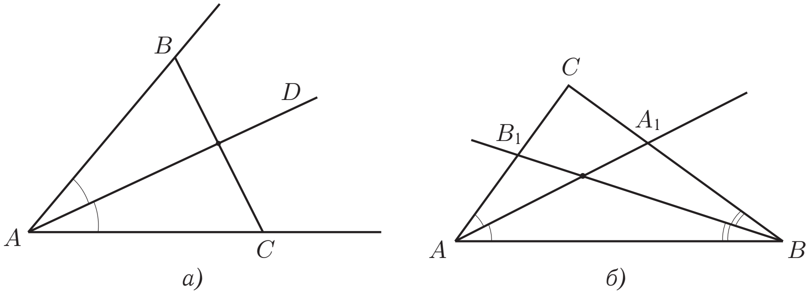


Рис. 172

вами, прямая AD пересекает отрезок BC. Поскольку все внутренние точки отрезка BC лежат во внутренней области угла BAC, то и точка пересечения отрезка BC с прямой AD лежит во внутренней области угла BAC, т. е. на луче AD.

Задача 5. *Доказать, что любые две биссектрисы треугольника пересекаются.*

Решение. Рассмотрим треугольник ABC и проведем биссектрису угла A (рис. 172, *б*). Эта биссектриса пересекает сторону BC в некоторой точке A_1 (см. задачу 4). Аналогично биссектриса угла B пересекает сторону AC в некоторой точке B_1. Луч AA_1 является биссектрисой угла A треугольника ABB_1, поэтому он пересекает сторону BB_1 этого треугольника. Следовательно, общая точка прямых AA_1 и BB_1 лежит на отрезке BB_1. Аналогично луч BB_1 является биссектрисой угла B треугольника ABA_1, поэтому он пересекает сторону AA_1 этого треугольника. Значит, общая точка прямых AA_1 и BB_1 лежит на отрезке AA_1. Итак, общая точка прямых AA_1 и BB_1 лежит как на отрезке BB_1, так и на отрезке AA_1. Поэтому отрезки AA_1 и BB_1 — биссектрисы треугольника ABC — пересекаются, что и требовалось доказать.

Замечание. Мы начали решение задачи 5 с того, что провели биссектрису угла A. Тем самым мы исходили из того, что у каждого угла есть биссектриса. А откуда это следует, как это доказать? Вспомните теорему о высоте равнобедренного треугольника и попробуйте провести доказательство самостоятельно.

Решим теперь две задачи, связанные с понятием «наложение».

Задача 6. *Доказать, что наложение, при котором точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, переходят соответственно в точки A_1, B_1 и C_1, определяется единственным образом.*

Решение. Допустим, что есть два наложения, удовлетворяющих условию задачи. Тогда существует по крайней мере одна точка M, которая при одном наложении отображается на некоторую точку M_1, а при другом — на какую-то другую точку M_2. Поскольку $A_1M_1 = AM$ и $A_1M_2 = AM$, то $A_1M_1 = A_1M_2$. Следовательно, точка A_1 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2. Аналогично доказывается, что точки B_1 и C_1 лежат на указанном серединном перпендикуляре. Но это противоречит условию задачи — точки A, B и C, а значит и точки A_1, B_1 и C_1, не лежат на одной прямой (докажите это). Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения, сформулированного в задаче.

Задача 7. *Доказать, что любые две равные фигуры можно совместить не более, чем тремя осевыми симметриями* (см. п. 44).

Решение. Рассмотрим две равные фигуры Φ и Φ_1, совмещающиеся некоторым наложением f. Пусть A, B и C — какие-нибудь три точки фигуры Φ, не лежащие на одной прямой (случай, когда все точки фигуры Φ лежат на одной прямой, рассмотрите самостоятельно), A_1, B_1 и C_1 — точки, на которые они отображаются при наложении f. Тогда $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. При осевой симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку AA_1 (если точки A и A_1 совпадают, то этот этап рассуждений пропускается) точка A переходит в точку A_1, а точки B и C — в какие-то точки B_2 и C_2. При этом $AB = A_1B_2 = A_1B_1$, $AC = A_1C_2 = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_2A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$. Проведем биссектрисы A_1D и A_1E углов $B_1A_1C_1$ и $B_2A_1C_2$ (если они совпадают, то следующий этап рассуждений пропускается). При осевой симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису угла DA_1E, луч A_1E накладывается на луч A_1D, поэтому угол $B_2A_1C_2$ накладывается на равный ему угол $B_1A_1C_1$ (докажите это). Возможны два случая: 1^0 лучи A_1B_2 и A_1C_2 накладываются соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1, и тогда точка B_2 совмещается с точкой B_1, а точка C_2 — с точкой C_1 (рис. 173, *а*); 2^0 лучи A_1B_2 и A_1C_2 накладываются соответственно на лучи A_1C_1 и A_1B_1 (рис. 173, *б*). Во втором случае нужно выполнить далее осевую симметрию относительно прямой A_1D, в результате чего точка B_2 перейдет в точку B_1, а точка C_2 — в точку C_1.

Итак, в результате последовательного выполнения не более, чем трех осевых симметрий, получилось наложение (докажите это), при котором точки A, B и C отобразились соответственно в точки A_1, B_1

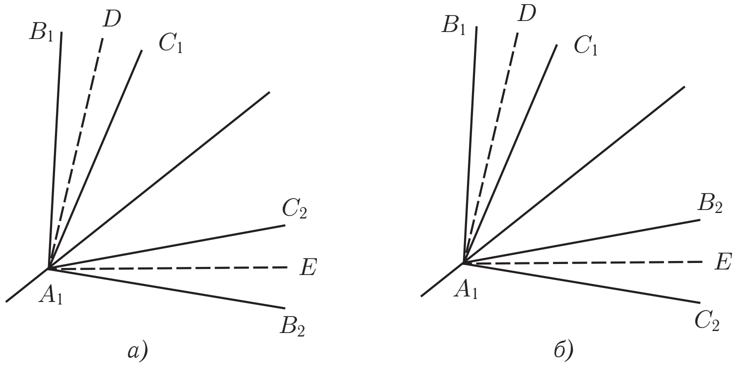


Рис. 173

и C_1. Это наложение совпадает с наложением f (см. задачу 6), поэтому оно переводит фигуру Φ в фигуру Φ_1. Утверждение доказано.

48. Аксиома параллельных прямых. Рассмотрим какую-нибудь прямую a и точку M, не лежащую на ней (рис. 174). Проведем из точки M перпендикуляр MH к прямой a, а затем через точку M проведем прямую b, перпендикулярную к прямой MH. Так как прямые a и b перпендикулярны к прямой MH, то они параллельны: $a \parallel b$ (п. 13). Итак,

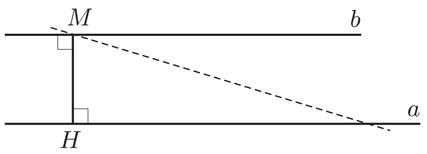


Рис. 174

через точку M, не лежащую на прямой a, проходит прямая b, параллельная прямой a.

Возникает вопрос: а можно ли провести через точку M еще одну прямую, параллельную a? По-видимому, нет: кажется, что если «повернуть» прямую b вокруг точки M даже на очень малый угол, то она обязательно пересечет прямую a (см. рис. 174). Иными словами, нам кажется, что через точку M нельзя провести другую прямую (отличную от b), параллельную прямой a.

А можно ли это утверждение доказать? Этот вопрос имеет большую историю. В «Началах» Евклида содержится постулат (*пятый постулат Евклида*), который гласит:

если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов меньше 180°*, то эти прямые пересекаются по ту сторону от секущей, по которую расположены указанные углы.*

Из этого постулата следует, что любая прямая, проходящая через точку M и не перпендикулярная к прямой MH, пересекает прямую a (по ту сторону от прямой MH, по которую она образует с лучом MH острый угол). Следовательно, через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Однако возникает вопрос: а не является ли пятый постулат теоремой, которую Евклид не сумел доказать и поэтому включил ее в число аксиом?

Многие математики, начиная с древних времен, предпринимали попытки доказать пятый постулат Евклида, т. е. вывести его как теорему из других аксиом Евклида. Однако эти попытки каждый раз оказывались неудачными: в предложенных доказательствах либо обнаруживались ошибки, либо пятый постулат неявно заменялся другой аксиомой, эквивалентной этому постулату. Так, древнегреческий ученый Посидоний (I в. до н. э.) строил доказательство пятого постулата на том, что множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной прямой, представляет собой две прямые; древнегреческий ученый Прокл (V в. н. э.) исходил из того, что если две прямые параллельны, то расстояния от точек одной прямой до другой прямой не может неограниченно увеличиваться; персидский поэт и ученый Омар Хайям (XI–XII в. н. э.) в своих рассуждениях опирался на то, что две сближающиеся прямые не могут с некоторого момента начать расходиться. Но каждое из этих утверждений формулировалось без доказательства, т. е. по существу принималось за новую аксиому. Лишь в XIX веке ответ на вопрос о доказательстве пятого постулата был получен. Огромную роль в решении этого вопроса сыграл великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792–1856).

Н. И. Лобачевский

Вся творческая жизнь Н. И. Лобачевского была связана с Казанским университетом, где он учился, затем был профессором, а с 1827 года — ректором университета. Его очень рано заинтересовала геометрия, и он, как и многие его предшественники, пытался доказать пятый постулат Евклида. Рассуждения Н. И. Лобачевского были основаны на методе доказательства от противного. Он предположил, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести несколько прямых, не пересекающих данную. Исходя из этого, он пытался получить утверждение, которое противоречило бы другим аксиомам или полученным из них теоремам. Если бы такое утверждение удалось получить, то это означало бы, что его предположение неверно, а верно утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой. Тем самым, как мы увидим в п. 49, пятый постулат Евклида был бы доказан.

Но Н. И. Лобачевский не получил утверждения, противоречащего другим аксиомам. Более того, он понял, что такое утверждение и нельзя получить! Из этого он сделал замечательный вывод: если вместо пятого постулата Евклида принять в качестве аксиомы противоположное утверждение, то можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида. Такая геометрия им была построена. Ее называют теперь *геометрией Лобачевского*. В настоящее время она широко используется не только в математике, но и в физике, в химии, в биологии и других разделах естествознания.

Другой вывод, вытекающий из исследований Н. И. Лобачевского, состоит в том, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой (или эквивалентный этому утверждению пятый постулат Евклида), не может быть доказано на основе остальных аксиом Евклида, а само является аксиомой евклидовой геометрии.

Итак, в качестве еще одного из исходных положений мы принимаем *аксиому параллельных прямых*:

16^0 *через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

До сих пор мы не пользовались этой аксиомой, поэтому все ранее установленные нами факты верны как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского. Рассмотрим теперь некоторые следствия из аксиомы параллельных прямых:

1^0 *если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую*;

2^0 *если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны*;

3^0 *если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой*;

4^0 *если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны*;

5^0 *если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны*;

6^0 *если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна* $180°$.

Пользуясь методом доказательства от противного, докажите эти утверждения самостоятельно, а также сравните с утверждениями п. 13.

49. О пятом постулате Евклида. Как мы уже отмечали, если принять пятый постулат Евклида за аксиому, то из него можно вывести как теорему аксиому параллельных прямых. В свою очередь, если принять аксиому параллельных прямых, то пятый постулат Евклида может быть доказан как теорема. В самом деле, вспомним формулировку этого постулата: если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов меньше $180°$, то эти прямые пересекаются по ту сторону от секущей, по которую расположены указанные углы. Докажем это утверждение методом от противного. Допустим, что указанные прямые параллельны. Тогда сумма односторонних углов равна $180°$ (следствие 6^0 п. 48), а это противоречит условию. Если же предположить, что эти прямые пересекаются, но по ту сторону от секущей, по которую сумма односторонних углов больше $180°$, то получится треугольник, в котором сумма двух углов больше $180°$.

Этого также не может быть (п. 18). Тем самым пятый постулат Евклида доказан.

Теперь мы можем ответить еще на один из вопросов, записанных в нашем блокноте: всегда ли можно построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам, если сумма этих углов меньше $180°$? Ответ на этот вопрос дает пятый постулат Евклида — такая задача на построение всегда имеет решение (обоснуйте это).

50. Еще раз о существовании квадрата. Опираясь на свойства параллельных прямых, мы можем ответить еще на один вопрос из нашего блокнота, а именно *доказать существование квадрата со стороной, равной данному отрезку*. В самом деле, пусть AB — данный отрезок. Проведем через точку B луч, перпендикулярный к AB, и отложим на нем отрезок $BC = AB$ (рис. 175). Далее, через точку C (в соответствующую сторону) проведем луч, перпендикулярный к BC, и отложим на нем отрезок $CD = AB$. Соединим точки A и D и докажем, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат, т. е. докажем, что углы A и D — прямые, а сторона AD равна AB.

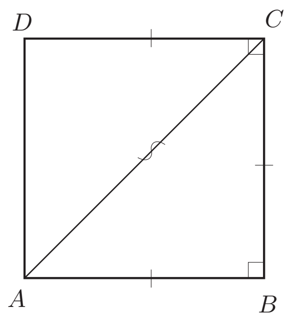


Рис. 175

Проведем диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и ADC. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними: $AB = DC$ по построению, сторона AC — общая, а углы BAC и ACD равны, так как являются накрест лежащими углами, образованными при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC (прямые AB и CD перпендикулярны к прямой BC, поэтому они параллельны). Из равенства треугольников следует, что $AD = BC = AB$ и $\angle D = \angle B = 90°$. Осталось доказать, что угол A — прямой. Это следует из того, что прямая AD, перпендикулярная к прямой CD, перпендикулярна также и к параллельной ей прямой AB (следствие 3^0 п. 48).

З а м е ч а н и е. Существование квадрата со стороной, равной данному отрезку, мы доказали, опираясь на свойство параллельных прямых, т. е. равенство накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей. В свою очередь это свойство доказывается на основе аксиомы параллельных прямых. Французский математик Алексис Клод Клеро (1713–1765) обнаружил, что можно поступить и наоборот: используя факт существования квадрата, доказать утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой. Другими словами, аксиому параллельных прямых можно заменить утверждением: существует хотя бы один квадрат. Из этого следует, что в геометрии Лобачевского нет ни одного квадрата! К этому вопросу мы еще вернемся в п. 55.

Задачи

132. Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую, которая пересекает прямую a и параллельна прямой b? Ответ обоснуйте.

133. Даны две прямые — a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

134. Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b. Прямая, проходящая через середину O этого отрезка, пересекает прямые a и b в точках C и D. Докажите, что $CO = OD$.

135. На рисунке 176 $CE = ED$, $BE = EF$ и $KE \parallel AD$. Докажите, что $KE \parallel BC$.

136. Через конец D биссектрисы AD треугольника ABC проведена прямая, параллельная AB и пересекающая сторону AC в точке M. Докажите, что $AM = MD$.

137. На рисунке 177 луч DE — биссектриса угла ADF. По данным рисунка найдите углы треугольника ADE.

138. Угол ABC равен $70°$, а угол BCD равен $110°$. Могут ли прямые AB и CD быть: а) параллельными; б) пересекающимися?

139*. Докажите, что если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы либо равны, либо в сумме составляют $180°$.

140*. Докажите, что если стороны одного угла соответственно перпендикулярны к сторонам другого угла, то такие углы либо равны, либо в сумме составляют $180°$.

141*. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка D так, что $\angle A = \angle ACD$. Через вершину C проведена прямая MN, параллельная гипотенузе AB, причем точки A и M лежат по одну сторону от прямой CD, а точки N и B — по другую. Докажите, что: а) лучи CA и CB — биссектрисы смежных углов MCD и NCD; б) отрезок CD — медиана треугольника ABC.

142. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

143. Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне треугольника, то треугольник — равнобедренный.

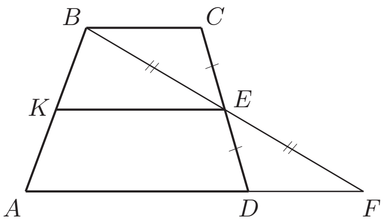


Рис. 176

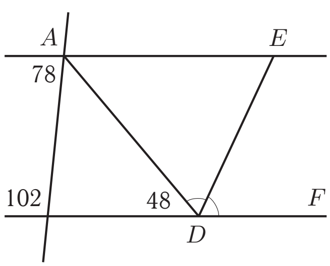


Рис. 177

144. Через точку пересечения биссектрис треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что $MN = BM + CN$.

145. Через точку пересечения прямых, содержащих биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC, проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая прямые AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $MN = BM + CN$.

146. На рисунке 178 лучи BO и CO — биссектрисы углов B и C треугольника ABC, $OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$. Докажите, что периметр треугольника OED равен длине отрезка BC.

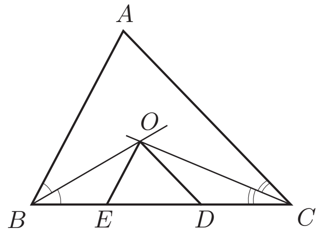


Рис. 178

147*. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 попарно параллельны и равны. Точки A, B и C лежат на прямой a, а точки A_1, B_1 и C_1 — в одной полуплоскости с границей a. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

148*. Четырехугольник называется прямоугольником, если все его углы — прямые. Докажите, что: а) существует прямоугольник $ABCD$, стороны AB и AD которого равны данным отрезкам; б) если $ABCD$ — прямоугольник, то $\Delta ABC = \Delta CDA$, $AB = CD$, $AD = BC$.

149. Внутри угла дана точка A. Постройте прямую, проходящую через точку A и отсекающую на сторонах угла равные отрезки. Всегда ли задача имеет решение?

150*. Даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Постройте точку, равноудаленную от этих прямых. Сколько решений имеет задача?

§ 2. Свойства параллельных прямых

51. Расстояние между параллельными прямыми. Рассмотрим одно из важнейших свойств параллельных прямых.

Теорема. *Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.*

Доказательство. Пусть a и b — параллельные прямые. Отметим на прямой a какую-нибудь точку A и проведем из этой точки перпендикуляр AB к прямой b (рис. 179). Докажем, что расстояние от любой точки X прямой a до прямой b равно AB.

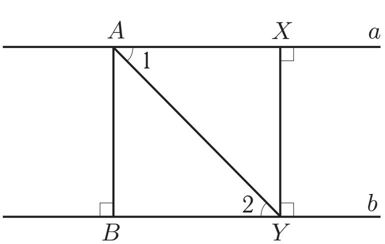


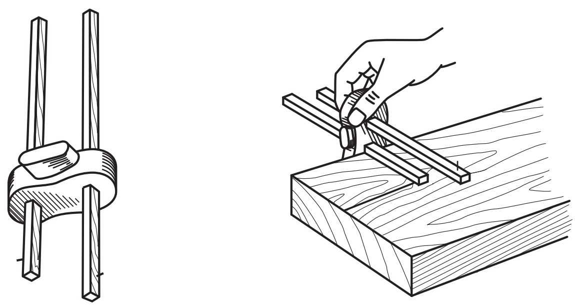
Рис. 179

Проведем перпендикуляр XY из точки X к прямой b. Так как $XY \perp b$, то $XY \perp a$. Прямоугольные треугольники ABY и YXA равны по гипотенузе и острому углу (AY — общая гипотенуза, углы 1 и 2 равны как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых a и b секущей AY). Следовательно, $XY = AB$. Итак, любая точка X прямой a находится на расстоянии AB от прямой b. Очевидно, что все точки прямой b находятся на таком же расстоянии от прямой a. Теорема доказана.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется расстоянием между этими прямыми.

Ясно, что расстояние между параллельными прямыми равно наименьшему из всевозможных расстояний между двумя точками, одна из которых лежит на одной, а другая — на другой из параллельных прямых.

52. Еще один способ построения параллельных прямых. Всякий, кто наблюдал за работой столяра, видел инструмент, называемый *рейсмусом* (рис. 180, *а*). Рейсмус используется для разметки на по-



а) *б)*

Рис. 180. Рейсмус

верхности деревянного бруска прямой, параллельной краю бруска. При передвижении рейсмуса вдоль края бруска его металлическая игла прочерчивает отрезок, параллельный краю бруска (рис. 180, *б*).

На каком свойстве параллельных прямых основан такой способ их построения? В первый момент может показаться, что здесь используется теорема из п. 51: все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой. Однако если подумать, то можно заметить, что это не совсем так. Действительно, с помощью рейсмуса строится множество точек, равноудаленных от данной прямой и находящихся по одну сторону от нее. Мы хотим доказать, что это множество точек есть прямая, параллельная данной. Тем самым, речь здесь идет об обратном утверждении по отношению к теореме из п. 51. Сформулируем его в виде теоремы и попробуем доказать.

Теорема. *Множество всех точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой и равноудаленных от нее, есть прямая, параллельная данной.*

Доказательство. Пусть a — данная прямая, Φ — множество всех точек плоскости, расположенных по одну сторону от прямой a и таких, что расстояние от каждой точки этого множества до прямой a равно заданной величине d. Через какую-нибудь точку A множества Φ проведем прямую b, параллельную прямой a (рис. 181). Докажем, что множество Φ совпадает с прямой b. Так как расстояние от точки A до прямой a равно d, то, согласно теореме п. 51, расстояние от любой точки прямой b до прямой a также равно d, поэтому любая точка прямой b принадлежит множеству Φ. Обратно, пусть M — произвольная точка множества Φ, а MM_1 — перпендикуляр, проведенный из точки M к прямой a (см. рис. 181). Прямая MM_1 перпендикулярна к прямой a, поэтому она пересекает прямую b в некоторой точке Q. Так как $QM_1 = d$ и $MM_1 = d$, то точки Q и M совпадают, т. е. точка M лежит на прямой b. Теорема доказана.

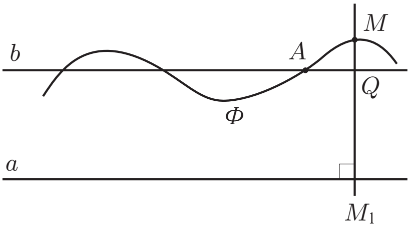


Рис. 181

Замечание. Множество всех точек, обладающих каким-либо геометрическим свойством, иногда называют *геометрическим местом точек*. Можно сказать, например, что

геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от концов данного отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку;

геометрическое место точек плоскости, расположенных внутри угла и равноудаленных от его сторон, есть биссектриса этого угла;

геометрическое место точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой и равноудаленных от нее, есть прямая, параллельная данной.

53. Задачи на построение. Пользуясь свойствами параллельных прямых, решим несколько задач на построение с помощью циркуля и линейки.

Задача 1. *Даны прямая a и точка M, не лежащая на этой прямой. Построить прямую, проходящую через точку M и параллельную прямой a.*

Решение. Рассмотрим два способа решения этой задачи.

Первый способ. Этот способ основан на утверждении о параллельности двух прямых, перпендикулярных к третьей прямой.

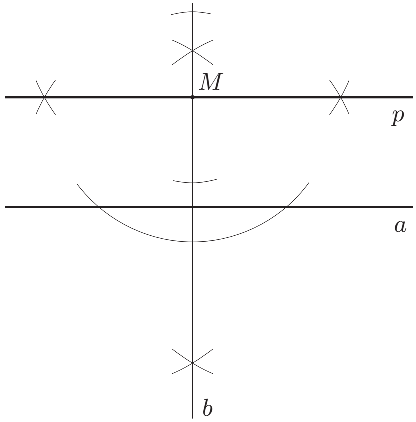


Рис. 182

Через точку M проведем прямую b, перпендикулярную к прямой a, а затем через точку M проведем прямую p, перпендикулярную к прямой b (как это сделать с помощью циркуля и линейки, описано в п. 40; соответствующее построение выполнено на рисунке 182). Прямая p — искомая: она проходит через точку M, и так как $p \perp b$ и $a \perp b$, то $p \parallel a$.

Очевидно, задача имеет единственное решение, так как по аксиоме параллельных прямых через точку M проходит только одна прямая, параллельная прямой a.

Второй способ. Этот способ основан на признаке параллельности двух прямых, связанном с накрест лежащими углами.

Проведем окружность с центром M так, чтобы она пересекала прямую a в двух точках: P и Q (рис. 183). Затем проведем окружность радиуса PM с центром P. Пусть N — одна из точек пересечения этой окружности с прямой a. Если теперь провести окружность радиуса MN с центром P, то эта окружность пересечет первую окружность радиуса MP с центром M в двух точках, одна из которых (точка R на рисунке 183) лежит на искомой прямой. В самом деле, треугольники PNM и MPR равны по трем сторонам ($PN = MP$, $PM = MR$ и $NM = PR$ по построению), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Так как углы 1 и 2

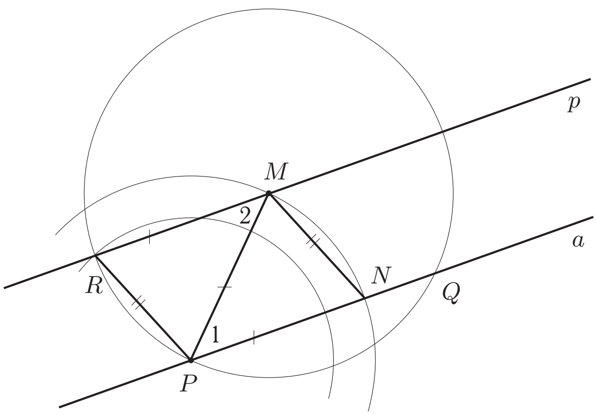


Рис. 183

являются накрест лежащими углами при пересечении прямых a и MR секущей PM, то $MR \parallel a$, т.е. прямая MR — искомая.

Замечание. Второй способ решения задачи более громоздкий, но он интересен тем, что построение точки R, лежащей на искомой прямой, осуществляется с помощью одного циркуля, без линейки.

Задача 2. *Даны прямая a и отрезок AB. Построить прямую p, параллельную прямой a, так, чтобы расстояние между прямыми a и p было равно AB.*

Решение. Отметим на прямой a какую-нибудь точку C и проведем через нее прямую b, перпендикулярную к прямой a (рис. 184, *а*). Затем на одном из лучей прямой b, исходящих из точки C, отложим отрезок CD, равный отрезку AB. Через точку D проведем прямую p, перпендикулярную к прямой b. Прямая p — искомая. В самом деле, прямые p и a параллельны, так как они перпендикулярны к прямой b. По построению $CD = AB$, поэтому расстояние от точки D до прямой a равно AB. Следовательно, и расстояние между прямыми a и p равно AB.

Как видно из построения, задача имеет два решения (прямые p и p_1 на рисунке 184, *б*).

Задача 3. *Построить прямоугольный треугольник по катету и противолежащему углу.*

Решение. Эту задачу нужно понимать так. Даны отрезок PQ и острый угол hk (рис. 185, *а*). Требуется построить прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C так, чтобы один из катетов, например BC, был равен данному отрезку PQ, а противолежащий угол A — данному углу hk.

Построим угол XAY, равный данному углу hk. Для построения точки B на луче AX заметим, что расстояние от нее до прямой AY должно равняться PQ. Поэтому точка B лежит на прямой p, параллельной прямой AY, причем расстояние между прямыми p и AY равно PQ. Следовательно, искомая точка B есть точка пересечения

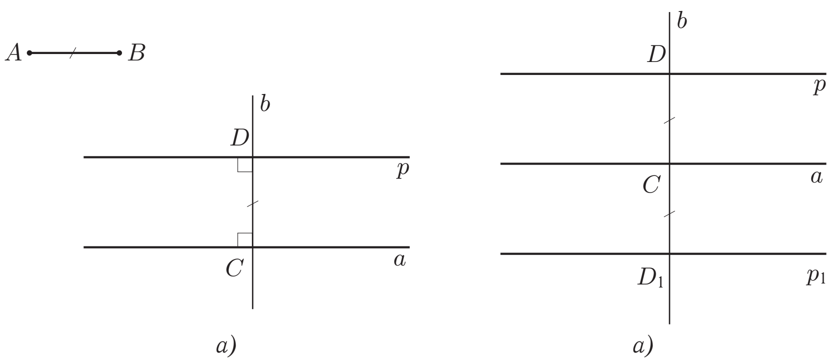


Рис. 184

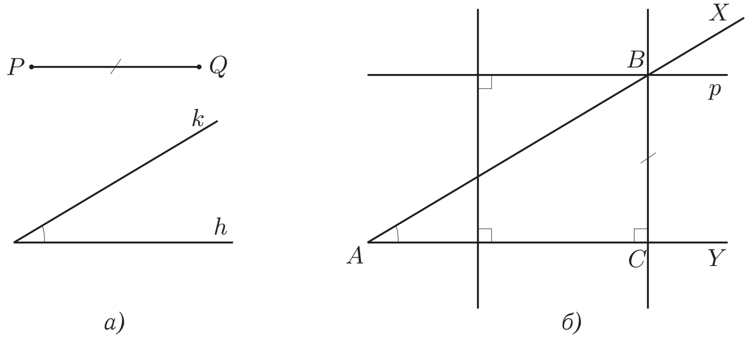


Рис. 185

прямой p и луча AX. Построение прямой p выполнено на рисунке 185, *б* (см. задачу 2).

Проведем теперь через точку B прямую, перпендикулярную к прямой AY. Эта прямая пересекается с прямой AY в точке C. Треугольник ABC — искомый.

Из четвертого признака равенства прямоугольных треугольников (п. 30) следует, что задача имеет единственное решение.

Задача 4. *Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне.*

Решение. Даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk (рис. 186, *а*). Требуется построить треугольник ABC, у которого $AB = P_1Q_1$, $\angle A = \angle hk$ и высота CH равна P_2Q_2.

Построим угол XAY, равный данному углу hk, и отложим на луче AX отрезок AB, равный данному отрезку P_1Q_1 (рис. 186, *б*). Остается найти положение точки C на луче AY. Заметим, что расстояние от точки C до прямой AB равно P_2Q_2. Поэтому точка C лежит на прямой p, параллельной прямой AB, причем расстояние между прямыми p и AB равно P_2Q_2. Следовательно, искомая точка C есть точка пересечения прямой p и луча AY. Построение прямой p выполнено на рисунке 186, *б*.

Очевидно, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи: $AB = P_1Q_1$, $\angle A = \angle hk$, $CH = P_2Q_2$.

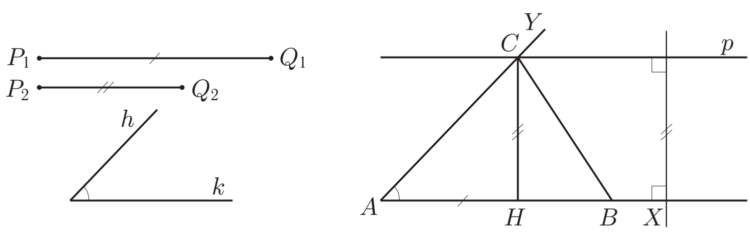


Рис. 186

Сам ход построения показывает, что при любых данных отрезках P_1Q_1, P_2Q_2 и угле hk можно построить искомый треугольник. Ясно также, что задача имеет единственное решение (докажите это).

Задача 5. *Построить треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон.*

Решение. Построим отрезок AB, равный данной стороне (рис. 187), и проведем прямую a, параллельную прямой AB и находящуюся от нее на расстоянии, равном данной высоте (см. задачу 2). Затем проведем прямую b, параллельную AB и равноудаленную от прямых AB и a. Далее, построим окружность с центром A, радиус которой равен данной медиане, и отметим точку M пересечения этой окружности с прямой b. Наконец, проведем прямую BM. Она пересекается с прямой a в точке C. Треугольник ABC — искомый.

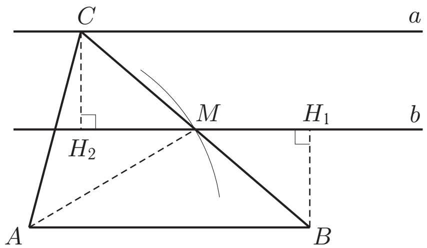


Рис. 187

В самом деле, проведем из точек B и C перпендикуляры BH_1 и CH_2 к прямой b и рассмотрим прямоугольные треугольники BMH_1 и CMH_2. Углы этих треугольников с вершиной M равны как вертикальные, катеты BH_1 и CH_2 равны по построению. Следовательно, рассматриваемые треугольники равны по катету и противолежащему углу, а значит, $BM = MC$, т. е. отрезок AM — медиана треугольника ABC.

Из построения ясно, что задача может иметь два решения (треугольники ABC и ABC_1 на рисунке 188, *а*), одно решение (рис. 188, *б*) и может не иметь решений (рис. 188, *в*).

Задача 6. *Построить треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведенной из вершины другого угла.*

Решение. Пусть даны $\angle A$, высота BH искомого треугольника ABC и отрезок PQ, длина которого равна периметру искомого треугольника. Рассмотрим случай, когда данный угол A — острый (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). Построим

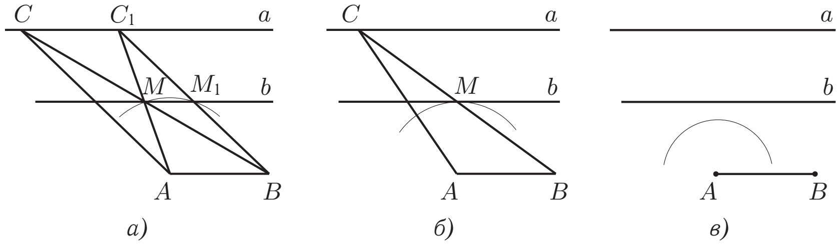


Рис. 188

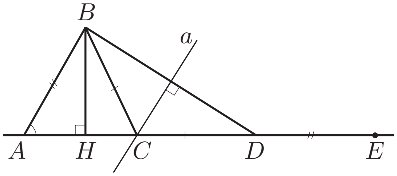


Рис. 189

прямоугольный треугольник ABH по острому углу A и катету BH (рис. 189). На луче AH отложим отрезок AE, равный данному отрезку PQ, а затем на луче EA отложим отрезок $ED = AB$. Проведем отрезок BD и построим серединный перпендикуляр a к этому отрезку. Точку пересечения прямой a и прямой AD обозначим буквой C. Треугольник ABC — искомый.

Действительно, угол A равен данному углу по построению, BH — заданная высота, $BC = CD$ (по свойству серединного перпендикуляра), $DE = AB$ по построению. Поэтому $AC + BC + AB = AC + CD + {} + DE = PQ$, т. е. периметр треугольника ABC равен длине данного отрезка PQ.

Задачи

151*. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая эти окружности в точках M и P. Докажите, что отрезок MP будет наибольшим в том случае, когда $MP \parallel O_1O_2$.

152. Прямые a и b параллельны. Докажите, что середины всех отрезков XY, где $X \in a$, $Y \in b$, лежат на прямой, параллельной прямым a и b и равноудаленной от этих прямых.

153. Что представляет собой множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных параллельных прямых?

154. Что представляет собой множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой?

155. Даны пересекающиеся прямые a и b и отрезок PQ. На прямой a постройте точку, удаленную от прямой b на расстояние PQ.

156*. Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE, параллельный прямой AC, так, чтобы точки D и E лежали соответственно на сторонах AB и BC и чтобы выполнялось равенство: $DE = AD + CE$.

157. На данной окружности постройте точку, равноудаленную от двух данных параллельных прямых. Сколько решений может иметь задача?

158*. Постройте треугольник: а) по стороне, прилежащему к ней углу и противолежащему ей углу; б) по углу, биссектрисе, проведенной из вершины этого угла, и высоте, проведенной из вершины другого угла; в) по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из этих сторон; г) по углу, медиане, проведенной из вершины этого угла, и высоте, проведенной из вершины другого угла; д) по стороне, высоте, проведенной к другой стороне, и медиане, проведенной к третьей стороне.

Глава 4

ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ О ТРЕУГОЛЬНИКАХ

§ 1. Сумма углов треугольника. Средняя линия треугольника

54. Задача о разрезании треугольника. Можно ли разрезать произвольный треугольник на четыре равных треугольника? Попробуем.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC, отметим середины A_1, B_1, C_1 сторон BC, CA, AB и соединим их отрезками (рис. 190). В результате треугольник ABC окажется разделенным на четыре треугольника. Глядя на рисунок, можно предположить, что эти треугольники равны друг другу. Но как это доказать? Ведь мы почти ничего не можем сказать об их углах! Давайте подумаем, что можно вывести из того, что точки A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков BC, CA и AB.

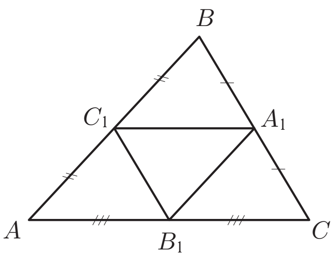


Рис. 190

Начнем с более простой задачи. Проведем прямую a, пересекающую какой-нибудь отрезок AB в его середине M (рис. 191), и докажем, что концы отрезка равноудалены от этой прямой. Если прямая a перпендикулярна к отрезку AB, то точки A и B,

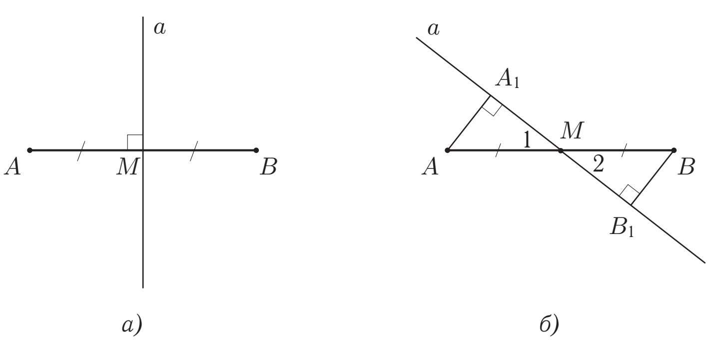


Рис. 191

очевидно, равноудалены от нее (рис. 191, *а*). Если же она не перпендикулярна к AB (рис. 191, *б*), то проведем перпендикуляры AA_1 и BB_1 к прямой a (рис. 191, *б*). Тогда образуются два прямоугольных треугольника — AA_1M и BB_1M, равных друг другу по гипотенузе и острому углу (углы 1 и 2 равны как вертикальные). Следовательно, $AA_1 = BB_1$. Мы видим, что и в этом случае концы отрезка AB равноудалены от прямой a.

Вернемся теперь к нашей задаче. Поскольку прямая A_1C_1 проходит через середину отрезка AB, то точки A и B равноудалены от этой прямой. По аналогичной причине равноудаленными от прямой A_1C_1 оказываются точки B и C. Поэтому точки A и C также равноудалены от прямой A_1C_1, причем лежат по одну сторону от нее (рис. 192, *а*).

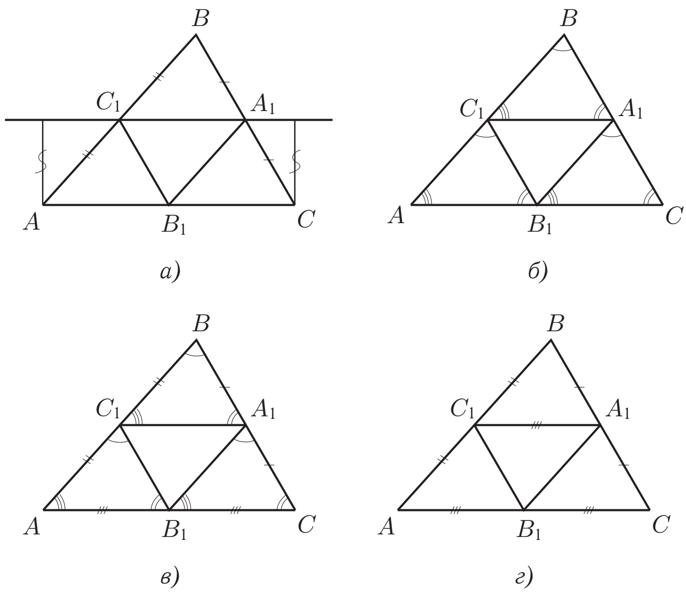


Рис. 192

Отсюда следует, что точки A и C лежат на прямой, параллельной A_1C_1 (см. п. 52). Иными словами, прямые AC и A_1C_1 параллельны. Аналогично получаем: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$.

Теперь мы обнаруживаем, что некоторые углы равны друг другу как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых секущими. Эти углы отмечены на рисунке 192, *б*. Из равенства указанных углов следует, что три «крайних» треугольника — AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 — равны друг другу по стороне и двум прилежащим к ней углам (рис. 192, *в*). Но тогда и «центральный» треугольник $A_1B_1C_1$ равен каждому из них по трем сторонам (рис. 192, *г*). Таким образом, если разрезать треугольник ABC по отрезкам A_1B_1,

B_1C_1 и C_1A_1, то получатся четыре равных треугольника: AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 и $A_1B_1C_1$ (рис. 193).

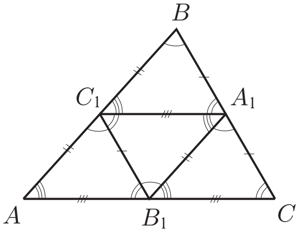


Рис. 193

55. Сумма углов треугольника. Разрезав произвольный треугольник на четыре равных треугольника, мы получили возможность доказать сразу несколько важных теорем. Первую из них обсудим в этом пункте, другие — в следующем.

Обратимся к рисунку 193. Мы видим, что $\angle A_1B_1C + \angle A_1B_1C_1 + \angle AB_1C_1 = 180°$, причем $\angle A_1B_1C = \angle A$, $\angle A_1B_1C_1 = \angle B$, $\angle AB_1C_1 = \angle C$. Следовательно, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Итак, мы доказали *теорему о сумме углов треугольника*:

сумма углов треугольника равна $180°$.

Эта теорема является одной из самых важных теорем геометрии. Сформулируем несколько следствий из нее.

Следствие 1. *Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с этим внешним углом* (рис. 194).

Вспомним свойство внешнего угла треугольника, которое мы обнаружили ранее, в п. 18: внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним. Мы видим, что следствие 1 позволяет установить, на сколько внешний угол треугольника больше не смежного с ним угла треугольника: на величину другого угла треугольника, не смежного с данным внешним углом.

Следствие 2. *Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна* $90°$ (рис. 195).

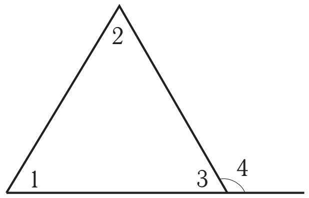


Рис. 194. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, поэтому $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

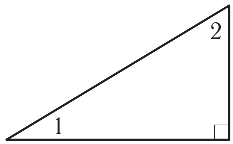


Рис. 195. $\angle 1 + \angle 2 = 90°$

Следствие 3. *Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в* $30°$*, равен половине гипотенузы*; обратно: *если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен* $30°$.

Пользуясь рисунком 196, на котором к данному прямоугольному треугольнику ABC приложен равный ему треугольник ABD, выведите это следствие самостоятельно.

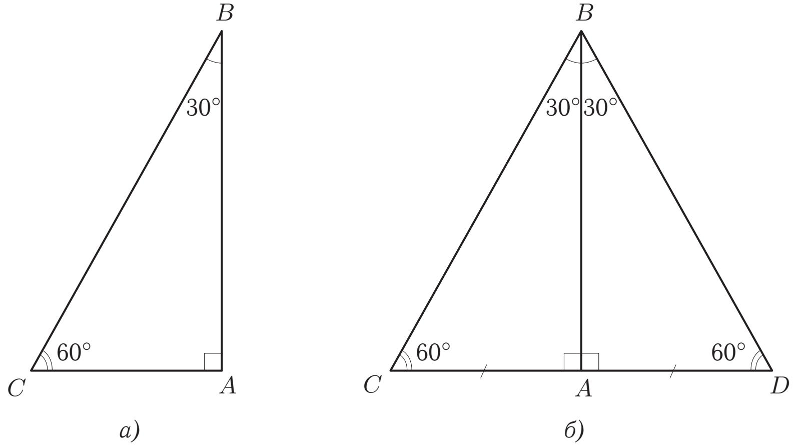


Рис. 196

З а д а ч а 1. *Доказать, что угол треугольника является острым, прямым или тупым, если медиана, проведенная из вершины этого угла, соответственно больше, равна или меньше половины противоположной стороны.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник ABC с медианой AM и докажем сначала, что если $AM > \frac{1}{2}BC$, то $\angle A < 90°$ (рис. 197, *а*).

Поскольку $BM = MC = \frac{1}{2}BC$, то $AM > BM$ и $AM > MC$. Применив теорему о соотношениях между сторонами и углами треугольника к треугольникам ABM и ACM, получим: $\angle BAM < \angle B$ и $\angle CAM < \angle C$. Поэтому $\angle A = \angle BAM + \angle CAM < \angle B + \angle C$. Но $\angle B + \angle C = 180° - \angle A$. Следовательно, $\angle A < 180° - \angle A$, откуда находим: $\angle A < 90°$.

Аналогично, если $AM = \frac{1}{2}BC$ (рис. 197, *б*) или $AM < \frac{1}{2}BC$ (рис. 197, *в*), то $\angle A = 180° - \angle A$ или $\angle A > 180° - \angle A$, откуда находим: $\angle A = 90°$ или $\angle A > 90°$. Утверждение доказано.

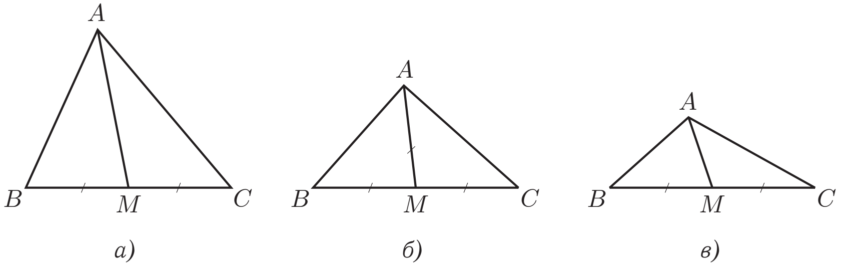


Рис. 197. а) $AM > \frac{1}{2}BC$; б) $AM = \frac{1}{2}BC$; в) $AM < \frac{1}{2}BC$

З а м е ч а н и е 1. Теорема о сумме углов треугольника тесно связана с аксиомой параллельных прямых. Вы можете сказать, что в доказательстве теоремы сама аксиома параллельных прямых не использовалась. Это верно, но в доказательстве использовалось равенство соответственных углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей (обратите еще раз внимание на это место доказательства). А равенство соответственных углов следует из аксиомы параллельных прямых (см. п. 48). Таким образом, теорема о сумме углов треугольника фактически основана на аксиоме параллельных прямых. До введения аксиомы параллельных прямых мы не смогли бы доказать эту теорему.

Давайте теперь вспомним задачи 23 и 24, связанные с суммой углов треугольника, которые были предложены в конце §3 первой главы. В первой задаче нужно было доказать, что сумма углов каждого из треугольников, которые получаются, если разрезать квадрат по диагонали, равна $180°$. Во второй задаче рассматривались треугольники, которые получаются при разрезании по диагонали прямоугольника, составленного из двух равных квадратов (рис. 63). Нужно было доказать, что сумма углов каждого из этих треугольников также равна $180°$. Вы можете спросить: как же так? В тот момент мы еще ничего не знали об аксиоме параллельных прямых. Как же мы решали (и решили!) те две задачи, если без аксиомы параллельных прямых этого сделать нельзя? Разгадка здесь вот в чем: в условии тех двух задач предполагалось, что есть квадрат (квадрат существует). Считая, что нам дан квадрат, мы разрезали его (или прямоугольник, составленный из двух равных квадратов) по диагонали на два треугольника и доказали, что сумма углов в каждом из получившихся треугольников равна $180°$. Таким образом, мы опирались на то, что квадрат есть, квадрат существует. А утверждение о существовании квадрата равносильно аксиоме параллельных прямых — об этом говорилось в п. 50.

З а м е ч а н и е 2. Возникает такой вопрос: что можно сказать о сумме углов треугольника, если вместо нашей аксиомы параллельных прямых принять противоположное утверждение: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит более одной прямой, не пересекающей данную прямую. Именно это утверждение, как мы помним, было принято Н. И. Лобачевским за аксиому в его исследованиях. Оказывается, что тогда формула суммы углов треугольника принимает иной вид, а именно

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° - kS, \tag{1}$$

где S — площадь треугольника ABC, k — некоторый положительный коэффициент (один и тот же для всех треугольников). Эта формула показывает, что в геометрии Лобачевского сумма углов любого треугольника меньше $180°$. Более того, она зависит от площади S треугольника. Чем больше S, тем меньше сумма углов треугольника.

Из формулы (1) следует и другой удивительный факт: в геометрии Лобачевского площадь любого треугольника меньше величины $\frac{180^\circ}{k}$!

А нельзя ли, измерив сумму углов произвольного треугольника, экспериментально установить, какой из двух геометрий описывается окружающий нас Мир? Это непростой вопрос. Ведь из формулы (1) следует, что чем меньше площадь треугольника, тем ближе к 180° сумма его углов. Поэтому выбранный треугольник должен быть достаточно большим. Подобная ситуация хорошо известна нам из опыта. Так, путешествуя по озеру, мы можем считать его поверхность плоской и, выбирая маршрут, исходить из евклидовой геометрии. Другое дело — океан: здесь мореплаватель, пользующийся евклидовой геометрией, и считающий поверхность океана плоской, а не сферической, не сможет привести свой корабль в нужное место.

Сам Лобачевский, опираясь на результаты астрономии XIX века, обнаружил, что в пределах ошибок измерительных приборов сумма углов треугольника равна 180°. Однако по современным оценкам есть основания считать, что в масштабах Вселенной сумма углов треугольника может быть существенно меньше 180°, следовательно, наше пространство может описываться геометрией Лобачевского.

Итак, в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше 180°. Следовательно, рисунок 193 в ней невозможен.

З а м е ч а н и е 3. Теперь совершенно ясно, почему в геометрии Лобачевского нет квадрата. Действительно, если разрезать квадрат по диагонали, то получатся два треугольника, в каждом из которых сумма углов равна $90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ (рис. 198). Но в геометрии Лобачевского таких треугольников нет (в ней сумма углов любого треугольника меньше 180°), поэтому нет и квадрата.

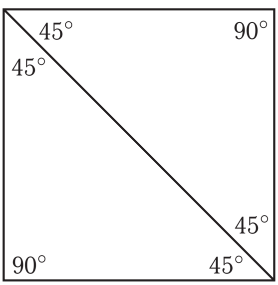


Рис. 198

З а м е ч а н и е 4. Доказав теорему о сумме углов треугольника, мы ответили на один из вопросов, записанных в нашем блокноте: «Существует ли какое-нибудь соотношение между тремя углами треугольника?» Вслед за ним записан другой вопрос: «Имеет ли место признак равенства треугольников по трем углам?» Теперь мы знаем, что из аксиомы параллельных прямых следует существование квадрата со стороной, равной данному отрезку, а значит, и существование неравных друг другу треугольников с соответственно равными углами (п. 28). Таким образом, *в евклидовой геометрии признак равенства треугольников по трем углам не имеет места*.

А что можно сказать об этом признаке в геометрии Лобачевского? Давайте подумаем. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, углы которых соответственно равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C =$

$= \angle C_1$ (рис. 199, *а*). Из формулы (1) следует, что площади этих треугольников равны: $S = S_1$.

Докажем, что имеет место еще одно равенство: $AB = A_1B_1$. В самом деле, допустим, что $AB \neq A_1B_1$. Пусть, например, $AB > A_1B_1$. Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложились на лучи A_1B_1 и A_1C_1 (это можно сделать, поскольку $\angle A = \angle A_1$). При этом точки B и C наложатся на какие-то точки B_2 и C_2 этих лучей (рис. 199, *б*). Так как $A_1B_2 = AB$ и $\angle B_2 = \angle B$, то $A_1B_2 > A_1B_1$, а соответственные углы B_1 и B_2, образованные при пересечении прямых B_1C_1 и B_2C_2 секущей B_1B_2, равны, и поэтому прямые B_1C_1 и B_2C_2 параллельны. Следовательно, площадь треугольника $A_1B_2C_2$ больше площади треугольника $A_1B_1C_1$ (треугольник $A_1B_2C_2$ составлен из треугольника $A_1B_1C_1$ и четырехугольника $B_1B_2C_2C_1$). Но треугольник $A_1B_2C_2$ равен треугольнику ABC, поэтому его площадь равна S. Мы получили неравенство $S > S_1$, что противоречит равенству $S = S_1$. Полученное противоречие означает, что наше предположение ошибочно и стороны AB и A_1B_1 не могут быть неравными друг другу.

Итак, $AB = A_1B_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников. Тем самым мы доказали, что *в геометрии Лобачевского имеет место признак равенства треугольников по трем углам*!

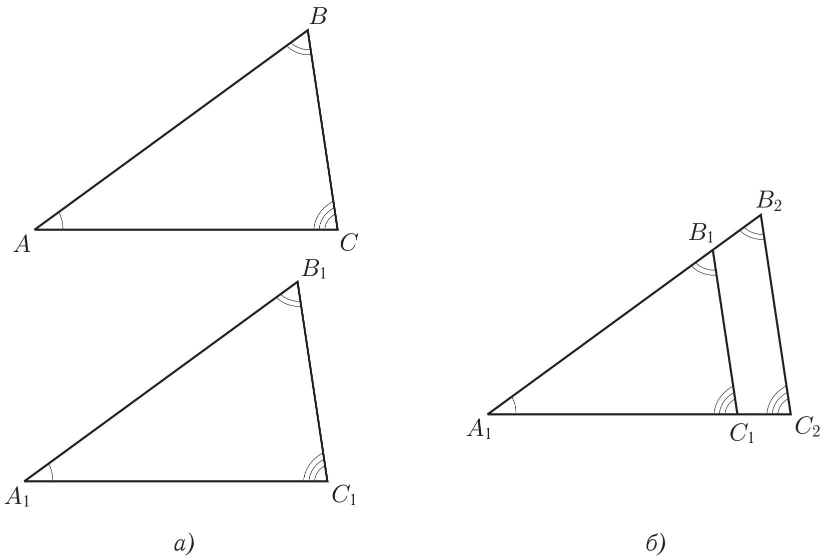


Рис. 199

56. Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется *средней линией* этого треугольника.

Разрезав произвольный треугольник на четыре равных треугольника (п. 54), мы получили возможность доказать еще одну важную теорему — теорему о средней линии треугольника. Чтобы ее сформулировать, обратимся к рисунку 193. Отрезки A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 на этом рисунке — средние линии треугольника ABC. Мы установили, что $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1A_1 \parallel CA$ и, кроме того, $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$, $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$, $C_1A_1 = \frac{1}{2}CA$. Тем самым мы доказали *теорему о средней линии треугольника*:

средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

З а м е ч а н и е 1. В п. 55 (замечание 2) мы отмечали, что рисунок 193 в геометрии Лобачевского невозможен. Следовательно, в этой геометрии неверна и теорема о средней линии треугольника (объясните, почему).

З а м е ч а н и е 2. Ясно, что справедлива и такая теорема:

прямая, проходящая через середину стороны треугольника и параллельная другой его стороне, делит третью сторону пополам.

В самом деле, по аксиоме параллельных прямых через середину стороны треугольника можно провести только одну прямую, параллельную другой его стороне. Но такой прямой является прямая, содержащая среднюю линию нашего треугольника. Иными словами, указанная прямая проходит через середину третьей стороны, т. е. делит ее пополам.

Эту теорему можно сформулировать иначе:

отрезок, соединяющий середину стороны треугольника с точкой другой стороны и параллельный третьей стороне, является средней линией этого треугольника.

В такой формулировке теорема выражает *признак средней линии треугольника.*

57. Теорема Фалеса. Обратимся к рисунку 200, *а*. На этом рисунке сторона AB треугольника ABC разделена точками D, E и F на четыре равные части. Проведем через эти точки прямые, параллельные стороне AC и пересекающие сторону BC в точках D_1, E_1 и F_1 (рис. 200, *б*). Теперь несколько раз воспользуемся признаком средней линии (рис. 200, *в, г, д*). Мы видим (рис. 200, *е*), что сторона BC делится точками D_1, E_1 и F_1 на четыре равные части.

Случайно ли это? Видимо, нет. По всей видимости, имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. *Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.*

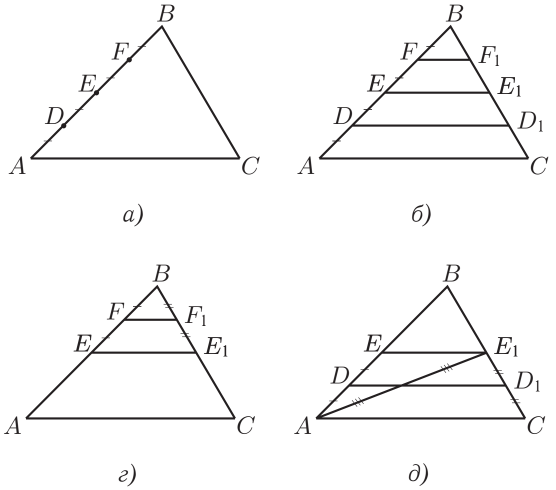


Рис. 200

Доказательство. Рассмотрим прямую a, на которой отложены равные друг другу отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... Через их концы проведены параллельные прямые l_1, l_2, l_3, l_4, ..., пересекающие прямую b в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 201, a). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу.

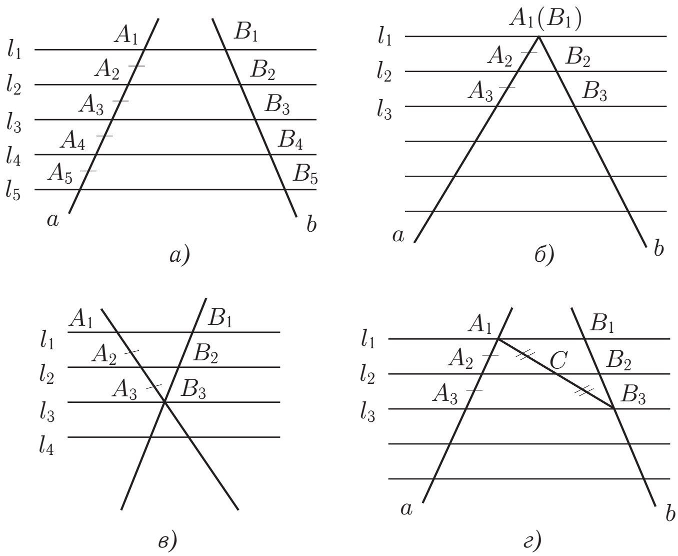


Рис. 201

Докажем сначала, что $B_1B_2 = B_2B_3$. Если точки A_1 и B_1 или точки A_3 и B_3 совпадают (рис. 201, *б, в*), то $B_1B_2 = B_2B_3$ по признаку средней линии треугольника. Если же указанные точки не совпадают, то поступим так. Проведем отрезок A_1B_3 и обозначим буквой C точку его пересечения с прямой l_2 (такая точка C существует, поскольку точки A_1 и B_3 лежат по разные стороны от прямой l_2). Прямая A_2C проходит через середину A_2 стороны A_1A_3 треугольника $A_1A_3B_3$ и параллельна стороне A_3B_3 этого треугольника, поэтому точка C является серединой отрезка A_1B_3 (рис. 201, *г*). Прямая CB_2 проходит через середину C стороны A_1B_3 треугольника $A_1B_1B_3$ и параллельна стороне A_1B_1 этого треугольника, поэтому точка B_2 является серединой отрезка B_1B_3. Итак, $B_1B_2 = B_2B_3$.

Точно так же доказывается, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д. Следовательно, все отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Теорема доказана.

По мнению многих историков, эту теорему впервые открыл древнегреческий ученый Фалес Милетский (ок. 625–547 гг. до н. э.). И хотя единого мнения на этот счет нет, ее называют *теоремой Фалеса*.

Решим теперь такую задачу.

Задача 2. *С помощью циркуля и линейки разделить данный отрезок на n равных частей.*

Решение. Пусть AB — данный отрезок, n — данное натуральное число, большее единицы. Проведем луч AX, не лежащий на прямой AB, и на нем от точки A отложим последовательно n равных отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (рис. 202), т. е. столько равных отрезков, на сколько равных частей нужно разделить данный отрезок AB (на рисунке 202 задача решается для $n = 5$). Проведем прямую A_nB (точка A_n — конец последнего отрезка) и построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} и параллельные прямой A_nB. По теореме Фалеса эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, которые делят отрезок AB на n равных частей.

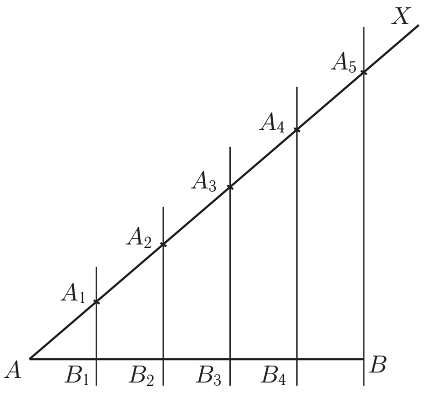


Рис. 202

Таким образом, мы ответили еще на один из вопросов, записанных в нашем блокноте: можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный отрезок на n равных частей? Мы видим, что эта задача имеет решение для любого натурального числа n.

58. Неожиданный факт. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $AB = 12$ см, $BC = 18$ см, $CA = 27$ см (рис. 203). Сразу же возникает вопрос: а существует ли такой треугольник? Большая из сторон треугольника ABC равна 27 см, а сумма двух других сторон равна 12 см + 18 см = = 30 см > 27 см. Следовательно, такой треугольник существует (см. замечание 2 п. 39).

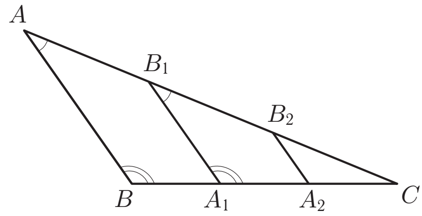


Рис. 203

Разделим сторону BC этого треугольника точками A_1 и A_2 на три равные части и проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные стороне AB, до пересечения со стороной AC в точках B_1 и B_2 (см. рис. 203).

Рассмотрим треугольники ABC и A_1B_1C. Угол C у них общий, $\angle A = \angle B_1$, поскольку эти углы являются соответственными углами, образованными при пересечении параллельных прямых AB и A_1B_1 секущей AC. По аналогичной причине $\angle B = \angle A_1$. Таким образом, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника A_1B_1C.

Сравним теперь стороны этих треугольников. По построению $A_1C = \dfrac{2}{3}BC = 12$ см. По теореме Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_2$C, поэтому $B_1C = \dfrac{2}{3}AC = 18$ см.

Что же получилось? Углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника A_1B_1C, $BC = B_1C = 18$ см, $AB = A_1C = 12$ см. Таким образом, пять (из шести!) элементов треугольника ABC равны соответствующим элементам треугольника A_1B_1C, но сами треугольники, очевидно, не равны друг другу. Не правда ли, удивительный факт?

Задачи

159. На рисунке 204 $AD \parallel BE$, $AC = AD$ и $BC = BE$. Докажите, что угол DCE — прямой.

160. На рисунке 205 $AB = AC$, $AP = PQ = QR = RB = BC$. Найдите угол A.

161. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе треугольника, исходящей из этой вершины. Отрезки этих прямых вместе со сторонами данного треугольника образуют три треугольника. Докажите, что углы этих треугольников соответственно равны.

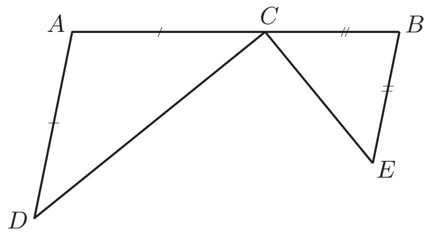


Рис. 204

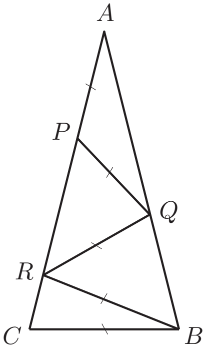


Рис. 205

162. В каждом из следующих случаев определите вид треугольника: а) сумма любых двух углов больше 90°; б) каждый угол меньше суммы двух других.

163. Докажите, что если один из внешних углов треугольника в два раза больше угла треугольника, не смежного с ним, то этот треугольник — равнобедренный. Верно ли обратное утверждение?

164. Окружность с центром O касается прямых AB и AC в точках B и C. Через произвольную точку дуги BC проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и P. Найдите угол MOP, если угол A равен α.

165. В прямоугольном треугольнике проведена высота из вершины прямого угла. Докажите, что данный треугольник и два образовавшихся треугольника имеют соответственно равные углы.

166. Из середины D стороны BC равностороннего треугольника ABC проведен перпендикуляр DM к прямой AC. Найдите AM, если $AB = 12$ см.

167. Прямоугольный треугольник с острым углом в 30° разрежьте: а)* на три равных прямоугольных треугольника; б) на четыре равных прямоугольных треугольника.

168. Высоты, проведенные к боковым сторонам AB и AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке M. Найдите углы треугольника, если $\angle BMC = 140°$.

169. В треугольнике ABC с прямым углом A проведены высота AH и медиана AM. Угол B равен α, причем $\alpha < 45°$. Найдите $\angle HAM$.

170. В треугольнике с неравными сторонами AB и AC проведены высота AH и биссектриса AD. Докажите, что угол HAD равен полуразности углов B и C.

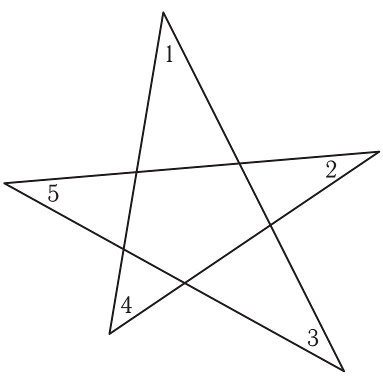


Рис. 206

171. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, пополам.

172. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AE = AC$ и $BD = BC$. Найдите $\angle DCE$.

173. Найдите сумму углов, обозначенных на рисунке 206 цифрами.

174*. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины, делят угол треугольника на три равных угла. Докажите, что этот треугольник — прямоугольный.

175*. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята такая точка M, что $\angle MBC = 30^\circ$, $\angle MCB = 10^\circ$. Найдите угол AMC, если $\angle BAC = 80^\circ$.

176*. В треугольнике ABC $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 50^\circ$. На сторонах AB и AC взяты точки M и N так, что $\angle MCB = 40^\circ$ и $\angle NBC = 50^\circ$. Найдите $\angle NMC$.

177*. На боковых сторонах BA и BC равнобедренного треугольника ABC с углом B, равным 20°, взяты соответственно точки Q и P так, что $\angle ACQ = 60^\circ$ и $\angle CAP = 50^\circ$. Найдите $\angle APQ$.

178. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) 30°; б) 60°; в) 15°; г) 120°; д) 150°; е) 135°; ж) 165°; з) 105°.

179*. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

180*. Постройте треугольник по стороне, разности углов при этой стороне и сумме двух других сторон.

181. Сторона AB треугольника ABC разделена на четыре равные части, через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC. Стороны AB и AC треугольника отсекают на этих параллельных прямых три отрезка. Длина наименьшего из получившихся отрезков равна 3,4. Найдите длины двух других отрезков.

182. Точки A и B расположены в одной полуплоскости с границей a. Из точек A, B и середины O отрезка AB проведены перпендикуляры AA_1, BB_1 и OO_1 к прямой a. Докажите, что $2OO_1 = AA_1 + BB_1$.

183. Точки M и N симметричны точкам B и C относительно середин сторон AC и AB треугольника ABC. Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

184. Постройте треугольник, если даны середины его сторон.

§ 2. Четыре замечательные точки треугольника

59. Теорема о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. В п. 34 мы доказали, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Докажем теперь, что аналогичным свойством обладают серединные перпендикуляры к сторонам треугольника.

Теорема. *Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров m и n к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 207). Согласно теореме о серединном перпендикуляре к отрезку (п. 31) имеют место равенства: $OA = OB$ и $OB = OC$. Отсюда следует, что $OA = OC$, т. е. точка O равноудалена от концов отрезка AC. Поэтому точка O лежит на серединном перпендикуляре p к отрезку AC (теорема 2 п. 31). Таким образом, точка O лежит на каждом из трех серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC, а это и означает, что все три серединных перпендикуляра m, n и p пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Замечание. Написав слова «Теорема доказана», мы допустили неточность. Действительно, мы начали доказательство теоремы с того, что обозначили буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров m и n к сторонам AB и BC. Возникает вопрос: а не может ли случиться так, что эти серединные перпендикуляры не пересекаются, т. е. $m \parallel n$? Докажем, что этого не может быть. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что в каком-то треугольнике ABC серединные перпендикуляры m и n к сторонам AB и BC параллельны: $m \parallel n$ (рис. 208). Тогда прямая BC, перпендикулярная к прямой n, будет перпендикулярна также и к прямой m (следствие 3^0 п. 48). Таким образом, мы получаем, что через точку B проходят две прямые (AB и BC), перпендикулярные к прямой m. Но этого не может быть. Следовательно, наше предположение о параллельности прямых m и n неверно, а значит, серединные перпендикуляры m и n к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекаются в некоторой точке. Теперь мы можем сказать, что теорема о пересечении трех серединных перпендикуляров к сторонам треугольника в одной точке полностью доказана.

Отметим также, что в п. 31, где была доказана теорема о серединном перпендикуляре к отрезку, мы не могли доказать теорему о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника в одной точке именно по той причине, что в то время мы не смогли бы доказать, что два серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в некоторой точке. Доказательство этого факта, как мы только что видели, основано на свойстве параллельных прямых: если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой. В свою очередь, это утверждение нельзя доказать, не приняв аксиому параллельных прямых — в гео-

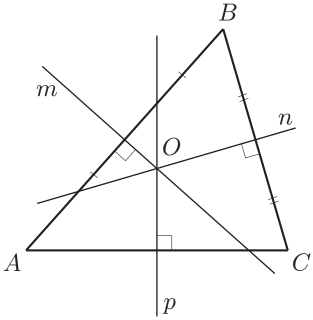


Рис. 207

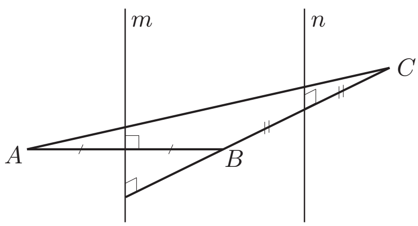


Рис. 208

метрии Лобачевского оно неверно. Но в п. 31 аксиомы параллельных прямых мы еще не знали, поэтому и теорему о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника доказать не могли.

60. Окружность, описанная около треугольника. *Окружность, проходящая через все три вершины треугольника, называется описанной около этого треугольника, а сам треугольник называется вписанным в окружность.* На рисунке 209 окружность с центром O описана около треугольника ABC. Поскольку точка O равноудалена от всех вершин этого треугольника, то она является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC. Если еще немного приглядеться к рисунку, то станет ясно, что имеет место следующая теорема.

Теорема. *Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведем отрезки OA, OB и OC (рис. 210). Точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, т. е. $OA = OB = OC$. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через все три вершины треугольника и, следовательно, является описанной около треугольника ABC. Итак, около треугольника ABC можно описать окружность.

Около треугольника ABC можно описать только одну окружность, поскольку две окружности не могут иметь три общие точки — A, B и C (п. 38). Теорема доказана.

Замечание 1. Как мы только что установили, центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника. По этой причине точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника часто называют *центром описанной окружности*.

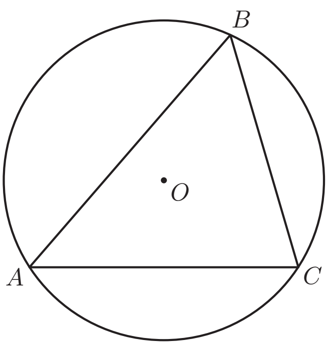


Рис. 209

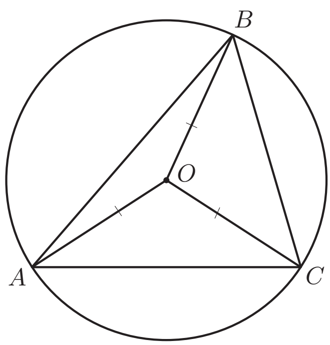


Рис. 210

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим три произвольные точки, не лежащие на одной прямой. Соединив эти точки отрезками, получим треугольник, около которого, согласно доказанной теореме, можно описать окружность, и притом только одну. Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит окружность, и притом только одна.

61. Теорема о пересечении высот треугольника. Если мы заглянем в наш блокнот, то увидим в нем следующие вопросы, ответы на которые мы пока не нашли:

верно ли, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке; верно ли, что три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке?

Попытаемся ответить на эти вопросы. Начнем с высот.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и проведем его средние линии A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 (рис. 211). Далее, проведем высоту A_1A_2 треугольника $A_1B_1C_1$. Мы видим, что прямая A_1A_2 является серединным перпендикуляром к стороне BC треугольника ABC. Но серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC пересекаются в одной точке. Следовательно, и высоты треугольника $A_1B_1C_1$ (или их продолжения) пересекаются в одной точке!

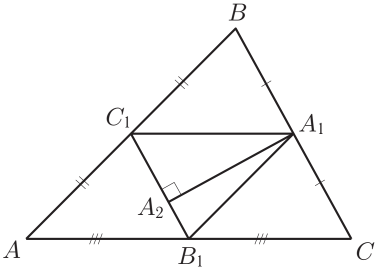


Рис. 211

Теперь уже ясно, что так будет не только в треугольнике $A_1B_1C_1$, но и в любом другом треугольнике.

Т е о р е м а. *Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке (рис. 212).

Через каждую вершину треугольника ABC проведем прямую, параллельную противоположной стороне, и обозначим точки пересечения этих прямых (объясните, почему проведенные прямые пересекаются) через A_2, B_2, C_2 (см. рис. 212).

Треугольники ABC и A_2CB равны по стороне и двум прилежащим к ней углам (BC — общая сторона, $\angle ABC = \angle A_2CB$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и A_2B_2 секущей BC; $\angle ACB = \angle A_2BC$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечений параллельных прямых AC и A_2C_2 секущей BC). Из равенства треугольников ABC и A_2CB следует, что $A_2C = AB$.

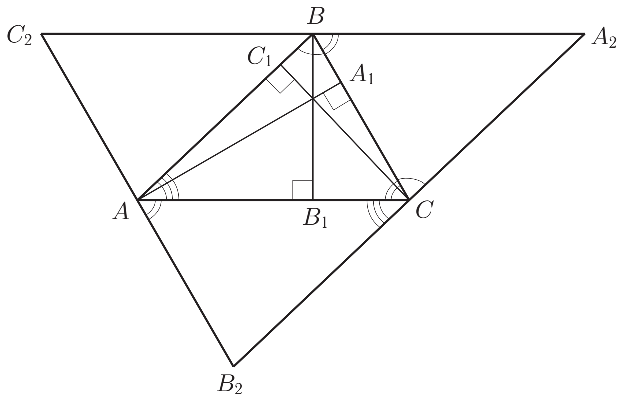


Рис. 212

Аналогично треугольники ABC и CB_2A равны по стороне и двум прилежащим к ней углам (AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle B_2CA$, $\angle BCA = \angle B_2AC$), поэтому $B_2C = AB$.

Из равенств $A_2C = AB$ и $B_2C = AB$ получаем: $A_2C = B_2C$, т. е. точка C — середина стороны A_2B_2 треугольника $A_2B_2C_2$. Так как $A_2B_2 \parallel AB$ (по построению) и $CC_1 \perp AB$, то $CC_1 \perp A_2B_2$, т. е. прямая CC_1 — серединный перпендикуляр к стороне A_2B_2 треугольника $A_2B_2C_2$.

Аналогично доказывается, что прямые AA_1 и BB_1 — серединные перпендикуляры к сторонам B_2C_2 и A_2C_2 треугольника $A_2B_2C_2$. Следовательно, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

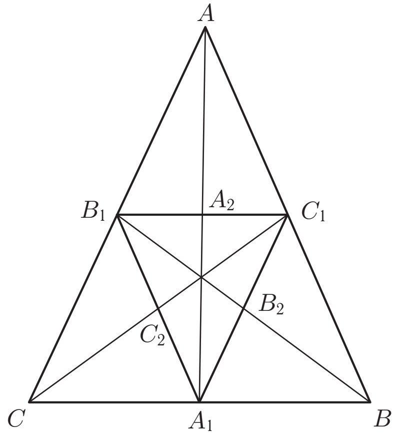
Замечание. Точку пересечения высот треугольника или их продолжений для краткости называют *ортоцентром* [1] этого треугольника.

62. Размышления о точке пересечения медиан треугольника. Займемся теперь медианами треугольника. Как доказать, что они пересекаются в одной точке (если, конечно, это так)? С чего начать?

Рассмотрим треугольник ABC и проведем его медианы AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 213, *а*). Пусть O, P и Q — точки их пересечения (на рисунке они не отмечены). Мы хотим доказать, что эти три точки совпадают.

Попробуем уточнить место расположения точек O, P и Q. Прежде всего ясно, что эти точки находятся внутри треугольника ABC (объясните, почему). Далее, обратим внимание на такой интересный факт:

[1] Греческое слово «орто» означает «прямой»: здесь имеются в виду прямые углы между высотами и соответствующими им сторонами треугольника (или их продолжениями).



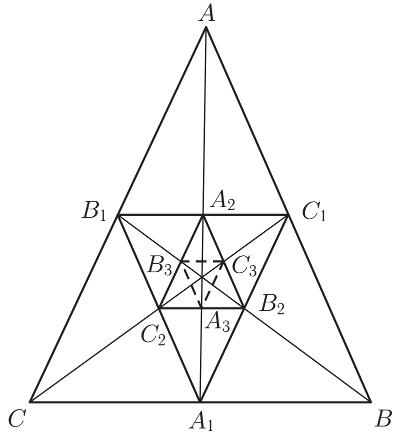


Рис. 213

медиана AA_1 делит среднюю линию B_1C_1 пополам. В самом деле, по свойству средней линии $B_1C_1 \parallel BC$, поэтому признак средней линии применительно к треугольникам ACA_1 и ABA_1 дает равенства: $B_1A_2 = \frac{1}{2}CA_1 = \frac{1}{2}A_1B = A_2C_1$. Иными словами, отрезок A_1A_2 медианы AA_1 является медианой треугольника $A_1B_1C_1$. По аналогичной причине отрезки B_1B_2 и C_1C_2 также являются медианами этого треугольника. Следовательно, точки O, P и Q лежат внутри треугольника $A_1B_1C_1$.

Применив такие же рассуждения к треугольнику $A_1B_1C_1$, мы обнаружим, что его медианы A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются внутри треугольника $A_2B_2C_2$ (рис. 213, *б*) и т. д.

Таким образом, мы получаем бесконечную последовательность уменьшающихся треугольников $A_nB_nC_n$ (по свойству средней линии стороны каждого следующего треугольника вдвое меньше сторон предыдущего треугольника), причем точки O, P и Q лежат внутри каждого из этих треугольников. Ясно, что такое возможно только в том случае, когда точки O, P и Q совпадают. Следовательно, все три медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

В принципе, на этом можно было бы и закончить, так как своей цели мы достигли. Но давайте еще немного поразмышляем. Нельзя ли как-то уточнить место расположения точки O на медиане AA_1? Попробуем.

Из нашего построения вытекает, что $A_1O = A_1A_3 + A_3A_5 + A_5A_7 + A_7A_9 + \ldots$ Но $A_3A_5 = \frac{1}{4}A_1A_3$ (объясните, почему). Точно также $A_5A_7 = \frac{1}{4}A_3A_5 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}A_1A_3$, $A_7A_9 = \frac{1}{4}A_5A_7 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}A_1A_3, \ldots,$

поэтому

$$A_1O = A_1A_3(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \ldots).$$

С другой стороны, $AO = AA_2 + A_2A_4 + A_4A_6 + A_6A_8 + \ldots$, причем $A_2A_4 = \frac{1}{4}AA_2$, $A_4A_6 = \frac{1}{4}A_2A_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}AA_2$, $A_6A_8 = \frac{1}{4}A_4A_6 = \frac{1}{4} \times \times \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}AA_2, \ldots$, поэтому

$$AO = AA_2(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \ldots).$$

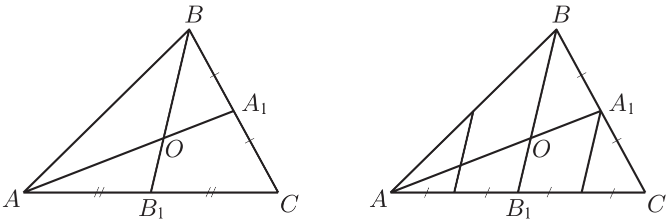
Но $AA_2 = 2A_1A_3$ (докажите это). Следовательно, $AO = 2A_1O$. Аналогично доказывается, что $BO = 2B_1O$ и $CO = 2C_1O$. Итак, мы установили замечательный факт: *точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении* $2:1$*, считая от вершины*!

З а м е ч а н и е. Попутно мы фактически решили еще одну, весьма непростую задачу: *чему равна сумма* $S = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + + \ldots)$? Имеем: $AA_1 = 3A_1O = 3A_1A_3 \cdot S$. С другой стороны, $AA_1 = = 4A_1A_3$. Приравнивая эти выражения для AA_1, получим: $3S = 4$, откуда $S = \frac{4}{3}$.

63. Теорема о пересечении медиан треугольника. Теперь, когда мы уже знаем, где находится точка пересечения медиан треугольника, нетрудно придумать и более простые доказательства теоремы об этой точке. Сформулируем *теорему о пересечении медиан треугольника* и приведем одно из доказательств этой теоремы.

Т е о р е м а. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении* $2:1$*, считая от вершины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его медиан AA_1 и BB_1 (рис. 214, *а*). Проведем средние линии треугольников ABB_1 и CBB_1, параллельные стороне BB_1 (рис. 214, *б*). Вместе с отрезком BB_1 эти средние линии делят сторону AC треугольника ABC на четыре равные



а) *б)*

Рис. 214

части. Следовательно, по теореме Фалеса медиана AA_1 оказывается разделенной ими и медианой BB_1 на три равные части. Поэтому $AO = 2OA_1$, или $AO : OA_1 = 2 : 1$.

Итак, точка O пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит медиану AA_1 в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Аналогично доказывается, что точка O делит медиану BB_1 также в отношении $2 : 1$, считая от вершины, т. е. $BO : OB_1 = 2 : 1$.

Рассмотрим теперь точку O_1 пересечения медиан AA_1 и CC_1. Таким же образом, как и для медиан AA_1 и BB_1, можно доказать, что точка O_1 делит каждую из медиан AA_1 и CC_1 в отношении $2 : 1$, считая от вершины. В частности, $AO_1 : O_1A_1 = 2 : 1$. Следовательно, точка O_1 совпадает с точкой O.

Итак, три медианы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 215) и каждая медиана делится этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. К рассмотренной теореме можно прийти значительно проще, чем в п. 62, если вспомнить некоторые сведения из физики. Действительно, представим себе, что в каждой вершине треугольника ABC находится точечная масса в 1 г. Как найти центр тяжести системы этих трех масс? Сначала нужно взять какие-нибудь две массы, например массы в точках A и B. Их центр тяжести находится в середине C_1 отрезка AB (рис. 216). Далее следует рассмотреть систему двух масс: массы 1 г в точке C и массы 2 г в точке C_1. Их центр тяжести находится в точке O отрезка CC_1, т. е. на медиане CC_1 треугольника ABC, причем $CO = 2OC_1$. Путем аналогичных рассуждений можно установить, что $AO = 2OA_1$ и $BO = 2OB_1$, где точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC. Таким образом, все три медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O и каждая медиана делится этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины. В связи с этим рассуждением становится ясно, почему точку пересе-

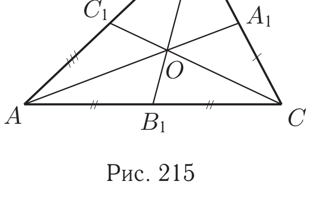


Рис. 215

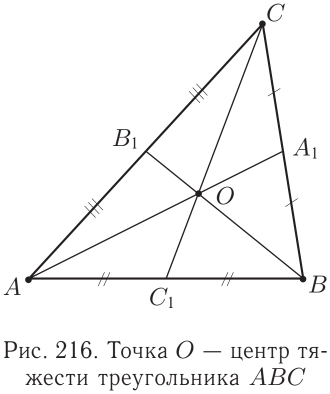


Рис. 216. Точка O — центр тяжести треугольника ABC

чения медиан треугольника часто называют *центром тяжести* этого треугольника.

З а м е ч а н и е 2. Итак, с каждым треугольником связаны четыре точки: центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис треугольника; центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; ортоцентр — точка пересечения высот треугольника или их продолжений; центр тяжести — точка пересечения медиан треугольника. Эти четыре точки называются *замечательными точками треугольника*.

В равностороннем треугольнике роль каждой из четырех замечательных точек играет одна и та же точка. Эта точка называется *центром равностороннего треугольника*.

Задачи

185*. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O, лежащей внутри треугольника ABC, а серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке O_1, лежащей внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Известно, что $AO = A_1O_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

186. Докажите, что: а) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам прямоугольного треугольника является серединой гипотенузы; б) радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы.

187*. Центр описанной около треугольника окружности лежит на его медиане. Определите вид этого треугольника.

188. Докажите, что ортоцентр равнобедренного треугольника лежит на серединном перпендикуляре к основанию этого треугольника.

189. Ортоцентр треугольника совпадает с одной из его вершин. Докажите, что этот треугольник — прямоугольный.

190. Докажите, что если две замечательные точки треугольника совпадают, то совпадают все четыре замечательные точки, и треугольник является равносторонним. Рассмотрите все возможные случаи.

191. Докажите, что радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, в два раза больше радиуса окружности, вписанной в этот треугольник.

192. С помощью циркуля и линейки через три данные точки проведите окружность. Всегда ли эта задача имеет решение?

ПОДВЕДЕМ ИТОГИ

Итак, что нового о свойствах геометрических фигур мы узнали? Очень многое! Раньше нам казалось, что про треугольник мы знаем все. Это и не удивительно — казалось бы, у столь простой геометрической фигуры каким-то неожиданным свойствам взяться просто неоткуда! Теперь мы знаем, что это не так. Мы обнаружили целый ряд неожиданных свойств треугольника. Напомним некоторые из них.

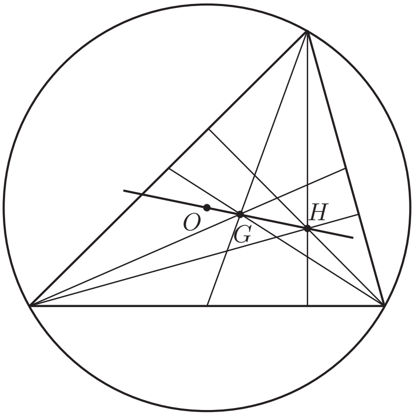
Сумма углов любого треугольника равна 180°.

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

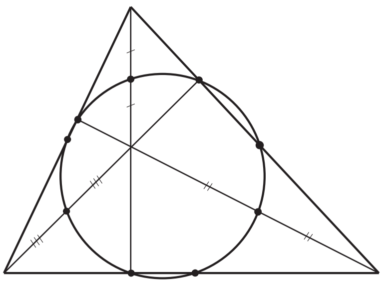
С каждым треугольником связаны четыре замечательные точки: центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис треугольника; центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; ортоцентр — точка пересечения высот треугольника или их продолжений; центр тяжести — точка пересечения медиан треугольника.

Означает ли это, что теперь про треугольник мы знаем все? Конечно же, нет! Оказывается, например, что в произвольном неравностороннем треугольнике:

1^0 центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем ортоцентр с центром описанной окружности, и делит этот отрезок в отношении $2:1$, считая от ортоцентра (рис. 217, *а*, где G — центр тяжести, H — ортоцентр, O — центр описанной оружности);



а)



б)

Рис. 217. а) Точка O — центр описанной окружности, точка G — центр тяжести, точка H — ортоцентр треугольника; $GH:GO=2:1$

2^0 девять точек: середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами — лежат на одной окружности (рис. 217, *б*).

Если мы откроем наш блокнот, то обнаружим, что не на все поставленные вопросы найден ответ. Так, мы пока не знаем, как доказать теорему Морлея. Нет ответа и на такой вопрос: имеет ли место признак равенства треугольников по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины. Запишем еще один вопрос: как построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины? Запишем также в виде вопросов утверждения 1^0 и 2^0.

Итак, многого мы пока не знаем. И все же мы уже не те, что прежде. Теперь мы поняли главное — при помощи рассуждений можно установить совершенно неожиданные факты. Нам ясно, что самый трудный этап рассуждений — это, как правило, поиск формулировки теоремы. Иногда ее можно увидеть на рисунке (именно рисунки навели нас на мысль о замечательных точках треугольника), но далеко не всегда это так. Вспомним теорему о сумме углов треугольника: сколько бы мы ни разглядывали даже очень аккуратно нарисованный треугольник, мы бы не смогли увидеть, чему равна сумма его углов. Часто формулировка теоремы находится путем весьма сложных рассуждений, но когда она уже найдена, обнаруживаются более простые методы доказательства (вспомним теорему о пересечении медиан треугольника). Впрочем, бывает и такое: формулировка теоремы вроде бы ясна, но найти правильный ход рассуждений весьма непросто — с этим мы столкнулись, например, при решении задачи 2 п. 27.

Особого внимания заслуживают наши размышления, связанные с параллельными прямыми. Прежде никто из вас, по-видимому, даже не задумывался над таким вопросом: а есть ли квадрат? Но что самое удивительное — ответ на этот вопрос зависит от нашего выбора. Если мы примем за аксиому, что квадрат есть (в п. 60 мы говорили о том, что аксиома параллельных прямых эквивалентна утверждению о существовании квадрата), то он будет; если же, следуя Н. И. Лобачевскому, мы примем за аксиому противоположное утверждение: квадрата нет, то его и не будет!

Геометрия — наука древняя, она зародилась в XVII веке до нашей эры. Многое из того, что мы изучаем, было известно еще древним грекам. Но обратим внимание вот на какой факт. В нашей книге наряду с именами Фалеса (VII в. до н. э.), Евклида (III в. до н. э.), Архимеда (II в. до н. э.), Посидония (I в. до н. э.) встречаются имена Наполеона (XIX в.), Лобачевского (XIX в.), Морлея (XX в.). Это наводит на мысль о том, что не только мы с вами, но и вообще никто не может похвастаться тем, что знает все про треугольник! Возможно, многие свойства треугольника еще не открыты. Во всяком случае вопросов, над которыми можно поразмышлять, масса!

Глава 5

МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 1. Выпуклый многоугольник

64. Ломаная. Рассмотрим фигуру, составленную из отрезков A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$. Точки A_1 и A_n могут быть различными (рис. 218, *а*) и могут совпадать (рис. 218, *б*). Будем считать, что соседние отрезки не лежат на одной прямой (в противном случае их можно объединить в один отрезок). Такая фигура, составленная из отрезков, называется *ломаной* $A_1A_2 \ldots A_n$, а отрезки, из которых составлена ломаная, называются ее *звеньями*. Если точки A_1 и A_n различные, то говорят, что ломаная соединяет точки A_1 и A_n, а если точки A_1 и A_n совпадают, то ломаная называется *замкнутой*. Два соседних звена ломаной имеют общий конец. Ломаная называется *простой*, если ее несоседние звенья не имеют общих точек. Ломаные на рисунках 218, *а* и 218, *б* — простые, а ломаная на рисунке 218, *в* — непростая.

Рассмотрим какую-нибудь ломаную $A_1A_2 \ldots A_n$, соединяющую точки A_1 и A_n (рис. 218, *а, в*). Интуитивно ясно, что длина отрезка A_1A_n меньше суммы длин всех звеньев этой ломаной. Но как это доказать?

Возьмем ломаную, состоящую из двух звеньев — A_1A_2 и A_2A_3 (т. е. $n = 3$). В этом случае справедливость неравенства $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$ следует из неравенства треугольника.

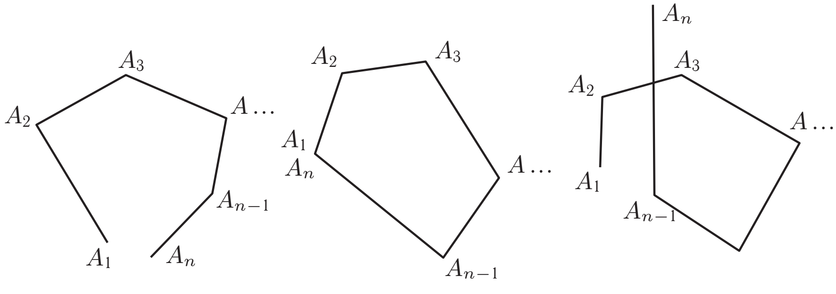


Рис. 218

Пусть $n = 4$, т. е. ломаная состоит из трех звеньев — A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4 (рис. 219, *а*). Рассмотрим сначала ломаную $A_1A_2A_3$. Она состоит из двух звеньев. Поэтому, согласно доказанному, $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$. С другой стороны, $A_1A_4 \leqslant A_1A_3 + A_3A_4$ (объясните, почему). Следовательно, $A_1A_4 < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$.

Итак, для $n = 4$ утверждение доказано. Далее аналогичным образом можно доказать это утверждение для $n = 5$, затем для $n = 6$ и т. д. Общее рассуждение, позволяющее доказать наше утверждение для любого n, проводится с помощью так называемого *метода математической индукции*. Поясним на примере нашей задачи, в чем состоит этот метод.

Мы знаем, что наше утверждение верно при $n = 3$.

Предположим, что оно верно при $n = k$, где k — некоторое целое число, большее или равное 3, и докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$.

Рассмотрим ломаную $A_1A_2 \ldots A_{k+1}$ (рис. 219, *б*). Отбросим последнее звено A_kA_{k+1}. Останется ломаная, у которой $n = k$. Поэтому, согласно нашему предположению, $A_1A_k < A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{k-1}A_k$. С другой стороны, в силу неравенства треугольника $A_1A_{k+1} \leqslant A_1A_k + A_kA_{k+1}$. Следовательно,

$$A_1A_{k+1} < A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{k-1}A_k + A_kA_{k+1}.$$

Итак, если наше утверждение верно при некотором $n = k \geqslant 3$, то оно верно и при $n = k + 1$. Из этого можно сделать вывод: утверждение верно при любом n. В самом деле, оно верно при $n = 3$. Но тогда оно верно и при $n = 3 + 1 = 4$, а значит, и при $n = 4 + 1 = 5$ и т. д.

Метод математической индукции состоит в следующем. Если требуется доказать, что данное утверждение справедливо для любого натурального числа n, то поступают так:

1^0 проверяют справедливость этого утверждения для самого маленького n, при котором утверждение имеет смысл (в нашем случае для $n = 3$);

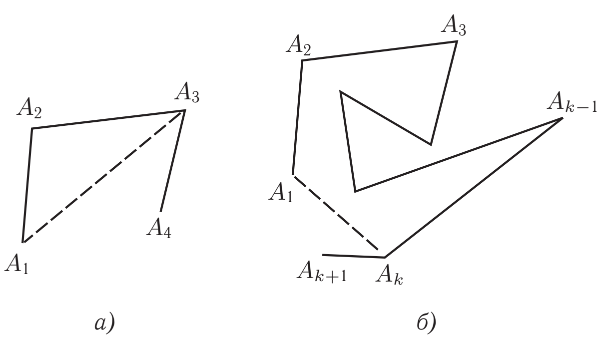


Рис. 219

2^0 доказывают, что если утверждение верно для $n = k$, то оно верно и для $n = k + 1$.

Из этого делают вывод: утверждение справедливо для любого n.

65. Многоугольник. Простая замкнутая ломаная называется *многоугольником*. Звенья такой ломаной называются *сторонами*, а концы звеньев — *вершинами* многоугольника. Сумма длин всех сторон называется *периметром* многоугольника. Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются *соседними*. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется *диагональю* многоугольника.

Интуиция подсказывает, что каждый многоугольник разделяет плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю. Но как это доказать? Сначала, конечно, следует понять, что именно мы хотим доказать.

Обратимся к рисунку 220, на котором изображен весьма причудливый многоугольник. Какой области многоугольника принадлежит точка M — внешней или внутренней? Сразу и не скажешь. Поступим так: проведем какой-нибудь луч с началом M, не проходящий через вершины многоугольника, и отметим точки M_1, M_2, ..., M_n пересечения этого луча со сторонами многоугольника. Поскольку за точкой M_n точек многоугольника нет, то все точки проведенного луча, лежащие за этой точкой, принадлежат, как нам представляется, внешней области многоугольника. Поэтому если наша гипотеза о существовании внутренней и внешней областей верна, то все внутренние точки отрезка $M_{n-1}M_n$ лежат во внутренней области многоугольника, все внутренние точки отрезка $M_{n-2}M_{n-1}$ — во внешней области и т. д. Таким образом, точка

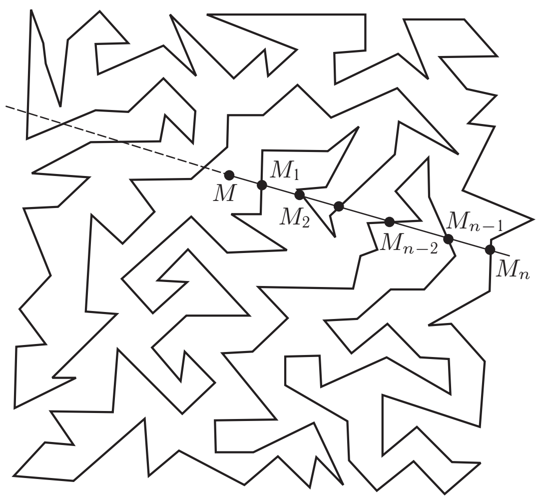


Рис. 220

M лежит во внешней или внутренней области в зависимости от того, четным или нечетным является число n.

Отметим, что если наша гипотеза верна, то четность числа k точек пересечения продолжения проведенного луча (см. рис. 220) должна совпадать с четностью числа n. Иначе получилось бы, что точка M, с одной стороны, принадлежит внешней области многоугольника, а с другой — его внутренней области. Таким образом, нам представляется, что число $n+k$ должно быть четным. Иными словами,

число общих точек прямой и многоугольника четно.

Но так ли это? Для произвольной прямой это не так. Например, если прямая содержит сторону многоугольника, то общих точек прямой и многоугольника бесконечно много. Этот случай следует исключить. Сверх того будем считать, что рассматриваемая прямая a не параллельна ни одной из сторон и диагоналей многоугольника (такая прямая существует, поскольку число сторон и диагоналей многоугольника конечно). При этом условии любая прямая, параллельная a, не может содержать более одной вершины многоугольника. Далее, если прямая a проходит через вершину A_m многоугольника, то возможны два случая: 1^0 стороны угла A_m лежат по одну сторону от прямой a (рис. 221, a); 2^0 стороны угла A_m лежат по разные стороны от прямой a (рис. 221, *б*). В первом случае, двигаясь по прямой a и проходя точку A_m, мы, как нам представляется, не попадаем в другую область, во втором — попадаем. В связи с этим условимся называть *точкой пересечения прямой a и многоугольника* их общую точку, не являющуюся вершиной, соответствующей случаю 1^0.

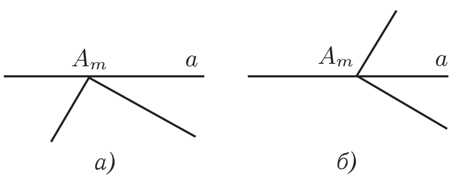


Рис. 221

Теперь мы можем сформулировать нашу гипотезу в уточненном виде:

число точек пересечения многоугольника и прямой a (удовлетворяющей указанным условиям) *четно*.

Попробуем доказать это утверждение. Через произвольную точку A прямой a, не принадлежащую многоугольнику, проведем какую-нибудь прямую AB, отличную от a и не содержащую ни одной из вершин. Пусть B_1, B_2,… — точки пересечения прямой AB с прямыми, параллельными a и проходящими через вершины многоугольника (рис. 222). Начнем двигаться по лучу AB и через каждую точку этого луча будем проводить прямую, параллельную a. Ясно, что в процессе этого движения четность числа точек пересечения проводимых прямых и многоугольника может меняться только при переходе через точки B_i. Но, как видно из нашего определения точек пересечения, при переходе через точки B_i четности числа точек пересечения проводимых прямых и многоугольника также не меняются (на рисунке 222 при переходе

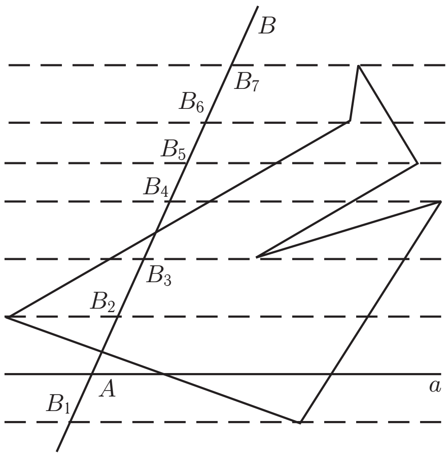


Рис. 222

через точку B_2 число точек пересечения не меняется, при переходе через точку B_3 увеличивается на 2, при переходе через точку B_4 уменьшается на 2 и т. д.). Следовательно, эти четности одни и те же для всех проводимых прямых. После прохождения последней из точек B_i мы начнем проводить прямые, не имеющие с многоугольником ни одной общей точки. Число точек пересечения, таким образом, станет четным. Поэтому число точек пересечения прямой a и многоугольника также четно. Утверждение доказано.

Эти рассуждения допускают дальнейшее развитие. Рассмотрим произвольную точку M, не принадлежащую многоугольнику, и проведем из нее какой-нибудь луч, параллельный прямой a. Четность числа точек пересечения проведенного луча с многоугольником назовем *четностью точки* M (т. е. точку M назовем «четной», если указанное число четно, и «нечетной» в противоположном случае). Отметим, что это определение не зависит от того, какой из двух лучей проводится (объясните, почему). Из наших рассуждений следует, что

если отрезок AB не имеет общих точек с многоугольником, то все его точки имеют одну и ту же четность.

Если же отрезок AB имеет с многоугольником общую точку, то при переходе через нее на лучах, параллельных a и лежащих по одну сторону от прямой AB, число точек пересечения изменяется ровно на 1 (см. рис. 222). Следовательно,

при переходе через общую точку отрезка AB и многоугольника четность точек отрезка меняется на противоположную.

Назовем множество всех «четных» точек плоскости *внешней областью многоугольника*, а множество всех «нечетных» точек — *внутренней областью многоугольника*. Тогда про каждую точку, не принадлежащую многоугольнику, мы сможем сказать, какой из областей — внутренней или внешней — она принадлежит. Этого, однако, еще не достаточно. Когда мы говорим: «Каждый многоугольник разделяет плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю», то имеем в виду, что любые две точки одной и той же области можно соединить ломаной, не имеющей общих точек с многоугольником, а любая ломаная, соединяющая две точки разных областей, имеет с многоугольником хотя бы одну общую точку. Попробуем это доказать.

Мы знаем, что если отрезок AB не имеет общих точек с многоугольником, то все его точки имеют одну и ту же четность и, следовательно, лежат в одной и той же области. Из этого следует, что *любая ломаная, соединяющая две точки разных областей, имеет с многоугольником хотя бы одну общую точку*. В противном случае указанные точки лежали бы в одной области.

Рассмотрим теперь точки A и B, лежащие в одной и той же области, и докажем, что их можно соединить ломаной, не имеющей общих точек с многоугольником. При этом можно считать, что отрезок AB не содержит ни одной из вершин многоугольника. В противном случае в качестве точки B можно взять близкую к ней точку C так, чтобы отрезок BC не имел общих точек с многоугольником, а отрезок AC не содержал ни одной из вершин многоугольника. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — точки пересечения отрезка AB со сторонами многоугольника, взятые последовательно. Выберем одну из двух ломаных, образованных сторонами многоугольника и соединяющих точку C_1 с точкой C_k, и обозначим буквой d наименьшее расстояние между парами точек ее несоседних звеньев. Ясно, что, двигаясь параллельно какому-либо звену ломаной на расстоянии $d_1 \leqslant d$ от прямой, содержащей это звено, мы либо «наткнемся» на соседнее с ним звено (т. е. точки этого звена окажутся лежащими от нас на расстоянии, меньшем d_1), либо «потеряем нашу сторону из виду» (т. е. ее точки окажутся лежащими от нас на расстоянии, большем d_1). Воспользуемся этим наблюдением. Сначала приблизимся по отрезку AB к точке C_1 на расстояние $d_1 \leqslant d$, затем будем двигаться на расстоянии d_1 от того звена ломаной, на которое мы «наткнулись», до тех пор, пока не «потеряем это звено из виду» или не «наткнемся» на соседнее с ним звено, после чего начнем двигаться параллельно соседнему звену на расстоянии d_1 от него и т. д. (рис. 223). Обойдя ломаную, мы окажемся в какой-то точке M прямой AB, лежащей в той же области, что и точка A. Будем считать, что величина d_1 столь мала, что $MC_k < C_{k-1}C_k$, следовательно,

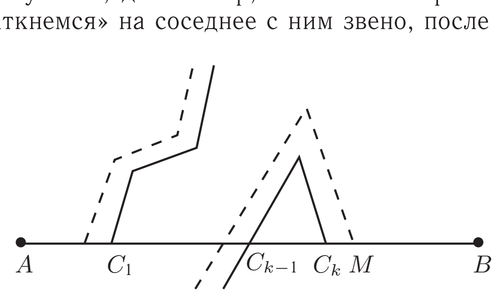


Рис. 223

точки M и C_k лежат по одну сторону от точки C_{k-1}. При этом точка M не может лежать между точками C_{k-1} и C_k, так как иначе концы отрезка MB имели бы разную четность, а значит, точки A и B имели бы разную четность, что противоречит условию (точки A и B лежат в одной и той же области). Следовательно, точки M и B лежат по одну сторону от точки C_k. Осталось провести отрезок MB, и ломаная, соединяющая точки A и B и не имеющая общих точек с многоугольником, построена.

Итак, мы доказали, что любые две точки одной и той же области можно соединить ломаной, не имеющей общих точек с многоугольником, а любая ломаная, соединяющая две точки разных областей, имеет с многоугольником хотя бы одну общую точку. Подводя итог, можно сказать:

каждый многоугольник разделяет плоскость на две области (*внутреннюю и внешнюю*) *так*, *что две точки можно соединить ломаной*, *не имеющей общих точек с многоугольником*, *в том и только в том случае*, *когда эти точки лежат в одной и той же области* (*теорема Жордана* [1])).

Отметим, что теорема Жордана верна не только для многоугольника, но и для любой замкнутой линии без самопересечений (рис. 224), но доказательство в этом случае намного сложнее. Его можно найти лишь в некоторых курсах высшей математики (см., например, *Валле-Пуссен де ла Ш. Ж.* Курс анализа бесконечно малых. — Л.-М.: ГТТИ, 1933).

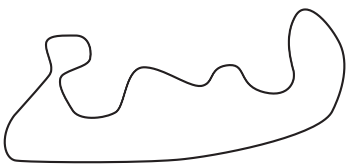


Рис. 224

Из теоремы Жордана, в частности, следует, что *любая прямая*, *не содержащая стороны многоугольника* (в том числе параллельная какой-либо его стороне или диагонали), *пересекает многоугольник в четном числе точек*. Подумайте, как это доказать.

Решим теперь такую задачу.

Задача 1. *Доказать*, *что в каждом многоугольнике найдется диагональ*, *все внутренние точки которой лежат во внутренней области многоугольника*.

Решение*. Попробуем сначала понять, какие соображения можно положить в основу наших рассуждений. Представим себе, что мы находимся в углу A_1 многоугольной комнаты $A_1A_2\ldots A_n$. Если при этом мы видим какую-нибудь вершину A_m ($3 \leqslant m \leqslant n-1$), то диагональ A_1A_m является искомой (рис. 225). Возможно, однако, что мы не видим ни одной из указанных вершин так как мешают стены A_1A_2 и A_1A_n

[1]) Жордан Камилл (1838–1922) — французский математик, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук.

(рис. 226). Но тогда, как нам представляется, искомой является диагональ A_2A_n. Руководствуясь этими соображениями, перейдем к решению задачи.

Рассмотрим произвольный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ и допустим, что ни одна из его диагоналей, выходящих из вершины A_1, не обладает указанным свойством. Проведем через точку A_1 какую-нибудь прямую a, делящую угол $A_2A_1A_n$ на два угла и не проходящую ни через одну из остальных вершин многоугольника. Поскольку при переходе через точку A_1 четность точек прямой a меняется на противоположную, то один из ее лучей с началом A_1 «входит» во внутреннюю область многоугольника, а другой — «выходит» из нее. Выберем тот из лучей, который «входит» во внутреннюю область многоугольника. Он пересекает многоугольник в нескольких точках. Пусть M — та из них, которая ближе всех к A_1 (рис. 225). Луч A_1M не проходит через вершины многоугольника, поэтому все внутренние точки отрезка A_1M лежат во внутренней области многоугольника, а точка M является внутренней точкой какой-то стороны A_kA_{k+1}. Отметим все вершины многоугольника, лежащие внутри и на границе треугольника A_1A_kM, и проведем через них лучи с началом A_1. Выберем из проведенных лучей тот луч A_1A_m, для которого точка P пересечения с лучом MA_k расположена ближе всех к M. На луче A_1A_m может оказаться несколько вершин многоугольника. В этом случае будем считать, что A_m — та из них, которая ближе всех к A_1. По построению внутри треугольника A_1PM нет ни одной из вершин многоугольника. Более того, внутри этого треугольника нет ни одной из точек многоугольника, поскольку никакая сторона многоугольника не может пересекать ни отрезок A_1M, ни отрезок MP (являющийся частью стороны A_kA_{k+1}). Если каждая внутренняя точка отрезка A_1A_m не является точкой многоугольника, то она является точкой внутренней области многоугольника, так как ее можно соединить с точкой, лежащей меж-

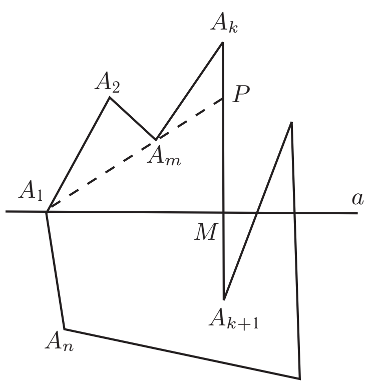


Рис. 225

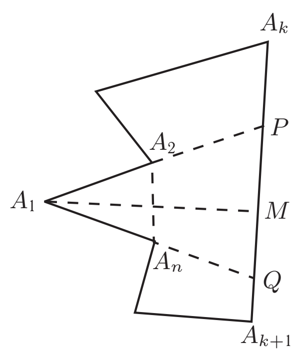


Рис. 226

ду A_1 и M, отрезком, целиком принадлежащим внутренней области многоугольника. В этом случае отрезок A_1A_m является диагональю, все внутренние точки которой лежат во внутренней области многоугольника, что противоречит нашему предположению. Следовательно, внутри отрезка A_1A_m существует хотя бы одна точка многоугольника. Сторона, содержащая эту точку, не может пересекать отрезок A_1A_m (объясните, почему), и ни один из ее концов не лежит между точками A_1 и A_m (так выбиралась вершина A_m). Это означает, что указанная сторона содержит отрезок A_1A_m, т. е. отрезок A_1A_m является не диагональю многоугольника, а его стороной A_1A_2.

Итак, исходя из нашего предположения, мы доказали, что луч A_1A_2 пересекает сторону A_kA_{k+1} в точке P так, что точка A_2 принадлежит отрезку A_1P, а все внутренние точки треугольника A_1PM и его стороны A_1M лежат во внутренней области многоугольника. Аналогично доказывается, что луч A_1A_n пересекает сторону A_kA_{k+1} в такой точке Q, что точка A_n принадлежит отрезку A_1Q, а все внутренние точки треугольника A_1QM лежат во внутренней области многоугольника (рис. 226). Следовательно, в этой области лежат и все внутренние точки диагонали A_2A_n. Таким образом, либо все внутренние точки одной из диагоналей A_1A_i, либо все внутренние точки диагонали A_2A_n лежат во внутренней области многоугольника. Утверждение доказано.

В заключение отметим, что фигуру, состоящую из сторон многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

66. Выпуклый многоугольник.

Многоугольник называется *выпуклым*, если все его точки лежат по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. При этом, конечно, имеются в виду те точки, которые не лежат на указанной прямой. На рисунке 227 многоугольник F_1 — выпуклый, а многоугольник F_2 — невыпуклый.

Рассмотрим выпуклый n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 228). Поскольку он лежит по одну сторону от прямой A_2A_3 и по одну сторону от прямой A_nA_1, то кроме точек стороны A_1A_2 никакие другие точки прямой A_1A_2 не принадлежат многоугольнику. Следовательно,

все точки выпуклого многоугольника, не лежащие на его стороне, лежат по одну сторону от прямой, содержащей эту сторону.

Проведем через произвольную точку A многоугольника прямую a, не содержащую ту из сторон многоугольника, на которой лежит эта точка. Скажем, что *прямая a пересекает многоугольник в точке A*, если точка A является точкой пересечения прямой a и многоугольника (см. п. 65).

Рассмотрим прямую a, пересекающую выпуклый многоугольник в некоторой точке A. В соответствии с доказанным, эта прямая не может содержать ни одной из сторон многоугольника (объясните, почему). Далее, поскольку число точек пересечения многоугольника

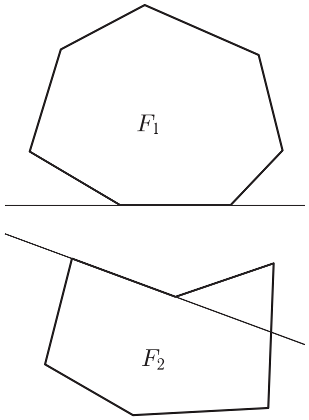


Рис. 227

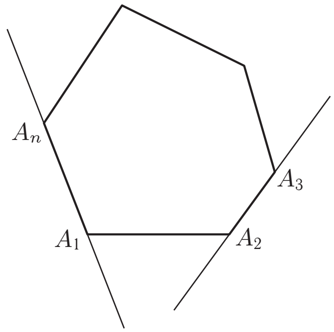


Рис. 228

с прямой a четно (см. п. 65), то есть еще одна общая точка прямой a и многоугольника — обозначим ее буквой B. Других общих точек у многоугольника и прямой a нет. В самом деле, предположим, что на прямой a лежит еще одна точка многоугольника — обозначим ее буквой C. Пусть, например, точка C лежит между A и B. Тогда точки A и B многоугольника лежат по разные стороны от прямой, содержащей сторону многоугольника и проходящей через точку C. Но этого не может быть, так как весь многоугольник лежит по одну сторону от указанной прямой. Итак,

любая прямая, пересекающая выпуклый многоугольник, имеет с ним ровно две общие точки.

Углами выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ называются углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$,..., $A_{n-1}A_nA_1$. Поскольку данный многоугольник лежит по ту сторону от прямой A_1A_2, где находится точка A_n, а также по ту сторону от прямой A_1A_n, где находится точка A_2, то он лежит внутри угла $A_nA_1A_2$. Таким образом,

выпуклый многоугольник лежит внутри каждого из его углов

(точнее, внутри каждого угла расположены все точки многоугольника, кроме тех его точек, которые лежат на сторонах этого угла). Из этого следует, что

внутренняя область выпуклого многоугольника является общей частью внутренних областей его углов.

В самом деле, если точка M принадлежит внутренней области многоугольника, то луч A_1M пересекает многоугольник в некоторой точке, лежащей внутри угла $A_nA_1A_2$, поэтому точка M также лежит внутри этого угла. Аналогично доказывается, что точка M лежит внутри остальных углов многоугольника. Осталось доказать, что если точка M лежит внутри всех углов многоугольника, то она лежит в его внутренней области. Докажем это. Рассмотрим произвольную точку N, лежащую во внутренней области многоугольника и, следовательно, также лежащую внутри каждого из его углов. Поскольку точки M и N лежат по одну сторону от каждой из прямых, содержащих стороны многоугольника, то отрезок MN не пересекает многоугольник. Поэтому точка M, как и N, лежит во внутренней области многоугольника. Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь выпуклый n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$, где $n \geqslant 4$. Прямая A_1A_3 не имеет общих точек с многоугольником, отличных от A_1 и A_3. Следовательно, прямая A_1A_3 разделяет многоугольник на треугольник $A_1A_2A_3$ и выпуклый $(n-1)$-угольник $A_1A_3\ldots A_n$ (объясните, почему он выпуклый). Если теперь применить те же рассуждения к многоугольнику $A_1A_3\ldots A_n$ (при $n \geqslant 5$), затем к многоугольнику $A_1A_4\ldots A_n$ (при $n \geqslant 6$) и т. д. (рис. 229), то окажется, что

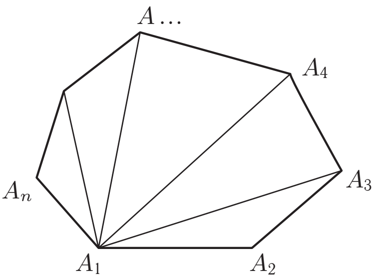


Рис. 229

диагонали выпуклого n-угольника, проведенные из одной вершины, разделяют его на $(n-2)$ *треугольника.*

Замечая, что сумма углов этих треугольников равна сумме углов данного n-угольника, мы приходим к еще одному важному выводу:

сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$.

Решим теперь такую задачу.

Задача 2. *Один выпуклый многоугольник лежит внутри другого выпуклого многоугольника* (т. е. все точки первого многоугольника лежат во внутренней области или на сторонах второго многоугольника). *Доказать, что периметр первого многоугольника меньше, чем периметр второго.*

Решение. Рассмотрим выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$, лежащий внутри выпуклого многоугольника $B_1B_2\ldots B_m$ (рис. 230). Разрежем плоскость по прямой A_1A_2 и отбросим ту полуплоскость, в которой нет точек многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Если при этом от многоугольника $B_1B_2\ldots B_m$ отрежется какая-то ломаная, то периметр оставшейся части этого многоугольника уменьшится, поскольку длина этой ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы. Проводя далее разрезы по прямым $A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ (первые два разреза изображены на рисунке 230) и отбрасывая те части плоскости, которые не содержат точек многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, мы превратим многоугольник $B_1B_2\ldots B_m$ в многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Так как по условию эти многоугольники не совпадают, то хотя бы на одном шаге от многоугольника $B_1B_2\ldots B_m$ окажется отрезанной какая-то ломаная. Следовательно, периметр многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ меньше, чем периметр многоугольника $B_1B_2\ldots B_m$, что и требовалось доказать.

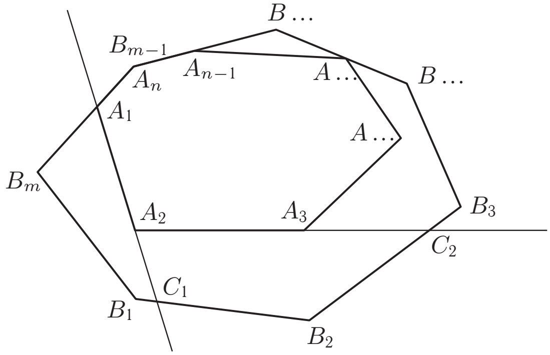


Рис. 230. 1-й разрез: $P_{A_1C_1B_2\ldots B_{m-1}} < P_{B_1B_2\ldots B_m}$; 2-й разрез: $P_{A_1A_2C_2B_3\ldots B_{m-1}} < P_{A_1C_1B_2\ldots B_{m-1}}$

67. Выпуклая линия. Понятие выпуклости можно ввести не только для многоугольников, но и для произвольных линий [1], в том числе для незамкнутых линий. Назовем *опорной прямой* данной линии L такую прямую a, которая имеет с L хотя бы одну общую точку, причем все точки линии L, не лежащие на прямой a, лежат по одну сторону от a (рис. 231, *а*). Линия называется *выпуклой*, если через любую ее точку проходит хотя бы одна опорная прямая. Линии, изображенные на рисунках 231, *а, б* и *в*, — выпуклые, а линия, изображенная на рисунке 231, *г*, — невыпуклая, так как через ее точку M не проходит ни одной опорной прямой. Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что если многоугольник является выпуклым по определению данному в п. 66, то он будет выпуклым и по общему определению выпуклой линии, и наоборот.

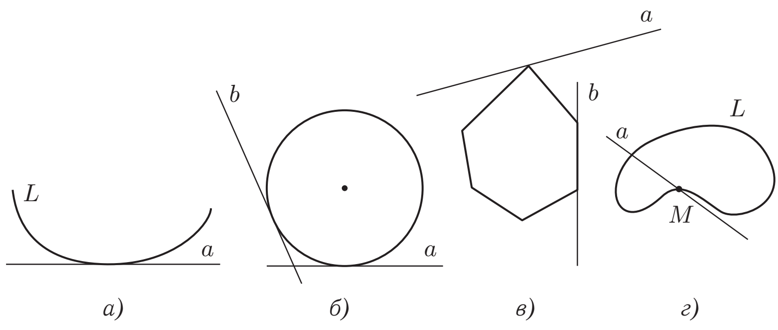


Рис. 231. а) Прямая a — опорная прямая линии L; б) и в) a и b — опорные прямые; г) L — невыпуклая линия: любая прямая, проходящая через точку M, не является опорной

[1] Здесь и далее под словом «линия» подразумевается линия без самопересечений.

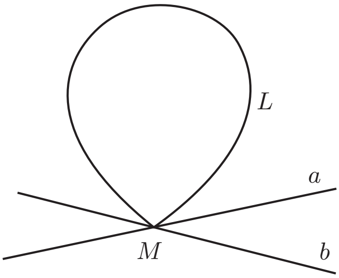


Рис. 232. a и b — опорные прямые, M — угловая точка линии L

Точка линии L называется *угловой*, если через нее проходят по крайней мере две опорные прямые (рис. 232). Ясно, что любая вершина выпуклого многоугольника является его угловой точкой.

Выпуклые линии обладают следующим свойством:

если три точки выпуклой линии лежат на одной прямой, то эта прямая является опорной.

В самом деле, допустим, что какие-то три точки A, B и C выпуклой линии L лежат на одной прямой. Докажем, что прямая AC является опорной. Для определенности будем считать, что точка B лежит между A и C (рис. 233). Проведем через точку B опорную прямую a. Она не может пересекать прямую AC, так как в противном случае окажется, что точки A и C линии L лежат по разные стороны от опорной прямой a. Следовательно, она совпадает с прямой AC, т. е. прямая AC — опорная. Утверждение доказано.

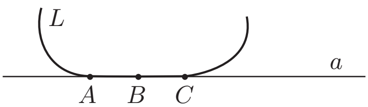


Рис. 233

68. Замкнутая линия. В дальнейшем нас будут интересовать, главным образом, *замкнутые линии*. При движении по такой линии L от какой-либо ее точки A мы проходим через каждую точку линии, а затем возвращаемся в исходную точку A. Если в процессе этого движения отметить какую-нибудь промежуточную точку B, то линия L окажется разделенной на две части — путь от A до B и путь от B до A (рис. 234, *а*). Таким образом,

любые две точки замкнутой линии разделяют ее на две части.

Эти части называют *дугами* линии L.

В п. 2 мы говорили о том, что каждая из трех точек A, B и C замкнутой линии лежит между двумя другими. Теперь ясно, из-за чего так получается. Действительно, точки B и C разделяют линию на две дуги, поэтому точка A лежит на одной из них, т. е. лежит между точками B и C (рис. 234, *б*). По аналогичной причине точка B лежит между A и C, а точка C — между A и B.

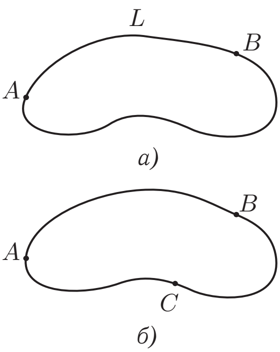


Рис. 234. а) Точки A и B разделяют замкнутую линию L на две дуги; б) точка A лежит между B и C, точка B лежит между A и C, точка C лежит между A и B

Замкнутые линии обладают следующим свойством:

если прямая и замкнутая линия имеют ровно одну общую точку, то эта прямая — опорная.

В самом деле, если прямая a, проходящая через точку A замкнутой линии L, не является опорной, то на линии L найдутся две точки — B и C, лежащие по разные стороны от прямой a (рис. 235). Поэтому на дуге BC, не содержащей точки A, найдется точка D, лежащая на прямой a. Таким образом, если прямая, проходящая через точку замкнутой линии L, не является опорной, то она имеет с линией L по крайней мере еще одну общую точку. Из этого и вытекает справедливость нашего утверждения.

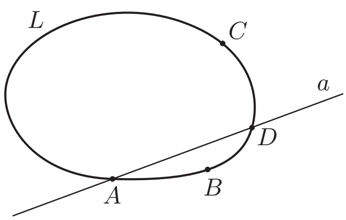


Рис. 235

Примером замкнутой линии является окружность. Прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку, называется, как мы знаем, касательной к окружности. Из доказанного утверждения следует, что *касательная к окружности является опорной прямой этой окружности*. Верно и обратное: *опорная прямая окружности является касательной к этой окружности* (докажите это утверждение).

69. Замкнутая выпуклая линия. Рассмотрим замкнутую выпуклую линию L и прямую a, проходящую через точку A этой линии. В соответствии с результатами пунктов 68 и 67 справедливы следующие утверждения:

если A — единственная общая точка прямой a и линии L, то прямая a — опорная;

если прямая a и линия L имеют еще две общие точки B и C (см. рис. 233), *то прямая a — опорная.*

Осталось выяснить такой вопрос: что можно сказать о прямой a в том случае, когда она имеет с линией L ровно две общие точки — A и B? Оказывается, что в этом случае прямая a не является опорной, что вытекает из следующего утверждения:

если замкнутая выпуклая линия и опорная прямая к ней имеют две общие точки A и B, то все точки отрезка AB принадлежат этой линии.

Доказательство этого утверждения проведем методом от противного. Допустим, что на отрезке AB существует точка C, не принадлежащая данной линии L. Проведем через точку C прямую a, отличную от AB. Поскольку точки A и B лежат по разные стороны от a, то прямая a пересекает одну из двух дуг AB в некоторой точке M, а другую — в некоторой точке N (рис. 236). При этом точки M и N лежат на одном луче с началом C (объясните, почему). Пусть, например, точка M лежит между точками C и N и, следовательно,

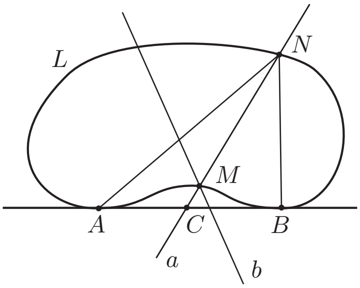


Рис. 236

внутри треугольника ABN. Тогда любая прямая b, проходящая через точку M, пересекает треугольник ABN в двух точках, и поэтому какие-то две вершины этого треугольника (т. е. две точки линии L) оказываются лежащими по разные стороны от прямой b. Это означает, что через точку M не проходит ни одной опорной прямой линии L, что противоречит условию (линия L — выпуклая). Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Прямая, проходящая через точку линии, называется *секущей* по отношению к линии, если эта прямая не является опорной. Мы доказали, что

если прямая и замкнутая выпуклая линия имеют ровно две общие точки, то эта прямая — секущая.

Справедливо и обратное утверждение:

секущая по отношению к замкнутой выпуклой линии имеет с этой линией ровно две общие точки.

В самом деле, секущая не может иметь с линией только одну общую точку, иначе она была бы опорной прямой, а это противоречит определению секущей. Следовательно, секущая и линия имеют по крайней мере две общие точки. С другой стороны, если предположить, что общих точек три, то секущая вновь окажется опорной прямой, т. е. опять получится противоречие. Таким образом, общих точек ровно две, что и требовалось доказать.

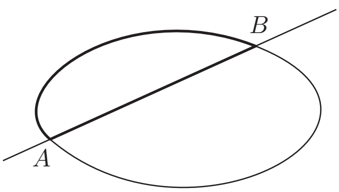
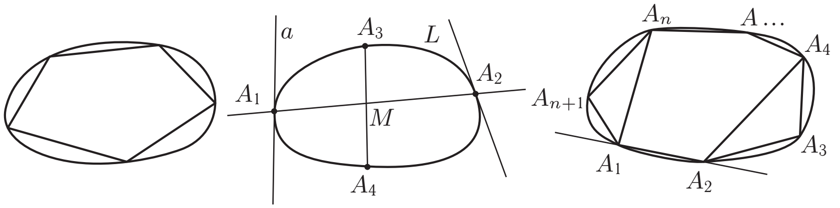


Рис. 237. При пересечении замкнутой выпуклой линии секущей получились два криволинейных сегмента. Один из них выделен жирной линией. Он состоит из отрезка (хорды) AB и дуги AB

Рассмотрим теперь какую-нибудь замкнутую выпуклую линию и секущую, пересекающую ее в точках A и B. Фигура, состоящая из отрезка AB и одной из двух дуг AB, называется *криволинейным сегментом* (рис. 237). При этом отрезок называется *хордой криволинейного сегмента*, а дуга — *дугой криволинейного сегмента*.

70. Вписанный многоугольник. Многоугольник называется *вписанным в замкнутую линию*, если все его вершины лежат на этой линии (рис. 238, *а*). Что можно сказать об этом многоугольнике, если данная линия — выпуклая? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.



а) б) в)

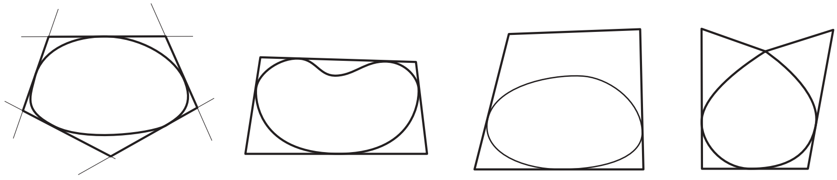
Рис. 238. а) Многоугольник вписан в замкнутую линию

Теорема. *Многоугольник, вписанный в замкнутую выпуклую линию, является выпуклым.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Рассмотрим сначала вписанный в замкнутую выпуклую линию L четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ и докажем, что этот четырехугольник — выпуклый, т. е. лежит по одну сторону от любой прямой, проходящей через две его соседние вершины. Допустим, что это не так. Пусть, например, точки A_3 и A_4 лежат по разные стороны от прямой A_1A_2. Тогда прямая A_1A_2 пересекает отрезок A_3A_4 в некоторой точке M и не является опорной прямой линии L (рис. 238, *б*). Поскольку точки A_2, A_3 и A_4 лежат по одну сторону от опорной прямой a к линии L в точке A_1, то точка M лежит на луче A_1A_2. По аналогичной причине точка M лежит на луче A_2A_1. Следовательно, точка M лежит на отрезке A_1A_2, а это означает, что стороны A_1A_2 и A_3A_4 четырехугольника пересекаются в точке M. Но этого не может быть, поэтому наше предположение ошибочно, точки A_3 и A_4 лежат по одну сторону от прямой A_1A_2. Таким образом, весь многоугольник $A_1A_2A_3A_4$ лежит по одну сторону от прямой A_1A_2. Аналогично доказывается, что он лежит по одну сторону от прямых A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1, т. е. является выпуклым.

Предположим теперь, что теорема доказана для n-угольника при некотором $n \geqslant 4$, и докажем, что тогда она верна и для $(n+1)$-угольника. Рассмотрим $(n+1)$-угольник $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, вписанный в замкнутую выпуклую линию, и проведем прямую A_1A_2 (рис. 238, *в*). Согласно нашему предположению вписанный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$ — выпуклый, поэтому его вершины $A_3, \ldots, A_n$ лежат по одну сторону от прямой A_1A_2. По той же причине выпуклым является n-угольник $A_1A_2A_4 \ldots A_{n+1}$, следовательно, его вершины $A_4, \ldots, A_{n+1}$ также лежат по одну сторону от прямой A_1A_2. Таким образом, все вершины A_3, $A_4, \ldots, A_{n+1}$ лежат в одной полуплоскости с границей A_1A_2 (в той, в которой лежит точка A_4), т. е. многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ лежит по одну сторону от прямой A_1A_2. Аналогично доказывается, что он лежит по одну сторону и от любой другой прямой, проходящей через две соседние вершины. Но это и означает, что многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ — выпуклый. Теорема доказана.

71. Описанный многоугольник. Выпуклый многоугольник называется *описанным около замкнутой линии* L, если любая его сторона лежит на опорной прямой этой линии и каждая точка линии лежит либо на стороне многоугольника, либо в его внутренней области. Многоугольники, изображенные на рисунках 239, *а, б*, являются описанными, а изображенные на рисунках 239, *в, г* не являются описанными



а) *б)* *в)* *г)*

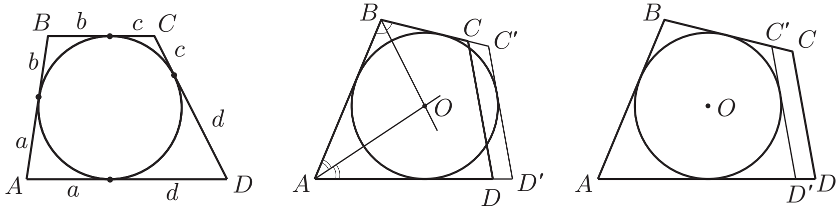
Рис. 239

около данной линии: на рисунке 239, *в* одна из сторон многоугольника не лежит на опорной прямой, а на рисунке 239, *г* многоугольник не является выпуклым.

Если линия L не имеет угловых точек, то общие точки этой линии и сторон описанного многоугольника не совпадают с вершинами многоугольника (объясните, почему), а лежат между ними (см. рис. 239 *а, б*).

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, описанный около окружности. Так как опорные прямые к окружности являются касательными, то все стороны этого четырехугольника касаются окружности [1]. Обозначим равные отрезки касательных одними и теми же буквами так, как это сделано на рисунке 240, *а*. Мы видим, что $AB + CD = a + b + c + d$, $BC + AD = a + b + c + d$, т. е. $AB + CD = BC + AD$. Итак,

если четырехугольник описан около окружности, то суммы его противоположных сторон равны.



а) *б)* *в)*

Рис. 240

[1] Обратно, если все стороны четырехугольника касаются окружности, то этот четырехугольник — выпуклый (докажите это) и, следовательно, является описанным.

Из этого следует, что если суммы противоположных сторон четырехугольника не равны, или четырехугольник — невыпуклый, то в него нельзя вписать окружность. В связи с этим возникает вопрос: можно ли вписать окружность в любой выпуклый четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны? Оказывается, можно:

если четырехугольник — выпуклый, и суммы его противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

Пользуясь рисунками 240, *б, в*, докажите это утверждение самостоятельно методом от противного (предполагается, что на этих рисунках $AB + CD = BC + AD$, но окружность с центром O, касающаяся сторон AD, AB и BC, не касается стороны CD, а касательная $C'D'$ параллельна CD).

Задачи

193. Докажите, что длина любой диагонали многоугольника меньше половины его периметра.

194. Докажите, что сумма расстояний от любой точки плоскости до вершин многоугольника больше полупериметра этого многоугольника.

195. Может ли сумма расстояний от некоторой точки, лежащей внутри четырехугольника, до его вершин быть больше периметра этого четырехугольника? Ответ обоснуйте.

196. Докажите, что сумма расстояний от любой точки плоскости до вершин пятиугольника больше полусуммы длин диагоналей этого пятиугольника.

197. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC равна стороне AD. Докажите, что BC меньше BD.

198. Докажите, что два выпуклых многоугольника равны, если их стороны и углы соответственно равны.

199*. Из точки внутренней области выпуклого многоугольника проведены перпендикуляры к прямым, содержащим его стороны. Докажите, что хотя бы одно из оснований этих перпендикуляров лежит на самой стороне, а не на ее продолжении.

200*. Докажите, что в любом выпуклом n-угольнике при $n \geqslant 5$ найдутся n диагоналей, сумма длин которых больше периметра этого n-угольника, но меньше его удвоенного периметра.

201. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки O, лежащей внутри выпуклого многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ с периметром P, до его вершин меньше величины $\dfrac{P(n-1)}{2}$.

202. Можно ли выпуклый стоугольник разрезать на 97 треугольников?

203. Докажите, что в любом выпуклом n-угольнике при $n \geqslant 5$ найдется не более трех нетупых углов.

204. Все углы выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны друг другу. Докажите, что $AB + BC = DE + EF$.

205. Докажите, что для любого выпуклого семиугольника найдутся такие две прямые, содержащие его диагонали, что либо угол между ними меньше 13°, либо они параллельны.

206. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O. Найдите сумму $\angle AOD + \angle BOC$.

207. Окружность отсекает на сторонах четырехугольника четыре равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

208. Докажите, что: а) если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC в одной точке, то в этот четырехугольник можно вписать окружность; б) если в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC в одной точке.

§ 2. Четырехугольники

72. Свойство диагоналей выпуклого четырехугольника. На рисунке 241 диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а диагонали EG и FH невыпуклого четырехугольника $EFGH$ не пересекаются. Это наводит на мысль о справедливости следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются, а невыпуклого — не пересекаются.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис. 241) и докажем, что его диагонали AC и BD пересекаются. Диагональ AC разделяет четырехугольник на два треугольника (см. п.66), поэтому прямая AC пересекает отрезок BD в некоторой точке O. Точка O, будучи внутренней точкой диагонали BD, лежит во внутренней области четырехугольника. Следовательно, она лежит на отрезке AC, т. е. диагонали AC и BD пересекаются в точке O.

Рассмотрим теперь невыпуклый четырехугольник $EFGH$. В таком четырехугольнике какие-то две соседние вершины лежат по разные

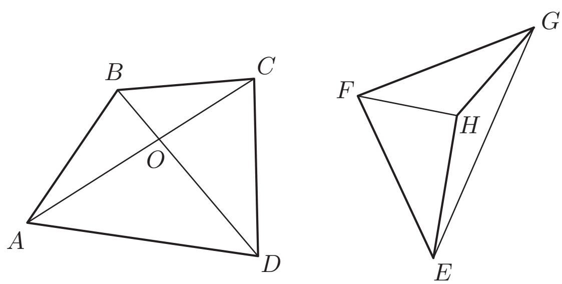


Рис. 241

стороны от прямой, проходящей через две другие соседние вершины. Пусть, например, вершины F и G лежат по разные стороны от прямой EH (рис. 241). Тогда лучи HF и EG лежат в разных полуплоскостях с границей EH и, следовательно, не имеют общих точек. Значит, и отрезки HF и EG не имеют общих точек, т. е. диагонали HF и EG четырехугольника $EFGH$ не пересекаются. Теорема доказана.

Следствие. *Если диагонали четырехугольника пересекаются, то этот четырехугольник — выпуклый.*

Замечание. Мы знаем, что в каждом четырехугольнике найдется диагональ, все внутренние точки которой лежат во внутренней области многоугольника (задача 1 п. 65). Прямая, содержащая эту диагональ, пересекает четырехугольник в двух точках (см. п. 65), т. е. делит каждый из углов с вершинами в концах диагонали на два угла. Следовательно,

в каждом четырехугольнике найдется диагональ, разделяющая его на два треугольника (так, что внутренние области треугольников лежат по разные стороны от прямой, содержащей эту диагональ).

Ясно, что в выпуклом четырехугольнике этим свойством обладают обе диагонали. Рассмотрим невыпуклый четырехугольник $EFGH$, диагональ FH которого разделяет его на два треугольника (рис. 241). Прямая FH пересекает диагональ EG в точке, не лежащей на отрезке FH, т. е. в точке внешней области четырехугольника. Следовательно, все внутренние точки диагонали EG также принадлежат внешней области многоугольника. Поэтому лучи EF, EH, GF и GH, а значит и внутренние области треугольников EFG и EHG, лежат по одну сторону от прямой EG. Иными словами, диагональ EG не разделяет четырехугольник $EFGH$ на два треугольника.

Воспользуемся нашими наблюдениями для решения такой задачи.

Задача 1. *Доказать, что четырехугольник, две стороны которого параллельны, является выпуклым.*

Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, стороны AD и BC которого параллельны (рис. 242). Пусть, например, диагональ AC разделяет его на два треугольника. Тогда прямая AC пересекает отрезок BD в некоторой точке O. Точка O, будучи точкой отрезка BD, принадлежит полуплоскости с границей AD, содержащей точку B. Этой же полуплоскости принадлежит точка C (поскольку $BC \parallel AD$). Поэтому точка O лежит на луче AC. Аналогично доказывается, что она лежит на луче CA. Следовательно, точка O лежит на отрезке AC. Таким образом, диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а значит, этот четырехугольник — выпуклый. Утверждение доказано.

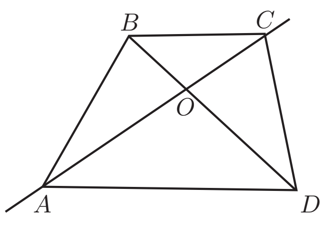


Рис. 242

73. Характеристическое свойство фигуры. В п. 72 было доказано, что диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются, и обратно, если диагонали четырехугольника пересекаются, то этот четырехугольник — выпуклый. Таким образом, выпуклые четырехугольники обладают определенным свойством, которое выделяет их среди всех четырехугольников, отличает от других (невыпуклых) четырехугольников. Такое свойство геометрических фигур называется *характеристическим свойством*.

Характеристическое свойство может быть положено в основу определения геометрической фигуры. Например, можно дать такое определение выпуклого четырехугольника: *четырехугольник называется выпуклым, если его диагонали пересекаются*.

Это определение равносильно «старому» определению выпуклого четырехугольника, данному в п. 65 (напомним, что «старое» определение относилось к любым многоугольникам, в том числе и к четырехугольникам). В самом деле, если четырехугольник является выпуклым по «старому» определению, то по доказанной в п. 72 теореме его диагонали пересекаются, и значит, он является выпуклым по «новому» определению. И обратно, если четырехугольник является выпуклым по «новому» определению, т. е. его диагонали пересекаются, то согласно следствию из той же теоремы он является выпуклым и по «старому» определению.

Утверждение о характеристическом свойстве фигуры можно сформулировать с использованием словосочетания «тогда и только тогда». Например:

диагонали четырехугольника пересекаются тогда и только тогда, когда он является выпуклым.

В этом предложении содержатся два утверждения. Первое (оно связано со словом «тогда») выражает *свойство* выпуклого четырехугольника: если четырехугольник выпуклый, то его диагонали пересекаются. Второе (обратное) утверждение связано со словами «только тогда», оно выражает *признак* выпуклого четырехугольника: если диагонали четырехугольника пересекаются, то четырехугольник — выпуклый.

74. Параллелограмм. *Параллелограммом* называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 243). Параллелограмм является выпуклым четырехугольником (см. задачу 1 п. 72). Иногда одну из сторон параллелограмма называют *основанием*, а перпендикуляр, проведенный из произвольной точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание — *высотой* параллелограмма (рис. 243, *б*).

Сформулируем несколько свойств и признаков параллелограмма.

Свойства параллелограмма. *В параллелограмме*:

1^0 *противоположные стороны равны*;

2^0 *противоположные углы равны*;

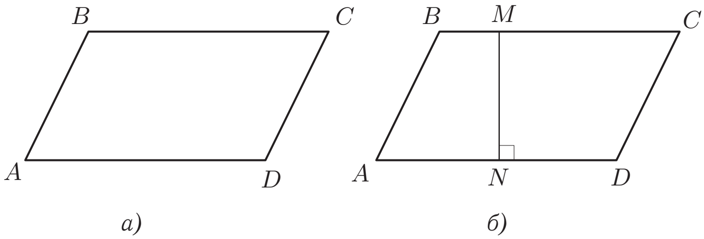


Рис. 243. а) $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм; б) AD — основание, MN — высота параллелограмма

3^0 *диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*

Признаки параллелограмма. *Если в четырехугольнике*:

4^0 *две стороны равны и параллельны*, или

5^0 *диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам*, или

6^0 *противоположные стороны попарно равны*,

то этот четырехугольник — параллелограмм.

Для доказательства утверждений 1^0, 2^0 и 4^0 следует провести диагональ (рис. 244, *а, б*), для доказательства утверждений 3^0 и 5^0 — две диагонали (рис. 245), а для доказательства утверждения 6^0 — ту из диагоналей, которая разделяет четырехугольник на два треугольника (рис. 244, *в*). Соответствующие рассуждения проведите самостоятельно.

Нетрудно заметить, что каждому из утверждений 1^0 и 3^0 о свойствах параллелограмма соответствует обратное утверждение, выражающее признак параллелограмма (подумайте, как сформулировать признак параллелограмма, соответствующий свойству 2^0). Таким образом, каждое из этих свойств является характеристическим свойством параллелограмма. Можно объединить каждое из свойств с соответствующим признаком в одно утверждение с использованием слов «тогда и только тогда»:

противоположные стороны четырехугольника попарно равны тогда и только тогда, когда четырехугольник — параллелограмм;

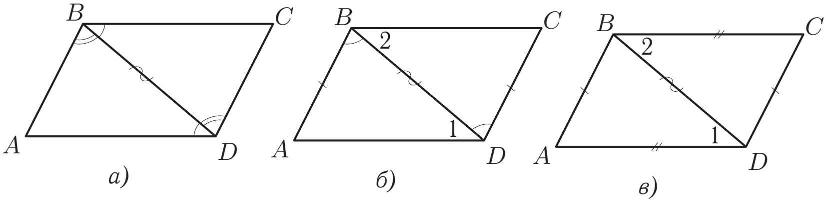
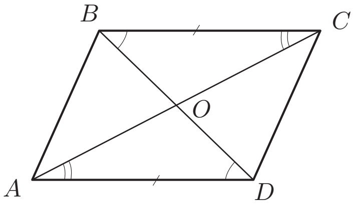
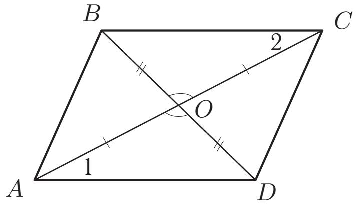


Рис. 244. а) $\triangle ABD = \triangle CDB$, поэтому: 1° $AB = CD$; 2° $\angle A = \angle C$; б) $\triangle ABD = \triangle CDB$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, и, следовательно, $AD \parallel BC$; в) $\triangle ABD = \triangle CDB$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, и, следовательно, $AD \parallel BC$



а)



б)

Рис. 245. а) $AD = BC$ (см. 1°), поэтому $\triangle ADO = \triangle CBO$ и, следовательно, $AO = OC$, $BO = OD$; б) $\triangle ADO = \triangle CBO$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и, следовательно, $AD \parallel BC$

диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам тогда и только тогда, когда этот четырехугольник является параллелограммом.

Заметим также, что каждое из этих утверждений допускает и иную формулировку. Например, первое из них можно сформулировать так:

четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно равны.

75. Теоремы Вариньона и Гаусса. Рассмотрим произвольный четырехугольник $ABCD$, диагональ AC которого разделяет его на два треугольника. Отметим середины K и L сторон AB и BC (рис. 246).

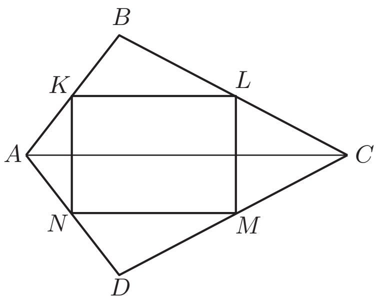


Рис. 246

Поскольку отрезок KL — средняя линия треугольника ABC, то $KL \parallel AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Но то же самое можно сказать и о средней линии NM треугольника ADC: $NM \parallel AC$ и $NM = \frac{1}{2}AC$. Следовательно, $KL \parallel NM$ и $KL = NM$, т. е. две стороны четырехугольника $KLMN$ равны и параллельны. Значит, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. Тем самым мы доказали такую замечательную теорему.

Теорема. *Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*

Эту теорему часто связывают с именем французского математика и механика Пьера Вариньона (1654–1722).

Вернемся к произвольному четырехугольнику $ABCD$ с серединами сторон K, L, M и N (рис. 247, *а*). Поскольку четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм, то отрезки KM и LN пересекаются в некоторой точке O, причем $KO = OM$ и $LO = ON$. Отметим теперь середины P и Q диагоналей AC и BD (рис. 247, *б*). Отрезок LP —

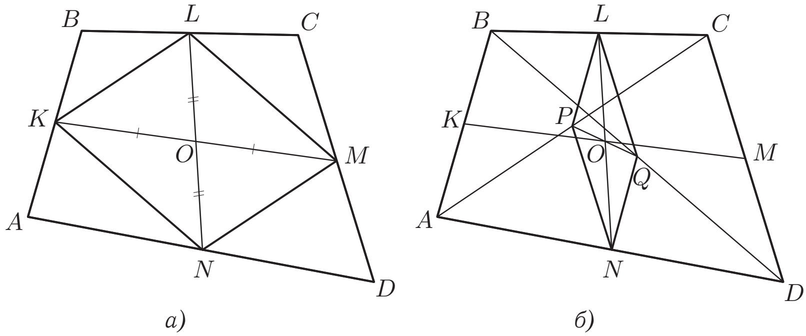


Рис. 247

средняя линия треугольника ABC, поэтому $LP \parallel AB$ и $LP = \frac{1}{2}AB$. Аналогично из треугольника ABD находим: $NQ \parallel AB$ и $NQ = \frac{1}{2}AB$. Следовательно, $LP \parallel NQ$ (случай, когда прямые LP и NQ совпадают, рассмотрите самостоятельно) и $LP = NQ$, поэтому четырехугольник $LPNQ$ — параллелограмм. Отсюда следует, что середина отрезка PQ совпадает с серединой O отрезка LN. Кроме того, точка O является серединой отрезка KM. Таким образом, отрезки KM, LN и PQ имеют общую середину — точку O. Тем самым, мы доказали утверждение, которое называется *теоремой Гаусса*.

Теорема. *В произвольном четырехугольнике три отрезка, два из которых соединяют середины противоположных сторон, а третий — середины диагоналей, имеют общую середину*.

Замечание. Отрезок, соединяющий середины диагоналей четырехугольника, может вырождаться в точку. Это будет в том случае, когда данный четырехугольник — параллелограмм.

Отметим также, что справедливость теоремы Гаусса можно установить из физических соображений, если заметить, что точка O является центром тяжести системы четырех одинаковых масс, расположенных в точках A, B, C и D (объясните, почему это так).

76. Прямоугольник, ромб и квадрат.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы — прямые.

В этом определении слово «параллелограмм» можно заменить словами «выпуклый четырехугольник», т. е. можно дать такое определение:

прямоугольником называется выпуклый четырехугольник, у которого все углы — прямые.

Если же оставить в первом определении слово «параллелограмм», то можно не требовать, чтобы все углы были прямыми. Достаточно потребовать, чтобы всего лишь один из углов был прямым. Иначе говоря, определение прямоугольника можно дать и в такой форме:

прямоугольником называется параллелограмм, у которого один из углов — прямой.

Попробуйте доказать равносильность этих трех определений.

Заметим, что каждое из данных определений использует то или иное характеристическое свойство прямоугольника, выделяющее его из всех параллелограммов (первое и третье определения) или даже из всех выпуклых четырехугольников (второе определение). Все эти характеристические свойства связаны с углами прямоугольника. У прямоугольника есть и характеристическое свойство, связанное не с углами, а с отрезками, именно с его диагоналями:

диагонали прямоугольника равны (свойство прямоугольника);

если диагонали в параллелограмме равны, то этот параллелограмм — прямоугольник (признак прямоугольника).

Докажите эти утверждения самостоятельно.

Ясно, что свойство и признак прямоугольника можно объединить в одном утверждении:

параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

Перейдем теперь к определению ромба и его характеристическим свойствам.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

В этом определении слово «параллелограмм» можно заменить словом «четырехугольник». Получится такое определение:

ромбом называется четырехугольник, у которого все стороны равны.

Если же оставить в первом определении слово «параллелограмм», то можно не требовать равенства всех сторон. Достаточно потребовать, чтобы были равны какие-то две смежные стороны, т. е. можно дать и такое определение:

ромбом называется параллелограмм, у которого две смежные стороны равны.

Докажите самостоятельно равносильность этих трех определений.

Рассмотрим характеристические свойства ромба, связанные с его диагоналями. Прежде всего заметим, что

диагонали ромба:

а) *взаимно перпендикулярны*;

б) *делят его углы пополам* (пользуясь рисунком 248, докажите эти утверждения самостоятельно).

Сформулируем и докажем обратные утверждения (признаки ромба).

Задача 2. *Доказать, что параллелограмм является ромбом, если выполнено любое из следующих условий*:

1^0 *диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны*;

2^0 *диагональ параллелограмма делит пополам углы при вершинах, которые она соединяет.*

Р е ш е н и е. 1^0. Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны (рис. 249, *а*). Так как точкой пересечения они делятся пополам, то прямоугольные треугольники AOB, BOC, COD и DOA равны друг другу по двум катетам. Отсюда следует, что гипотенузы этих треугольников равны: $AB = BC = CD = DA$, т. е. равны стороны параллелограмма, и значит, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

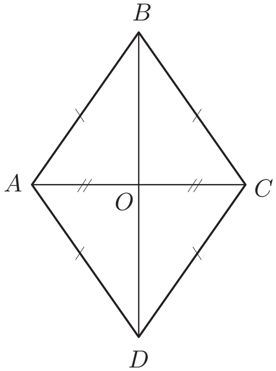


Рис. 248

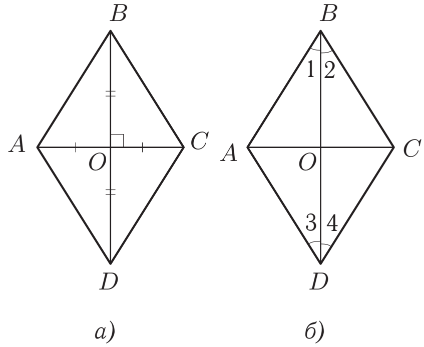


Рис. 249

2^0. Пусть диагональ BD параллелограмма $ABCD$ делит углы B и D пополам (рис. 249, *б*). Так как противоположные углы B и D параллелограмма равны, то углы 1, 2, 3 и 4 равны друг другу. Следовательно, равнобедренные треугольники ABD и CBD равны по стороне (BD — общая сторона) и двум прилежащим углам. Отсюда следует, что $AB = BC = CD = DA$, т. е. параллелограмм $ABCD$ — ромб, что и требовалось доказать.

Теперь можно сформулировать такое утверждение о характеристических свойствах ромба:

параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

1^0 *его диагонали взаимно перпендикулярны*;

2^0 *его диагональ делит пополам углы при вершинах, которые она соединяет*.

Квадрат является и прямоугольником, и ромбом. Поэтому квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба. Можно дать различные определения квадрата, например:

1^0 *квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны*;

2^0 *квадратом называется ромб, у которого все углы прямые*.

Придумайте сами еще несколько определений квадрата и докажите их равносильность. Сформулируйте также несколько утверждений о характеристических свойствах квадрата.

Характеристические свойства ромба часто используются при решении задач. Приведем пример.

З а д а ч а 3. *Доказать, что диагонали четырехугольника равны тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, взаимно перпендикулярны.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA (рис. 250).

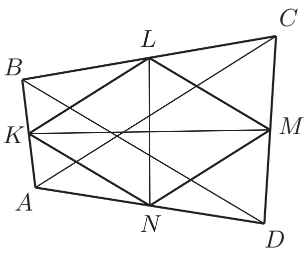


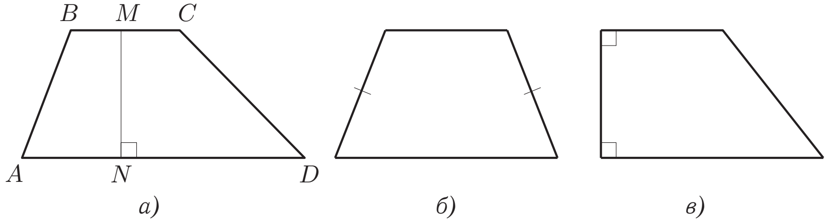
Рис. 250

1^0. Пусть $KM \perp LN$. Докажем, что $AC = BD$. Четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм (по теореме Вариньона), причем $KL = \frac{1}{2}AC$, $LM = \frac{1}{2}BD$ (по теореме о средней линии треугольника). Так как диагонали KM и LN параллелограмма $KLMN$ взаимно перпендикулярны, то $KLMN$ — ромб (задача 2 этого пункта), значит, $KL = LM$. Следовательно, $AC = BD$.

2^0. Обратно, пусть $AC = BD$. Докажем, что $KM \perp LN$. Снова воспользуемся тем, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм (по теореме Вариньона), причем $KL = \frac{1}{2}AC$, $LM = \frac{1}{2}BD$ (по теореме о средней линии треугольника). Так как $AC = BD$, то $KL = LM$, значит, $KLMN$ — ромб. Поэтому его диагонали взаимно перпендикулярны: $KM \perp LN$.

77. Трапеция. *Трапецией* называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие стороны — *боковыми сторонами* (рис. 251, *а*). Перпендикуляр, проведенный из произвольной точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание, называют *высотой* трапеции. Трапеция — выпуклый четырехугольник (см. задачу 1 п. 72).

Трапеция называется *равнобедренной*, если ее боковые стороны равны (рис. 251, *б*). Трапеция, один из углов которой — прямой, на-



а) *б)* *в)*

Рис. 251. а) Трапеция $ABCD$: AD и BC — основания, AB и CD — боковые стороны, MN — высота; б) равнобедренная трапеция; в) прямоугольная трапеция зывается *прямоугольной* (рис. 251, *в*). Отметим, что в прямоугольной трапеции ровно два угла являются прямыми. Эти углы прилегают к боковой стороне, перпендикулярной к основаниям трапеции.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон. Что можно сказать о средней линии MN трапеции $ABCD$ (рис. 252)?

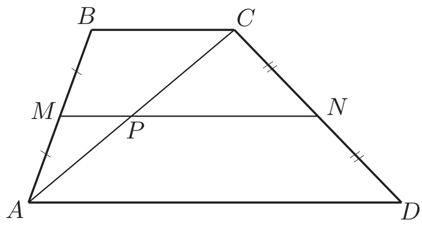


Рис. 252

Прежде всего, если провести через точку M прямую, параллельную основаниям трапеции, то эта прямая, согласно теореме Фалеса, разделит отрезок CD пополам, т. е. пройдет через точку N. Следовательно, средняя линия MN параллельна основаниям трапеции.

Далее, проведем диагональ AC. По теореме Фалеса прямая MN делит отрезок AC пополам, т. е. проходит через середину P этого отрезка. Поэтому отрезки MP и PN — средние линии треугольников ABC и ACD. Пользуясь свойством средней линии треугольника, получаем:

$$MP = \frac{1}{2}BC, \quad PN = \frac{1}{2}AD.$$

Следовательно,

$$MN = MP + PN = \frac{1}{2}(BC + AD).$$

Итак,

средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

З а м е ч а н и е. Свойство средней линии трапеции мы установили, опираясь на свойство средней линии треугольника. В свою очередь, свойство средней линии треугольника может быть выведено из свойства средней линии трапеции следующим образом. Пусть в трапеции $ABCD$ (см. рис. 252) вершины A, B и D неподвижны, а вершина C приближается к B. При любом положении вершины C справедливы соотношения:

$$MN \parallel AD \text{ и } MN = \frac{1}{2}(BC + AD).$$

Когда вершина C совпадет с вершиной B, трапеция $ABCD$ перейдет в треугольник ABD, а ее средняя линия MN — в среднюю линию этого треугольника. При этом BC станет равным нулю и мы получим:

$$MN \parallel AD \text{ и } MN = \frac{1}{2}AD,$$

т. е. средняя линия MN треугольника ABD параллельна стороне AD этого треугольника и равна ее половине. Тем самым, можно сказать, что теорема о средней линии трапеции является (в указанном смысле) обобщением теоремы о средней линии треугольника.

Задачи

209. Внутри выпуклого четырехугольника укажите точку, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника имеет наименьшее значение.

210. Докажите, что сумма двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника меньше суммы длин его диагоналей.

211. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше полупериметра, но меньше периметра этого четырехугольника.

212. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Периметр треугольника ABD меньше периметра треугольника ACD. Докажите, что AB меньше AC.

213. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

214. Длины сторон выпуклого четырехугольника выражаются различными целыми числами. Докажите, что хотя бы одна из его диагоналей больше $\frac{5}{2}$.

215. Докажите, что прямые, содержащие стороны параллелограмма, отсекают на прямой, параллельной одной из его диагоналей, равные отрезки.

216. Докажите, что если в шестиугольнике $ABCDEF$ $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$, то диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

217. Точки M и T — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AT и CM делят диагональ BD на три равных отрезка.

218. Середины сторон AB и CD, BC и ED выпуклого пятиугольника $ABCDE$ соединены отрезками, точки H и K — середины этих отрезков. Докажите, что отрезок HK параллелен AE и равен одной четверти AE.

219. Постройте отрезок с концами на сторонах данного угла так, чтобы он делился данной точкой, лежащей внутри этого угла, на два равных отрезка.

220. Даны три точки A, M и P, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы точки M и P оказались серединами сторон BC и CD.

221. Найдите множество середин всех отрезков, концы которых лежат на двух данных непараллельных отрезках (по одному на каждом отрезке.)

222. Центром окружности, вписанной в четырехугольник, является точка пересечения его диагоналей. Докажите, что этот четырехугольник — ромб.

223. Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на четыре треугольника с равными периметрами. Докажите, что этот четырехугольник — ромб.

224. Две окружности пересекаются в точках A и B. а) Докажите, что если через точки A и B провести две параллельные прямые, то части этих прямых, заключенные внутри окружностей, окажутся равными. б) С помощью циркуля и линейки проведите через точку A прямую, часть которой, заключенная внутри данных окружностей, равна данному отрезку.

225. В прямоугольнике $ABCD$ $AB : AD = 1 : 3$. Сторона AD точками E и M делится на три равные части. Найдите сумму $\angle BEA + {} + \angle BMA + \angle BDA$.

226. Отрезок, соединяющий середины диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, равен отрезку, соединяющему середины сторон BC и AD. Найдите угол между прямыми AB и CD.

227. Докажите, что трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда: а) углы при одном из оснований трапеции равны; б) диагонали трапеции равны.

228. На основании AD трапеции $ABCD$ имеется такая точка E, что периметры треугольников ABE, BCE и CDE равны. Докажите, что $AD = 2BC$.

229. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D — в точке T. Докажите, что отрезок MT параллелен основаниям трапеции, и найдите его длину, если $AD + BC = a$, $AB + CD = b$.

230. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а длина ее средней линии равна c. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

231. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите: а) длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии; б) длину отрезка, соединяющего середины оснований, если дополнительно известно, что сумма углов при одном из них равна $90°$.

232. Докажите, что если стороны одной трапеции соответственно равны сторонам другой трапеции, то такие трапеции равны.

233. Внутри равностороннего треугольника ABC взята произвольная точка M. Докажите, что из отрезков MA, MB и MC можно составить новый треугольник, вписанный в треугольник ABC так, что на каждой стороне треугольника ABC будет лежать ровно одна вершина нового треугольника.

234. Постройте трапецию: а) по четырем сторонам; б) по двум основаниям и двум углам при одном из них; в) по двум основаниям и двум диагоналям.

Глава 6

ПЛОЩАДЬ

§ 1. Равносоставленные многоугольники

78. Задачи на разрезание многоугольников. Пусть M и N — какие-нибудь точки, лежащие на сторонах многоугольника. Если все точки ломаной (или отрезка), соединяющей точки M и N (кроме самих точек M и N), лежат внутри многоугольника, то говорят, что ломаная (отрезок) разбивает многоугольник на два многоугольника. На рисунке 253 ломаная MN разбивает многоугольник F на многоугольники F_1 и F_2. На рисунке 254, *а* многоугольник F разбит на многоугольники F_1, F_2, F_3, а на рисунке 254, *б* шестиугольник разбит на треугольники Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

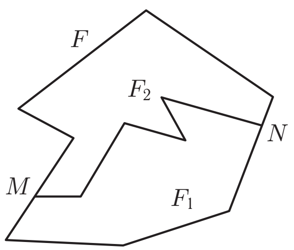
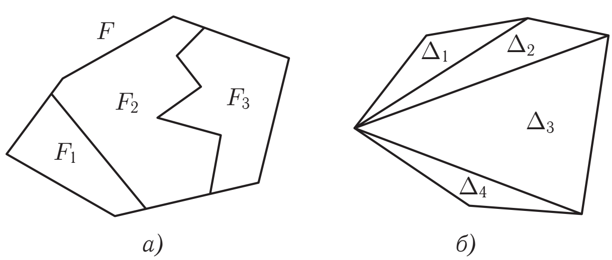


Рис. 253

Пусть многоугольник F разбит на многоугольники $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Рассмотрим какие-нибудь многоугольники $F'_1, F'_2, \ldots, F'_k$, соответственно равные $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Говорят, что *многоугольник* F *можно разрезать на многоугольники* $F'_1, F'_2, \ldots, F'_k$, а *из многоугольников* $F'_1, F'_2, \ldots, F'_k$ *можно составить многоугольник* F. Задачи, в которых требуется разрезать данный многоугольник на какие-то определенные части (многоугольники) или, наоборот, составить из данных многоугольников новый многоугольник с заданными



а) *б)*

Рис. 254

свойствами, называются *задачами на разрезание многоугольников*. Рассмотрим несколько примеров таких задач.

Задача 1. *Разрезать треугольник на четыре равных треугольника.*

Решение. Как решить эту задачу, мы знаем. Проведем средние линии данного треугольника (рис. 255). В результате треугольник окажется разрезанным на четыре равных треугольника.

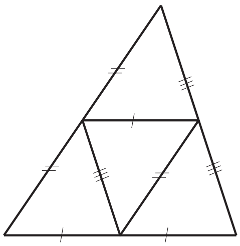
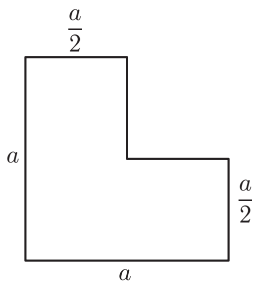
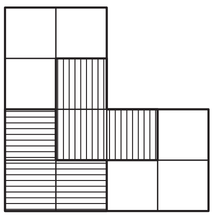


Рис. 255

Задача 2. *Из квадрата со стороной a вырезан квадрат со стороной $\frac{a}{2}$ так, как показано на рисунке* 256, *а*. *Разрезать полученную фигуру на четыре равных многоугольника.*



а)



б)

Рис. 256

Решение. Данная фигура состоит из трех квадратов со стороной $\frac{a}{2}$. Разрежем каждый из них на четыре квадрата со стороной $\frac{a}{4}$ (рис. 256, *б*). В результате наша фигура окажется разрезанной на четыре равные части, каждая из которых состоит из трех квадратов со стороной $\frac{a}{4}$.

Задача 3. *Доказать, что любой многоугольник можно разрезать на треугольники, вершинами которых являются вершины многоугольника.*

Решение. Если данный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ — выпуклый, то для доказательства этого утверждения достаточно провести его диагонали, имеющие общий конец (рис. 257, *а*). Если же данный многоугольник — невыпуклый, то будем рассуждать так.

Воспользуемся методом математической индукции. Поскольку все внутренние точки одной из диагоналей четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ лежат в его внутренней области, то эта диагональ разрезает четырехугольник на два треугольника с вершинами A_1, A_2, A_3 и A_4. Таким образом, при $n = 4$ утверждение верно. Допустим, что оно доказано для всех n, удовлетворяющих неравенствам $4 \leqslant n \leqslant k$, и докажем,

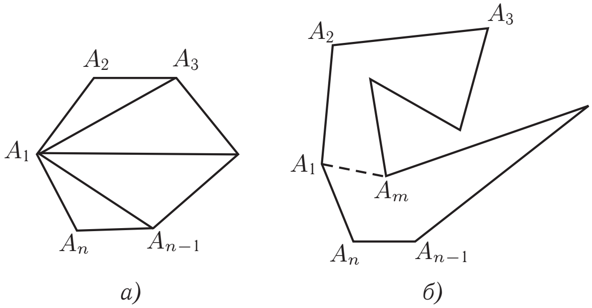


Рис. 257

что в таком случае оно верно и для $n = k + 1$. Пусть, например, все внутренние точки диагонали A_1A_m многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ лежат в его внутренней области (см. задачу 1 п. 65). Тогда эта диагональ разрезает многоугольник на m-угольник $A_1A_2 \dots A_m$ и $(n - m + 2)$-угольник $A_1A_m \dots A_n$ (рис. 257, *б*). При этом $m < n$, $m > 2$, следовательно, $n - m + 2 < n$. Таким образом, в каждом из полученных многоугольников число сторон не превосходит k. Следовательно, каждый из них можно разрезать на треугольники, вершинами которых являются вершины этих многоугольников, т. е. вершины многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$. Утверждение доказано.

Отметим, что задачи на разрезание не всегда имеют единственное решение. Так, рисунок 258, *а, б, в* иллюстрирует три различных решения задачи о разрезании данного квадрата на четыре равные части (доказательство проведите самостоятельно).

В задачах 1, 2 и 3 требовалось разрезать данный многоугольник на какие-то определенные части. Приведем пример обратной задачи: из данных многоугольников требуется составить многоугольник с заданными свойствами.

З а д а ч а 4. *На рисунке* 259 *изображен квадрат $ABCD$, разрезанный на четыре части* (точки P, M, N и Q — середины его сторон,

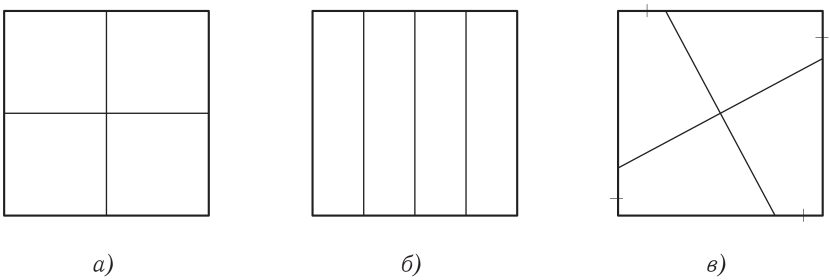


Рис. 258

L — середина отрезка PQ). *Составить из этих частей равнобедренный треугольник.*

Решение. Обратимся к рисунку 260. По условию $AP = BP = BM = CM = CN = DN = DQ = AQ$, углы A, B, C и D — прямые, $\angle APQ + \angle BPL = 180°$, $\angle AQP + \angle DQL = 180°$, $\angle LMB + \angle LMC = 180°$, $\angle LND + \angle LNC = 180°$. Поэтому если сдвинуть четырехугольники в направлениях, указанных стрелками, то они составят с треугольником APQ один равнобедренный треугольник с основанием, вдвое большим, чем PQ, и следовательно, равным диагонали квадрата.

79. Равносоставленные многоугольники. Задача на разрезание многоугольника существенно усложнится, если поставить ее так: разрезать данный многоугольник на такие части, из которых можно составить другой многоугольник с определенными свойствами. Например, задачу 4 из предыдущего пункта можно переформулировать так: разрезать квадрат на такие части, из которых можно составить равнобедренный треугольник с основанием, равным диагонали квадрата. Решить такую задачу значительно труднее — ведь надо еще догадаться, как именно разрезать квадрат!

Если один многоугольник разрезать на части и составить из них другой многоугольник, то такие многоугольники называются *равносоставленными*. Например, рассмотренные в задаче 4 квадрат и равнобедренный треугольник являются равносоставленными.

Отметим, что

если каждый из двух многоугольников равносоставлен с третьим многоугольником, то они равносоставлены.

В самом деле, пусть каждый из многоугольников P и Q равносоставлен с многоугольником F. Разрежем многоугольник F следующим образом: сначала проведем все разрезы, необходимые для составления

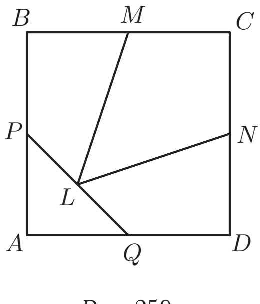


Рис. 259

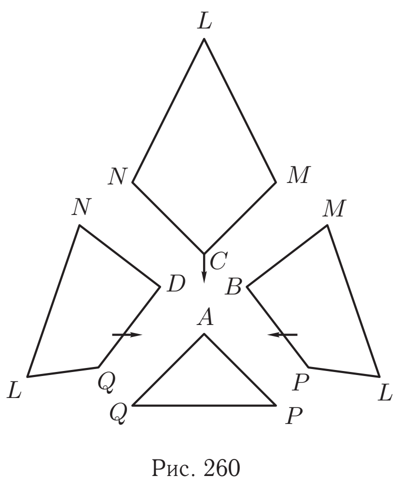


Рис. 260

многоугольника P, а затем все разрезы, необходимые для составления многоугольника Q. В результате многоугольник F окажется разрезанным на части, из которых можно составить как многоугольник P, так и многоугольник Q. Но это и означает, что многоугольники P и Q равносоставлены.

Рассмотрим два примера равносоставленных многоугольников.

Задача 5. *Доказать, что треугольник равносоставлен с параллелограммом, у которого основание совпадает с данной стороной треугольника, а высота равна половине соответствующей высоты треугольника.*

Решение. Проведем среднюю линию DE треугольника ABC, параллельную данной стороне AC, и продолжим ее до пересечения в точке F с прямой CF, параллельной AB (рис. 261). Треугольник DBE равен треугольнику FCE (объясните почему), следовательно, параллелограмм $ADFC$ равносоставлен с треугольником ABC, причем высота параллелограмма равна половине высоты треугольника (докажите это).

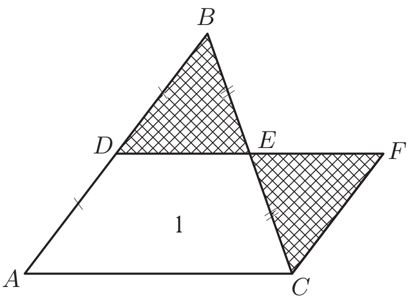


Рис. 261

Задача 6. *Доказать, что параллелограмм равносоставлен с прямоугольником, одна из смежных сторон которого равна данной стороне параллелограмма, а другая — высоте параллелограмма, проведенной к этой стороне.*

Решение. Пусть AD — данная сторона параллелограмма $ABCD$. Примем эту сторону за основание и проведем высоты BH и CK. Докажем, что параллелограмм $ABCD$ равносоставлен с прямоугольником $HBCK$, сторона BC которого равна основанию AD параллелограмма, а сторона BH является высотой параллелограмма. Возможны два случая: 1^0 проекция одной из вершин параллелограмма на прямую, содержащую основание (т. е. одна из точек H, K), принадлежит основанию; 2^0 проекция ни одной из вершин параллелограмма на прямую, содержащую основание, не принадлежит основанию. Рассмотрим эти случаи в отдельности. Для определенности будем считать, что угол BAD — острый. При этом условии точка K не принадлежит отрезку AD, а точка H может либо принадлежать, либо не принадлежать ему.

1^0. Точка H принадлежит отрезку AD (рис. 262, *а*). В этом случае равносоставленность параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $HBCK$ вытекает из равенства прямоугольных треугольников ABH и DCK (они равны по гипотенузе и катету).

2^0. Точка H не принадлежит отрезку AD, т. е. $AH > AD$. Разделим сторону AB на n равных отрезков и через их концы проведем прямые,

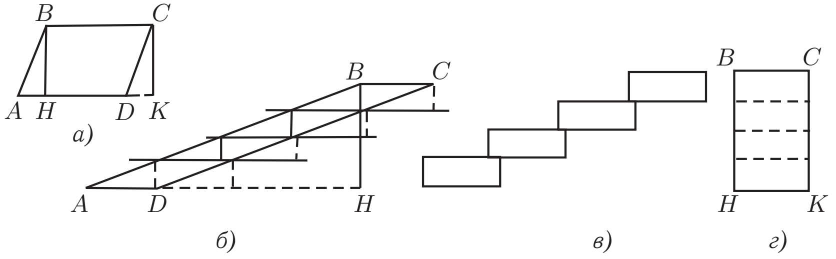


Рис. 262

параллельные AD (рис. 262, *б*). В результате параллелограмм $ABCD$ окажется разрезанным на n параллелограммов с основаниями, равными AD. Если число n достаточно велико ($n \geqslant \frac{AH}{AD}$), то в каждом из этих параллелограммов проекция одной из вершин на прямую, содержащую основание, принадлежит основанию (пользуясь теоремой Фалеса, докажите это самостоятельно). Следовательно, согласно доказанному в 1^0, каждый из них равносоставлен с прямоугольником, одна из смежных сторон которого равна основанию параллелограмма, а другая является его высотой. Но указанные прямоугольники равносоставлены с прямоугольником $HBCK$ (рис. 262, *в, г*). Следовательно, параллелограмм $ABCD$ также равносоставлен с этим прямоугольником. Утверждение доказано.

Задачи на разрезание допускают дальнейшее усложнение: требуется разрезать несколько данных многоугольников на части и составить из них новый многоугольник определенного вида. Или, наоборот, требуется разрезать данный многоугольник на части и составить из них несколько новых многоугольников. Эти задачи обычно формулируют так: доказать, что многоугольник F равносоставлен с многоугольниками $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Приведем пример такой задачи.

Задача 7. *Доказать, что пять равных квадратов равносоставлены с одним квадратом.*

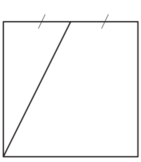


Рис. 263

Решение. Возьмем четыре из пяти данных квадратов и разрежем каждый из них на треугольник и трапецию так, как показано на рисунке 263. Четыре трапеции приложим к сторонам пятого квадрата так, как показано на рисунке 264. Наконец приложим треугольники катетами к основаниям трапеций (рис. 265). Полученная фигура — квадрат (докажите это).

80. Разрезание квадрата на неравные квадраты. Из всевозможных задач на разрезание многоугольников следует выделить задачу о разрезании квадрата на меньшие квадраты, любые два из которых не равны друг другу. Эта простая по формулировке задача оказалась в действительности очень трудной. До конца 30-х годов XX в. многие геометры считали, что она вообще не имеет решения. Лишь в 1939 г.

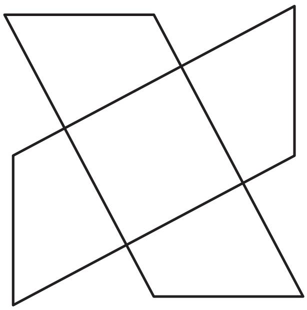


Рис. 264

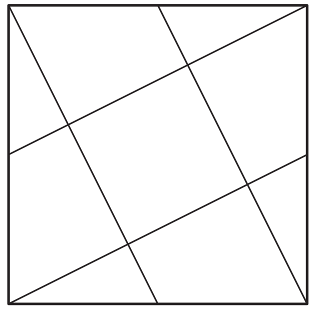


Рис. 265

немецкий математик Р. Шпраг сумел разбить квадрат на 55 попарно неравных квадратов. Приблизительно в это же время группа ученых Кембриджского университета в Англии установила связь между задачей о разрезании квадрата и теорией электрических цепей в физике [1]. Это позволило им в 1940 г. разрезать квадрат на 28 попарно неравных квадратов, чуть позже — на 26. Наконец в 1948 г. англичанин Ф. Г. Уилкокс сумел уменьшить число квадратов до 24. Это разбиение квадрата изображено на рисунке 266 (число внутри квадрата означает длину его стороны).

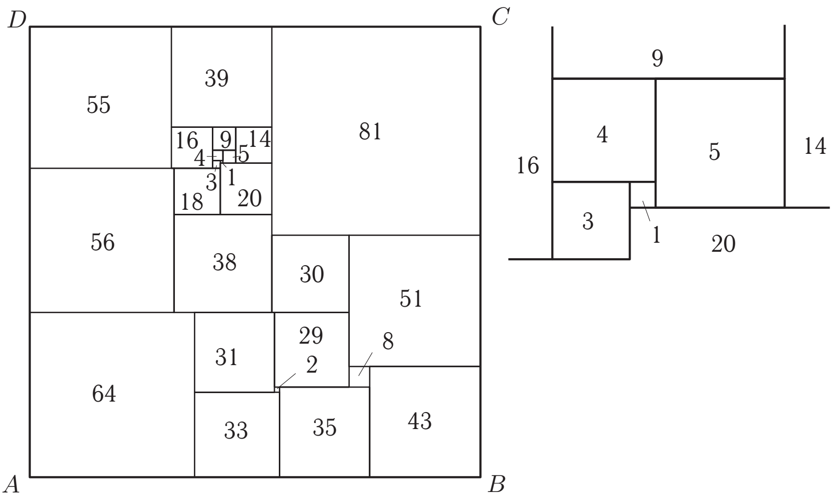


Рис. 266. Квадрат $ABCD$ со стороной $AB = 175$ разбит на 24 попарно неравных квадрата; числа указывают длины сторон соответствующих квадратов

[1] Об этом можно прочитать в книге Б. А. Кордемского и Н. В. Русалева «Удивительный квадрат» (М.: Столетие, 1994).

Любопытно, что аналогичная задача о разбиении куба на попарно неравные кубы меньших размеров значительно проще. Ответ здесь отрицательный, т. е. такое разбиение невозможно. Докажем это методом от противного. Предположим, что на столе перед нами лежит куб, разбитый на попарно неравные кубики. Ясно, что нижняя грань куба будет при этом разбита нижними кубиками на попарно неравные квадраты. Самый маленький из этих квадратов не может прилегать к стороне нижней грани куба, так как в противном случае нельзя будет заполнить зазор между прилегающими к нему большими квадратами (рис. 267). Следовательно, самый маленький из кубиков, примыкающих к нижнему основанию, окружен со всех сторон кубами больших размеров. Эти кубы создают вокруг него своеобразный «забор», поэтому сверху на него могут опираться только кубы еще меньших размеров. Выберем из них самый маленький и применим к нему те же рассуждения, что и к его предшественнику. Мы получим, что он тоже должен быть обложен кубами больших размеров, создающими вокруг него «забор», и т. д. Повторяя рассуждения, мы получим неограниченную последовательность все меньших и меньших кубов. Но это противоречит нашему предположению о том, что куб разбит на конечное число попарно неравных кубиков. Следовательно, наше предположение ошибочно: куб нельзя разбить на попарно неравные кубы.

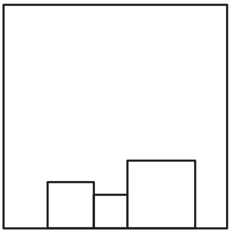


Рис. 267. Нижняя грань куба и лежащие на ней основания кубиков

Задачи

235. Докажите, что трапеция равносоставлена с параллелограммом, основание которого равно средней линии трапеции, а высота — высоте трапеции.

236*. В шестиугольнике $ABCDEF$ $AB = \frac{1}{2}EF$, $BC = \frac{1}{2}AF$, $\angle A = \angle B = \angle BCD = \angle D = \angle E = \angle F = 90^\circ$ (рис. 268). Разрежьте его на четыре равных многоугольника, из которых можно составить прямоугольник.

237. Разрежьте произвольный треугольник на три таких многоугольника, из которых можно составить прямоугольник.

238. Прямоугольный треугольник с острым углом в 30° разрежьте: а) на три равных прямоугольных треугольника; б) на четыре равных прямоугольных треугольника.

239. Прямоугольник, стороны которого равны 4 и 9, разрежьте на два равных многоугольника так, чтобы из них можно было составить квадрат.

240. Даны два квадрата со сторонами 6 и 8. Разрежьте каждый из квадратов на два многоугольника так, чтобы из полученных четырех частей можно было составить квадрат со стороной 10.

241*. Фигуру, составленную из пяти равных квадратов, изображенную на рисунке 269, разрежьте на части, из которых можно составить квадрат.

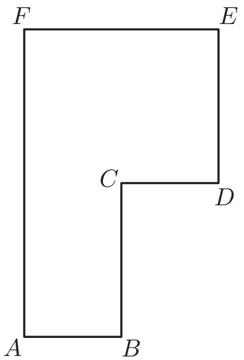


Рис. 268

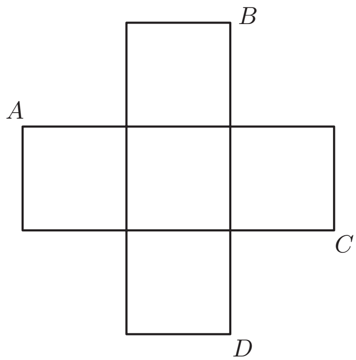


Рис. 269

242*. Докажите, что разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.

243. Через вершины A и D параллелограмма $ABCD$ проведены две параллельные прямые — AE и DK, где E и K — точки прямой BC. Из точек A и E проведены перпендикуляры AF и EG к прямой DK. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $AEGF$ равносоставлены.

§ 2. Понятие площади

81. Измерение площади многоугольника. Измерение площадей многоугольников проводится аналогично измерению длин отрезков. За единицу измерения площадей принимается квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков. Площадь этого квадрата считается равной единице. Измерить площадь многоугольника — значит узнать, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в данном многоугольнике. Это число и принимается за его площадь при данной единице измерения.

Практически измерение площади многоугольника можно осуществить так. Расчертим лист бумаги на квадраты со стороной, равной единице измерения отрезков, и наложим на него данный многоугольник. Пусть m — число квадратов, полностью покрытых многоугольником, а n — число квадратов, покрытых многоугольником лишь частично (рис. 270). Число S, выражающее площадь многоугольника, заключено, таким образом, между числами $s_1 = m$ и $S_1 = m + n$:

$$s_1 \leqslant S \leqslant S_1.$$

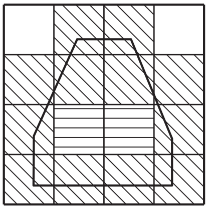


Рис. 270

Каждое из чисел s_1 и S_1 может рассматриваться как приближенное значение числа S (s_1 — с недостатком, S_1 — с избытком). Для более точного измерения площади многоугольника разобьем каждый из n частично покрытых квадратов на 100 равных квадратиков. Ясно, что сторона каждого из этих квадратиков равна 1/10, площадь каждого из них равна 1/100. Пусть m_1 — число квадратиков, полностью покрытых нашим многоугольником, n_1 — число частично покрытых квадратиков. Теперь можно сказать, что число S заключено между числами $s_2 = m + \frac{m_1}{100}$ и $S_2 = m + \frac{m_1 + n_1}{100}$, т. е. $s_2 \leqslant S \leqslant S_2$. При этом, очевидно, $s_2 \geqslant s_1$. С другой стороны, $S_2 \leqslant S_1$, поскольку фигура с площадью S_1 содержит все квадратики, на которые разбиты n квадратов, а фигура с площадью S_2 — только те из этих квадратиков, которые полностью или частично покрыты данным многоугольником. Итак,

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant S \leqslant S_2 \leqslant S_1.$$

Разобьем теперь каждый из n_1 частично покрытых квадратиков на 100 еще меньших равных квадратиков со стороной $\frac{1}{10^2}$ и повторим наши рассуждения. Получим новые неравенства: $s_3 \leqslant S \leqslant S_3$, причем $s_3 \geqslant s_2$, а $S_3 \leqslant S_2$, поэтому

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant S \leqslant S_3 \leqslant S_2 \leqslant S_1.$$

Вновь повторим аналогичные рассуждения и т. д. Для любого натурального числа k получатся неравенства:

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_k \leqslant S \leqslant S_k \leqslant \ldots \leqslant S_2 \leqslant S_1,$$

причем разность $S_k - s_k$ при неограниченном увеличении k будет стремиться к нулю. Это следует из того, что разность $S_k - s_k$ равна площади фигуры, составленной из квадратиков со стороной $\frac{1}{10^{k-1}}$ и покрывающей ломаную, ограничивающую многоугольник (на рисунке 271 данный многоугольник изображен в увеличенном масштабе). С увеличением k эта фигура все ближе и ближе «сжимается» к ломаной и поэтому ее площадь стремится к нулю (см. замечание 1 в конце пункта). Следовательно, числа s_k и S_k будут стремиться к S. В этом и состоит процесс измерения площади многоугольника, позволяющий найти приближенное значение S с произвольной точностью [1].

[1] Существование точного значения S вытекает из теоремы Вейерштрасса, доказанной в приложении 1 «Снова о числах» в конце книги.

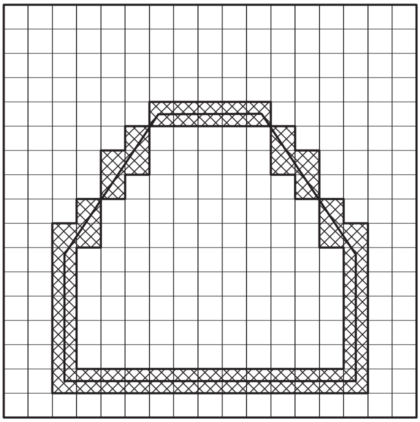


Рис. 271

В связи с описанным процессом измерения площади многоугольника возникает вопрос: а если положить данный многоугольник на расчерченный лист бумаги иначе (рис. 272), будет ли результат измерения тот же? В частности, верно ли, что в результате измерения площади квадрата со стороной 1, изображенного на рисунке 273, получится

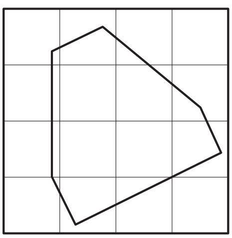


Рис. 272

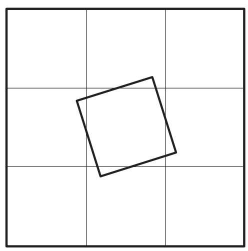


Рис. 273

число 1? Интересующий нас вопрос можно сформулировать следующим образом: если на расчерченном листе лежат два равных многоугольника (рис. 274), то можно ли утверждать, что результат измерения их площадей будет одним и тем же, т. е. можно ли утверждать, что их площади равны? Ответ оказывается положительным:

1^0 *равные многоугольники имеют равные площади.*

Однако доказать это утверждение не очень просто (см. замечание 2 в конце пункта).

Рассмотрим теперь многоугольник F, составленный из многоугольников F_1 и F_2. При измерении его площади каждый квадрат, содержащийся целиком в многоугольнике F, либо целиком содержится в одном из многоугольников F_1, F_2, либо часть его содержится

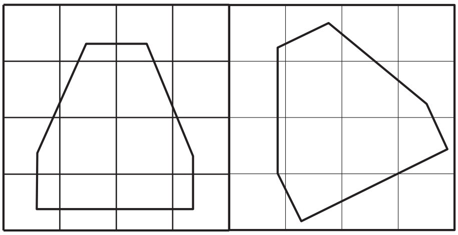


Рис. 274

в многоугольнике F_1, а другая часть — в многоугольнике F_2. То же относится и к частям квадратов, содержащихся в многоугольнике F лишь частично (рис. 275). Поэтому:

2^0 *если многоугольник составлен из двух многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.*

Из этого следует:

если многоугольник разбит на несколько многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Так, на рисунке 276 многоугольник составлен из двух четырехугольников, каждый из которых, в свою очередь, составлен из двух треугольников. Поэтому, согласно свойству 2^0, его площадь равна сумме площадей $(S_1 + S_2)$ и $(S_3 + S_4)$, а значит, равна $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

Свойства 1^0 и 2^0 часто называют *основными свойствами площадей*, поскольку на основе этих свойств можно вывести формулы, выражающие площади многоугольников через их элементы.

З а м е ч а н и е 1*. Описывая процесс измерения площади многоугольника, мы сказали, что площадь фигуры, составленной из квадратиков со стороной $\frac{1}{10^{k-1}}$ и покрывающей ломаную, ограничивающую многоугольник (см. рис. 271), при неограниченном увеличении k стремится к нулю. Докажем это.

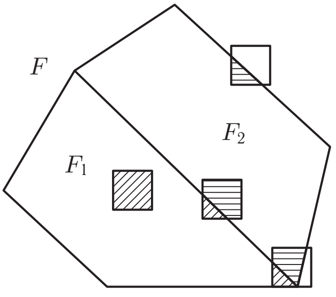


Рис. 275

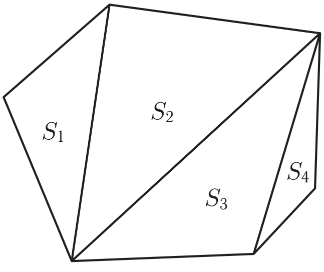


Рис. 276

Рассмотрим одну из сторон многоугольника. Проведя через ее концы прямые, параллельные сторонам квадратиков, получим прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенуза c которого представляет собой рассматриваемую сторону. Пусть n — количество квадратиков, покрывающих сторону c. Обойдем эти квадратики ходом шахматной ладьи. Тогда количество N пройденных квадратиков окажется не меньше, чем n: $N \geqslant n$ (см. рис. 271). С другой стороны, если путь от одного конца стороны c к другому концу проделать лишь двумя ходами ладьи, то количество пройденных квадратиков также окажется равным N (объясните, почему). Из этого следует, что

$$N \leqslant (a \cdot 10^{k-1} + 2) + (b \cdot 10^{k-1} + 1) = (a+b)10^{k-1} + 3.$$

Поскольку в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета, то $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$, а значит, $a + b \leqslant 2c$. Таким образом,

$$n \leqslant N \leqslant 2c \cdot 10^{k-1} + 3.$$

Будем считать, что число k столь велико, что каждая сторона данного многоугольника больше стороны квадратика, в частности, $c > \frac{1}{10^{k-1}}$. Тогда можно написать такое неравенство:

$$n < 2c \cdot 10^{k-1} + 3c \cdot 10^{k-1} = 5c \cdot 10^{k-1}.$$

Итак, количество квадратиков, покрывающих сторону c многоугольника, меньше $5c \cdot 10^{k-1}$. Применяя аналогичные рассуждения к остальным сторонам и складывая полученные неравенства, мы приходим к выводу: количество квадратиков, покрывающих ломаную, ограничивающую многоугольник, меньше $5p \cdot 10^{k-1}$, где p — периметр многоугольника. Следовательно, площадь фигуры, состоящей из этих квадратиков, меньше $5p \cdot 10^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{10^{k-1}}\right)^2 = \frac{5p}{10^{k-1}}$, поэтому при неограниченном увеличении числа k она стремится к нулю.

Замечание 2*. Докажем, что *площади равных многоугольников* (измеренные описанным в этом пункте способом) *равны*. Поскольку любые два равных многоугольника совмещаются друг с другом не более, чем тремя осевыми симметриями (см. задачу 7 п. 47), то достаточно доказать это утверждение для двух многоугольников, симметричных относительно некоторой прямой. Для краткости условимся называть лист бумаги, расчерченный на квадраты со стороной 1, *сетью* N (от слова «net» — сеть). Один из этих квадратов обозначим буквой K.

Рассмотрим произвольный многоугольник Φ и многоугольник Φ_1, симметричный многоугольнику Φ относительно некоторой прямой a. Пусть S и S_1 — их площади, измеренные описанным в этом пункте способом. Числа S и S_1, таким образом, показывают, сколько раз квадрат K и его части укладываются в многоугольниках Φ и Φ_1. Докажем, что $S_1 = S$. С этой целью рассмотрим сеть N_1, симметричную сети N

относительно прямой a. Ясно, что квадрат K_1 этой сети, симметричный квадрату K сети N относительно прямой a, и его части укладываются в многоугольнике $\varPhi_1$ столько же раз, сколько раз квадрат K укладывается в многоугольнике $\varPhi$ (так как при симметрии относительно прямой a многоугольник $\varPhi$ и сеть N переходят в многоугольник $\varPhi_1$ и сеть N_1), т. е. S раз. Таким образом, если X — число, показывающее, сколько раз квадрат K и его части укладываются в квадрате K_1, то $S_1 = SX$.

Итак, для любого многоугольника $\varPhi$ с площадью S (измеренной описанным в этом пункте способом) площадь S_1 симметричного ему относительно прямой a многоугольника $\varPhi_1$ равна SX, где X — площадь квадрата K_1, симметричного квадрату K относительно прямой a. В частности, площадь квадрата K_2, симметричного квадрату K_1 относительно прямой a, равна $XX = X^2$. Но квадратом K_2 является квадрат K, площадь которого равна 1. Следовательно, $X^2=1$, откуда $X = 1$. Таким образом, для любого многоугольника с площадью S и симметричного ему относительно прямой a многоугольника с площадью S_1 имеет место равенство: $S_1 = S$. Утверждение доказано.

82. Площадь произвольной фигуры. Для измерения площади произвольной фигуры F поступают так. Рассматривают множество всех многоугольников, целиком содержащихся в фигуре F, и множество всех многоугольников, целиком содержащих в себе фигуру F (рис. 277). Ясно, что площадь каждого многоугольника из первого множества не превосходит площади любого многоугольника из второго множества (объясните почему). Если существует величина S, для которой как в первом, так и во втором множестве найдутся многоугольники, площади которых сколь угодно мало отличаются от S, то величина S и принимается за площадь данной фигуры.

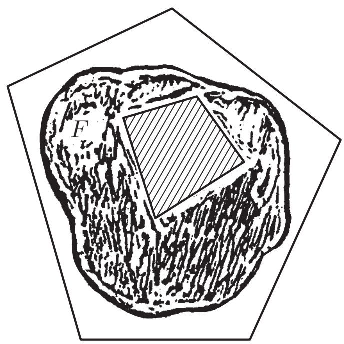


Рис. 277

В качестве иллюстрации понятия площади произвольной фигуры решим задачу, которую часто называют *задачей Минковского* [1]. Представим себе, что плоскость разбита на квадраты со стороной, равной единице измерения отрезков (рис. 278). Вершины этих квадратов образуют так называемую *целочисленную решетку* и называются *узлами решетки* (рис. 279). Сформулируем теперь нашу задачу.

З а д а ч а. *Дана произвольная фигура, площадь которой (при выбранной единице измерения) меньше* 1. *Доказать, что эту фигуру*

[1] Минковский Герман (1864–1909) — немецкий математик

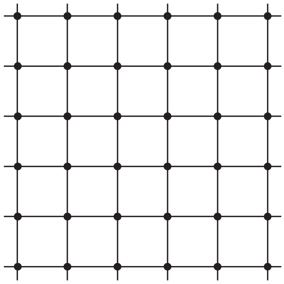


Рис. 278

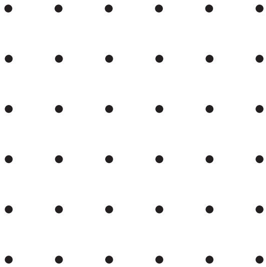


Рис. 279

можно расположить так, что ни один из узлов целочисленной решетки не попадет на фигуру.

Решение. Представим себе, что решетка нарисована на прозрачной бумаге. Наложим эту бумагу на фигуру произвольным образом, скопируем на нее данную фигуру и закрасим копию в какой-то цвет. Затем разрежем бумагу на квадратики вдоль линий решетки (рис. 280), аккуратно, не поворачивая, положим эти квадратики один на другой (наподобие колоды карт) и посмотрим на образовавшуюся стопку квадратиков на просвет. Мы увидим что в некоторых местах закрашенные области квадратиков накладываются друг на друга, в других местах закрашенную область имеет лишь один квадрат, и обязательно найдутся прозрачные области, поскольку площадь каждого из квадратиков равна 1, а площадь фигуры меньше 1. Вооружимся иголкой и проткнем все наши квадратики в какой-нибудь точке прозрачной области.

Теперь разложим все квадратики так, как они лежали до разрезания (рис. 281). Мы увидим в каждом квадратике один след от нашего прокола, расположенный одинаковым образом во всех квадратиках. Следы эти образуют новую целочисленную решетку (объясните почему), причем ни один из узлов этой новой решетки не попадает на фигуру. Утверждение доказано.

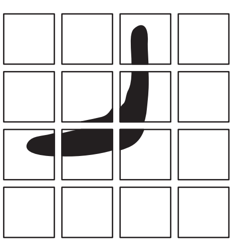


Рис. 280

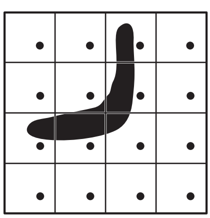


Рис. 281

83*. Площадь многоугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки. На рисунке 282 изображен десятиугольник, все вершины которого являются узлами целочисленной решетки. Ясно, что площадь каждой клетки равна 1. Чему равна площадь десятиугольника? Ответ на этот вопрос можно дать почти сразу, проделав небольшие вычисления в уме. Для этого нужно воспользоваться следующей теоремой.

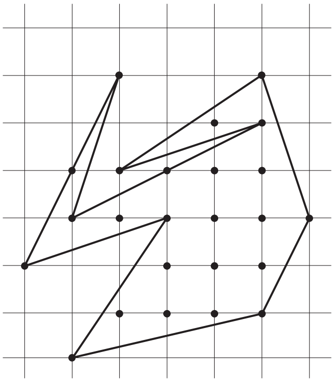


Рис. 282

Теорема. *Площадь многоугольника, все вершины которого являются узлами целочисленной решетки, выражается числом* $\left(m + \frac{n}{2} - 1\right)$, *где* m *— количество узлов, находящихся внутри многоугольника, а* n *— количество узлов, лежащих на его границе.*

Доказательство. Для многоугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки условимся обозначать буквой R число $\left(m + \frac{n}{2} - 1\right)$, а буквой S — число, выражающее его площадь. Наша задача, тем самым, — доказать, что для любого многоугольника указанного вида эти числа совпадают: $R = S$.

Центральное место в наших рассуждениях будет занимать следующий факт. Если два данных многоугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки составляют один многоугольник, то соответствующие им числа R_1 и R_2 связаны с числом R для многоугольника, составленного из двух данных, равенством: $R = R_1 + R_2$.

Докажем это утверждение. Пусть $(k + 2)$ — количество узлов решетки, лежащих на общей ломаной двух данных многоугольников (два конца и k внутренних точек этой ломаной). Тогда внутри большого многоугольника окажется $(m_1 + m_2 + k)$ узлов, где m_1 — число узлов, лежащих внутри первого, а m_2 — внутри второго многоугольника (рис. 283), т. е.

$$m = m_1 + m_2 + k.$$

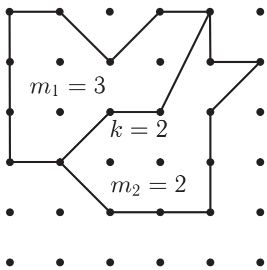


Рис. 283. $m = 7$; $m = m_1 + m_2 + k$

На границу большого многоугольника попадут два конца ломаной, а также все узлы, лежащие на границах данных многоугольников, за исключением $(k + 2)$ узлов, находящихся на общей ломаной. На границе первого многоугольника таких узлов будет

$(n_1 - k - 2)$, на границе второго многоугольника — $(n_2 - k - 2)$. Таким образом,

$$n = 2 + (n_1 - k - 2) + (n_2 - k - 2) = n_1 + n_2 - 2k - 2.$$

В результате для числа R получаем равенства:

$$R = m + \frac{n}{2} - 1 = (m_1 + m_2 + k) + \left(\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} - k - 1\right) - 1 = \\ = \left(m_1 + \frac{n_1}{2} - 1\right) + \left(m_2 + \frac{n_2}{2} - 1\right) = R_1 + R_2.$$

Итак,

$$R = R_1 + R_2. \tag{1}$$

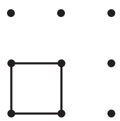


Рис. 284

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Прежде всего заметим, что для квадрата со стороной 1 (рис. 284)

$$R = 0 + \frac{4}{2} - 1 = 1.$$

Но и площадь S этого квадрата равна 1. Следовательно, для такого квадрата $R = S$.

Рассмотрим теперь прямоугольник, составленный из N единичных квадратов, стороны которого лежат на линиях решетки (рис. 285). В силу доказанного равенства (1) число R для такого прямоугольника равно $(1 + 1 + \ldots + 1) = N$. Но и площадь S прямоугольника равна N. Поэтому для такого прямоугольника $R = S$. Из этого следует, что аналогичное равенство имеет место и для прямоугольного треугольника, катеты которого лежат на линиях решетки (рис. 285), так как рассмотренный прямоугольник состоит из двух таких треугольников с общей гипотенузой.

Следовательно, равенство $R = S$ верно и для любого треугольника (рис. 286), так как его можно получить из прямоугольника, последовательно отсекая от него прямоугольные треугольники, катеты которых лежат на линиях решетки.

Для завершения доказательства осталось вспомнить, что любой многоугольник можно разрезать на треугольники, вершинами которых являются вершины многоугольника (задача 4 п. 78). Следователь-

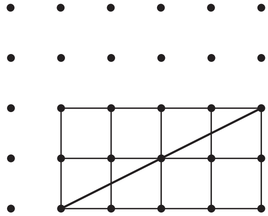


Рис. 285

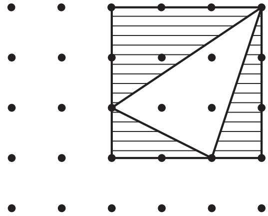


Рис. 286

но, для многоугольника соотношение $R = S$ также верно. Теорема доказана.

Вернемся теперь к десятиугольнику, изображенному на рисунке 282. Для него $m = 12$, $n = 12$, следовательно,

$$S = 12 + \frac{12}{2} - 1 = 17.$$

Таким образом, площадь этого десятиугольника легко вычисляется в уме.

Задачи

244. Каждая из трех прямых на рисунке 287 делит площадь многоугольника пополам. Докажите, что площадь треугольника, образованного этими прямыми, не превосходит $\frac{1}{4}$ площади многоугольника.

245. Площадь произвольной фигуры при выбранной единице измерения меньше целого числа k. Докажите, что на нее можно наложить целочисленную решетку так, что не более $(k-1)$ точек решетки попадет на фигуру.

246. Площадь произвольной фигуры при выбранной единице измерения больше целого числа k. Докажите, что на нее можно наложить целочисленную решетку так, что по крайней мере k точек решетки попадет на фигуру.

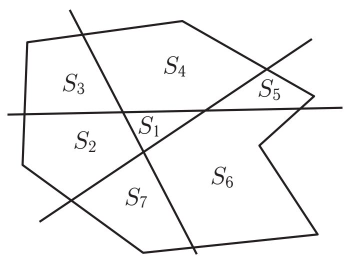


Рис. 287

§ 3. Площадь треугольника

84. Площади прямоугольника, параллелограмма и треугольника. Вы, конечно, знаете, что площадь S прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = a$ и $AD = b$ выражается формулой $S = ab$. Давайте подумаем, как это доказать.

Рассмотрим сначала прямоугольник AB_1C_1D, сторона AB_1 которого равна единице измерения отрезков (рис. 288, *а*). Ясно, что единица измерения площадей (т. е. квадрат со стороной 1) и ее части укладываются в этом прямоугольнике столько раз, сколько раз единица измерения отрезков и ее части укладываются в отрезке AD, т. е. b раз. Следовательно, площадь S_1 этого прямоугольника выражается числом b: $S_1 = b$.

Аналогично прямоугольник AB_1C_1D и его части укладываются в прямоугольнике $ABCD$ столько раз, сколько раз единица измерения отрезков (т. е. отрезок AB_1) и ее части укладываются в отрезке AB (рис. 288, *б*), т. е. a раз. Следовательно, площадь S прямоугольника $ABCD$ равна aS_1, т. е. $S = ab$. Итак:

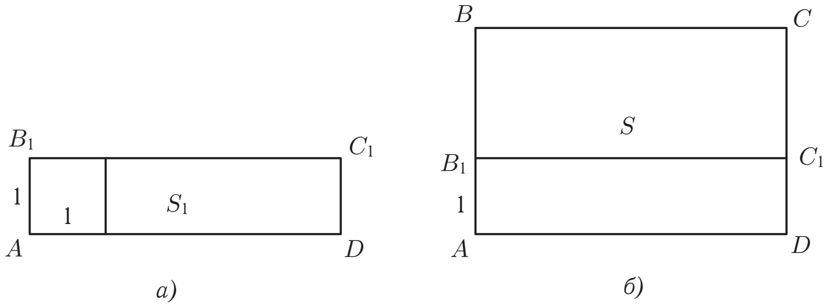


Рис. 288. а) $AD = b$, $S_1 = b$; б) $AB = a$, $AD = b$, $S = aS_1 = ab$

площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Далее, рассмотрим параллелограмм и примем какую-нибудь его сторону за основание. Этот параллелограмм равносоставлен с прямоугольником, одна из смежных сторон которого равна основанию параллелограмма, а другая — его высоте (задача 6 п. 79). Следовательно,

площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Рассмотрим теперь треугольник, выберем одну из его сторон и назовем ее *основанием*. Под словом «*высота*» условимся понимать ту из высот треугольника, которая проведена к основанию. Поскольку треугольник равносоставлен с параллелограммом, основание которого совпадает с основанием треугольника, а высота равна половине высоты треугольника (задача 5 п. 79), то

площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

85. Равновеликие многоугольники. Два многоугольника называются *равновеликими*, если их площади равны. Примером равновеликих многоугольников могут служить (согласно свойству 1^0 площадей) любые равные многоугольники. Обратное утверждение, конечно, неверно: равновеликие многоугольники могут быть неравными. Так, изображенные на рисунке 289 прямоугольник и квадрат равновелики (площадь каждого из них равна 4 см^2), но они, очевидно, не равны друг другу.

В силу свойства 2^0 площадей два равносоставленных многоугольника равновелики. А верно ли обратное утверждение: *любые два равновеликих многоугольника равносоставлены*? Оказывается, верно. Это утверждение называется *теоремой Бойяи–Гервина*. Ф. Бойяи — венгерский математик — доказал эту теорему в 1832 г., а П. Гервин — немецкий математик-любитель — независимо от Ф. Бойяи доказал ее в 1833 году.

Докажем сначала теорему Бойяи–Гервина для равновеликих прямоугольников со смежными сторонами a, b и a_1, b_1. Пусть для определенности $a \geqslant b$, $a_1 \geqslant b_1$. Тогда $a_1^2 \geqslant a_1b_1 = ab \geqslant b^2$, откуда $a_1 \geqslant b$.

Построим параллелограмм со смежными сторонами a и a_1 и высотой b, проведенной к стороне a (рис. 290). Его площадь равна ab, поэтому высота, проведенная к стороне a_1, равна b_1. Этот параллелограмм равносоставлен как с одним, так и с другим прямоугольником (см. задачу 6 п. 79). Следовательно, рассматриваемые прямоугольники равносоставлены, что и требовалось доказать.

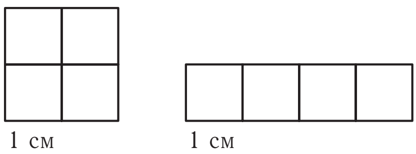


Рис. 289

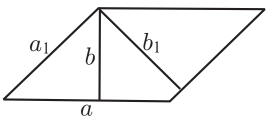


Рис. 290

Рассмотрим теперь два равновеликих многоугольника с площадью S и докажем, что они равносоставлены. Возьмем один из них и разрежем на треугольники с площадями S_1, S_2,..., S_n (рис. 291). Каждый из треугольников равносоставлен с параллелограммом, основание которого совпадает с основанием треугольника, а высота равна половине высоты треугольника. Параллелограмм, в свою очередь, равносоставлен с прямоугольником, одна из смежных сторон которого равна основанию параллелограмма, а другая — его высоте, поэтому треугольник также равносоставлен с этим прямоугольником. Следовательно, i-ый треугольник равносоставлен и с прямоугольником, смежные стороны которого равны заданному отрезку длины a и отрезку длины $\frac{S_i}{a}$. Из таких прямоугольников можно составить один прямоугольник со стороной a и площадью S (рис. 292). Таким образом, выбранный нами многоугольник равносоставлен с этим прямоугольником. Аналогично доказывается, что и другой многоугольник равносоставлен с указанным прямоугольником, поэтому данные многоугольники равносоставлены. Теорема доказана.

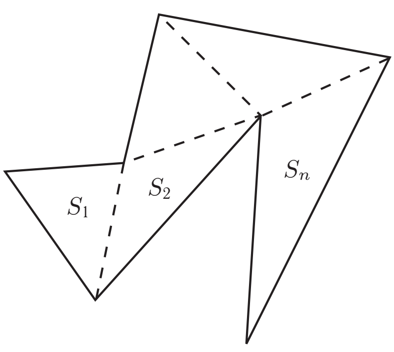


Рис. 291

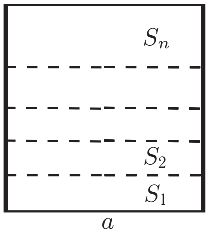


Рис. 292

86. Метод Евклида. Для нахождения площади произвольного многоугольника можно разрезать его на треугольники и найти площадь каждого из них. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника. Этот прием, в частности, можно использовать для вывода формул площадей параллелограмма и трапеции (рис. 293 *а, б*).

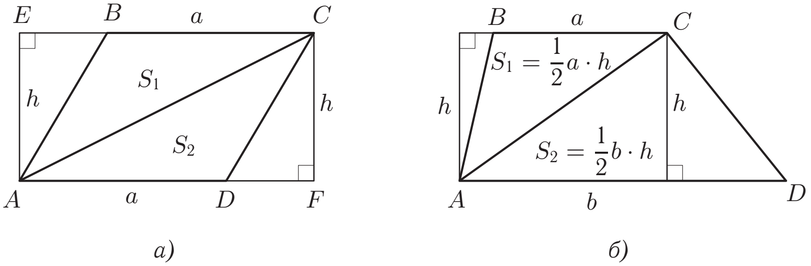


Рис. 293. а) $S_{ABCD} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah = ah$, площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту; б) $S_{ABCD} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(a + b)h$, площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту

Площадь многоугольника можно найти и другими способами. Один из таких способов был указан Евклидом. Он состоит в построении треугольника, площадь которого равна площади данного многоугольника. Поясним этот способ на примере выпуклого пятиугольника $ABCDE$, изображенного на рисунке 294.

Построим треугольник, площадь которого равна площади пятиугольника $ABCDE$. Для этого через вершину B проведем прямую, параллельную диагонали AC пятиугольника. Она пересекает прямую AE в точке F. Треугольники ABC и AFC равновелики, так как у них общее основание AC, а вершины B и F лежат на прямой, параллельной AC, и поэтому высоты, проведенные из этих вершин к основанию AC, равны.

Итак, треугольник ABC можно заменить равновеликим треугольником AFC. В результате получим четырехугольник $FCDE$, равновеликий данному пятиугольнику. Далее аналогичным образом заменим треугольник CDE на равновеликий ему треугольник CEK. Получившийся в итоге треугольник CFK равновелик пятиугольнику $ABCDE$.

Применяя метод Евклида к трапеции, получаем другой способ вывода формулы площади трапеции. Действительно, рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$ и высотой h (рис. 295). Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD, и обозначим буквой E точку пересечения этой прямой с прямой AD. Тогда $S_{ABCD} = S_{ABE}$. Четырехугольник $BCED$ — параллелограмм,

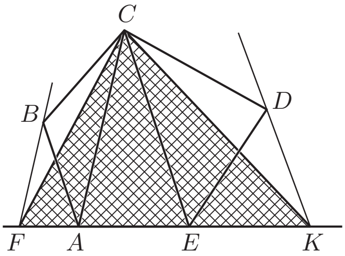


Рис. 294

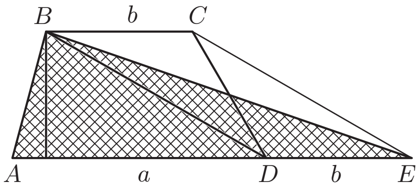


Рис. 295

поэтому $DE = BC = b$. Итак,

$$S_{ABCD} = S_{ABE} = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

87. Две теоремы об отношении площадей треугольников. Из формулы площади треугольника следует, что

площади треугольников, имеющих равные основания, относятся как их высоты;

площади треугольников, имеющих равные высоты, относятся как их основания.

Рассмотрим треугольник ABC с площадью S и отметим на луче AB какую-нибудь точку B_1 (рис. 296, *а*). Треугольники ABC и AB_1C имеют общую высоту CH, поэтому

$$\frac{S}{S_{AB_1C}} = \frac{AB}{AB_1}.$$

Отметим теперь на луче AC произвольную точку C_1 (рис. 286, *б*). Треугольники AB_1C и AB_1C_1 имеют общую высоту B_1H_1, поэтому

$$\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}.$$

Перемножая два равенства, получаем:

$$\frac{S}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.*

Доказательство. Пусть S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$ (рис. 286, *в*). Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложились соответственно

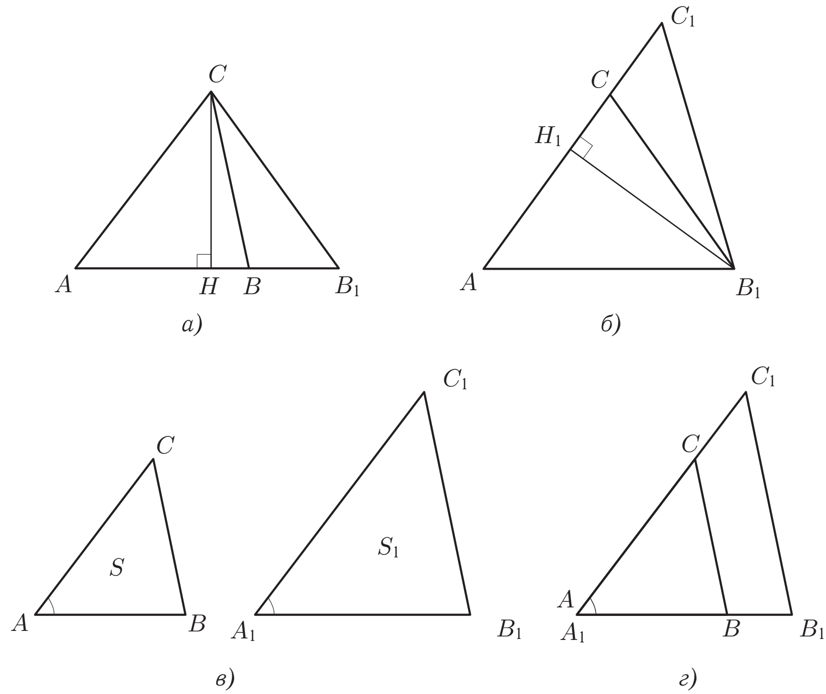


Рис. 296

на лучи A_1B_1 и A_1C_1 (рис. 286, *г*). Как мы только что установили, $\dfrac{S}{S_{AB_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$, т. е.

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Теорема доказана.

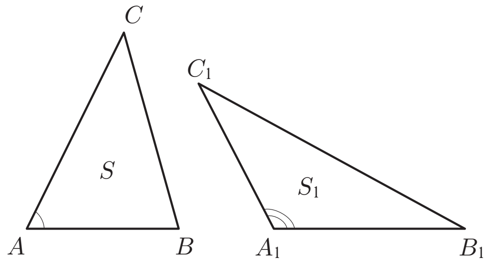
Докажем еще одну теорему, являющуюся, по-существу, следствием только что доказанной теоремы.

Теорема 2. *Если угол одного треугольника составляет в сумме с углом другого треугольника* $180°$*, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих указанные углы.*

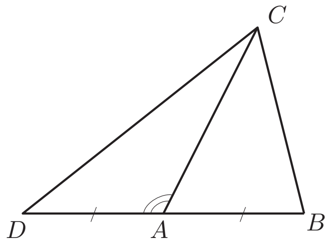
Доказательство. Пусть S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A + \angle A_1 = 180°$ (рис. 297, *а*). Докажем, что

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Продолжим сторону AB за точку A на отрезок $AD = AB$ (рис. 297, *б*). Треугольники ABC и ADC имеют равные основания AB



а)



б)

Рис. 297

и AD, а также общую высоту, проведенную из вершины C. Поэтому их площади равны, т. е. площадь треугольника ADC равна S.

Поскольку $\angle BAC + \angle DAC = 180°$, то $\angle DAC = \angle A_1$. Следовательно, по теореме 1

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AD \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

или, с учетом равенства $AD = AB$,

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Теорема доказана.

88. Две теоремы о биссектрисах треугольника. Рассмотрим треугольник ABC с биссектрисой AD (рис. 298). Треугольники ABD и ACD имеют общую высоту AH, поэтому

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC}.$$

С другой стороны, эти же треугольники имеют по равному углу ($\angle 1 = \angle 2$), поэтому

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}.$$

Из двух равенств для отношения площадей получаем:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ или } \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC},$$

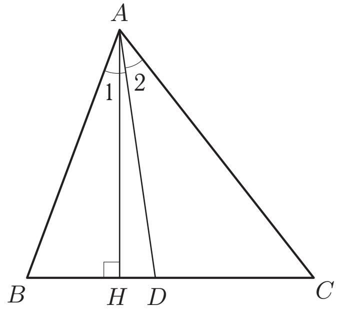


Рис. 298

т. е. *отрезки BD и DC пропорциональны отрезкам AB и AC.*

Итак, мы доказали такую теорему — назовем ее *теоремой о биссектрисе треугольника*:

биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

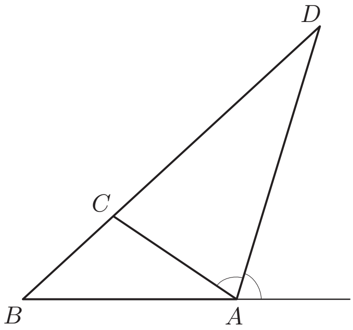


Рис. 299

При доказательстве этой теоремы мы опирались на теорему 1 п. 87. Используя теорему 2 п. 87, можно аналогичным образом доказать *теорему о биссектрисе внешнего угла треугольника*:

если биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D, то $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$ (рис. 299).

Проведите доказательство самостоятельно.

89. Признак равенства треугольников по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины. Теперь, когда в нашем распоряжении оказались новые сведения о биссектрисе треугольника, попытаемся ответить на два вопроса, записанных в блокноте:

имеет ли место признак равенства треугольников по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины;

как построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины?

Если данные стороны равны друг другу, то ответить на оба вопроса легко (объясните, как). Поэтому будем считать, что они не равны друг другу.

Рассмотрим треугольник ABC с биссектрисой AD. Для удобства введем следующие обозначения: $AC = b$, $AB = c$. Пусть, например, $b > c$ (рис. 300, *а*). Из теоремы о биссектрисе треугольника следует, что $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{c}{b}$.

На стороне AC отложим отрезок $AE = c$ (рис. 300, *б*). Треугольники ABD и AED равны по первому признаку равенства треугольников,

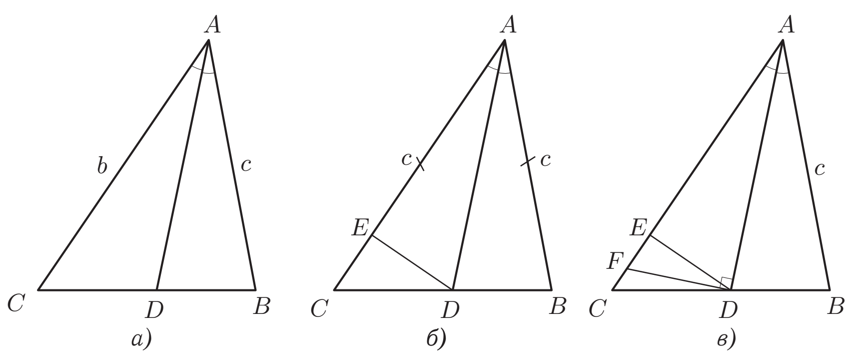


Рис. 300. $AE = c$, $DF \perp AD$

поэтому $BD = DE$ и $\angle ADB = \angle ADE$, т. е. луч DA — биссектриса угла BDE.

Проведем через точку D прямую, перпендикулярную к AD и пересекающую AC в точке F (рис. 300, *в*). Поскольку луч DA — биссектриса угла BDE, а $DF \perp AD$, то луч DF — биссектриса угла CDE, смежного с углом BDE, поэтому отрезок DF — биссектриса треугольника CDE. По теореме о биссектрисе треугольника $\frac{EF}{FC} = \frac{DE}{DC}$. Но $DE = BD$, а $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$. Следовательно, $\frac{EF}{FC} = \frac{c}{b}$.

Полученное соотношение позволяет выразить AF через b и c. В самом деле, $EF = AF - c$, $FC = b - AF$, поэтому $\frac{AF - c}{b - AF} = \frac{c}{b}$, откуда

$$AF = \frac{2bc}{b + c}. \tag{1}$$

Мы приходим к совершенно неожиданному выводу: длина отрезка AF не зависит от угла A треугольника ABC! Еще более удивительно то, что это утверждение, как показывают выкладки, справедливо и в геометрии Лобачевского, хотя формула, аналогичная формуле (1), имеет там значительно более сложный вид.

Теперь мы можем ответить на оба интересующих нас вопроса. Сформулируем их в виде задач и приведем решения.

Задача 1. *Доказать, что если две стороны и биссектриса, проведенные из одной вершины, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины, другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Решение. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с биссектрисами AD и A_1D_1, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $AD = A_1D_1$. Через точки D и D_1 проведем прямые, перпендикулярные к AD и A_1D_1 и пересекающие большие из данных сторон треугольников в точках F и F_1 соответственно (рис. 301). Поскольку $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, то, как следует из формулы (1), $AF = A_1F_1$.

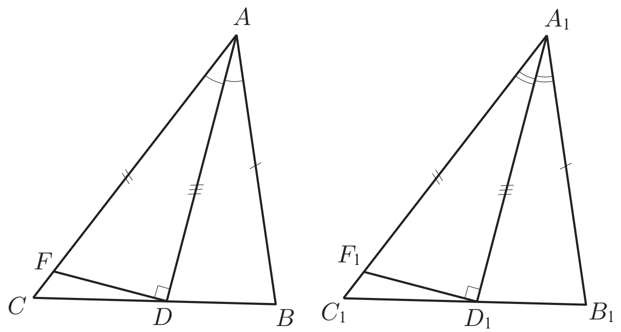
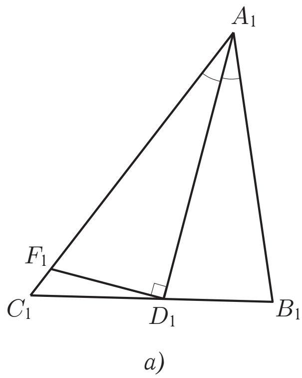


Рис. 301

Следовательно, прямоугольные треугольники ADF и $A_1D_1F_1$ равны по гипотенузе и катету ($AF = A_1F_1$, $AD = A_1D_1$). Поэтому $\angle DAF = \angle D_1A_1F_1$, а значит, $\angle BAC = 2\angle DAF = 2\angle D_1A_1F_1 = \angle B_1A_1C_1$. Тем самым, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Утверждение доказано.

Задача 2. *Построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины.*

Решение. Построим сначала какой-нибудь треугольник $A_1B_1C_1$, стороны A_1B_1 и A_1C_1 которого равны данным сторонам, и проведем его биссектрису A_1D_1. Через точку D_1 проведем прямую, перпендикулярную к A_1D_1, и отметим точку F_1 пересечения этой прямой с большей из сторон A_1B_1 и A_1C_1 (рис. 302, *а*).



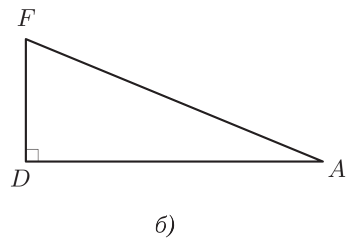


Рис. 302. $AF = A_1F_1$

Построим теперь прямоугольный треугольник ADF с гипотенузой $AF = A_1F_1$ и катетом AD, равным данной биссектрисе (рис. 302, *б*). Как следует из решения задачи 1, угол DAF этого прямоугольного треугольника равен половине угла искомого треугольника, заключенного между данными сторонами. Построим угол, вдвое больший угла DAF, и тогда построение искомого треугольника сведется к построению треугольника по двум данным сторонам и углу между ними.

Задачи

247. Две стороны треугольника равны a и b, а высоты, проведенные к этим сторонам, равны h_a и h_b. Докажите, что $a : b = h_b : h_a$ (отношение двух сторон треугольника обратно пропорционально отношению высот, проведенных к этим сторонам).

248. Может ли площадь треугольника быть: а) меньше 2 см^2, если любая его высота больше 2 см; б) больше 100 см^2, если любая его высота меньше 1 см; в) больше площади второго треугольника, если каждая сторона первого меньше 1 см, а каждая сторона второго больше 1 км?

249. Многоугольник описан около окружности. Докажите, что: а) его площадь равна половине произведения периметра на радиус вписанной окружности; б) любая прямая, проходящая через центр вписанной окружности, делит его площадь и периметр в равных отношениях.

250. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что площади треугольников BAM и BCM равны тогда и только тогда, когда точка M лежит на медиане треугольника ABC, проведенной из вершины B.

251. Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

252. Сумма длин двух сторон треугольника равна p. Найдите наибольшее возможное значение его площади.

253. Докажите, что: а) сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон равна высоте треугольника, проведенной к боковой стороне; б) разность расстояний от любой точки, лежащей на продолжении основания равнобедренного треугольника, до прямых, содержащих его боковые стороны, равна высоте треугольника, проведенной к боковой стороне; в) сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон равна высоте треугольника.

254. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника, площади которых, взятые последовательно, равны S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_1S_3 = S_2S_4$.

255. Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку A на отрезок AD, равный AC. На продолжении отрезка AD за точку D отмечена точка K, а на продолжении стороны BC за точку C — точка M так, что площади треугольников BDM и BKC равны. Найдите угол BKM, если $\angle BAC = \alpha$.

256. На стороне AB треугольника ABC взята точка K, а на стороне BC — точка M так, что $BK : KA = 2 : 5$, $BM : MC = 7 : 3$. Найдите отношение площади треугольника BKM к площади четырехугольника $AKMC$.

257. Точки K, M и P лежат соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, причем $AK = \frac{1}{2}KB$, $BM = \frac{1}{3}MC$, $CP = \frac{1}{4}PA$. Найдите отношение площадей треугольников MPK и ABC.

258. Дан треугольник ABC. На продолжениях стороны AB за точку B, стороны BC за точку C и стороны CA за точку A отмечены соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $AB = BC_1$, $BC = CA_1$, $CA = AB_1$. Докажите, что отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равно $1 : 7$.

259*. Докажите, что из медиан данного треугольника можно построить треугольник, и найдите отношение его площади к площади данного треугольника.

260. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и K, а на отрезке MK — точка P так, что $AM : MC = CK : KB = MP : PK = m : n$. Найдите отношение площадей треугольников AMP и BKP.

261*. Через вершины треугольника ABC проведены параллельные друг другу прямые, пересекающие противоположные стороны или их продолжения соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$.

262. Точки M и K — середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AM и BK пересекаются в точке P, отрезки DM и KC пересекаются в точке T. Докажите, что площадь четырехугольника $PMTK$ равна сумме площадей треугольников ABP и CDT.

263*. Прямая, проходящая через середину диагонали BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ и параллельная диагонали AC, пересекает сторону AD в точке P, а сторону CD — в точке Q. На отрезке PQ отмечена произвольная точка M. а) Докажите, что площадь четырехугольника $ABCM$ равна площади четырехугольника $ADCM$. б) Найдите множество всех точек M, для которых выполняется равенство пункта а). в) Найдите внутри четырехугольника $ABCD$ такую точку, что отрезки, соединяющие эту точку с серединами сторон четырехугольника, делят его на четыре равновеликие части.

264. Через середину O диагонали BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая сторону AD в точке E. Докажите, что площади треугольника CDE и четырехугольника $ABCE$ равны.

265. Середины двух боковых сторон трапеции являются вершинами параллелограмма, две другие вершины которого лежат на прямой, содержащей основание трапеции. Докажите, что площадь параллелограмма равна половине площади трапеции.

266. Точка O лежит на прямой, содержащей диагональ AC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что площади треугольников AOB и AOD равны.

267. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка K. Докажите, что $S_{ADK} + S_{BCK} = S_{ABK} + S_{DCK}$.

268. Через точку D стороны BC треугольника ABC проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC в точках E и P соответственно. Докажите, что треугольники CDE и BDP равновелики.

269. Найдите площадь параллелограмма, вершинами которого являются середины сторон выпуклого четырехугольника с площадью S.

270. Точки P, Q, R и T — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Докажите, что при пересечении прямых AQ, BR, CT и DP образуется параллелограмм, и найдите отношение его площади к площади параллелограмма $ABCD$.

271. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки, симметричные точке M относительно середин сторон четырехугольника $ABCD$, вдвое больше площади четырехугольника $ABCD$.

272. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны. Найдите площадь четырехугольника, если: а) его диагонали равны a и b; б) указанные отрезки взаимно перпендикулярны и равны c.

273. Диагонали четырехугольника равны. Найдите его площадь, если отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, равны a и b.

274. Площади двух треугольников с общим основанием равны S_1 и S_2, причем $S_1 \neq S_2$. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах их боковых сторон.

275. На каждой стороне параллелограмма взято по одной точке. Одна из диагоналей четырехугольника с вершинами в этих точках параллельна стороне параллелограмма. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине площади параллелограмма.

276. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ продолжена на отрезок BE, а сторона AD — на отрезок DK, причем точка C не лежит на прямой KE. Прямые ED и BK пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольники $ABOD$ и $CEOK$ равновелики.

277. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$ площади S и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырехугольника $OMCD$.

278. В параллелограмме $ABCD$ точки P и K делят диагональ BD на три равные части, точки M и E — середины сторон DC и CB. Найдите отношение площади четырехугольника $MEPK$ к площади параллелограмма.

279. Докажите, что площадь трапеции равна произведению длин боковой стороны и перпендикуляра, проведенного из середины другой боковой стороны к прямой, содержащей первую сторону.

280. Середина M боковой стороны CD трапеции $ABCD$ соединена отрезками с вершинами A и B. Докажите, что площадь треугольника AMB равна половине площади трапеции.

281. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. а) Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны. б) Найдите площадь трапеции, если площади треугольников BOC и AOD равны S_1 и S_2.

282. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, а длина средней линии равна m.

283*. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник, площадь которого равна 1. Найдите площадь пятиугольника.

284. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K — середины сторон CD и AD соответственно, P — точка пересечения отрезков AM и BK. Найдите отношение площади треугольника APK к площади параллелограмма.

285. В ромбе $ABCD$ угол A равен $60°$, серединный перпендикуляр к стороне AD пересекает диагональ AC в точке M, а серединный перпендикуляр к стороне CD пересекает AC в точке P. Найдите отношение площади треугольника DMP к площади ромба.

§ 4. Формула Герона и ее приложения

90. Формула Герона. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Попытаемся выразить его площадь S через a, b и c.

Из точки O пересечения биссектрис треугольника ABC проведем перпендикуляры OK, OL и OM к его сторонам AB, BC и CA (рис. 303). Ясно, что $OK = OL = OM = r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

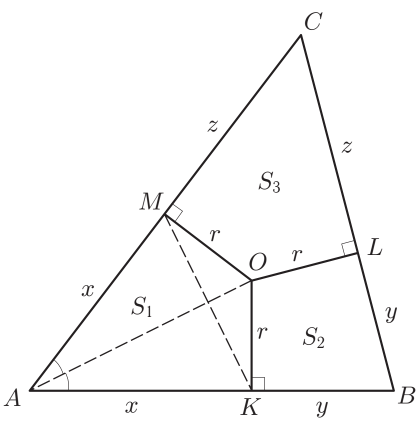


Рис. 303

Для удобства воспользуемся обозначениями, принятыми на рисунке 303. Четырехугольник $AKOM$ составлен из двух равных прямоугольных треугольников с катетами x и r, поэтому его площадь S_1 выражается формулой

$$S_1 = xr. \qquad (1)$$

Аналогично $S_2 = yr$, $S_3 = zr$. Следовательно, $S = S_1 + S_2 + S_3 = xr + yr + zr$, т. е.

$$S = (x + y + z)r. \qquad (2)$$

С другой стороны, $S_1 = S_{AKM} + S_{OKM}$. Но по теореме 1 п. 87 $\frac{S_{AKM}}{S} = \frac{x^2}{(x+y)(x+z)}$, а по теореме 2 п. 87 $\frac{S_{OKM}}{S} = \frac{r^2}{(x+y)(x+z)}$ (поскольку $\angle KOM = 360° - 90° - 90° - \angle A = 180° - \angle A$). Поэтому, складывая два последних равенства, получаем:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{x^2 + r^2}{(x+y)(x+z)}.$$

Подставляя в это равенство выражения (1) и (2) для S_1 и S и умножая обе его части на $(x+y)(x+z)(x+y+z)$, приходим к равенству:

$$x(x+y)(x+z) = x^2(x+y+z) + r^2(x+y+z),$$

откуда

$$r^2 = \frac{xyz}{x+y+z} \text{ или } r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\,.$$

Используя формулу (2), находим:

$$S = \sqrt{(x+y+z)xyz}\,.$$

Остается вспомнить, что $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника (см. замечание 3 п. 39), и учесть, что $x+y+z = p$. В результате получаем формулу, выражающую площадь треугольника через его стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Эту формулу обычно связывают с именем Герона Александрийского — древнегреческого математика и механика, жившего, вероятно, в 1 в. н. э. (годы его жизни точно не установлены). Однако по мнению некоторых математиков она была известна еще древнегреческому ученому Архимеду (ок. 287–212 до н. э.). Если подставить в формулу Герона вместо p выражение $\frac{a+b+c}{2}$ и раскрыть скобки, то получится следующая формула:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}\,. \qquad (3)$$

Следствие. *Квадрат высоты AH треугольника ABC выражается через его стороны $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ формулой*

$$AH^2 = \frac{1}{4a^2}\cdot(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4). \qquad (4)$$

В самом деле, $S = \frac{1}{2}a\cdot AH$, поэтому $AH^2 = \frac{4S^2}{a^2}$. Подставляя сюда S из формулы (3), приходим к формуле (4).

91. Теорема о медиане. Выразим теперь квадрат медианы AM треугольника ABC через его стороны $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Треугольники ABM и ACM имеют равные основания BM и MC и общую высоту (рис. 304), поэтому их площади равны. Пользуясь формулой (3) п. 90, получаем:

$$\frac{1}{4}\sqrt{2\frac{a^2}{4}b^2 + 2b^2AM^2 + 2AM^2\frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{16} - b^4 - AM^4} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{2\frac{a^2}{4}c^2 + 2c^2AM^2 + 2AM^2\frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{16} - c^4 - AM^4}\,.$$

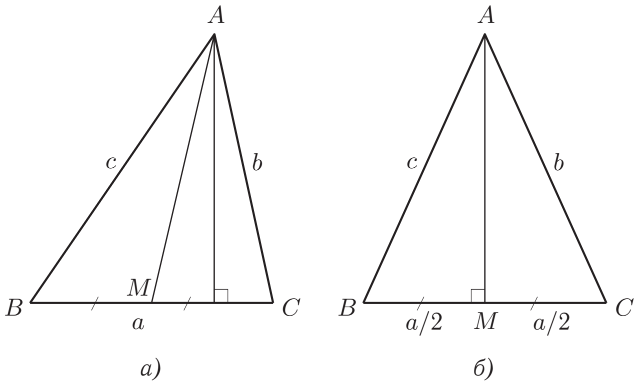


Рис. 304. а) $b \neq c$; б) $b = c$

Умножая обе части равенства на 4 и возводя в квадрат, преобразуем его к виду:

$$2AM^2(b^2 - c^2) = \frac{1}{2}a^2(c^2 - b^2) + (b^2 - c^2)(b^2 + c^2).$$

Если $b \neq c$, то из этого равенства находим:

$$AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}. \qquad (5)$$

Если же $b = c$ (рис. 304, *б*), то медиана AM является высотой. В этом случае формула (5) получается из формулы (4), поскольку $2b^2c^2 - b^4 - c^4 = 0$. Итак, в том и другом случае

квадрат медианы AM треугольника ABC выражается через его стороны $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ формулой (5).

Это утверждение называется *теоремой о медиане*.

92. Формула биссектрисы треугольника. Теперь мы знаем, как выразить высоту AH и медиану AM треугольника ABC через его стороны $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. А как выразить через a, b и c его биссектрису AD? Давайте подумаем. Обратимся к рисунку 305. По теореме о биссектрисе треугольника $\frac{CD}{DB} = \frac{b}{c}$. Кроме того, $CD + DB = a$. Из этих двух равенств находим:

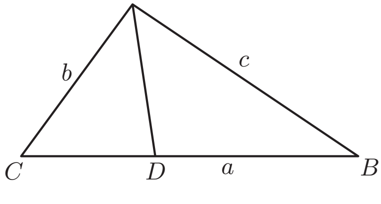


Рис. 305

$$CD = \frac{ab}{b+c}, \quad DB = \frac{ac}{b+c}. \qquad (6)$$

Теперь мы можем, пользуясь формулой (3), выразить площади треугольников ABD и ACD через a, b, c, AD, а затем учесть, что эти треугольники имеют равные углы при вершине A, и поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{c}{b}$. Это и даст нам возможность выразить AD через a, b и c.

Записывая соотношение между площадями в виде $16S^2_{ABD} \cdot b^2 = 16S^2_{ACD} \cdot c^2$ и подставляя в него выражения для S_{ABD} и S_{ACD}, после несложных преобразований приходим к равенству $AD^4(c^2 - b^2) = b^2c^2(c^2 - b^2)\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)^2$. В соответствии с неравенством треугольника $1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} > 0$, поэтому при $c \neq b$ получаем:

$$AD^2 = bc(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}). \qquad (7)$$

При $c = b$ биссектриса AD является медианой, и справедливость формулы (7) вытекает из формулы (5) (проверьте это). Следовательно, формула (7) верна при любых b и c.

З а м е ч а н и е. Если воспользоваться формулами (6), то формулу (7) можно переписать так: $AD^2 = bc - CD \cdot DB$.

Задачи

286. Найдите площадь треугольника, если его высоты равны 3 см, 4 см и 6 см.

287. В треугольнике ABC $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Внутри треугольника взята точка M, расположенная на расстоянии 6 см от прямой AB и на расстоянии 3 см от прямой BC. Найдите расстояние от точки M до прямой AC.

288. Найдите площадь треугольника, если его медианы равны 9 см, 12 см и 15 см.

289. В треугольнике ABC $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, AD — биссектриса треугольника. Найдите площадь треугольника ACD.

290. Биссектрисы BD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O, $AB = 14$, $BC = 6$, $AC = 10$. Найдите OD.

§ 5. Теорема Пифагора

93. Обобщенная теорема Пифагора. Рассмотрим треугольник ABC с медианой AM и сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ (рис. 304). Вспомним утверждение, сформулированное в задаче 1 п. 55:

угол треугольника является острым, прямым или тупым, если медиана, проведенная из вершины этого угла, соответственно больше, равна или меньше половины противоположной стороны.

Теорема о медиане дает возможность заменить в этом утверждении соотношение между медианой и противоположной стороной на соотношение между сторонами треугольника. В самом деле, согласно этой теореме (см. формулу (5) в п. 91)

$$AM^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Следовательно,

угол A треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ является острым, прямым или тупым, если выражение $b^2 + c^2 - a^2$ соответственно больше, равно или меньше нуля.

Следствие 1. *Если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник — прямоугольный.*

Следствие 2. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.* В самом деле, если предположить, что квадрат гипотенузы меньше или больше суммы квадратов катетов, то окажется, что угол, противолежащий гипотенузе, острый или тупой.

Следствия 2 и 1 называют *теоремой Пифагора* и *теоремой, обратной теореме Пифагора*, а то утверждение, из которого мы их вывели, назовем *обобщенной теоремой Пифагора*.

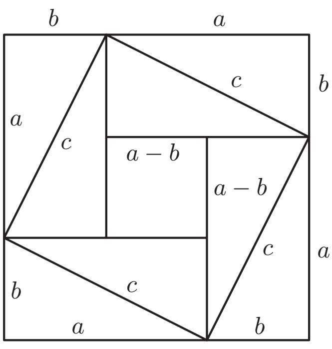


Рис. 306. 1° $(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$; 2° $c^2 = (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

Теорема Пифагора (ок. 580–ок. 500 до н. э.) является одной из самых важных (если не самой важной) в евклидовой геометрии. В настоящее время известно более ста ее доказательств.

Рисунок 306 иллюстрирует сразу два доказательства теоремы Пифагора, в каждом из которых фигурируют площади четырех равных друг другу прямоугольных треугольников и двух квадратов.

Еще одно доказательство связано с идеей, использованной при выводе формулы Герона. Обратимся к рисунку 307, на котором два треугольника с катетами a, b и гипотенузой c приложены друг к другу сперва равными катетами, а затем — гипотенузами, и воспользуемся обозначениями, принятыми на этом рисунке. По теореме 1 п. 87 $\frac{S_1}{S} = \frac{a^2}{c^2}$, а по теореме 2 п. 87 $\frac{S_2}{S} = \frac{b^2}{c^2}$. Складывая эти выражения, получаем: $\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$. Но $S_1 + S_2 = S$. Следовательно, $c^2 = a^2 + b^2$.

Наконец, приведем еще одно доказательство теоремы Пифагора. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная

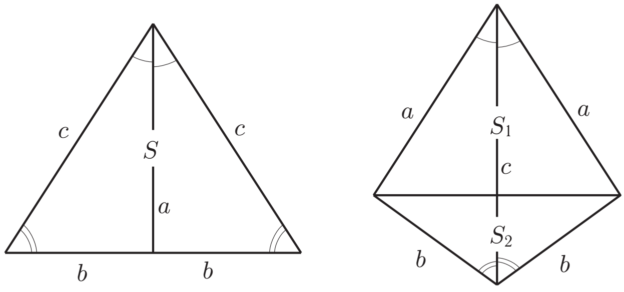


Рис. 307

из вершины прямого угла (рис. 308), S, S_1 и S_2 — площади треугольников ABC, BCH и ACH. Угол A треугольника ABC равен углу C треугольника BCH (каждый из них в сумме с углом B составляет $90°$), поэтому $\frac{S_1}{S} = \frac{a \cdot CH}{bc}$. Но $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c \cdot CH$, откуда $CH = \frac{ab}{c}$. Следовательно, $\frac{S_1}{S} = \frac{a^2}{c^2}$. Аналогично находим: $\frac{S_2}{S} = \frac{b^2}{c^2}$. Складывая эти равенства и учитывая, что $S_1 + S_2 = S$, получаем: $\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$, т. е. $c^2 = a^2 + b^2$.

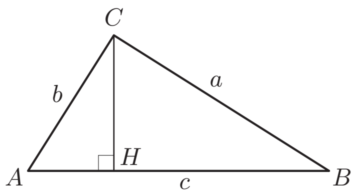


Рис. 308

94. Задача о разрезании квадратов. Теорему Пифагора можно сформулировать и так:

площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Иными словами, квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик с двумя квадратами, построенными на катетах. Но согласно теореме Бойяи–Гервина (п. 85) любые два равновеликих многоугольника равносоставлены. Следовательно, два квадрата, построенные на катетах прямоугольного треугольника, можно разрезать на части, из которых можно составить один квадрат, построенный на его гипотенузе. Но как это сделать?

Сформулируем наше утверждение в виде задачи и решим ее.

Задача. *Разрезать два квадрата, построенные на катетах прямоугольного треугольника, на такие части, из которых можно составить квадрат, построенный на его гипотенузе.*

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Можно, конечно, воспользоваться идей доказательства теоремы Бойяи-Гервина: разрезать квадраты с сторонами a и b на части так, чтобы из частей первого квадрата составить параллелограмм с основанием c и высотой $\frac{a^2}{c}$, из частей второго — параллелограмм с основанием c и высотой $\frac{b^2}{c}$, затем построить прямоугольники, соответственно равносоставленные с параллелограммами, и, наконец, из этих прямоугольников составить прямоугольник со сторонами c и $\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}$. Тогда, согласно теореме Пифагора, этот прямоугольник и будет искомым квадратом. Возникает, однако, вопрос: а нельзя ли решить нашу задачу без ссылки на теорему Пифагора? Ведь если бы это удалось, то мы получили бы еще одно доказательство теоремы Пифагора! Оказывается, можно. Для этого достаточно заметить, что высоты параллелограммов с основанием c, равносоставленных с данными квадратами, равны отрезкам, на которые высота данного треугольника делит его гипотенузу, поэтому сумма этих высот равна c. Соответствующее доказательство проведите самостоятельно.

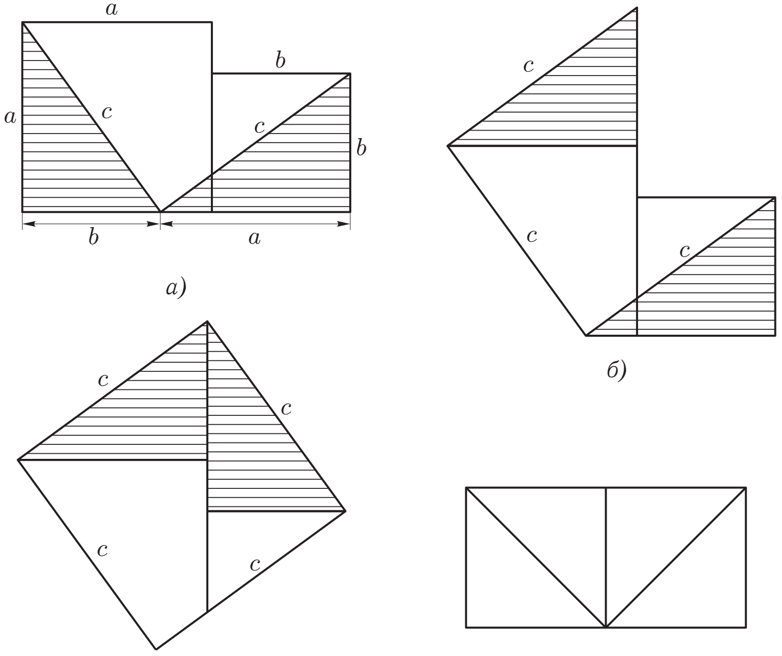
Нашу задачу можно решить и проще. Пусть, например, $a > b$. Расположим квадраты так, как показано на рисунке 309, *а*, и отрежем от них два равных прямоугольных треугольника с катетами a и b (на рисунке эти треугольники заштрихованы). Поскольку эти треугольники равны, то длина каждой из линий разреза равна их гипотенузе c, а угол между линиями разреза равен $90°$. Повернем теперь каждый из отрезанных треугольников вокруг их вершин на угол $90°$ так, как показано на рисунках 309 *б, в*. Тогда вместе с неподвижной частью они образуют квадрат со стороной c.

Итак, при $a > b$ мы разрезали квадрат со стороной a на три части, квадрат со стороной b — на две части, и составили из этих частей квадрат со стороной c, равной гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b. Если $a = b$, то каждый квадрат окажется разрезанным на две части (рис. 309, *г*), и мы придем к способу разрезания, описанному в п. 11.

Таким образом, мы указали два способа решения задачи, а заодно придумали еще два доказательства теоремы Пифагора.

Можно указать и другие способы решения этой задачи. Один из них иллюстрирует рисунок 310. На этом рисунке через центр левого квадрата (т. е. через точку пересечения диагоналей квадрата) проведены два взаимно перпендикулярных разреза, один из которых параллелен гипотенузе треугольника. Примечательно, что из двух квадратов один вообще не разрезается, а другой разрезается на четыре равные части. Более того, если эти части укладывать так, как показано на рисунке, то каждую из частей не нужно даже поворачивать (доказательство проведите самостоятельно).

Интересно, что это доказательство теоремы Пифагора было опубликовано лишь в 1873 году. Его автор — лондонский биржевой маклер



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 309

Генри Перигел — был в таком восторге от своего открытия, что приказал отпечатать схему с разрезанием квадрата на своей визитной карточке.

Задачи

291. Точка A лежит внутри угла C, равного 60°. Расстояния от точки A до сторон этого угла равны a и b. Найдите: а) расстояние от точки A до вершины C; б) площадь четырехугольника $ABCD$, если AB и AD — перпендикуляры, проведенные к сторонам угла.

292. В треугольнике ABC проведена высота BD. Отрезок AK перпендикулярен прямой AB и равен DC, отрезок CM перпендикулярен BC и равен AD. Докажите, что отрезки BM и BK равны.

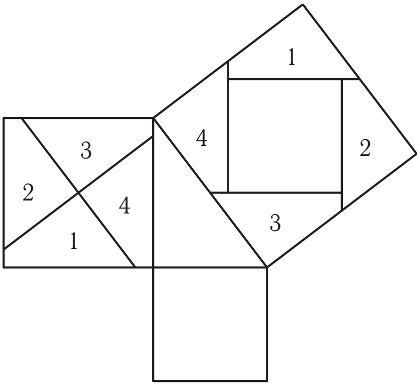


Рис. 310

293. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M так, что $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Найдите MD.

294. Найдите площадь квадрата, вписанного в равносторонний треугольник со стороной a так, что две вершины квадрата лежат на одной стороне треугольника, а две другие — на двух других сторонах квадрата.

295. Докажите, что сумма квадратов четырех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

296. Внутри прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB выбрана точка O так, что площади треугольников AOB, BOC и AOC равны. Докажите, что $OA^2 + OB^2 = 5OC^2$.

297. Докажите, что квадрат стороны треугольника, лежащей против острого (тупого) угла, равен сумме квадратов двух других сторон минус (плюс) удвоенное произведение какой-нибудь из этих сторон на длину отрезка, соединяющего вершину указанного угла и основание высоты, проведенной к этой стороне.

298. В трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB > CD$) вписана окружность. Найдите площадь трапеции, если $CD = a$, $DK = b$ и $AK = d$, где K — точка касания окружности и стороны AD.

299. Докажите, что для любой точки M, лежащей на высоте AH треугольника ABC, выполняется равенство: $MB^2 + AC^2 = MC^2 + AB^2$.

300. В треугольнике ABC медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AM = 3$ см, $BN = 4$ см.

301. Диагонали трапеции равны 6 см и 8 см, а отрезок, соединяющий середины ее оснований, равен 5 см. Найдите площадь трапеции.

302. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, одна из них равна 6 см. Найдите другую диагональ, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5 см.

Глава 7

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 1. Признаки подобия треугольников

95. Подобие и равенство треугольников. Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника. Другими словами, два треугольника подобны, если для них можно ввести обозначения ABC и $A_1B_1C_1$ так, что

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1,$$
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$

Число k, равное отношению сходственных сторон треугольников (т. е. $k = \dfrac{A_1B_1}{AB}$), называется *коэффициентом подобия* треугольников.

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. На рисунке 311 изображены подобные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Если два треугольника равны, то их углы и стороны соответственно равны. На рисунке 312 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$. Следовательно,

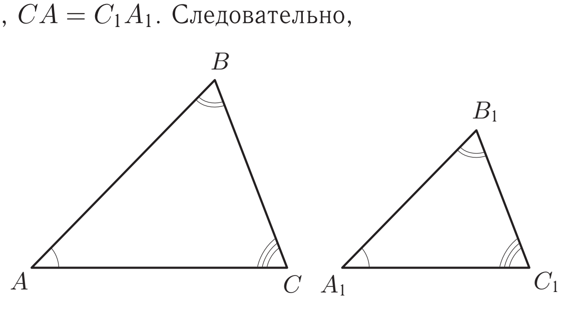


Рис. 311. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA} = k$, k — коэффициент подобия треугольников

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = 1.$$

Эти соотношения показывают, что

равные треугольники являются подобными, причем коэффициент подобия равен 1.

Очевидно, верно и обратное:

если два треугольника подобны и коэффициент подобия равен 1*, то эти треугольники равны*.

Таким образом, в евклидовой геометрии равенство треугольников можно рассматривать как частный случай подобия треугольников, когда коэффициент подобия равен 1.

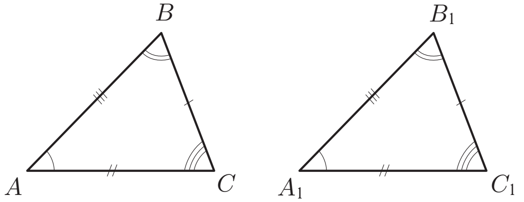


Рис. 312. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

В геометрии Лобачевского нет подобных и неравных друг другу треугольников, поскольку в ней, как мы отмечали, имеет место признак равенства треугольников по трем углам.

В евклидовой геометрии каждому признаку равенства треугольников соответствует признак подобия треугольников, в котором вместо равенства каких-либо отрезков требуется их пропорциональность. Так, первому признаку равенства треугольников соответствует такой признак подобия треугольников:

если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны (обычно его называют *вторым признаком подобия треугольников*).

Второму признаку равенства треугольников соответствует следующий признак подобия треугольников (его называют *первым признаком подобия треугольников*):

если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Подумайте и объясните, почему здесь, в отличие от второго признака равенства треугольников, ничего не говорится о сторонах треугольников.

Третьему признаку равенства треугольников соответствует *третий признак подобия треугольников*:

если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Четвертому признаку равенства треугольников соответствует уже сформулированный первый признак подобия треугольников.

Наконец, пятому признаку равенства треугольников соответствует признак подобия треугольников, который назовем *четвертым признаком*:

если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и угол, противолежащий не меньшей из этих сторон, одного треугольника равен соответствующему углу другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Докажем сначала утверждение о первом признаке подобия треугольников. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 313).

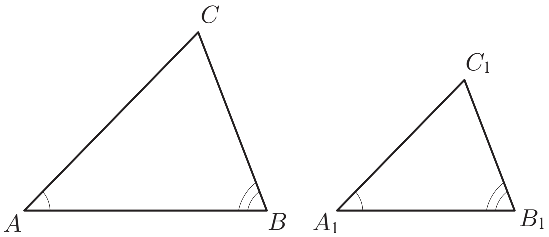


Рис. 313

Требуется доказать, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Согласно теореме о сумме углов треугольника $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1$, откуда следует, что $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$.

Докажем, что сходственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то, применяя теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, получаем:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \text{ и } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}.$$

Из этих равенств следует, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, получаем:

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}.$$

Итак, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$, а сходственные стороны этих треугольников пропорциональны, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, что и требовалось доказать.

Остальные утверждения о признаках подобия треугольников выступают как следствия из доказанного утверждения и соответствующей теоремы о равенстве треугольников. Поясним, о чем идет речь.

Возьмем, например, утверждение о четвертом признаке подобия треугольников и докажем его, опираясь на первый признак подобия треугольников и пятый признак равенства треугольников. Пусть даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \quad \angle B = \angle B_1, \quad AB \leqslant AC,$$

и, следовательно, $A_1B_1 \leqslant A_1C_1$ (рис. 314, *а*).

Докажем, что $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Рассмотрим треугольник $A_2B_2C_2$, у которого $\angle A_2 = \angle A$, $\angle B_2 = \angle B$, $A_2C_2 = A_1C_1$ (рис. 314, *б*). Треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому

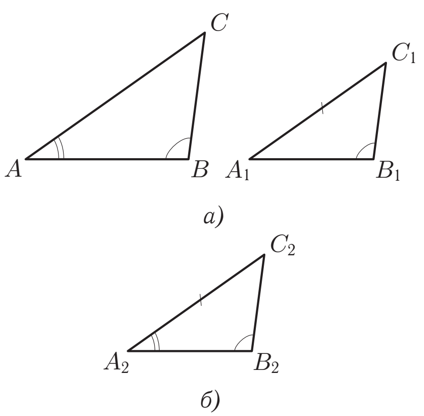


Рис. 314

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{AC}{A_2C_2}.$$

Но $A_2C_2 = A_1C_1$. Значит,

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

С другой стороны, по условию

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Из этих двух равенств получаем: $A_2B_2 = A_1B_1$.

Итак, $A_2B_2 = A_1B_1$, $A_2C_2 = A_1C_1$, $\angle B_2 = \angle B = \angle B_1$, $A_1B_1 \leqslant A_1C_1$. Следовательно, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны по пятому признаку равенства треугольников. Но $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$. Поэтому и $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

96. Другие признаки подобия треугольников. Опираясь на признаки равенства треугольников, использующие медианы, биссектрисы и высоты, можно сформулировать аналогичные утверждения о признаках подобия треугольников и доказать их аналогично тому, как был доказан четвертый признак подобия треугольников. Но сначала решим такую задачу.

Задача 1. *Доказать, что в подобных треугольниках*:

а) *отношение сходственных биссектрис равно коэффициенту подобия*;

б) *отношение сходственных медиан равно коэффициенту подобия*;

в) *отношение сходственных высот также равно коэффициенту подобия треугольников*.

Решение. Пусть AD и A_1D_1 — сходственные биссектрисы (рис. 315, *а*), AM и A_1M_1 — сходственные медианы (рис. 315, *б*), AH и A_1H_1 — сходственные высоты (рис. 315, *в*) в подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, а коэффициент подобия равен k.

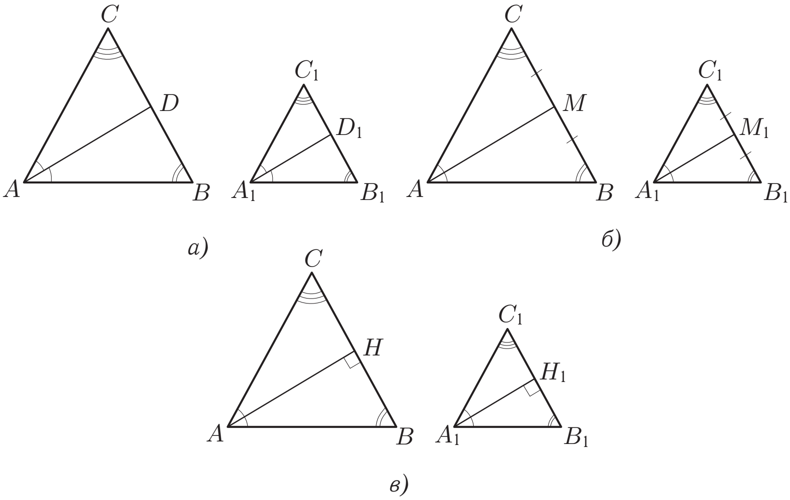


Рис. 315. а) AD и A_1D_1 — биссектрисы; б) AM и A_1M_1 — медианы; в) AH и A_1H_1 — высоты

а) Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ (рис. 315, *а*) подобны по двум углам ($\angle DAB = \angle D_1A_1B_1$, так как эти углы равны половинам равных углов A и A_1; $\angle B = \angle B_1$). Из подобия треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ следует, что

$$\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{A_1B_1}{AB}.$$

Но отношение $\dfrac{A_1B_1}{AB}$ равно коэффициенту k подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Следовательно,

$$\frac{A_1D_1}{AD} = k.$$

б) Рассмотрим треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ (рис. 315, *б*). В этих треугольниках

$$\frac{A_1B_1}{AB} = k, \quad \frac{B_1M_1}{BM} = \frac{\frac{1}{2}B_1C_1}{\frac{1}{2}BC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k,$$

откуда следует, что

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1M_1}{BM} = k.$$

Кроме того, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ подобны по второму признаку и коэффициент подобия этих треугольников равен k. Отсюда следует, что

$$\frac{A_1M_1}{AM} = k.$$

Отметим, что полученное равенство можно вывести и из теоремы о медиане, воспользовавшись формулой (5) п. 91.

в) Пусть равные углы B и B_1 — острые (рис. 315, *в*). Рассмотрим треугольники ABH и $A_1B_1H_1$. Эти треугольники подобны по двум углам ($\angle B = \angle B_1$, $\angle AHB = \angle A_1H_1B_1 = 90^\circ$). Следовательно,

$$\frac{A_1H_1}{AH} = \frac{A_1B_1}{AB} = k.$$

Если же равные углы B и B_1 — прямые или тупые, то равенство $\dfrac{A_1H_1}{AH} = k$ следует из подобия треугольников ACH и $A_1C_1H_1$.

Итак, отношение сходственных биссектрис, медиан и высот равно коэффициенту подобия треугольников, что и требовалось доказать.

Теперь можно обнаружить целый ряд новых признаков подобия треугольников. Приведем пример.

З а д а ч а 2. *Доказать, что если две стороны и биссектриса, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам и биссектрисе, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

Р е ш е н и е. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ с биссектрисами AD и A_1D_1 выполнены равенства:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}. \qquad (1)$$

Докажем, что $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Рассмотрим треугольник $A_2B_2C_2$ с биссектрисой A_2D_2, у которого $\angle A_2 = \angle A$, $\angle B_2 = \angle B$, $A_2C_2 = A_1C_1$ (рис. 316, *б*). Треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_2D_2}$$

(поскольку $A_2C_2 = A_1C_1$). Сопоставляя эти равенства с равенствами (1), приходим к выводу: $A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1D_1 = A_2D_2$. Так как, кроме того, $A_1C_1 = A_2C_2$, то треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины (п. 89). Но $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$. Поэтому и $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$. Утверждение доказано.

97. Тригонометрические функции. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 317, *а*). Катет BC этого

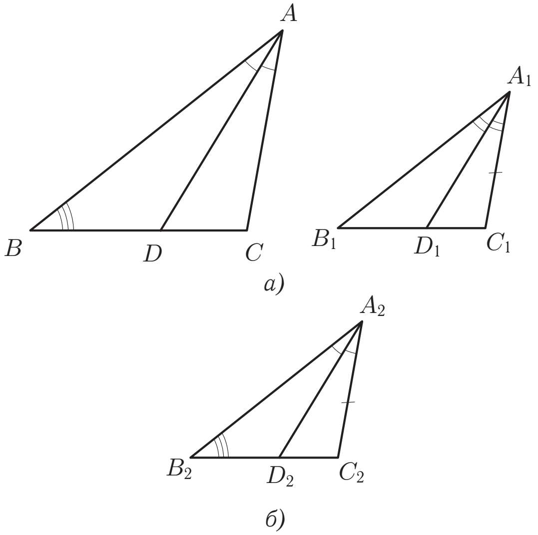


Рис. 316

треугольника является противолежащим углу A, а катет AC — прилежащим к этому углу.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Синус, косинус, тангенс и котангенс угла α обозначаются символами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ (читается: «синус альфа», «косинус альфа», «тангенс альфа» и «котангенс альфа») и называются *тригонометри-*

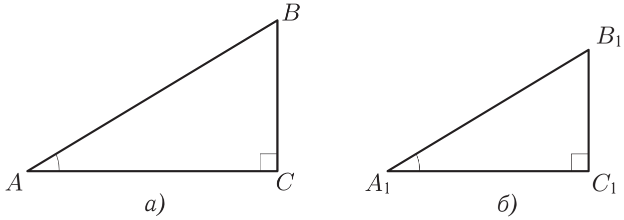


Рис. 317. $\angle A = \angle A_1$: $\sin A = \sin A_1$, $\cos A = \cos A_1$, $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$, $\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} A_1$

ческими функциями [1]. На рисунке 317

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \tag{2}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \tag{3}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \tag{4}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}. \tag{5}$$

Из формул (2) и (3) получаем:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC}, \quad \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (4) и (5), находим:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \tag{6}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}, \tag{7}$$

т. е.

тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла;

котангенс угла равен отношению косинуса к синусу этого угла.

Докажем, что

если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны, тангенсы этих углов равны и котангенсы этих углов равны.

В самом деле, пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника с прямыми углами C и C_1 и равными острыми углами A и A_1 (рис. 317 *а, б*). Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$

Из этих равенств следует, что

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}, \text{ т. е. } \sin A = \sin A_1.$$

Аналогично

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}, \text{ т. е. } \cos A = \cos A_1,$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}, \text{ т. е. } \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1,$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}, \text{ т. е. } \operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} A_1.$$

---

[1] Слово «тригонометрия» в переводе с греческого языка означает «измерение треугольников».

Доказанные утверждения позволяют говорить: «синус острого угла, косинус острого угла, тангенс острого угла, котангенс острого угла», не указывая при этом, об остром угле какого именно прямоугольного треугольника идет речь. Воспользуемся этим наблюдением для вывода так называемых *формул приведения*:

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A, \quad \cos(90^\circ - A) = \sin A.$$

Обратимся к рисунку 317, *а*. Поскольку $\angle B = 90^\circ - \angle A$, то

$$\sin(90^\circ - A) = \sin B = \frac{AC}{AB} = \cos A,$$
$$\cos(90^\circ - A) = \cos B = \frac{BC}{AB} = \sin A,$$

что и требовалось доказать.

Выведем еще одну важную формулу. Используя равенства (2) и (3), получаем:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$, поэтому

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \tag{8}$$

Равенство (8) называется *основным тригонометрическим тождеством*.

Решим теперь такую задачу.

Задача 3. *В треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Доказать, что*

$$a \geqslant (b + c)\sin\frac{A}{2}, \tag{9}$$

причем равенство имеет место только в том случае, когда $b = c$.

Решение. Проведем биссектрису AD. Если $b = c$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный, то биссектриса AD является также высотой (рис. 318, *а*). Тогда из прямоугольных треугольников ADC и ADB получаем: $DC = b\sin\frac{A}{2}$, $BD = c\sin\frac{A}{2}$. Следовательно, $a = BC = BD + DC = (b + c)\sin\frac{A}{2}$, т. е. неравенство (9) в этом случае превращается в равенство.

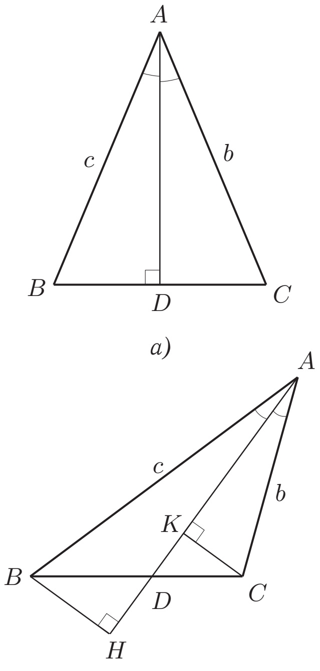


Рис. 318. а) $b = c$; б) $b \neq c$

Если же $b \neq c$ (рис. 318, *б*), то биссектриса AD не перпендикулярна к стороне BC. Проведем перпендикуляры BH и CK к прямой AD. Из прямоугольных треугольников ABH и ACK имеем:

$$BH = c \sin \frac{A}{2}, \quad CK = b \sin \frac{A}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике BHD гипотенуза BD больше катета BH, т. е.

$$BD > c \sin \frac{A}{2}.$$

По аналогичной причине

$$DC > b \sin \frac{A}{2}.$$

Складывая эти два неравенства, получаем:

$$BD + DC > (b + c) \sin \frac{A}{2},$$

т. е. $a > (b + c) \sin \frac{A}{2}$, что и требовалось доказать.

Задачи

303. Докажите, что прямая, пересекающая две стороны треугольника, параллельна третьей его стороне тогда и только тогда, когда она отсекает на этих двух сторонах отрезки, пропорциональные данным сторонам.

304. На основании AD трапеции $ABCD$ взяты точки K и T так, что $AK = TD$. Отрезки AC и BT пересекаются в точке M, отрезки KC и BD — в точке P. Докажите, что отрезок MP параллелен основаниям трапеции.

305*. Через точку P, лежащую вне окружности, проведены две прямые, касающиеся этой окружности в точках A и B. Отрезок AC — перпендикуляр к диаметру BD. Докажите, что прямая PD делит отрезок AC пополам.

306. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны, диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники BOC и AOD подобны.

307. Вершины A, B, C треугольника ABC лежат на сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что если углы B_1AB, C_1BC и A_1CA равны, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

308. Отрезки AH и BP — высоты треугольника ABC. Докажите, что треугольники PCH и ABC подобны.

309. Отрезок BH — высота треугольника ABC, точки K и M — основания перпендикуляров, проведенных из точки H к прямым AB и CB соответственно. Докажите, что треугольники MBK и ABC подобны.

310. На биссектрисе угла взята точка P. Прямая, проходящая через точку P, отсекает на сторонах угла отрезки с длинами a и b. Докажите, что величина $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ не зависит от выбора прямой.

311. Прямая, проходящая через вершину неравнобедренного треугольника, разбивает его на два подобных треугольника. Найдите величину угла, через вершину которого проведена эта прямая.

312. Прямая, проходящая через вершину треугольника, разбивает его на два подобных треугольника с коэффициентом подобия $\sqrt{3}$. Найдите углы данного треугольника.

313. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если:
а) $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{AM}{A_1M_1}$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников;
б) $\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{AM}{A_1M_1}=\dfrac{AH}{A_1H_1}$, где AM и A_1M_1 — медианы, AH и A_1H_1 — высоты треугольников;
в) $\angle A=\angle A_1$, $\dfrac{AH}{A_1H_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$, где AH и A_1H_1 — высоты, AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников;
г) $\dfrac{m_1}{l_1}=\dfrac{m_2}{l_2}=\dfrac{m_3}{l_3}$, где m_1, m_2, m_3 — длины медиан треугольника ABC, l_1, l_2, l_3 — длины медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

314. Докажите, что если $\angle A=\angle A_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC+CB}{A_1C_1+C_1B_1}$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

315*. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC проведен перпендикуляр HE к прямой AC. Точка O — середина отрезка HE. Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

316*. Из точки M внутренней области угла AOB проведены перпендикуляры MP и MQ к прямым OA и OB. Из точек P и Q проведены перпендикуляры PR и QS соответственно к OB и OA. Докажите, что прямая RS перпендикулярна к OM.

317. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты точки M, K, T, P соответственно, причем $AM:CT=AP:CK\neq 1$. Докажите, что четырехугольник $MKTP$ — трапеция.

318. Дан параллелограмм $ABCD$. Отрезки AM и AP — перпендикуляры, проведенные к прямым BC и CD. Докажите, что треугольники MAP и ABC подобны.

319. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной ее диагонали и длин отрезков другой ее диагонали, на которые диагонали делятся точкой пересечения.

320*. Докажите, что если в треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B, то $BC^2=AC^2+AC\cdot AB$.

321*. В треугольнике ABC углы A, B и C равны соответственно α, β и γ, причем $3\alpha+2\beta=180^\circ$. Докажите, что $BC^2+AB\cdot AC=AB^2$.

322. Докажите, что отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

323. Прямая, параллельная основанию треугольника с площадью S_1, отсекает от него треугольник с площадью S_2. Найдите площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвертая вершина лежит на основании большего треугольника.

324. Через точку, взятую на стороне треугольника, проведены прямые, параллельные двум другим его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на параллелограмм и два треугольника, площади которых равны S_1 и S_2. Найдите площадь параллелограмма.

325. Через точку, лежащую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Площади образовавшихся при этом треугольников равны S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.

326. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке P, а диагональ BD — в точке T. Известно, что $AB : AD = k < 1$. Найдите отношение площадей треугольника BTP и параллелограмма $ABCD$.

327. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Прямые, соединяющие середину большего основания с концами меньшего, пересекают диагонали в точках M и P. Найдите длину отрезка MP.

328. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов A и B прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, если: а) $BC = 8$, $AB = 17$; б) $BC = 21$, $AC = 20$; в) $BC = 1$, $AC = 2$; г) $AC = 24$, $AB = 25$.

329. Найдите значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов $30°$, $45°$, и $60°$.

330. Основания трапеции равны 1 и $3 + 2\sqrt{3}$, а боковые стороны равны $2\sqrt{2}$ и 4. Найдите углы трапеции.

331. Докажите, что: а) если тангенс одного острого угла равен тангенсу другого острого угла, то эти углы равны; б) если синус одного острого угла равен синусу другого острого угла, то эти углы равны; в) если косинус одного острого угла равен косинусу другого острого угла, то эти углы равны.

332. Два острых угла равны α и β. Докажите, что: а) если $\alpha > \beta$, то $\sin\alpha > \sin\beta$, и обратно: если $\sin\alpha > \sin\beta$, то $\alpha > \beta$; б) если $\alpha > \beta$, то $\cos\alpha < \cos\beta$, и обратно: если $\cos\alpha < \cos\beta$, то $\alpha > \beta$; в) если $\alpha > \beta$, то $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$, и обратно: если $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$, то $\alpha > \beta$; г) если $\alpha > \beta$, то $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta$, и обратно: если $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta$, то $\alpha > \beta$.

§ 2. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

98. Обобщенная теорема Фалеса. Доказательства нескольких важных теорем геометрии основаны на следующем факте.

Теорема. *Три параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на этих двух прямых пропорциональные отрезки.*

Доказательство. Обратимся к рисунку 319, *а*, на котором прямая a рассечена параллельными прямыми на отрезки A_1A_2 и A_2A_3, а прямая b — на отрезки B_1B_2 и B_2B_3. Требуется доказать, что

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}. \qquad (1)$$

Возможны два случая.

1^0. Прямые a и b параллельны (рис. 319, *б*). Тогда четырехугольники $A_1A_2B_2B_1$ и $A_2A_3B_3B_2$ — параллелограммы. Поэтому $A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2A_3 = B_2B_3$, откуда и следует равенство (1).

2^0. Прямые a и b не параллельны. Если при этом точки A_2 и B_2 не совпадают (рис. 319, *в*), то через точку A_2 проведем прямую c, параллельную прямой b. Она пересечет прямые A_1B_1 и A_3B_3 в некоторых точках C_1 и C_3. Треугольники $A_1C_1A_2$ и $A_2A_3C_3$ подобны по двум

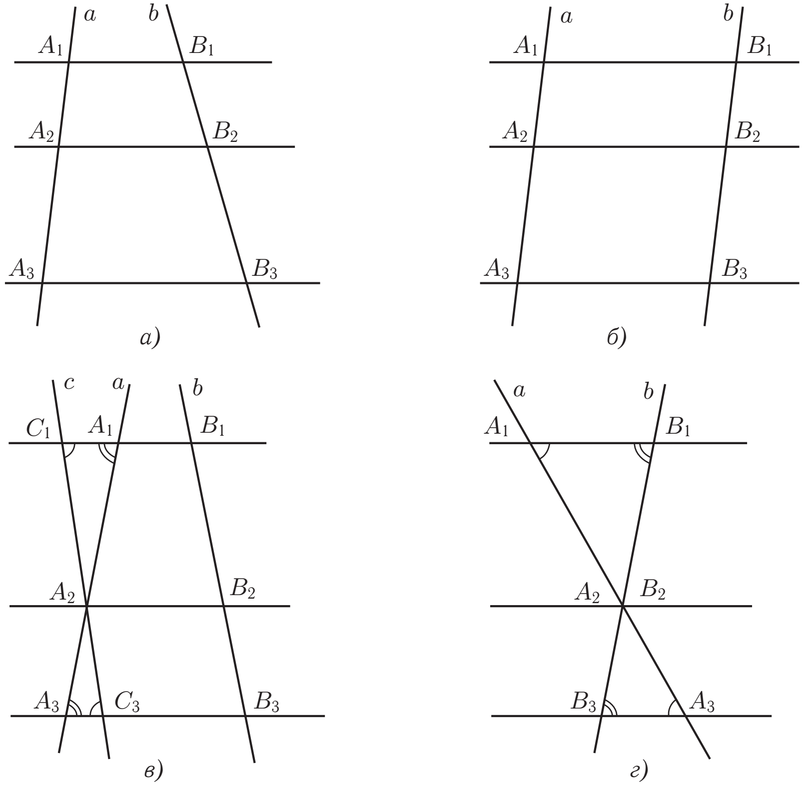


Рис. 319

углам ($\angle A_1C_1A_2 = \angle A_2C_3A_3$ и $\angle C_1A_1A_2 = \angle A_2A_3C_3$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых A_1B_1 и A_3B_3 секущими C_1C_3 и A_1A_3 соответственно), поэтому

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{C_1A_2}{A_2C_3}.$$

Но $C_1A_2 = B_1B_2$, $A_2C_3 = B_2B_3$ (как противоположные стороны параллелограммов $A_2C_1B_1B_2$ и $A_2C_3B_3B_2$), и мы снова приходим к равенству (1).

Если же точки A_2 и B_2 совпадают (рис. 319, *г*), то равенство (1) непосредственно следует из подобия треугольников $A_1B_1A_2$ и $A_3B_3A_2$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема называется *обобщенной теоремой Фалеса*, поскольку теорема Фалеса содержится в ней как частный случай. В самом деле, если отрезки A_1A_2 и A_2A_3 равны, то из (1) следует, что отрезки B_1B_2 и B_2B_3 также равны. Это и есть теорема Фалеса.

99. Следствие из обобщенной теоремы Фалеса. Рассмотрим какую-нибудь прямую a и выберем на ней две точки — A и B. Интуитивно ясно, что на прямой a можно выбрать два направления — от A к B и от B к A. Чтобы различать эти направления, поступим так. При выбранной единице измерения отрезков поставим в соответствие отрезку AB два числа, каждое из которых по модулю равно числу, выражающему длину отрезка AB, но знаки у них различные. Обозначим эти числа так: $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$. Таким образом, $\overline{AB} = -\overline{BA}$. Какое из этих обозначений относится к положительному числу, а какое — к отрицательному, для нас не будет иметь значения. Пусть, например, число $\overline{AB}$ — положительное. Тогда $\overline{AB} = AB$. Для любой точки M, лежащей на прямой a и отличной от A, положим $\overline{AM} = AM$, если точки B и M лежат по одну сторону от точки A, и $\overline{AM} = -AM$ в противоположном случае. Условимся считать также, что $\overline{AA} = 0$. Наконец, для произвольных точек C и D прямой a положим

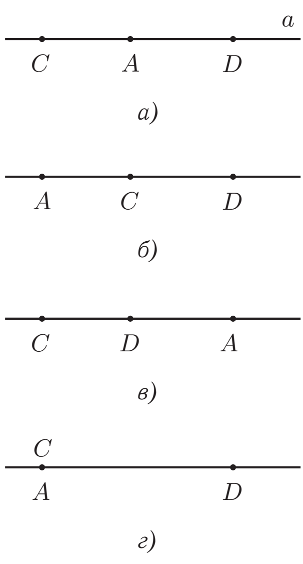


Рис. 320

$$\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC}. \qquad (2)$$

Отметим, что если A лежит между точками C и D (рис. 320, a), то

$$CD = AC + AD = |\overline{AC}| + |\overline{AD}| = ||\overline{AC}| + |\overline{AD}|| = |\overline{AD} - \overline{AC}|,$$

так как числа $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ имеют разные знаки. В противном случае (рис. 320, *б, в, г*)

$$CD = ||\overline{AD}| - |\overline{AC}|| = |\overline{AD} - \overline{AC}|,$$

поскольку знаки чисел $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ совпадают. Таким образом, и в том, и в другом случае $CD = |\overline{AD} - \overline{AC}| = |\overline{CD}|$.

Итак, каждому отрезку CD прямой a мы поставили в соответствие два числа — $\overline{CD}$ и $\overline{DC}$; при этом $|\overline{CD}| = CD$, $\overline{DC} = -\overline{CD}$. Этот способ сопоставления отрезку двух чисел предложил великий английский физик Исаак Ньютон (1643–1727).

Задача 1. *Доказать, что для любых трех точек A_1, A_2 и A_3, лежащих на одной прямой, имеет место равенство*:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} = \overline{A_1A_3}.$$

Решение. Используя равенство (2), получаем:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} = \overline{AA_2} - \overline{AA_1} + \overline{AA_3} - \overline{AA_2} = \overline{AA_3} - \overline{AA_1} = \overline{A_1A_3},$$

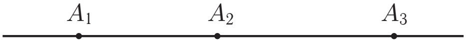
что и требовалось доказать.

Замечание 1. Доказанное утверждение называется *теоремой Шаля* по имени открывшего эту теорему французского математика и историка математики Мишеля Шаля (1793–1880). Отметим, что теорема Шаля верна и в том случае, когда какие-то из данных точек совпадают, если условиться, что формула (2) верна и в том случае, когда точки C и D совпадают. Убедитесь в этом самостоятельно.

Замечание 2. Из теоремы Шаля следует, что если точка A_2 лежит между точками A_1 и A_3 (рис. 321, *а*), то числа $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ и $\overline{A_1A_3}$ имеют одинаковые знаки. В самом деле, пусть, например, $\overline{A_1A_2} = A_1A_2$ (случай $\overline{A_1A_2} = -A_1A_2$ рассмотрите самостоятельно). Тогда, согласно теореме Шаля, $A_1A_2 + \overline{A_2A_3} = \overline{A_1A_3}$. Вычитая равенство $A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3$, получаем:

$$\overline{A_2A_3} - A_2A_3 = \overline{A_1A_3} - A_1A_3.$$

Если предположить, что $\overline{A_2A_3} = -A_2A_3$, то получим: $-2A_2A_3 = \overline{A_1A_3} - A_1A_3$, т. е. либо $A_2A_3 = 0$ (при $\overline{A_1A_3} = A_1A_3$), либо $A_2A_3 = A_1A_3$ (при $\overline{A_1A_3} = -A_1A_3$). И то и другое противоречит тому,



а)

б)

Рис. 321

что точка A_2 лежит между A_1 и A_3. Следовательно, $\overline{A_2A_3} = A_2A_3$. Но тогда, согласно нашему равенству, $\overline{A_1A_3} = A_1A_3$. Таким образом, числа $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ и $\overline{A_1A_3}$ имеют одинаковые знаки, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Отметим, что если лучи A_1A_2 и A_1A_3 совпадают, то числа $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ имеют одинаковые знаки. В самом деле, если точка A_2 лежит между точками A_1 и A_3 (рис. 321, *а*), то знаки чисел $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ и $\overline{A_1A_3}$ совпадают; если же точка A_3 лежит между точками A_1 и A_2 (рис. 321, *б*), то знаки чисел $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_3A_2}$ и $\overline{A_1A_2}$ совпадают. И в том и в другом случае числа $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ имеют одинаковые знаки.

Выведем теперь важное *следствие из обобщенной теоремы Фалеса*.

Задача 2. *Доказать, что если три параллельные прямые пересекают прямую a в точках A_1, A_2 и A_3, а прямую b — соответственно в точках B_1, B_2 и B_3, то*

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_2B_3}}. \tag{3}$$

Решение. Возможны три случая.

1^0. Точка A_2 лежит между точками A_1 и A_3 (рис. 322, *а*), и, следовательно, точка B_2 лежит между точками B_1 и B_3 (объясните, почему). По обобщенной теореме Фалеса $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$. С другой стороны, числа $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, как и числа $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, имеют одинаковые знаки, поэтому имеет место и равенство (3).

2^0. Точка A_3 лежит между точками A_1 и A_2 (рис. 322, *б*). Согласно доказанному в п. 1^0, $\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_3A_2}} = \frac{\overline{B_1B_3}}{\overline{B_3B_2}}$. С помощью теоремы Шаля получаем:

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_3A_2}} = \frac{\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}}{\overline{A_3A_2}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_3A_2}} + \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_3A_2}} = -\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}} - 1.$$

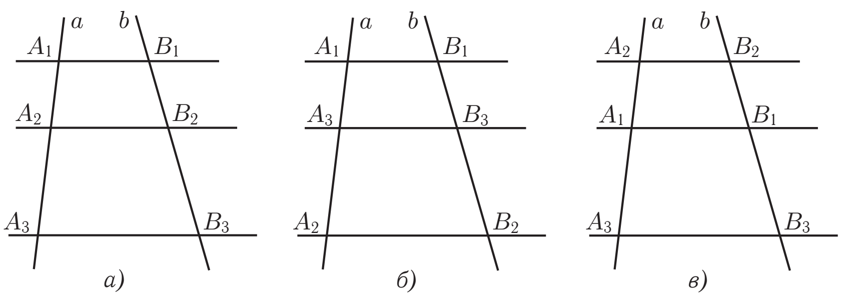


Рис. 322

Аналогично получается равенство $\dfrac{\overline{B_1B_3}}{\overline{B_3B_2}} = -\dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_2B_3}} - 1$. Приравнивая полученные выражения, мы вновь приходим к равенству (3).

3^0. Точка A_1 лежит между точками A_2 и A_3 (рис. 322, *в*). Для этого случая, пользуясь равенством $\dfrac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_1A_2}} = \dfrac{\overline{B_3B_1}}{\overline{B_1B_2}}$ и теоремой Шаля, выведите равенство (3) самостоятельно.

100. Теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике. Рассмотрим треугольник ABC, на сторонах AC и BC которого отмечены точки B_1 и A_1. Пусть O — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1 (рис. 323 *а*). Поставим такой вопрос: как, зная отношения $\dfrac{AB_1}{B_1C}$ и $\dfrac{CA_1}{A_1B}$, найти отношение $\dfrac{AO}{OA_1}$?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к физике. Поместим в точку C произвольную массу m_C, а в точки A и B — такие массы m_A и m_B, чтобы точка B_1 была центром тяжести масс m_A и m_C, а точка A_1 — центром тяжести масс m_B и m_C. Из физики известно, что центр тяжести системы трех масс m_A, m_B и m_C является в то же время центром тяжести системы двух масс: массы m_A и массы $(m_B + m_C)$, находящейся в точке A_1, поэтому он лежит на отрезке AA_1. По аналогичной причине он лежит на отрезке BB_1, а значит, находится в точке O. Это и позволяет найти нужное отношение. Имеем: $AB_1 \cdot m_A = B_1C \cdot m_C$, откуда $m_A = \dfrac{B_1C}{AB_1}m_C$. Аналогично находим: $m_B = \dfrac{A_1C}{BA_1}m_C$. Подставляя эти значения в равенство $AO \cdot m_A =$

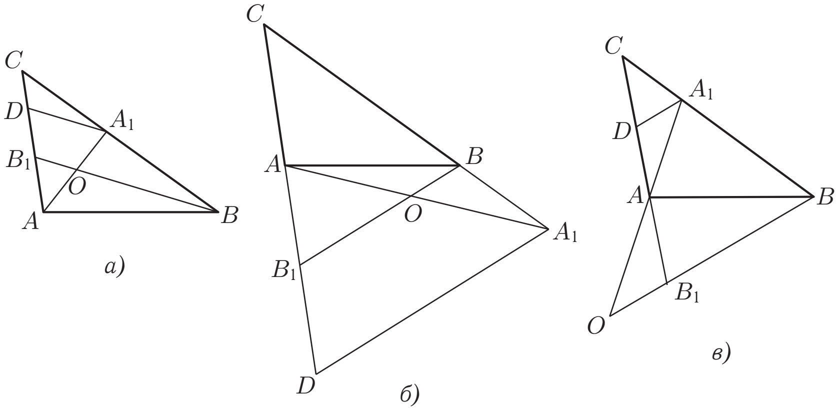


Рис. 323

$= OA_1 \cdot (m_B + m_C)$, получаем: $AO\dfrac{B_1C}{AB_1}m_C = OA_1\left(\dfrac{A_1C}{BA_1}+1\right)m_C$, откуда $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{AB_1}{B_1C}\left(\dfrac{A_1C}{BA_1}+1\right)$.

Представим себе теперь, что мы поместили всю нашу конструкцию в воду. Тогда сила тяжести, действующая на массы, уменьшится на величину выталкивающей силы воды, т. е. массы m_A, m_B и m_C как бы уменьшатся. Более того, если плотность какой-либо из них меньше плотности воды, то эта масса станет «отрицательной». Пусть M_A, M_B и M_C — новые массы. Тогда равенствам $AB_1 \cdot m_A = B_1C \cdot m_C$, $BA_1 \times \times m_B = A_1C \cdot m_C$ и $AO \cdot m_A = OA_1 \cdot (m_B + m_C)$ будут соответствовать равенства $\overline{AB_1} \cdot M_A = \overline{B_1C} \cdot M_C$, $\overline{BA_1} \cdot M_B = \overline{A_1C} \cdot M_C$ и $\overline{AO} \cdot M_A = \overline{OA_1} \cdot (M_B + M_C)$, поскольку какие-то из точек B_1, A_1 и O могут оказаться лежащими не на отрезках AC, BC и AA_1, а на их продолжениях. Из этих равенств находим: $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}\left(\dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{BA_1}}+1\right)$. Чтобы запомнить эту формулу, запишем ее немного иначе:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}\left(\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}}+1\right). \qquad (4)$$

Теперь можно сказать так: чтобы написать, чему равно отношение $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}}$, нужно, «двигаясь» от точки A к точке B по отрезкам AB_1, B_1C, CA_1 и A_1B (см. рис. 323), взять отношение чисел, соответствующих первому и второму отрезкам, и умножить его на отношение чисел, соответствующих третьему и четвертому отрезкам, сложенное с единицей.

Итак, исходя из физических соображений, мы вывели формулу (4), выражающую *теорему о пропорциональных отрезках в треугольнике*. Сформулируем эту теорему и докажем ее без привлечения физических соображений.

Теорема. *Если на сторонах AC и BC треугольника ABC (или на их продолжениях) отмечены точки B_1 и A_1 так, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в некоторой точке O, то отношение $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}}$ выражается формулой* (4).

Доказательство. Проведем через точку A_1 прямую, параллельную BB_1. Она пересекает прямую AC в некоторой точке D (см. рис. 323, *а, б, в*). Согласно следствию из обобщенной теоремы Фалеса $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1D}}$. Умножив и разделив правую часть этого равенства на $\overline{B_1C}$, получим:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1D}}.$$

Преобразуем отношение $\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1D}}$, используя снова следствие из обобщенной теоремы Фалеса, а также теорему Шаля:

$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1D}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{BA_1} + \overline{A_1C}}{\overline{BA_1}} = 1 + \frac{\overline{A_1C}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} + 1.$$

Итак, $\frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1D}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \left(\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} + 1 \right)$. Теорема доказана.

Замечание. Пользуясь этой теоремой, можно моментально доказать, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины. Объясните, как это сделать.

101. Теорема Чевы. Рассмотрим треугольник ABC и отметим на его сторонах AB, BC и CA точки C_1, A_1, B_1, не совпадающие с его вершинами (рис. 324, *а*). Поставим такой вопрос: при каком расположении этих точек прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке?

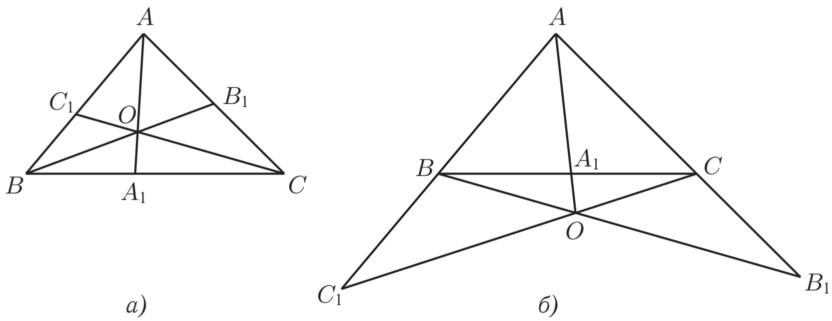


Рис. 324

Чтобы ответить на этот вопрос, вновь обратимся к физике. Поместим в точку C произвольную массу m_C, а в точки A и B — массы $m_A = \frac{B_1C}{AB_1} m_C$ и $m_B = \frac{CA_1}{A_1B} m_C$. Тогда точка B_1 окажется центром тяжести масс m_A и m_C, точка A_1 — центром тяжести масс m_B и m_C, а точка O пересечения прямых BB_1 и AA_1 — центром тяжести системы трех масс. Прямая CC_1 проходит через точку O тогда и только тогда, когда точка C_1 — центр тяжести масс m_A и m_B (объясните, почему), т. е. когда $\frac{C_1A}{BC_1} = \frac{m_B}{m_A} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{B_1C}$, откуда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$. Это и есть искомое соотношение.

Если ввести отрицательные массы (см. п. 100), то некоторые из точек C_1, A_1 и B_1 окажутся лежащими не на сторонах, а на продолжениях сторон треугольника ABC (рис. 324, *б*). Наша формула в этом случае примет вид

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = 1. \tag{5}$$

Полученную нами из физических соображений теорему связывают с именем итальянского инженера и математика Джованни Чевы (1648–1734). Сформулируем *теорему Чевы* и докажем ее без привлечения физики.

Теорема Чевы. *Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство* (5).

Доказательство. 1^0. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O (рис. 324, *а, б*). Докажем, что выполнено равенство (5).

По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике имеем:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}\left(\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} + 1\right) = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{A_1B}},$$

а также

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}\left(\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} + 1\right) = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{C_1A}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA_1}}.$$

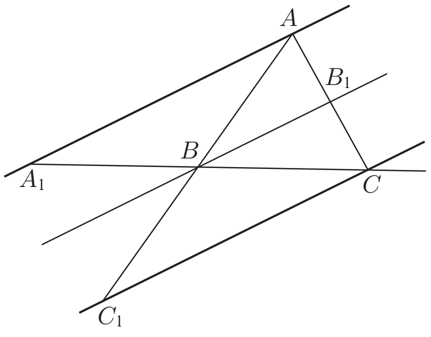


Рис. 325

Левые части этих равенств равны, значит, равны и правые части. Приравнивая их, получаем:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{C_1A}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA_1}}.$$

Разделив обе части на правую часть, приходим к равенству (5).

Допустим теперь, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны (рис. 325). Положим $x = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}$. Тогда $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = -\frac{1}{x}$. Пользуясь следствием из обобщенной теоремы Фалеса и теоремой Шаля, получаем:

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{CB_1} + \overline{B_1A}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} - 1 = -\frac{1}{x} - 1 = -\frac{1+x}{x},$$

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{BA_1} + \overline{A_1C}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} - 1 = \frac{x}{1+x} - 1 = -\frac{1}{1+x}$$

(при выводе последнего равенства мы воспользовались предпоследним). Перемножая три отношения, приходим к равенству:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = x \cdot \left(-\frac{1+x}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{1+x}\right) = 1.$$

Первая часть утверждения доказана.

2^0. Докажем обратное утверждение. Пусть точки C_1, A_1 и B_1 взяты на прямых AB, BC и CA так, что выполнено равенство (5). Требуется доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

Если никакие две из трех указанных прямых не имеют общих точек, то они параллельны.

Если же какие-нибудь две из них, например прямые AA_1 и BB_1, пересекаются в некоторой точке O, то поступим так. Проведем прямую CO (рис. 326). Она пересекает прямую AB в некоторой точке C_2.

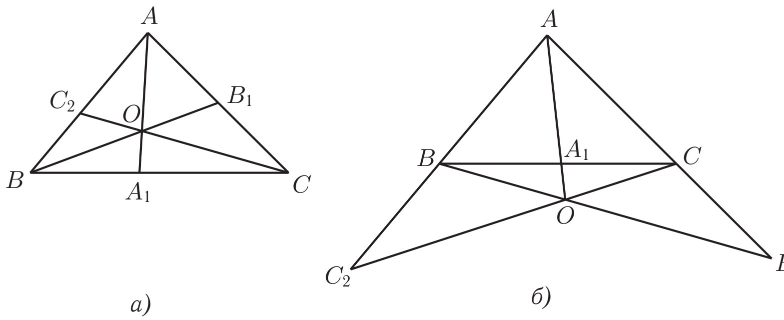


Рис. 326

Так как прямые AA_1, BB_1 и CC_2 пересекаются в одной точке, то по доказанному в п. 1^0

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2A}} = 1.$$

Сопоставляя полученное равенство с равенством (5), приходим к равенству

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2A}},$$

из которого, используя соотношения

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{BA}+\overline{AC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{C_1A}} - 1 \quad \text{и} \quad \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2A}} = \frac{\overline{BA}+\overline{AC_2}}{\overline{C_2A}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{C_2A}} - 1,$$

получаем:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{C_2A}}.$$

Из этого равенства следует, что $\overline{C_1A} = \overline{C_2A}$, или $\overline{C_1A} + \overline{AC_2} = \overline{C_1C_2} = 0$, т. е. точки C_1 и C_2 совпадают, а значит, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Теорема доказана.

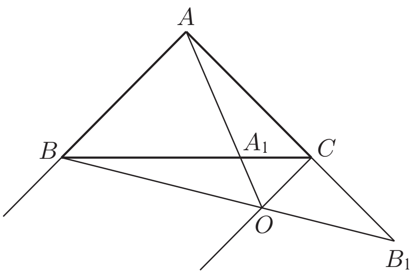


Рис. 327. $CO \parallel AB$

Замечание. В п. 2^0 доказательства мы предположили, что прямая CO пересекает прямую AB. Возникает вопрос: а не могут ли эти прямые оказаться параллельными? Докажем, что при условии (5) указанные прямые не могут быть параллельными.

Предположим, что $CO \parallel AB$ (рис. 327). Тогда, применяя теорему о пропорциональных отрезках в треугольнике к треугольнику ABA_1 (на продолжениях его сторон AA_1 и BA_1 взяты точки O и C так, что прямые BO и AC пересекаются в точке B_1) и используя теорему Шаля, получаем:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} \left(\frac{\overline{A_1C}}{\overline{CB}} + 1 \right) = \frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} \cdot \frac{\overline{A_1B}}{\overline{CB}}.$$

Но, согласно следствию из обобщенной теоремы Фалеса, $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CA_1}}$. Следовательно, $\dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CA_1}} \cdot \dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{CA_1}}$. Подставляя это выражение в равенство (5), приходим к равенству:

$$-\frac{\overline{A_1B}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = 1,$$

откуда $\dfrac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1$, т. е. $\overline{BC_1} + \overline{C_1A} = 0$ или $\overline{BA} = 0$, что невозможно, так как точки A и B не совпадают. Следовательно, прямые CO и AB не могут быть параллельными, что и требовалось доказать.

Теорема Чевы широко используется в геометрии. С ее помощью, например, не составляет труда доказать теоремы о пересечении медиан, биссектрис и высот треугольника (подумайте, как это сделать). Приведем еще один пример доказательства, основанного на теореме Чевы.

Задача 3. *Доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.*

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, диагонали которой пересекаются в точке O, а продолжения боковых сторон — в точке E. Проведем прямую EO и обозначим буквами P и Q точки пересечения этой прямой с основаниями BC и AD (рис. 328, *а, б*).

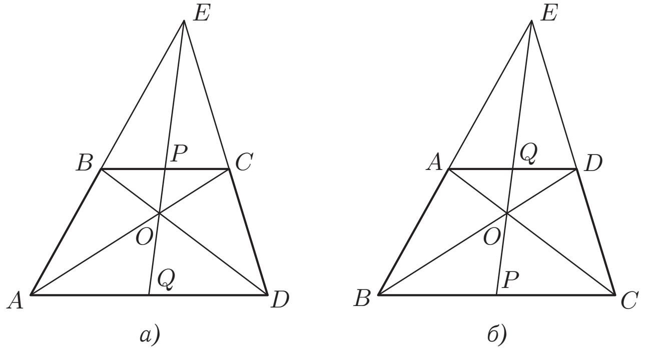


Рис. 328

Мы видим, что на сторонах треугольника AED (или их продолжениях) взяты точки B, C и Q так, что прямые DB, AC и EQ пересекаются в одной точке. По теореме Чевы

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DQ}}{\overline{QA}} = 1.$$

Но, согласно следствию из обобщенной теоремы Фалеса, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}$, поэтому $\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{CD}} = 1$. Следовательно, $\frac{\overline{DQ}}{\overline{QA}} = 1$, откуда следует, что точка Q — середина отрезка AD.

Мы видим также, что на сторонах треугольника BEC (или их продолжениях) взяты точки A, P и D так, что прямые CA, EP и BD пересекаются в одной точке. По теореме Чевы

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} = 1.$$

Но, согласно следствию из обобщенной теоремы Фалеса, $\frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$, поэтому $\frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{DC}} = 1$. Следовательно, $\frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} = 1$, откуда следует, что точка P — середина отрезка BC.

102. Теорема Менелая. Перейдем теперь к теореме, которая связана с именем Менелая Александрийского, древнегреческого математика и астронома, жившего в 1 в. н. э. Снова рассмотрим треугольник ABC и не совпадающие с вершинами точки A_1, B_1 и C_1 на его сторонах BC, CA и AB или на продолжениях этих сторон. Теорема Менелая дает ответ на вопрос о том, при каком условии точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (рис. 329).

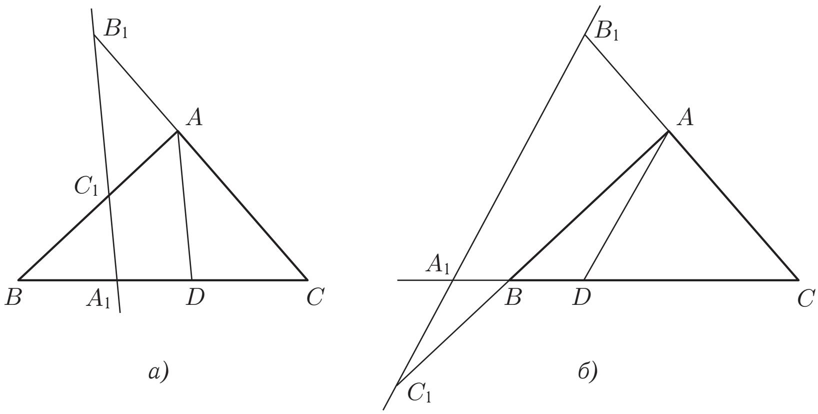


Рис. 329

Теорема Менелая. *Если на сторонах AB, BC и AC (или их продолжениях) взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1. \tag{6}$$

Доказательство. 1^0. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (рис. 329, *а, б*). Докажем, что выполнено равенство (6).

Проведем прямую AD параллельно прямой B_1A_1 (точка D лежит на прямой BC). Согласно следствию из обобщенной теоремы Фалеса имеем:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{DA_1}}{\overline{A_1C}}, \quad \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1D}}.$$

Перемножая левые и правые части этих равенств, получаем:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}},$$

откуда и следует равенство (6).

2^0. Докажем обратное утверждение. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 взяты на прямых BC, CA и AB так, что выполнено равенство (6). Докажем, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Прямая A_1B_1 пересекает прямую AB в некоторой точке C_2 (рис. 330, *а, б*). Так как точки A_1, B_1 и C_2 лежат на одной прямой, то по доказанному в первом пункте

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2A}} = -1.$$

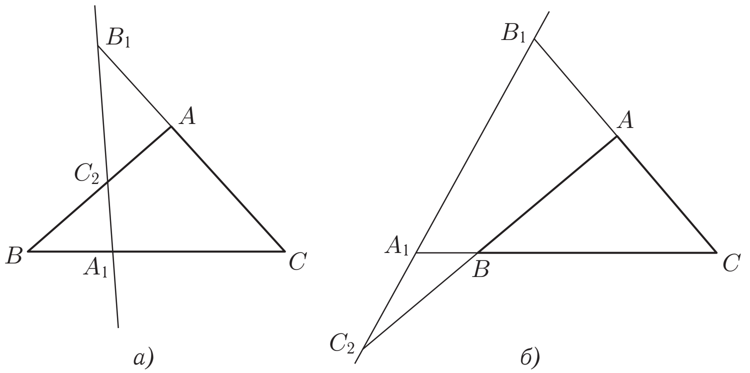


Рис. 330

Сопоставляя это равенство с равенством (6), приходим к равенству:

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2A}}.$$

Теперь можно завершить доказательство точно так же, как и доказательство теоремы Чевы.

Замечание. В п. 2^0 доказательства мы предположили, что прямая A_1B_1 пересекает прямую AB. Вновь возникает вопрос: а не могут ли эти прямые оказаться параллельными? Докажем, что при условии (6) указанные прямые не могут быть параллельными.

Предположим, что $A_1B_1 \parallel AB$ (рис. 331). Согласно следствию из обобщенной теоремы Фалеса $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}$, или $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = 1$, откуда, с учетом равенства (6), получаем: $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1$, т. е. $\overline{BC_1} + \overline{C_1A} = \overline{BA} = 0$, что невозможно, так как точки A и B не совпадают. Следовательно, прямые A_1B_1 и AB не могут быть параллельными, что и требовалось доказать.

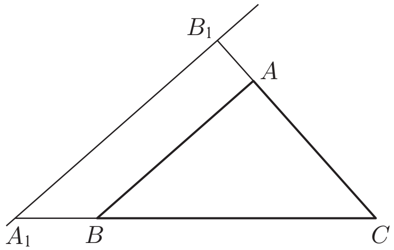
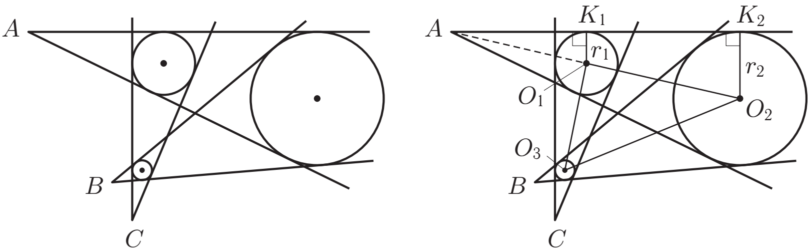


Рис. 331. $A_1B_1 \parallel AB$

Воспользуемся теоремой Менелая для решения такой задачи.

Задача 4. *Доказать, что точки A, B и C на рисунке* 332, *а лежат на одной прямой.*

Решение. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей, r_1, r_2 и r_3 — их радиусы, K_1 и K_2 — точки касания окружностей с центрами O_1 и O_2 и одной из данных прямых, проходящих через точку A (рис. 332, *б*). Прямоугольные треугольники AO_1K_1 и AO_2K_2 подобны, поскольку



а) *б)*

Рис. 332

имеют общий острый угол при вершине A. Следовательно, $\frac{AO_1}{AO_2}=\frac{r_1}{r_2}$, а значит, $\frac{\overline{O_1A}}{\overline{AO_2}}=-\frac{r_1}{r_2}$. Аналогично получаем: $\frac{\overline{O_2B}}{\overline{BO_3}}=-\frac{r_2}{r_3}$ и $\frac{\overline{O_3C}}{\overline{CO_1}}=-\frac{r_3}{r_1}$. Таким образом,

$$\frac{\overline{O_1A}}{\overline{AO_2}}\cdot\frac{\overline{O_2B}}{\overline{BO_2}}\cdot\frac{\overline{O_3C}}{\overline{CO_1}}=-1.$$

Из теоремы Менелая применительно к треугольнику $O_1O_2O_3$ следует, что точки A, B и C лежат на одной прямой. Утверждение доказано.

Задачи

333. Через середину M стороны BC треугольника ABC ($AB\neq\neq AC$) проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A и пересекающая прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD=CE$.

334. На биссектрисе BD треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM:MD=m:n$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение $BK:KC$, если $AB:BC=p:q$.

335. На медиане BD треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM:MD=m:n$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение $BK:KC$.

336. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC и делящая медиану BM в отношении $1:2$, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.

337. В треугольнике ABC медиана BM и биссектриса AK пересекаются в точке O, $AC:AB=k$. Найдите отношение площадей треугольника AOB и четырехугольника $MOKC$.

338*. Через точку, взятую на продолжении одной из диагоналей трапеции, и середину каждого основания проведены прямые, пересекающие боковые стороны трапеции в точках K и H. Докажите, что отрезок KH параллелен основаниям трапеции.

339. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки H и E так, что $AH = HE = EC$, на стороне BC — точки P и T так, что $BP = PT = TC$. Отрезок BH пересекает отрезки AP и AT в точках K и D соответственно, а отрезок BE пересекает отрезки AP и AT в точках M и O соответственно. Найдите отношение площадей четырехугольника $DKMO$ и треугольника ABC.

340. Используя теорему Чевы, докажите, что: а) медианы треугольника пересекаются в одной точке; б) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке; в) высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

341. На стороне AC треугольника ABC взяты точки P и E, на стороне BC — точки M и K, причем $AP : PE : EC = CK : KM : MB$. Отрезки AM и BP пересекаются в точке O, отрезки AK и BE — в точке T. Докажите, что точки O, T и C лежат на одной прямой.

342. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с попарно непараллельными сторонами расположены так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежат на одной прямой (*теорема Дезарга* [1])).

§ 3. Задачи на построение

103. Среднее геометрическое. *Средним геометрическим двух положительных чисел* a *и* b называется число $\sqrt{ab}$.

В соответствии с этим, отрезок XY называется средним геометрическим для отрезков AB и CD, если $XY = \sqrt{AB \cdot CD}$.

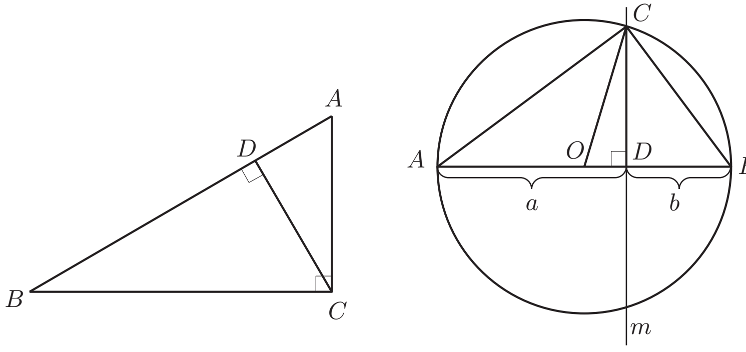
Построение среднего геометрического двух данных отрезков с помощью циркуля и линейки основано на следующем факте:

высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое для отрезков, на которые гипотенуза делится этой высотой.

Действительно, обратимся к рисунку 333, *а*. Треугольники ADC и CDB подобны, так как $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ - \angle BCD = \angle CBD$. Следовательно, $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{DB}$, откуда $CD^2 = AD \times DB$, или $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$.

Как же, используя этот факт, построить среднее геометрическое для двух данных отрезков с длинами a и b? Очень просто. На произвольной прямой отложим последовательно отрезки $AD = a$ и $DB = b$. Через точку D проведем прямую m, перпендикулярную к AB. Далее, построим окружность с диаметром AB и обозначим буквой C одну из точек ее пересечения с прямой m (рис. 333 *б*). Треугольник ABC — прямоугольный, поскольку его медиана CO, проведенная к стороне AB, равна половине этой стороны (см. задачу 1 п. 55), а отрезок CD —

[1]) Дезарг Жирар (1591–1661) — французский математик.



а) б)

Рис. 333. а) $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$; б) $CD = \sqrt{ab}$

высота этого треугольника, проведенная из вершины прямого угла. Следовательно, отрезок CD — искомый: $CD = \sqrt{ab}$.

Отметим, что попутно мы получили возможность решить такую задачу: построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику (объясните, как это сделать).

104. Среднее арифметическое, среднее гармоническое и среднее квадратичное для двух отрезков. В математике наряду со средним геометрическим используют и другие средние.

Средним арифметическим двух чисел a и b называется их полусумма: $\dfrac{a+b}{2}$.

Средним гармоническим для чисел a и b называется число c, определенное равенством: $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$, т. е. $c = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Средним квадратичным для чисел a *и* b называется число $c = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, т. е. число c равно квадратному корню из среднего арифметического для квадратов чисел a и b.

В соответствии с этими определениями средним арифметическим для двух отрезков с длинами a и b будем называть отрезок с длиной $\dfrac{a+b}{2}$, средним гармоническим — отрезок с длиной $\dfrac{2ab}{a+b}$, а средним квадратичным — отрезок с длиной $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

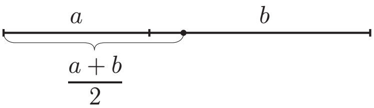


Рис. 334

Чтобы построить среднее арифметическое двух отрезков, достаточно построить отрезок, равный их сумме, и разделить его пополам (рис. 334).

Для построения среднего гармонического отрезков a и b можно поступить так: построить произвольный треугольник ABC со сторонами $BC = a$ и $AC = b$, провести его биссектрису CD, через точку D провести прямую, перпендикулярную к CD, и отметить точку E пересечения этой прямой с большей из сторон BC и AC (рис. 335). Отрезок CE — искомый (см. п. 89).

Чтобы построить среднее квадратичное отрезков a и b, можно построить прямоугольный треугольник с катетами a и b, на его гипотенузе построить квадрат и провести диагонали этого квадрата (рис. 336). Половина диагонали квадрата и есть искомый отрезок (докажите это).

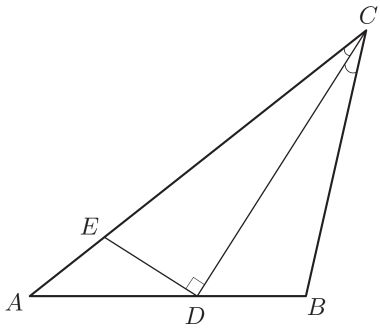


Рис. 335. $BC = a$, $AC = b$, CD — биссектриса, $DE \perp CD$, $CE = \frac{2ab}{a+b}$

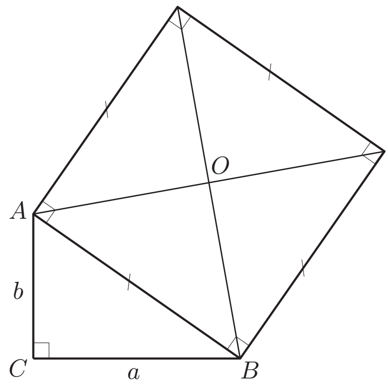


Рис. 336. $AO = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

105. Метод подобия. Метод подобия при решении задач на построение треугольников с помощью циркуля и линейки состоит в том, что сначала, используя некоторые данные, строят треугольник, подобный искомому, а затем, привлекая остальные данные, строят искомый треугольник.

Этот прием применяется и при построении других фигур. О подобии произвольных фигур будет рассказано в главе XIII. Пока же отметим, что любые два квадрата являются подобными; две трапеции, у которых углы соответственно равны, а стороны одной пропорциональны сторонам другой трапеции, подобны; любые две окружности подобны. Рассмотрим примеры решения задач на построение методом подобия.

Задача 1. *В данный треугольник ABC вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на прямой AB и еще по одной — на сторонах AC и BC.*

Решение. Данный треугольник ABC изображен на рисунке 337, *а*. С помощью циркуля и линейки нужно построить квадрат $DEFG$, расположенный так, как показано на этом рисунке.

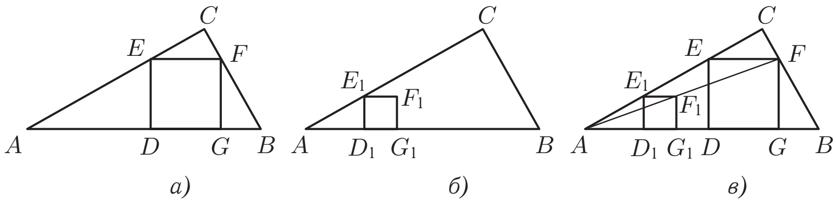


Рис. 337

Сначала построим какой-нибудь квадрат, у которого две вершины лежат на прямой AB и еще одна — на стороне AC. С этой целью возьмем произвольную точку E_1 на стороне AC, проведем перпендикуляр E_1D_1 к прямой AB и далее построим квадрат $D_1E_1F_1G_1$, у которого вершина G_1 лежит на прямой AB, как показано на рисунке 337, *б*.

Затем проведем прямую AF_1 и обозначим буквой F точку пересечения этой прямой со стороной BC (см. рис. 337, *в*). Через точку F проведем прямую, параллельную AB, и прямую, перпендикулярную к AB. Получим точки E и G на сторонах AC и AB. Из точки E проведем перпендикуляр ED к AB. Получился прямоугольник $DEFG$, который и есть искомый квадрат.

В самом деле, из подобия треугольников AE_1F_1 и AEF следует, что

$$\frac{EF}{E_1F_1} = \frac{AF}{AF_1},$$

а из подобия треугольников AF_1G_1 и AFG получаем:

$$\frac{FG}{F_1G_1} = \frac{AF}{AF_1}.$$

Следовательно, $\dfrac{EF}{E_1F_1} = \dfrac{FG}{F_1G_1}$, а так как $E_1F_1 = F_1G_1$, то $EF = FG$.

Итак, в прямоугольнике $DEFG$ смежные стороны равны, значит, этот прямоугольник — квадрат.

Задача 2. *Построить трапецию $ABCD$ по углу A и основанию BC, если известно, что $AB : CD : AD = 1 : 2 : 3$.*

Решение. Задачу надо понимать так: даны угол hk и отрезок PQ (рис. 338, *а*); требуется построить с помощью циркуля и линейки трапецию $ABCD$, у которой $\angle A = \angle hk$, $BC = PQ$, а остальные три стороны AB, CD и AD относятся как $1 : 2 : 3$.

Построим сначала какую-нибудь трапецию $AB_1C_1D_1$, у которой $\angle A = \angle hk$ и $AB_1 : C_1D_1 : AD_1 = 1 : 2 : 3$. Это сделать совсем нетрудно. Строим угол A, равный данному углу, и на его сторонах откладываем произвольный отрезок AB_1 и отрезок $AD_1 = 3AB_1$ (рис. 338, *б*). После этого через точку B_1 проводим прямую l, парал-

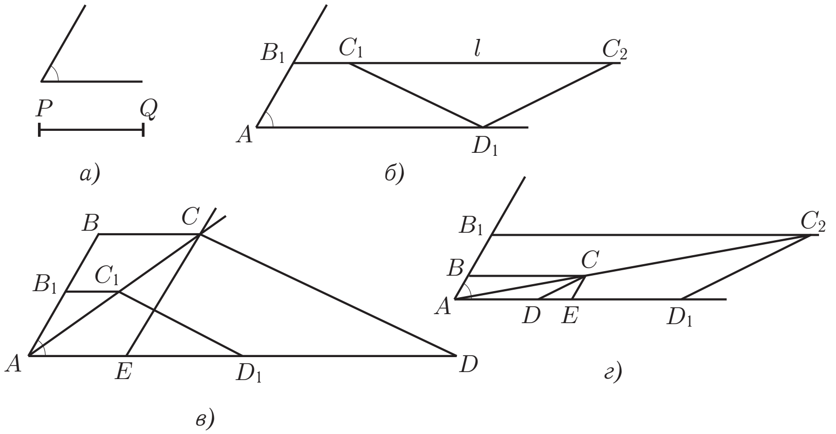


Рис. 338

лельную AD_1, и строим окружность радиуса $2AB_1$ с центром в точке D_1. Эта окружность пересекает прямую l в двух точках: C_1 и C_2.

Итак, мы построили две трапеции: $AB_1C_1D_1$ и $AB_1C_2D_1$, у которых $\angle A = \angle hk$ и стороны AB_1, B_1C_1 (B_1C_2) и C_1D_1 (C_2D_1) относятся как $1 : 2 : 3$.

Возьмем одну из этих трапеций, например $AB_1C_1D_1$, проведем прямую AC_1 и построим отрезок BC с концами на сторонах угла B_1AC_1, который параллелен B_1C_1 и равен PQ. Это можно сделать так: на луче AD_1 откладываем отрезок $AE = PQ$ и через точку E проводим прямую, параллельную AB_1. Она пересекается с прямой AC_1 в точке C (рис. 338, *в*). Через точку C проводим прямую, параллельную B_1C_1, и получаем точку B. Очевидно, отрезок BC равен PQ. Остается провести через точку C прямую, параллельную C_1D_1. Она пересекает луч AD_1 в точке D. Трапеция $ABCD$ — искомая.

В самом деле,

$$\angle A = \angle hk, \quad BC = PQ \text{ и } \frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{AD_1}$$

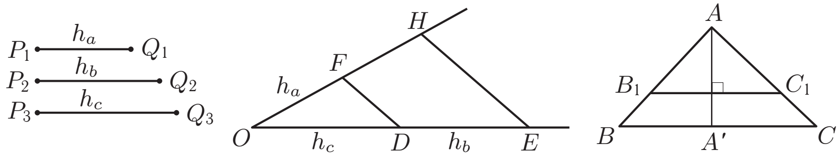
(это следует из подобия треугольников ABC и AB_1C_1, ACD и AC_1D_1). Отсюда получаем, что

$$AB : CD : AD = AB_1 : C_1D_1 : AD_1 = 1 : 2 : 3.$$

Построенная трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи. Если вместо трапеции $AB_1C_1D_1$ взять трапецию $AB_1C_2D_1$ и проделать такие же построения, то получим второе решение задачи (рис. 338, *г*). Итак, данная задача имеет два решения.

З а д а ч а 3. *Построить треугольник по трем высотам.*

Р е ш е н и е. Задачу надо понимать так: даны три отрезка P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 339, *а*); требуется с помощью циркуля и линейки



а) *б)* *в)*

Рис. 339. $FH = \dfrac{h_a h_b}{h_c}$, $AB_1 = FH$, $B_1C_1 = h_b$, $C_1A = h_a$, $AA' = h_a$

построить треугольник ABC, высоты которого, проведенные из вершин A, B и C, соответственно равны P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3.

Попробуем понять, с какой стороны можно подойти к решению этой задачи. Обозначим через a, b и c длины сторон искомого треугольника, противолежащих углам A, B и C, а через h_a, h_b и h_c — длины отрезков P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Воспользуемся равенствами $ah_a = bh_b = ch_c$ (каждое из произведений равно удвоенной площади треугольника). Из первого равенства получаем пропорцию $\dfrac{a}{h_b} = \dfrac{b}{h_a}$, а из второго равенства находим: $b = \dfrac{h_c}{h_b} \cdot c$. Поэтому

$$\frac{b}{h_a} = \frac{c}{\left(\dfrac{h_a h_b}{h_c}\right)}.$$

Таким образом,

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\left(\dfrac{h_a h_b}{h_c}\right)}.$$

Полученные равенства показывают, что искомый треугольник со сторонами a, b, c подобен треугольнику со сторонами h_b, h_a, $\dfrac{h_a h_b}{h_c}$. Это дает ключ к решению задачи.

Перейдем теперь к построению. По данным отрезкам P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 с длинами h_a, h_b, h_c построим отрезок, длина которого равна $\dfrac{h_a h_b}{h_c}$. Это можно сделать следующим образом: построим какой-нибудь угол и отложим от его вершины O на одной стороне угла последовательно отрезки $OD = P_3Q_3$ и $DE = P_2Q_2$, а на другой стороне угла — отрезок $OF = P_1Q_1$ (рис. 339, *б*).

Проведем прямую DF, а затем через точку E — прямую, параллельную DF. Она пересекает луч OF в точке H. Отрезок FH равен $\dfrac{h_a h_b}{h_c}$, что следует из пропорции $\dfrac{OF}{OD} = \dfrac{FH}{DE}$.

Далее построим треугольник AB_1C_1 по трем сторонам: $AB_1 = FH$, $B_1C_1 = P_2Q_2$, $C_1A = P_1Q_1$ (рис. 339, *в*). Этот треугольник, как уже было отмечено, подобен искомому треугольнику. Через вершину A проведем высоту треугольника AB_1C_1 и отложим на ней (или ее продолжении) отрезок AA', равный P_1Q_1. Через точку A' проведем прямую, параллельную B_1C_1. Точки B и C пересечения этой прямой с лучами AB_1 и AC_1 являются вершинами искомого треугольника ABC. В самом деле, построенный треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 и, следовательно, подобен искомому треугольнику. Высота, проведенная из вершины A в построенном треугольнике ABC, равна h_a, как и должно быть в искомом треугольнике, т. е. сходственные высоты в треугольнике ABC и искомом треугольнике равны. Значит, коэффициент подобия равен 1, а это и означает, что треугольник ABC — искомый.

Искомый треугольник ABC можно построить в том случае, когда можно построить треугольник AB_1C_1, стороны которого равны соответственно h_b, h_a, $\dfrac{h_ah_b}{h_c}$. Следовательно, данные отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 должны быть такими, чтобы из отрезков с длинами h_b, h_a, $\dfrac{h_ah_b}{h_c}$ можно было построить треугольник. В таком случае задача имеет решение. Докажите самостоятельно единственность решения.

Замечание. Итак, мы построили треугольник по трем высотам. Нетрудно построить треугольник и по трем медианам. Для этого можно, например, поступить так: пользуясь теоремой о медиане (п. 91), выразить стороны искомого треугольника через его медианы, построить эти стороны, используя полученные формулы, а затем построить сам треугольник по трем сторонам. Попробуйте проделать это самостоятельно.

А можно ли с помощью циркуля и линейки построить треугольник по трем биссектрисам? Оказывается, нельзя. Более того, в 1897 году Корселд доказал, что с помощью циркуля и линейки нельзя построить равнобедренный треугольник по двум биссектрисам.

Задачи

343. Докажите, что катет прямоугольного треугольника является средним геометрическим для гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

344. Докажите, что отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный ее основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей, является средним гармоническим для оснований трапеции.

345. Докажите, что отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный ее основаниям и разбивающий трапецию на две равновеликие трапеции, является средним квадратичным для оснований трапеции.

346. Докажите, что отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный ее основаниям и равный среднему геометрическому оснований, разбивает трапецию на две подобные трапеции, т. е. на две такие трапеции, у которых углы соответственно равны, а сходственные стороны пропорциональны.

347. Даны два неравных отрезка. Расположите в порядке возрастания четыре средних для этих отрезков: среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое и среднее квадратичное.

348. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые BD, CD и BC соответственно в точках M, N и P. Докажите, что отрезок AM является средним геометрическим для отрезков MN и MP.

349. Докажите, что диагональ делит трапецию на два подобных треугольника тогда и только тогда, когда она равна среднему геометрическому оснований трапеции.

350. Основания трапеции равны 4 и 9, одна из ее диагоналей равна 6. Найдите площадь трапеции, если известно, что длины всех ее сторон выражаются различными целыми числами.

351*. Величины углов треугольника относятся как $1:2:4$. Докажите, что меньшая сторона треугольника равна половине среднего гармонического двух других сторон.

352. *Средним геометрическим для n отрезков* с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ назовем отрезок с длиной $a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC с высотой CD, проведенной из вершины прямого угла, и высотами DE и DF в треугольниках ACD и BCD: а) отрезок CD является средним геометрическим для отрезков AC, BC, AE и BF; б) отрезок CD является средним геометрическим для отрезков AB, AE и BF.

353*. На рисунке 340 отрезки с длинами $x_1, \ldots, x_{n-1}$, параллельные основаниям трапеции, равным a и b, разбивают ее на n подобных друг другу трапеций (см. задачу 346). Докажите, что

$$x_k = \sqrt[n]{a^{n-k} b^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

т. е. k-й отрезок является средним геометрическим для n отрезков, из которых $(n-k)$ равны a и k отрезков равны b.

354. *Средним арифметическим для n отрезков* с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется отрезок с длиной $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. На рисунке 341 отрезки с длинами $x_1, \ldots, x_{n-1}$, параллельные основаниям трапеции, равным a и b, разделяют ее боковые стороны на n равных частей. Докажите, что

$$x_k = \frac{1}{n}((n-k)a + kb), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

т. е. k-й отрезок является средним арифметическим для n отрезков, из которых $(n-k)$ равны a и k отрезков равны b.

355*. *Средним квадратичным для n отрезков* с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется отрезок с длиной $\sqrt{\frac{1}{n}\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)}$.

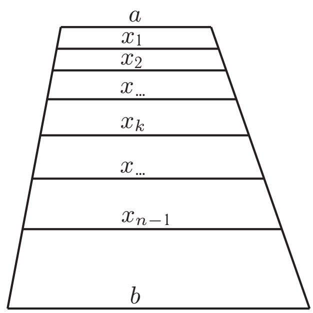


Рис. 340

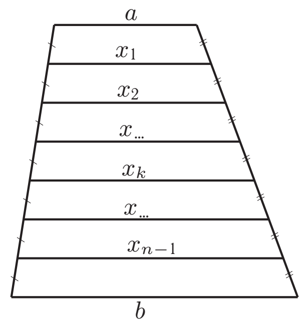


Рис. 341

На рисунке 342 отрезки с длинами $x_1, \ldots, x_{n-1}$, параллельные основаниям трапеции, равным a и b, разбивают ее на n равновеликих трапеций. Докажите, что

$$x_k = \sqrt{\frac{(n-k)a^2 + kb^2}{n}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

т. е. k-й отрезок является средним квадратичным для n отрезков, из которых $(n-k)$ равны a и k отрезков равны b.

356*. *Средним гармоническим для n отрезков* с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется отрезок, длина a которого определяется равенством:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

На рисунке 343 изображена трапеция $ABCD$ с основаниями, равными a и b. Отрезки $M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, \ldots$ параллельны основаниям трапеции, причем отрезок M_1N_1 проходит через точку O_1 пересечения диагоналей трапеции, отрезок M_2N_2 проходит через точку O_2 пересе-

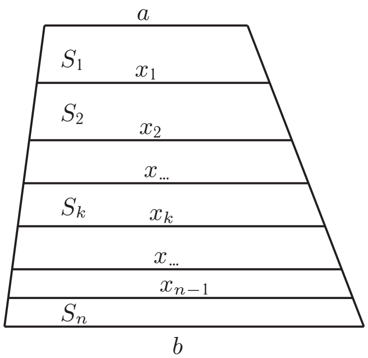


Рис. 342. $S_1 = S_2 = \ldots = S_n$

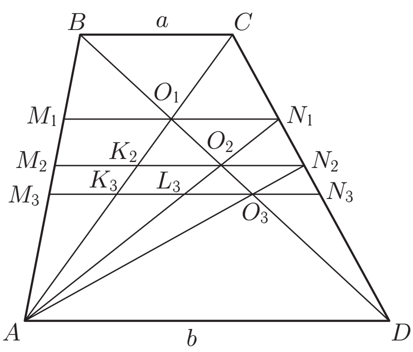


Рис. 343

чения AN_1 с диагональю BD, отрезок M_3N_3 проходит через точку O_3 пересечения AN_2 с диагональю BD и т. д. Докажите, что:

а) $$\frac{1}{M_kN_k} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{a} + k\frac{1}{b}\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

т. е. отрезок M_kN_k является средним гармоническим для $(k+1)$ отрезков, один из которых равен a и k отрезков равны b; б) $M_2K_2 = K_2O_2 = O_2N_2$; в) $M_3K_3 = K_3L_3 = L_3O_3 = O_3N_3$; г) точки K_2 и L_3 лежат на отрезке M_1D; д) отрезок M_2K_2 является средним гармоническим для отрезков M_1O_1 и M_3K_3; е) отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции $M_1N_1N_3M_3$ ($M_1N_1N_2M_2$) параллельно ее основаниям, является средним гармоническим для восьми (двенадцати) отрезков, из которых три (пять) равны a и пять (семь) равны b.

357. Постройте треугольник ABC по углу A, биссектрисе, проведенной из вершины B, и заданному отношению двух сторон: $AB : AC = 1 : 3$.

358. Постройте треугольник ABC по углу A, высоте, проведенной из вершины C, и заданному отношению двух сторон: $AB : AC = m : n$, где m и n — целые числа.

359. Постройте равнобедренный треугольник по углу между боковыми сторонами и сумме длин основания и высоты, проведенной к основанию.

360. Постройте треугольник ABC, если даны углы A и B и отрезок, равный сумме длин стороны AC и медианы BM.

361. Постройте трапецию $ABCD$ по основанию AD и углам A и D, если известно, что $AB : BC = 1 : 2$.

362. Постройте трапецию $ABCD$ по углу A и боковой стороне CD, если известно, что $AB : BC : AD = 1 : 1 : 2$.

363*. Даны отрезок и параллельная ему прямая. С помощью одной линейки (т. е. не пользуясь циркулем) разделите данный отрезок: а) на две равные части; б) на три равные части.

364*. Постройте прямую, параллельную основаниям данной трапеции и пересекающую ее так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции, делился ее диагоналями: а) на три равных отрезка; б) на три отрезка, два из которых равны, а третий равен сумме двух других.

365. Даны отрезки PQ, M_1N_1 и M_2N_2. Постройте ромб, стороны которого равны отрезку PQ, а отношение диагоналей равно отношению $M_1N_1 : M_2N_2$.

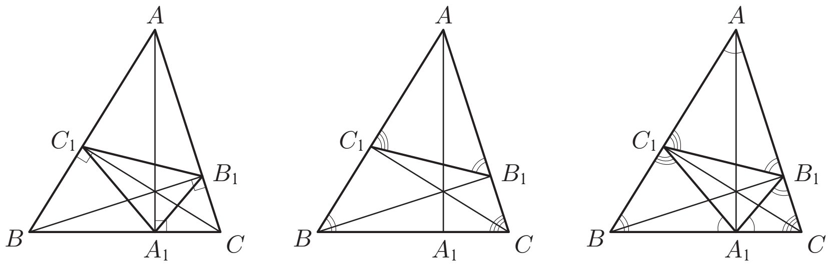
366*. Даны угол и точка M, лежащая внутри него. Постройте прямую, проходящую через точку M и пересекающую стороны угла в точках A и B так, чтобы: а) $AM = MB$; б) $AM : MB = P_1Q_1 : P_2Q_2$, где P_1Q_1 и P_2Q_2 — данные отрезки.

§ 4. О замечательных точках треугольника

106. О высотах треугольника. Высоты остроугольного треугольника обладают следующим замечательным свойством.

Теорема. *Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют треугольник, биссектрисы которого лежат на этих высотах.*

Доказательство. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC (рис. 344, *а*). Докажем, что лучи A_1A,



а) *б)* *в)*

Рис. 344

B_1B и C_1C являются биссектрисами углов A_1, B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Из прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 находим: $AB_1 = AB \cdot \cos A$, $AC_1 = AC \cdot \cos A$. Таким образом, $\dfrac{AB_1}{AB} = \dfrac{AC_1}{AC}$, т. е. стороны AB_1 и AC_1 треугольника AB_1C_1 пропорциональны сторонам AB и AC треугольника ABC. Поскольку, сверх того, эти треугольники имеют общий угол A, то они подобны. Следовательно, $\angle AC_1B_1 = \angle C$, $\angle AB_1C_1 = \angle B$ (рис. 344, *б*).

Аналогично получаем: $\angle BA_1C_1 = \angle A$, $\angle A_1C_1B = \angle C$, $\angle CA_1B_1 = \angle A$, $\angle A_1B_1C = \angle B$ (рис. 344, *в*), из чего и вытекает справедливость теоремы.

Замечание 1. Похожее утверждение справедливо и для тупоугольного треугольника. Подумайте, как его сформулировать и доказать.

Замечание 2. Доказав теорему (см. также замечание 1), мы фактически получили еще одно доказательство теоремы о пересечении высот треугольника. Объясните, в чем состоит это доказательство.

Замечание 3. Доказанная теорема позволяет установить одно замечательное свойство треугольника $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания высот треугольника ABC. Представим себе бильярдный стол в форме остроугольного треугольника ABC (см. рис. 344, *в*). Поместим шар в точку A_1 и ударом кия направим его в точку B_1. Тогда после отражения (угол отражения равен углу падения) он попадет в точку C_1, затем в A_1, затем снова в B_1 и т. д. Таким образом, шар будет все время двигаться по одному и тому же маршруту $A_1B_1C_1$. Так получается потому, что любые две стороны треугольника $A_1B_1C_1$ составляют равные углы со стороной треугольника ABC, в которую они упираются. А верно ли обратное утверждение: если точки A_1, B_1 и C_1 *лежат на сторонах* BC, CA *и* AB *остроугольного треугольника* ABC, *причем* $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$, $\angle A_1B_1C = \angle C_1B_1A$ *и* $\angle A_1C_1B = \angle B_1C_1A$, *то точки* A_1, B_1 *и* C_1 *— основания высот треугольника* ABC? Не будем спешить с ответом и пока запишем этот вопрос в блокнот.

Докажем еще одно утверждение, связанное с высотами треугольника.

Задача 1. *Пусть высоты* AA', BB' *и* CC' *непрямоугольного треугольника* ABC *(или их продолжения) пересекаются в точке* H. *Доказать, что*

$$AH \cdot HA' = BH \cdot HB' = CH \cdot HC'. \tag{1}$$

Это свойство можно сформулировать и таким образом:

во всяком непрямоугольном треугольнике произведение расстояний от ортоцентра до концов высоты есть величина постоянная (т. е. одна и та же для всех высот данного треугольника).

Решение. Обратимся к рисунку 345, *а*, на котором изображен остроугольный треугольник ABC и проведены высоты AA' и BB', пересекающиеся в точке H. Треугольники AHB' и BHA' подобны

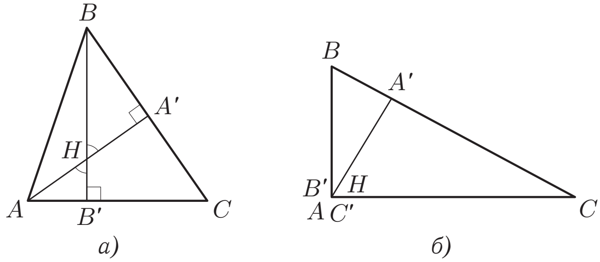


Рис. 345

по двум углам, поэтому $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{HB'}{HA'}$. Отсюда следует, что $AH \cdot HA' = BH \cdot HB'$. Аналогично доказывается, что $BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$.

Для случая тупоугольного треугольника докажите равенства (1) самостоятельно.

Отметим, что если треугольник ABC — прямоугольный и угол A — прямой, то точки B', C' и H совпадают с точкой A (рис. 334, *б*). Если считать, что $AH = 0$, $HB' = 0$, $HC' = 0$, то тогда равенства (1) также выполняются.

107. О биссектрисах треугольника. Напомним, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. А в каком отношении делит каждую биссектрису точка пересечения биссектрис треугольника? Попробуем ответить на этот вопрос.

Задача 2. *В треугольнике ABC биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O* (рис. 346), *$AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Найти отношение* $\dfrac{AO}{OA_1}$.

Решение. Так как биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то

$$AB_1 : B_1C = c : a, \quad CA_1 : A_1B = b : c.$$

Для нахождения отношения $\dfrac{AO}{OA_1}$ остается воспользоваться теоремой о пропорциональных отрезках в треугольнике (п. 100).

Ответ. $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{c}{a}\left(\dfrac{b}{c} + 1\right) = \dfrac{b+c}{a}$.

Решим еще одну задачу, связанную с биссектрисой треугольника.

Задача 3. *Доказать, что биссектриса треугольника равна произведению среднего гармонического сторон треугольника, выходящих из той же вершины, на косинус половины угла между этими сторонами.*

Решение. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и биссектрисой AA_1 (рис. 347). Обозначим буквой F точку

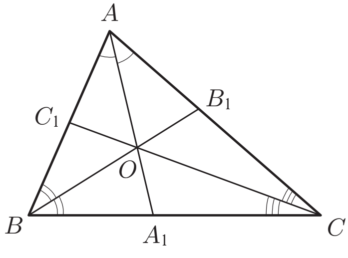


Рис. 346

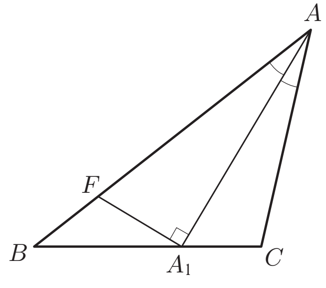


Рис. 347. $AC = b$, $AB = c$, $AF = \dfrac{2bc}{b+c}$

пересечения прямой, проходящей через точку A_1 и перпендикулярной к AA_1, с большей (точнее, не меньшей) из сторон AB и AC. Как мы знаем (п. 89), $AF = \dfrac{2bc}{b+c}$. Следовательно, $AA_1 = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$. Утверждение доказано.

108. Еще две точки, связанные с треугольником. Как мы помним, точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис и точка пересечения высот треугольника (или их продолжений) называются *замечательными точками треугольника*. Четвертой замечательной точкой треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. С каждым треугольником связаны и другие не менее замечательные точки. О двух из них пойдет речь в следующих теоремах.

Теорема 1. *Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — отрезки, соединяющие вершины треугольника ABC с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон (рис. 348). Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $AB_1 = C_1A$, $BC_1 = A_1B$, $CA_1 = B_1C$. Поэтому $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$. Отсюда согласно теореме Чевы следует, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Теорема 2. *Прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие его периметр пополам, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — прямые, проходящие через вершины треугольника ABC и делящие его периметр пополам, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $a + b + c = 2p$ (рис. 349). Тогда $AB_1 + AB = AB_1 + c = p$, откуда $AB_1 = p - c$. Аналогично получаем: $B_1C = p - a$, $CA_1 = p - b$, $A_1B = p - c$, $BC_1 = p - a$, $C_1A = p - b$. Следовательно,

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{p-c}{p-a} \cdot \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-a}{p-b} = 1.$$

Отсюда согласно теореме Чевы следует, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

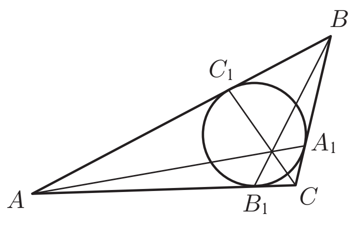


Рис. 348

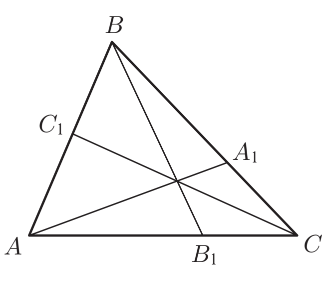


Рис. 349

Задачи

367. Отрезок CP — высота треугольника ABC, H — ортоцентр этого треугольника. Докажите, что $CP \cdot HP = AP \cdot BP$.

368. Биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. а) Докажите, что $\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2$, $\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1$. б) Может ли хотя бы одна из биссектрис треугольника делиться точкой O пополам? в) Докажите, что одна из биссектрис делится точкой O в отношении $2:1$, считая от вершины, тогда и только тогда, когда одна из сторон треугольника равна полусумме двух других сторон.

Глава 8

ОКРУЖНОСТЬ

§ 1. Свойства окружности

109. Характеристическое свойство окружности. Рассмотрим точку M, лежащую на окружности с центром O и диаметром AB (рис. 350). Поскольку медиана MO треугольника MAB равна половине его стороны AB, то угол AMB — прямой (см. задачу 1 п. 55). Можно сказать, что диаметр окружности виден из любой ее точки (кроме концов этого диаметра) под прямым углом.

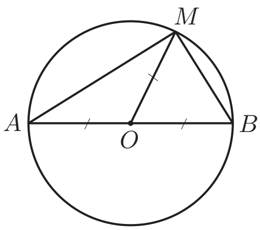


Рис. 350

Пусть теперь M — какая-нибудь точка, из которой отрезок AB виден под прямым углом, т. е. $\angle AMB = 90^\circ$. Тогда медиана MO треугольника MAB равна половине его стороны AB, и следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром AB (рис. 350). Итак,

отрезок AB виден из точки M под прямым углом тогда и только тогда, когда эта точка лежит на окружности с диаметром AB и отлична от точек A и B.

Ясно, что это свойство окружности является характеристическим, его можно положить в основу нового определения:

окружность диаметра AB — это фигура, состоящая из точек A, B и всех точек плоскости, из которых отрезок AB виден под прямым углом.

110. Задачи на построение. Обнаруженное нами характеристическое свойство окружности широко используется при решении задач на построение. Приведем примеры.

З а д а ч а 1. *Даны окружность с диаметром AB и точка C, не лежащая на этой окружности и не лежащая на прямой AB. Провести из точки C перпендикуляр к прямой AB с помощью одной линейки* (без использования циркуля).

Р е ш е н и е. Проведем прямые CA и CB. Если какая-то из этих прямых имеет только одну общую точку с окружностью, т. е. является касательной к окружности, то отрезок этой прямой (CA или CB)

и есть искомый перпендикуляр. Если же обе прямые не являются касательными, то они пересекают окружность еще в двух точках: B_1 и A_1 (рис. 351). Углы AA_1B и BB_1A — прямые (см. п. 109), поэтому отрезки AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Проведя прямые AA_1 и BB_1, найдем их точку пересечения H. Искомый перпендикуляр CC_1 также является высотой треугольника ABC, и следовательно, прямая CC_1 проходит через точку H. Остается провести прямую CH, и искомый перпендикуляр CC_1 будет построен.

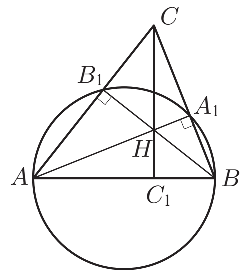


Рис. 351

З а д а ч а 2. *К данной окружности построить касательную, проходящую через данную точку вне окружности.*

Р е ш е н и е. Пусть даны окружность с центром O и точка A вне этой окружности. Допустим, что задача решена и AB — искомая касательная (рис. 352, *а*). Так как прямая AB перпендикулярна к радиусу OB, то решение задачи сводится к построению точки B окружности, для которой угол ABO — прямой.

Эту точку можно построить следующим образом: проведем отрезок OA и построим его середину O_1. Затем проведем окружность с центром O_1 радиуса O_1A (рис. 352, *б*). Эта окружность пересекает данную окружность в двух точках — B и B_1. Прямые AB и AB_1 — искомые касательные, так как $AB \perp OB$ и $AB_1 \perp OB_1$ (см. п. 109). Очевидно, задача имеет два решения.

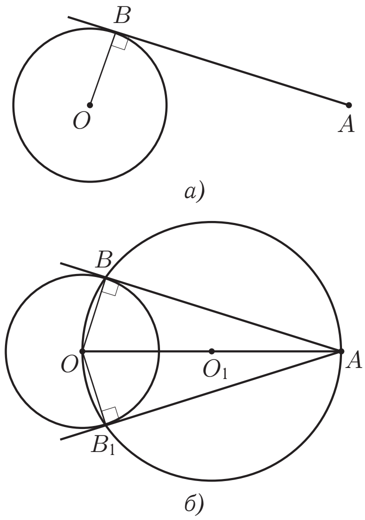


Рис. 352

Прежде, чем перейти к следующей задаче, сформулируем несколько определений.

Прямая, касающаяся каждой из двух данных окружностей, называется их *общей касательной*. Если при этом центры окружностей лежат по одну сторону от касательной, то касательная называется *внешней*, а если по разные стороны — *внутренней*. На рисунке 353 изображены две окружности, для которых AB и A_1B_1 — внешние касательные, а CD и C_1D_1 — внутренние.

З а д а ч а 3. *Даны две окружности, лежащие одна вне другой. Построить*: а) *их общие внешние касательные*; б) *их общие внутренние касательные*.

Решение. а) Рассмотрим две окружности радиусов r_1 и r_2 с центрами O_1 и O_2. В случае $r_1 = r_2$ решение задачи очевидно (рис. 354, *а*).

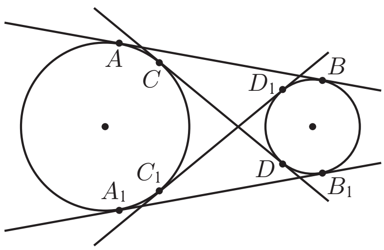


Рис. 353

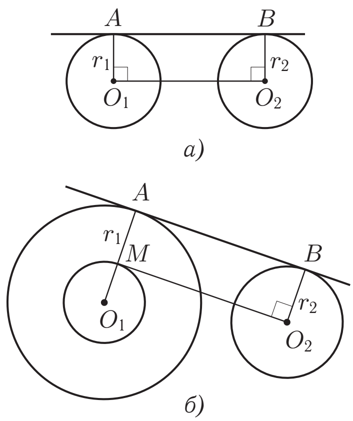


Рис. 354. а) $r_1 = r_2$; б) $r_1 > r_2$

Пусть $r_1 \neq r_2$, например $r_1 > r_2$ (рис. 354, *б*). Проведем окружность с центром O_1 радиуса $r_1 - r_2$ и построим к ней касательную O_2M (M — точка касания). Тогда $O_1M \perp O_2M$. Проведем через точку M радиус O_1A одной окружности, а через точку O_2 — радиус O_2B другой окружности, перпендикулярный к O_2M (см. рис. 354, *б*). Прямая AB — искомая касательная.

В самом деле, в четырехугольнике $MABO_2$ противоположные стороны MA и O_2B равны (по построению) и параллельны ($MA \perp O_2M$ и $O_2B \perp O_2M$). Следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм. Кроме того угол MO_2B — прямой. Значит, этот параллелограмм — прямоугольник. Поэтому его углы A и B также прямые. Но это и означает, что прямая AB — общая касательная двух окружностей. Из построения ясно, что эта касательная — внешняя. Вторая внешняя касательная строится аналогично.

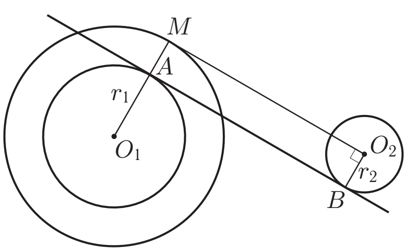


Рис. 355

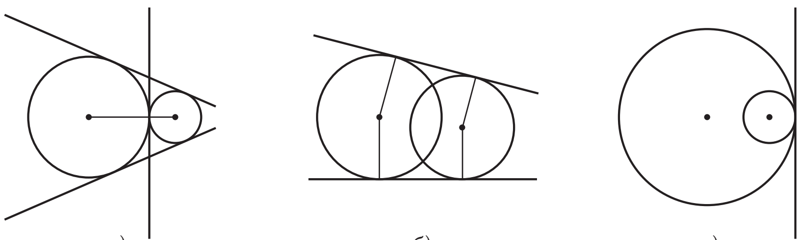
б) Пользуясь рисунком 355, решите эту задачу самостоятельно.

Замечание 1. Обратимся к рисунку 353. Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что $AB = A_1B_1$ и $CD = C_1D_1$, т. е.

отрезки двух внешних касательных равны;

отрезки двух внутренних касательных равны.

З а м е ч а н и е 2. В рассмотренном случае (одна окружность лежит вне другой) общих касательных четыре. Если окружности касаются друг друга извне, то общих касательных три (рис. 356, *а*) — две внешние и одна внутренняя, проходящая через точку касания окружностей

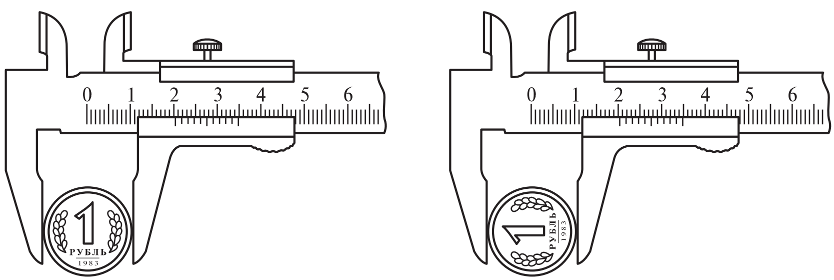


а) *б)* *в)*

Рис. 356

и перпендикулярная к линии центров. Две пересекающиеся окружности имеют только две общие внешние касательные (рис. 356, *б*); если окружности касаются друг друга изнутри, то они имеют только одну общую касательную (рис. 356, *в*); наконец, если одна окружность лежит внутри другой, то общих касательных у них вообще нет.

111. Кривые постоянной ширины. Если мы хотим измерить диаметр круглой монеты, то проще всего воспользоваться штангенциркулем (рис. 357, *а*). При этом достаточно одного измерения — любое другое измерение (рис. 357, *б*) даст тот же результат. Это свойство окружности называется *постоянством ширины*. Можно сказать, что ширина монеты (именно ее мы измеряем штангенциркулем) одна и та же в любом направлении. *Шириной произвольной линии в данном направлении* назовем расстояние между двумя опорными прямыми этой линии, перпендикулярными к данному направлению. Ширина линии в разных направлениях может, конечно, не быть одной и той же. Ясно, например,



а) *б)*

Рис. 357

что квадрат не обладает постоянством ширины (рис. 358). А обладает ли этим свойством еще какая-нибудь линия, кроме окружности?

Поставим вопрос иначе. У нас в руках монета, про которую неизвестно, круглая она или нет (некруглые монеты действительно бывают, например, в Великобритании). Можно ли, пользуясь только штангенциркулем, достоверно установить, что она круглая? Почти любой человек, подумав, даст утвердительный ответ. И ошибется! На самом деле кривых постоянной ширины бесконечно много. Поэтому

постоянство ширины окружности не является ее характеристическим свойством.

Замкнутая выпуклая линия называется *кривой постоянной ширины*, если ее ширина в любом направлении одна и та же. Самый простой пример кривой постоянной ширины, отличной от окружности, получается, если взять равносторонний треугольник ABC и заменить его стороны тремя дугами окружностей радиуса AB с центрами A, B и C (рис. 359). Ширина полученного криволинейного «треуголь-

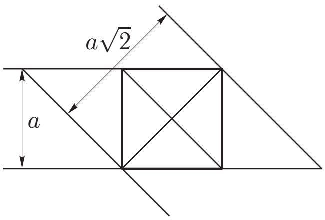


Рис. 358

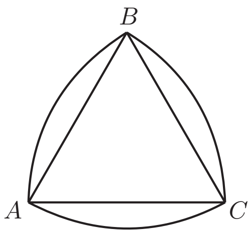


Рис. 359

ника» постоянна и равна AB (докажите это). Примечательно, что этот пример впервые был найден в технике. Его обнаружил в конце XIX века французский механик Франц Рело (1829–1905), который, классифицируя различные механизмы, заметил удивительный факт: построенная им фигура может свободно вращаться внутри квадрата, постоянно соприкасаясь с его сторонами (рис. 360). При этом вершины «треугольника» обходят почти весь периметр квадрата, лишь немного не доходя до его вершин. Рело назвал свою фигуру «искривленный треугольник». Теперь ее называют *треугольником Рело*.

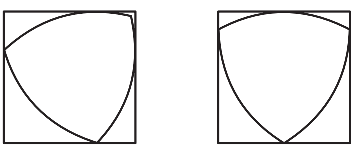


Рис. 360

Треугольник Рело — негладкая кривая, он имеет три угловые точки. Однако их можно «загладить». Для этого нужно каждую из сторон исходного треугольника ABC продолжить на один тот же отрезок x, а затем провести шесть дуг с центрами A, B и C: три — радиуса $AB + x$, а другие три — радиуса x (рис. 361). Полученная гладкая кривая также будет иметь постоянную ширину (попробуйте ее найти).

Как уже отмечалось, кривых постоянной ширины бесконечно много. Среди них есть и несимметричные кривые, есть кривые, никакая часть которых не является дугой окружности, и т. д. Обо всем этом и многом другом, связанном с кривыми постоянной ширины, можно прочитать в книге Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры» (М.: Физматгиз, 1962).

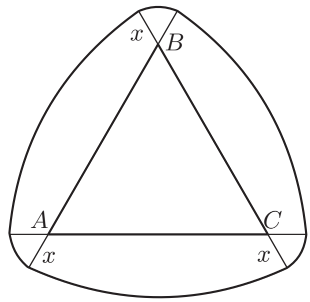


Рис. 361

Одно из самых неожиданных свойств кривых постоянной ширины установил французский математик С. Барбье:

любые две кривые одинаковой постоянной ширины имеют равные длины!

Таким образом, если помимо штангенциркуля у нас есть нить, позволяющая измерить длину кривой, мы все равно не сможем путем измерений отличить одну кривую постоянной ширины от другой.

Доказать *теорему Барбье* мы пока не можем, так как не имеем отчетливого представления о том, что такое длина кривой. Поэтому сделаем в нашем блокноте запись: *как доказать теорему Барбье?*

Отметим еще одно общее свойство всех кривых постоянной ширины:

параллелограмм, описанный около кривой постоянной ширины, является ромбом.

В самом деле, высоты этого параллелограмма равны (каждая из них равна ширине фигуры), поэтому равны и стороны.

Может возникнуть вопрос: а для чего можно использовать кривые постоянной ширины? Один из ответов напрашивается сам собой. Каждый из нас не раз видел, как перетаскивают с места на место очень тяжелые предметы. Их устанавливают на плоскую подставку с подложенными под нее цилиндрическими катками (рис. 362). Затем толкают предмет и по мере освобождения задних катков переносят их и кладут спереди. Преимущество цилиндрических катков перед, например, шестигранными состоит в том, что предмет в процессе движения не испытывает перемещений вверх-вниз, что потребовало бы дополнительных усилий со стороны толкающих.

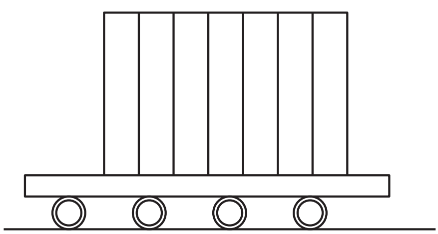


Рис. 362

Но с этой точки зрения катки, имеющие сечением фигуру, ограниченную кривой постоянной ширины, ничуть не хуже! На практике, впрочем, они вряд ли используются — ведь их еще нужно изготовить.

И все же если не полениться и сделать такую модель, то ею можно ошеломить всех своих друзей (рис. 363).

А вот другой пример. В 1914 г. английский инженер Г. Д. Уаттс изобрел сверло, позволяющее делать квадратные отверстия. В сечении это сверло представляет собой треугольник Рело с вырезанными частями, так что острые края могут легко врезаться в металл (рис. 364). Перед началом работы сверло помещается внутрь специального шаблона — металлической пластины с вырезанным в ней отверстием в виде квадрата со стороной, равной ширине сверла. В процессе работы центр сверла, конечно, не остается на месте, поэтому для сверла Уаттса нужен специальный плавающий патрон. Такой патрон был разработан и запатентован одной из фирм, и в 1916 г. фирма приступила к производству сверл Уаттса.

Рис. 363

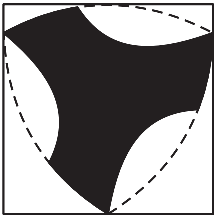


Рис. 364

Задачи

369. Докажите, что для всякой хорды AB данной окружности отношение $AB^2 : AD$, где AD — расстояние от точки A до касательной к окружности в точке B, имеет одно и то же значение.

370. Две окружности касаются друг друга изнутри в точке A. Отрезок AB является диаметром большей окружности. Хорда BD большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Докажите, что отрезок AC — биссектриса треугольника ABD.

371*. Через данную точку M проведены всевозможные прямые, на которых данная окружность с центром O отсекает отрезки, являющиеся ее хордами. Что представляет собой множество середин таких хорд, если точка M лежит: а) вне окружности; б) внутри окружности и не совпадает с центром; в) на окружности.

372. Отрезок AB является диаметром окружности с центром O. На каждом радиусе OM окружности отложен отрезок OX, равный перпендикуляру, проведенному из точки M к прямой AB. Что представляет собой множество точек X?

373. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите CD, если $AB = a$, а площадь четырехугольника AO_1BO_2 равна S.

374. К двум окружностям проведены две общие внешние касательные, A, B, C, D — точки касания. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

375. К двум окружностям проведены две общие внешние касательные и одна внутренняя. Внутренняя касательная пересекает внешние в точках A, B и касается окружностей в точках A_1, B_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1$.

376. К двум окружностям, касающимся друг друга извне, проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Докажите, что окружность с диаметром AB касается линии центров данных окружностей.

377*. На каждой из сторон выпуклого четырехугольника отмечены две точки. Эти точки соединены отрезками так, как показано на рисунке 365. Известно, что в каждый из заштрихованных четырехугольников можно вписать окружность. Докажите, что и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.

378*. Постройте прямую, пересекающую две данные концентрические окружности так, чтобы ее часть, заключенная внутри внешней окружности, была вдвое больше части, заключенной внутри внутренней окружности. При каком условии задача имеет решение?

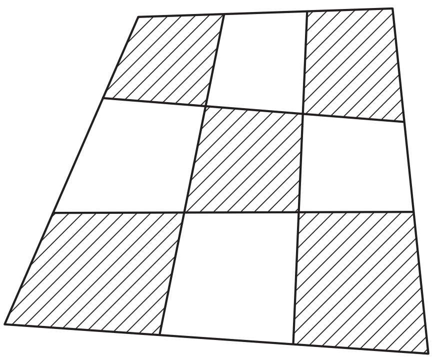


Рис. 365

379. На продолжении диаметра окружности постройте точку, для которой отрезок касательной, проведенной из нее к окружности (с концами в этой точке и точке касания), равен диаметру.

380. Постройте прямую, проходящую через данную точку вне данной окружности так, чтобы ее часть, заключенная внутри окружности, была равна данному отрезку.

381*. Постройте две параллельные хорды, проходящие через две данные точки данной окружности так, чтобы их сумма равнялась данному отрезку.

382. Докажите, что любая кривая постоянной ширины d может свободно вращаться внутри квадрата со стороной d, постоянно соприкасаясь со всеми его сторонами.

383. Дан выпуклый пятиугольник, все стороны которого равны, и все углы также равны. Проведите 5 дуг окружностей через его вершины так, чтобы кривая, образованная дугами, имела постоянную ширину и была отлична от окружности.

384*. Дан выпуклый n-угольник, все стороны которого равны, и все углы также равны. Какому условию должно удовлетворять число n, чтобы, проведя n дуг окружностей через его вершины, можно было получить кривую постоянной ширины, отличную от окружности?

385. Дан выпуклый пятиугольник, все стороны которого равны, и все углы также равны. Проведите 10 дуг окружностей с центрами в его вершинах так, чтобы образованная этими дугами кривая была гладкой кривой (т. е. без угловых точек) постоянной ширины, отличной от окружности.

386*. Дан треугольник. Проведите 6 дуг окружностей с центрами в его вершинах так, чтобы образованная ими кривая имела постоянную ширину.

387. Докажите, что никакие две точки кривой постоянной ширины d не могут находиться друг от друга на расстоянии, большем d.

388. Докажите, что: а) любая опорная прямая к кривой постоянной ширины имеет с этой кривой только одну общую точку; б) прямая, соединяющая общие точки кривой постоянной ширины и двух ее параллельных опорных прямых, перпендикулярна к этим опорным прямым.

389. Как, зная одну дугу кривой постоянной ширины d, заключенную между двумя параллельными опорными прямыми, начертить другую ее дугу, заключенную между этими прямыми, используя оба края линейки ширины d?

§ 2. Углы, связанные с окружностью

112. Вписанные углы. Дугу окружности удобно измерять в градусах. Если дуга AB окружности с центром O меньше полуокружности или является полуокружностью, то ее *градусная мера* считается равной градусной мере *центрального угла* AOB, т. е. угла с вершиной в центре окружности; если же дуга AB больше полуокружности, то ее градусная мера считается равной $360^\circ - \angle AOB$ (см. рис. 366).

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом*. Обратимся к рисунку 367, *а*. Мы видим, что вписанный угол AMB вдвое меньше

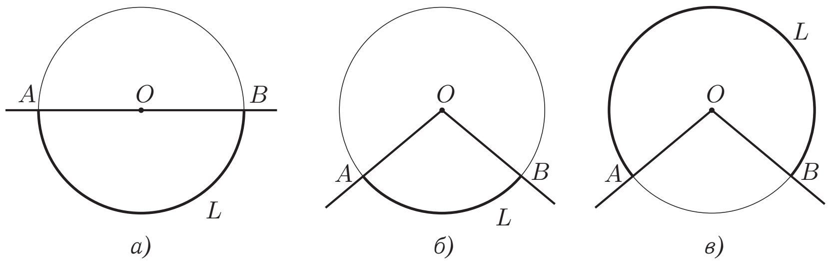


Рис. 366. а) $\smile ALB = 180^\circ$; б) $\smile ALB = \angle AOB$; в) $\smile ALB = 360^\circ - \angle AOB$;

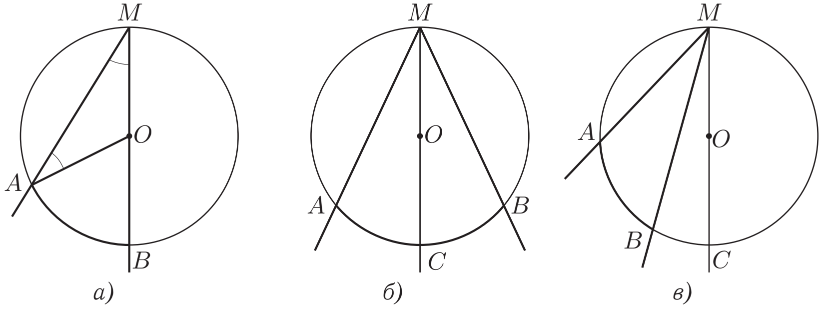


Рис. 367

центрального угла AOB (поскольку $\angle AOB$ — внешний угол равнобедренного треугольника AOM). Таким образом, угол AMB измеряется половиной дуги AB. Теперь ясно, что и любой

вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (пользуясь рисунками 367, *б, в*, докажите это самостоятельно).

Следствие. *Сумма противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника* равна 180° (рис. 368).

Указанное *свойство вписанного угла* часто используется при решении задач. Приведем три примера.

Задача 1. *Доказать, что площадь S треугольника ABC выражается формулой*:

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, R — радиус описанной окружности.

Решение. Пусть, например, угол A — острый. Проведем диаметр CD описанной окружности (рис. 369). Поскольку в треугольниках ABC и DBC углы A и D равны (эти вписанные углы опираются на одну и ту же дугу BC), то площади треугольников относятся как

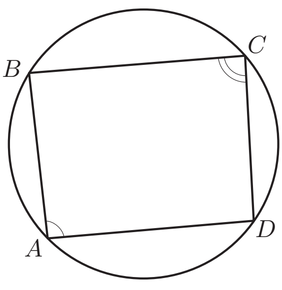


Рис. 368. $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \smile BCD + \frac{1}{2} \smile DAB = \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$

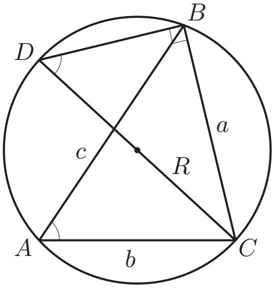


Рис. 369

произведения сторон, заключающих указанные углы:

$$\frac{S}{S_{BCD}} = \frac{bc}{DC \cdot DB}.$$

Но $DC = 2R$, $S_{BCD} = \frac{1}{2}a \cdot DB$ (объясните, почему). Следовательно,

$$S = \frac{bc}{DC \cdot DB} S_{BCD} = \frac{abc}{4R}.$$

Задача 2. *Доказать, что биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке D, лежащей на серединном перпендикуляре к стороне BC.*

Решение. Поскольку луч AD — биссектриса угла BAC, то дуги BD и DC равны: $\smile BD = \smile DC$ (рис. 370). Следовательно, $BD = DC$ (это следует из того, что сегменты с указанными дугами можно совместить наложением). Поэтому точка D лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, что и требовалось доказать.

Замечание. Если E — вторая точка пересечения указанного серединного перпендикуляра с описанной окружностью, и точки A и E не совпадают, то луч AE — биссектриса внешнего угла треугольника ABC (объясните, почему).

Задача 3. *Доказать, что биссектриса угла между неравными сторонами треугольника делит угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведенными из общей вершины указанных сторон, пополам.*

Решение. Рассмотрим треугольник ABC ($AB \neq AC$), из вершины A которого проведены высота AH, биссектриса AD и радиус AO описанной окружности. Докажем, что луч AD — биссектриса угла OAH.

Продолжим биссектрису AD до пересечения с описанной окружностью в точке M (рис. 371). Углы OMA и OAM при основании равнобедренного треугольника OAM равны, причем эти углы — острые.

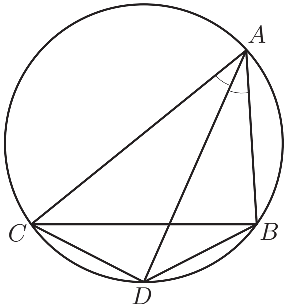


Рис. 370

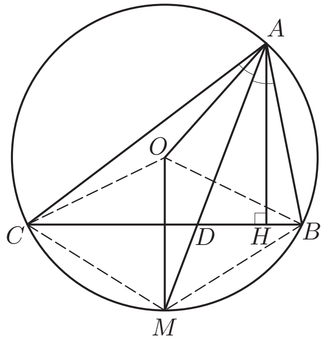


Рис. 371

Поскольку $BM = MC$ (см. задачу 2) и $BO = OC$, то прямая OM является серединным перпендикуляром к отрезку BC.

Прямые OM и AH, будучи перпендикулярными к прямой BC, параллельны. Поэтому если углы OMA и DAH — накрест лежащие, то $\angle DAH = \angle OMA < 90^\circ$; если же эти углы — односторонние, то $\angle DAH = 180^\circ - \angle OMA > 90^\circ$. Но угол DAH является острым углом прямоугольного треугольника DAH. Следовательно, $\angle DAH = \angle OMA = \angle OAM$, причем лучи AH и AO лежат по разные стороны от прямой AD. Это и означает, что луч AD — биссектриса угла OAH. Утверждение доказано.

113. Углы между хордами и секущими. Выясним, как определить величину угла между: 1^0 двумя пересекающимися хордами; 2^0 двумя пересекающимися секущими? Ответы на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема. *Угол между двумя пересекающимися хордами окружности измеряется полусуммой заключенных между ними дуг; угол между двумя секущими, которые пересекаются вне окружности, измеряется полуразностью заключенных между ними дуг.*

Доказательство. 1^0. Обратимся к рисунку 372. На нем изображены пересекающиеся в точке M хорды AB и CD, между которыми заключены дуги с градусными мерами α и β. Интересующий нас угол AMC — внешний угол треугольника MBC, поэтому он равен сумме углов B и C этого треугольника. Но углы B и C — вписанные. Следовательно, $\angle B = \frac{\alpha}{2}$, $\angle C = \frac{\beta}{2}$, а значит, $\angle AMC = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

2^0. Обратимся к рисунку 373, на котором изображены две секущие, проведенные через точку M. Градусные меры дуг, заключенных внутри угла BMD, обозначим буквами α и β так, как показано на рисунке. Проведем отрезок AD. Угол BAD — внешний угол треугольника ADM, поэтому $\angle BAD = \angle ADM + \angle AMD$. Но $\angle BAD = \frac{\beta}{2}$, $\angle ADM = \frac{\alpha}{2}$. Отсюда находим: $\angle AMD = \angle BMD = \frac{\beta - \alpha}{2}$. Теорема доказана.

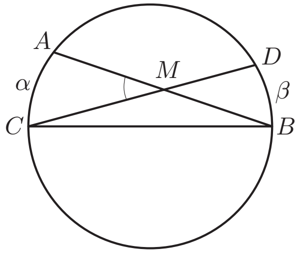


Рис. 372

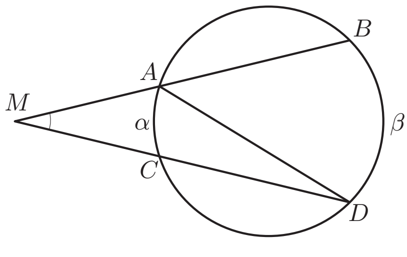


Рис. 373

З а м е ч а н и е. Пользуясь этой теоремой, нетрудно доказать методом от противного, что если сумма двух противоположных углов выпуклого четырехугольника равна 180°, то около этого четырехугольника можно описать окружность (проведите доказательство самостоятельно). Таким образом, свойство, указанное в следствии п. 112, является *характеристическим свойством вписанного в окружность четырехугольника*:

около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

Воспользуемся доказанной теоремой для решения такой задачи.

З а д а ч а 4. *Доказать, что точка пересечения продолжения биссектрисы, проведенной из вершины треугольника, с описанной окружностью равноудалена от двух других вершин и центра вписанной окружности.*

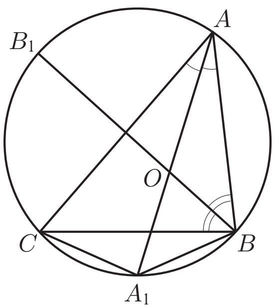


Рис. 374

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник ABC и проведем биссектрисы его углов A и B до пересечения с описанной окружностью в точках A_1 и B_1 соответственно; центр вписанной окружности обозначим буквой O (рис. 374). Докажем, что $A_1B = A_1C = A_1O$.

Поскольку лучи AA_1 и BB_1 — биссектрисы углов A и B, то $\smile BA_1 = \smile A_1C$, $A_1B = A_1C$ (см. задачу 2 п. 112) и $\smile CB_1 = \smile B_1A$. Согласно теореме об угле между пересекающимися хордами имеем:

$$\angle BOA_1 = \frac{1}{2}(\smile BA_1 + \smile AB_1) = \frac{1}{2}(\smile A_1C + \smile CB_1).$$

Но $\frac{1}{2}(\smile A_1C + \smile CB_1) = \angle OBA_1$ (объясните, почему). Тем самым, $\angle BOA_1 = \angle OBA_1$. Отсюда следует, что треугольник OA_1B — равнобедренный, т. е. $A_1O = A_1B$. Итак, $A_1O = A_1B = A_1C$, что и требовалось доказать.

114. Угол между касательной и хордой. Докажем теорему об угле между касательной и хордой.

Т е о р е м а. *Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной заключенной в нем дуги.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть AB — данная хорда, CC_1 — касательная, проходящая через точку A (рис. 375). Если AB — диаметр (рис. 375, *а*), то заключенная внутри угла BAC (и угла BAC_1) дуга является полуокружностью. С другой стороны, углы BAC и BAC_1 в этом случае — прямые, поэтому утверждение теоремы верно.

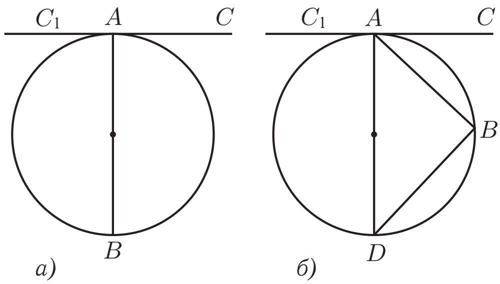


Рис. 375

Пусть теперь хорда AB не является диаметром. Ради определенности будем считать, что точки C и C_1 на касательной выбраны так, что угол CAB — острый, и обозначим буквой α величину заключенной в нем дуги (рис. 375, *б*). Проведем диаметр AD и заметим, что треугольник ABD — прямоугольный, поэтому $\angle ADB = 90^\circ - \angle DAB = \angle BAC$. Поскольку угол ADB — вписанный, то $\angle ADB = \frac{a}{2}$, а значит, и $\angle BAC = \frac{a}{2}$. Итак, угол BAC между касательной AC и хордой AB измеряется половиной заключенной в нем дуги.

Аналогичное утверждение верно в отношении угла BAC_1. Действительно, углы BAC и BAC_1 — смежные, поэтому $\angle BAC_1 = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{360^\circ - \alpha}{2}$. С другой стороны, $(360^\circ - \alpha)$ — это величина дуги ADB, заключенной внутри угла BAC_1. Теорема доказана.

Решим теперь такую задачу.

Задача 5. *Прямая a касается описанной около треугольника ABC окружности в точке A, отрезок AD — биссектриса этого треугольника. Доказать, что односторонние углы, образованные при пересечении прямых a и BC секущей AD, равны.*

Решение. Отметим на прямой a точку E так, как показано на рисунке 376, и докажем, что односторонние углы EAD и BDA равны. Для этого продолжим биссектрису AD до пересечения с описанной окружностью в точке M. Поскольку луч AM — биссектриса угла A, то дуги BM и CM равны. Следовательно,

$$\angle EAD = \frac{1}{2} \smile ABM = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CM) = \angle BDA,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Эта задача непосредственно связана с задачей 3 п. 112. Подумайте, какая связь между указанными задачами.

115. Теорема о квадрате касательной. Важным следствием из теоремы об угле между касательной и хордой является *теорема о квадрате касательной*.

Т е о р е м а. *Если через точку M проведены секущая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная MK (K — точка касания), то*

$$MA \cdot MB = MK^2.$$

Кратко эту теорему формулируют так:

произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем отрезки AK и BK (рис. 377). Треугольники AKM и BKM подобны: угол M у них общий, а углы AKM и B равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги AK. Следовательно, $\dfrac{MK}{MA} = \dfrac{MB}{MK}$ или $MA \cdot MB = MK^2$. Теорема доказана.

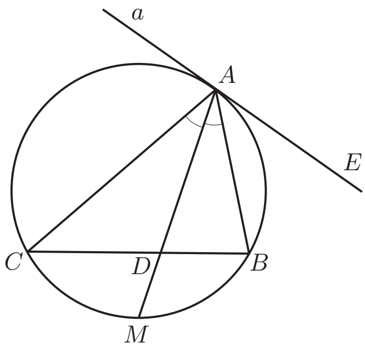


Рис. 376

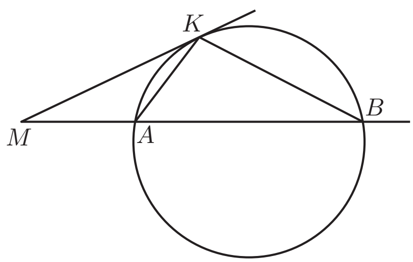


Рис. 377

З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы следует, что если точка M лежит вне окружности и через нее проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и B, то произведение $MA \cdot MB$ не зависит от положения секущей — это произведение равно квадрату касательной, проведенной из точки M. С другой стороны, квадрат касательной равен $OM^2 - R^2$, где O — центр окружности, R — ее радиус (рис. 378). Итак,

$$MA \cdot MB = OM^2 - R^2. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь точку M, лежащую внутри окружности. Проведем через нее какую-нибудь хорду AB. Нетрудно заметить, что произведение $MA \cdot MB$ не зависит от положения хорды. Оно равно произведению отрезков MC и MD диаметра CD — это следует из подобия треугольников AMC и BMD, т. е. равно $(R + OM) \cdot (R - OM) = R^2 - OM^2$ (см. рис. 379). Итак, в этом случае

$$MA \cdot MB = R^2 - OM^2. \tag{2}$$

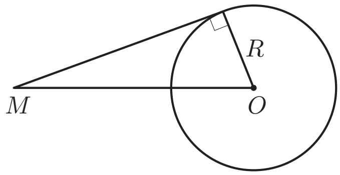


Рис. 378

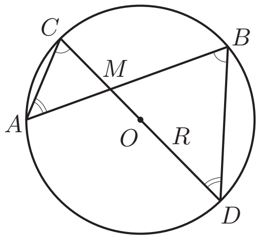


Рис. 379. $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$; $MA \cdot MB = MC \cdot MD = (R - OM)(R + OM)$

Формулы (1) и (2) похожи друг на друга. Если воспользоваться обозначениями, принятыми в п. 99, то их можно даже объединить в одну:

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - R^2.$$

Отметим, что эта формула справедлива и в том случае, когда точка M лежит на окружности и, следовательно, совпадает с одной из точек A и B. В этом случае обе части равенства равны нулю.

Величина

$$\sigma = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - R^2$$

называется *степенью точки M относительно данной окружности.*

116. Теорема Паскаля. Теорема, которую мы сейчас докажем, связана с именем французского математика, физика и философа Блеза Паскаля (1623–1662). В ней устанавливается весьма неожиданное свойство шестиугольника, вписанного в окружность.

Теорема. *Если противоположные стороны вписанного в окружность шестиугольника не параллельны, то точки пересечения продолжений этих сторон лежат на одной прямой.*

Доказательство. Рассмотрим вписанный в окружность шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и продолжим его противоположные стороны A_1A_2 и A_4A_5 до пересечения в точке B_1, стороны A_2A_3 и A_5A_6 — до пересечения в точке B_2, а стороны A_3A_4 и A_1A_6 — до пересечения в точке B_3 (рис. 380). Кроме того, продолжим стороны A_1A_2 и A_3A_4 до пересечения в точке C_1, стороны A_3A_4 и A_5A_6 — до пересечения в точке C_2, а стороны A_5A_6 и A_1A_2 — до пересечения в точке C_3.

Рассмотрим треугольник $C_1C_2C_3$. На сторонах или продолжениях сторон этого треугольника взяты точки B_1, A_4 и A_5, лежащие на одной прямой. Следовательно, по теореме Менелая $\dfrac{\overline{C_3B_1}}{\overline{B_1C_1}} \cdot \dfrac{\overline{C_1A_4}}{\overline{A_4C_2}} \cdot \dfrac{\overline{C_2A_5}}{\overline{A_5C_3}} = -1$. Учитывая, что точки A_4 и A_5 лежат на сторонах треугольника, это равенство можно переписать так:

$$\frac{\overline{C_3B_1}}{\overline{B_1C_1}} \cdot \frac{C_1A_4}{A_4C_2} \cdot \frac{C_2A_5}{A_5C_3} = -1.$$

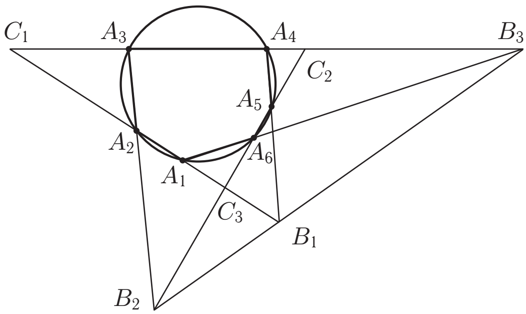


Рис. 380

Аналогично, рассматривая точки B_2, A_2 и A_3, а также точки B_3, A_1 и A_6, лежащие на сторонах или продолжениях сторон треугольника $C_1C_2C_3$, мы получаем еще два равенства:

$$\frac{\overline{C_2B_2}}{\overline{B_2C_3}} \cdot \frac{C_3A_2}{A_2C_1} \cdot \frac{C_1A_3}{A_3C_2} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{\overline{C_1B_3}}{\overline{B_3C_2}} \cdot \frac{C_2A_6}{A_6C_3} \cdot \frac{C_3A_1}{A_1C_1} = -1.$$

Перемножим полученные равенства:

$$\frac{\overline{C_3B_1}}{\overline{B_1C_1}} \cdot \frac{\overline{C_1B_3}}{\overline{B_3C_2}} \cdot \frac{\overline{C_2B_2}}{\overline{B_2C_3}} \cdot \frac{C_1A_4}{A_2C_1}\frac{C_1A_3}{A_1C_1}\frac{C_2A_5}{A_4C_2}\frac{C_2A_6}{A_3C_2}\frac{C_3A_2}{A_5C_3}\frac{C_3A_1}{A_6C_3} = -1.$$

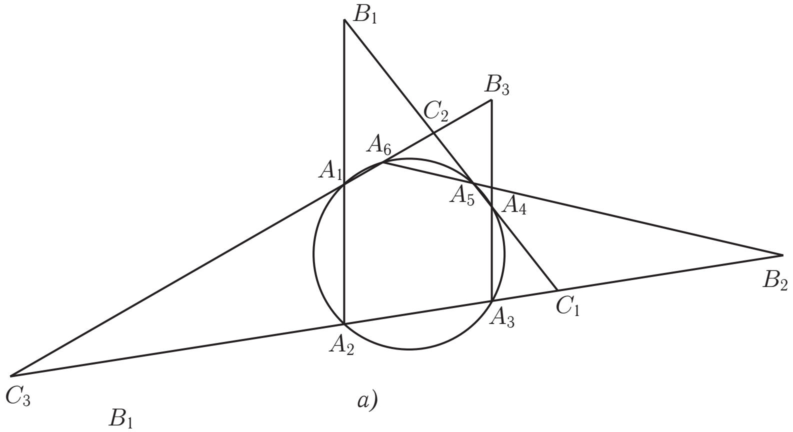
Но

$$C_1A_4 \cdot C_1A_3 = A_2C_1 \cdot A_1C_1 = \sigma_1,$$
$$C_2A_5 \cdot C_2A_6 = A_4C_2 \cdot A_3C_2 = \sigma_2,$$
$$C_3A_2 \cdot C_3A_1 = A_5C_3 \cdot A_6C_3 = \sigma_3,$$

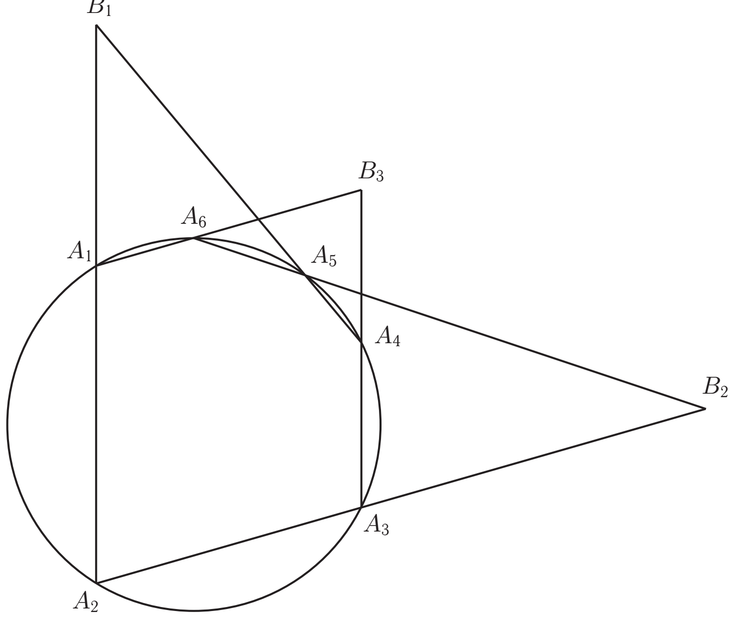
где σ_1, σ_2 и σ_3 — степени точек C_1, C_2 и C_3 относительно описанной окружности. Следовательно, $\frac{\overline{C_3B_1}}{\overline{B_1C_1}} \cdot \frac{\overline{C_1B_3}}{\overline{B_3C_2}} \cdot \frac{\overline{C_2B_2}}{\overline{B_2C_3}} = -1$, а значит, точки B_1, B_2 и B_3 лежат на одной прямой. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. При доказательстве этой теоремы мы предположили, что прямые A_1A_2 и A_3A_4, A_3A_4 и A_5A_6, A_5A_6 и A_1A_2 пересекаются. Может, однако, случиться, что какие-нибудь две из них, например A_1A_2 и A_3A_4, параллельны. Если при этом прямые A_2A_3 и A_4A_5, A_4A_5 и A_6A_1, A_6A_1 и A_2A_3 не параллельны, то в качестве точек C_1, C_2 и C_3 следует взять точки их пересечения (рис. 381, *а*). Если же $A_1A_2 \parallel A_3A_4$ и $A_2A_3 \parallel A_6A_1$ (рис. 381, *б*), то наше рассуждение применить нельзя, требуется другое доказательство. Пользуясь рисунком 381, *б*, проведите это доказательство самостоятельно.

117. Вневписанные окружности треугольника. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Проведем биссектрису угла A и прямую, содержащую биссектрису внешнего угла при вершине B (рис. 382). Они



а)



б)

Рис. 381. а) $A_1A_2 \parallel A_3A_4$; б) $A_1A_2 \parallel A_3A_4$, $A_2A_3 \parallel A_6A_1$

пересекаются (докажите это) в некоторой точке O_a. Поскольку точка O_a лежит на биссектрисе угла A, то она равноудалена от прямых AB и AC. По аналогичной причине она равноудалена от прямых AB и BC. Следовательно, она равноудалена и от прямых AC и BC, а значит, лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла при вершине C (объясните, почему). Итак, *прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника при двух вершинах, и биссектриса угла треугольника при третьей вершине пересекаются в одной точке.*

Поскольку точка O_a равноудалена от сторон внешних углов при вершинах B и C, то окружность с центром O_a, касающаяся стороны BC, касается также и продолжений сторон AB и AC (рис. 383). Эта окружность называется *вневписанной окружностью* треугольника ABC. Ясно, что любой треугольник имеет три вневписанные окружности (рис. 384).

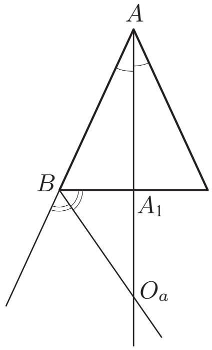


Рис. 382

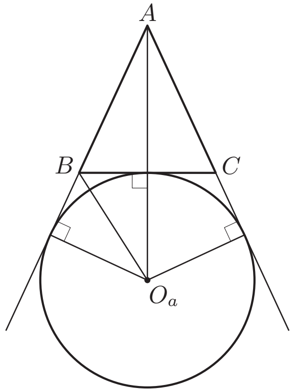


Рис. 383

Вспомним один из вопросов, записанных в нашем блокноте: *верно ли, что если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC, причем $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$, $\angle A_1B_1C = \angle C_1B_1A$ и $\angle A_1C_1B = \angle B_1C_1A$, то точки A_1, B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC*? Теперь мы можем ответить на этот вопрос утвердительно. В самом деле, из равенства $\angle A_1B_1C = \angle C_1B_1A$ следует, что луч B_1A — биссектриса внешнего угла треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 385). По аналогичной причине луч C_1A — биссектриса другого внешнего угла этого треугольника. Поэтому точка A — центр вневписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, и, следовательно, луч A_1A — биссектриса угла A_1. Но это означает, что смежные углы AA_1B и AA_1C равны, т. е. AA_1 — высота треугольника ABC. Аналогично доказывается, что BB_1 и CC_1 — высоты этого треугольника.

Отметим, что

прямая, проведенная через вершину треугольника и точку, в которой вневписанная окружность касается противоположной стороны, делит периметр треугольника пополам.

Пользуясь рисунком 386, убедитесь в этом самостоятельно. Вспомнив теорему 2 п. 108, мы приходим к такому выводу:

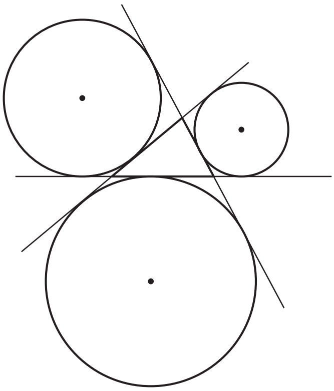


Рис. 384

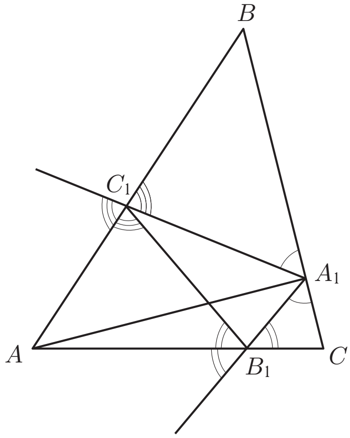


Рис. 385

три отрезка, каждый из которых соединяет вершину треугольника с точкой касания противоположной стороны с вневписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

Решим теперь несколько задач, связанных с вневписанной окружностью.

З а д а ч а 6. *Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, а точка O_a — центр его вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Доказать, что точки O, O_a, B и C лежат на одной окружности, центром которой является точка пересечения отрезка OO_a и окружности, описанной около треугольника ABC.*

Р е ш е н и е. Обратимся к рисунку 387. Углы OBO_a и OCO_a, будучи углами между биссектрисами смежных углов, — прямые, поэтому

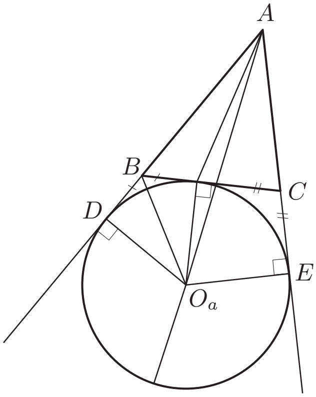


Рис. 386

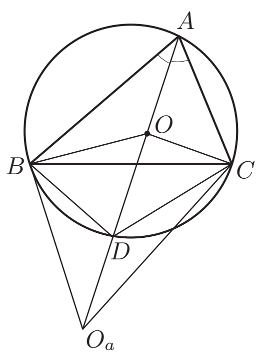


Рис. 387

точки O, O_a, B и C лежат на одной окружности с диаметром OO_a. Пусть D — точка пересечения отрезка OO_a и окружности, описанной около треугольника ABC. Поскольку луч AD является биссектрисой угла A, то $DB = DC = DO$ (см. задачу 4 п. 113). Следовательно, точка D — центр окружности, описанной около четырехугольника $BOCO_a$. Утверждение доказано.

Задача 7. *Доказать, что точки, в которых вписанная и вневписанная окружности касаются стороны треугольника, симметричны относительно середины этой стороны.*

Решение. Вновь обратимся к рисунку 387. Поскольку луч AD является биссектрисой угла A, то $BD = DC$ (см. задачу 2 п. 112), т. е. треугольник BCD — равнобедренный. Проведем из точек O, D и O_a перпендикуляры к стороне BC и обозначим их основания буквами P, Q и R соответственно (рис. 388). Точки P и R являются, очевидно, точками касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC, а точка Q — серединой этой стороны (так как отрезок DQ — высота равнобедренного треугольника BCD). Но $OD = DO_a$. Следовательно, $PQ = QR$, т. е. точки P и R симметричны относительно точки Q, что и требовалось доказать.

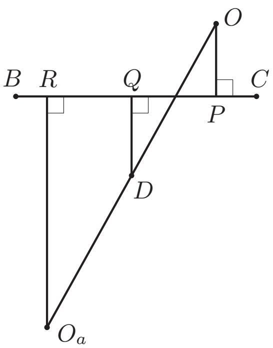


Рис. 388

Задача 8. *Через концы биссектрисы AD треугольника ABC проведены две параллельные прямые, одна из которых — касательная к описанной около треугольника ABC окружности. Доказать, что вторая прямая является общей касательной вписанной и вневписанной окружностей.*

Решение. Проведем из центра O вписанной окружности перпендикуляры OH и OK к стороне BC и второй из проведенных прямых (рис. 389). По условию накрест лежащие углы ADK и 1 равны. Углы 1 и ADH также равны (см. задачу 5 п. 114), поэтому $\angle ADK = \angle ADH$. Следовательно, прямоугольные треугольники ODK и ODH равны по гипотенузе и острому углу, а значит, $OK = OH$. Таким образом, расстояние от прямой DK до центра O вписанной окружности равно радиусу OH этой окружности. Из этого следует, что прямая DK касается вписанной окружности. Аналогично доказывается, что прямая DK касается вневписанной окружности и, тем самым, является общей касательной указанных окружностей.

Задача 9. *Доказать, что площадь S треугольника ABC выражается формулой*

$$S = r_a(p - a), \tag{3}$$

где r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны $BC = a$, p — полупериметр треугольника.

Решение. Пусть $AC = b$, $AB = c$ (рис. 390). Тогда

$$S = S_{ACO_a} + S_{ABO_a} - S_{BCO_a} = \frac{1}{2}b \cdot r_a + \frac{1}{2}c \cdot r_a - \frac{1}{2}a \cdot r_a = r_a(p-a).$$

Замечание. Перемножая левые и правые части равенств $S = r_a(p-a)$, $S = r_b(p-b)$, $S = r_c(p-c)$, $S = rp$ (r — радиус вписанной окружности), и учитывая, что согласно формуле Герона $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, получаем еще одну красивую формулу для площади треугольника: $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$.

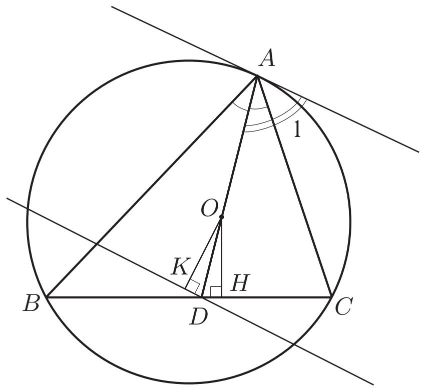


Рис. 389

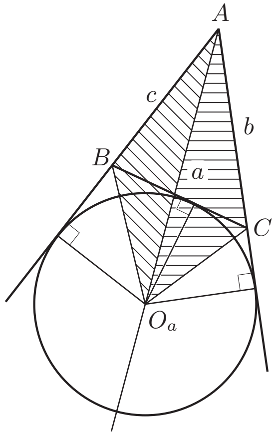


Рис. 390

Задачи

390. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность с центром O в точке D. Докажите, что прямая DO делит сторону AB пополам.

391. Отрезок AH — высота треугольника ABC. Из вершин B и C проведены перпендикуляры BB_1 и CC_1 к прямой, проходящей через точку A. Докажите, что треугольники ABC и HB_1C_1 подобны.

392. Вершины P и E равностороннего треугольника APE лежат на сторонах BC и CD прямоугольника $ABCD$, точки K и M — середины сторон AE и AP. Докажите, что треугольники BKC и CMD — равносторонние.

393*. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P. Докажите, что точка C перемещается при этом по отрезку.

394. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через эти точки проведены секущие MAP и CBD (точки M и C лежат на одной окружности, а точки P и D — на другой). Докажите, что если секущие не пересекаются внутри окружности, то $MC \parallel PD$.

395. Стороны треугольника равны a, b и c, а радиусы вписанной и описанной окружностей равны r и R. Докажите, что $\dfrac{abc}{a+b+c} = 2rR$.

396. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках L, M и N. Докажите, что отношение площади треугольника LMN к площади треугольника ABC равно отношению радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, к диаметру окружности, описанной около этого треугольника.

397. Из точки M, лежащей внутри данного острого угла с вершиной A, проведены перпендикуляры MP и ME к сторонам этого угла. Известно, что $AP = a$, $AE = b$, $AM = c$. Найдите расстояние от точки A до прямой PE.

398. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке; K, L, M и N — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что прямые KM и LN взаимно перпендикулярны.

399. Дан треугольник ABC. а) Биссектрисы углов A, B, C пересекают описанную около треугольника ABC окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно; докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 содержат высоты треугольника $A_1B_1C_1$. б) Продолжения высот треугольника, проведенных из его вершин A, B, C, пересекают описанную около него окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно; докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 содержат биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

400. Точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD, $\angle ABD = \angle ACD$. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

401. Диагонали равнобедренной трапеции с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O описанной около нее окружности лежит на окружности, описанной около треугольника APB.

402. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке. Точка M — середина дуги AB, K — точка пересечения хорд AB и MD, E — точка пересечения хорд AB и MC. Докажите, что около четырехугольника $CDKE$ можно описать окружность.

403. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы углов. Докажите, что четыре точки пересечения биссектрис углов A и C с биссектрисами углов B и D лежат на одной окружности.

404. Внутри угла ABC равностороннего треугольника ABC взята точка M так, что $\angle BMC = 30^\circ$, $\angle BMA = 17^\circ$. Найдите углы BAM и BCM.

405*. Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает прямую AC в точке M, а серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает прямую AB в точке P. Известно, что $MP = BC$ и прямая MP перпендикулярна к прямой BC. Найдите углы треугольника ABC.

406*. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и K, P — точка пересечения прямой MK и биссектрисы угла B. Докажите, что $\angle BPC = 90^\circ$.

407. Противоположные стороны выпуклого четырехугольника продолжены до пересечения. Докажите, что около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда биссектрисы образовавшихся углов взаимно перпендикулярны.

408*. Противоположные стороны четырехугольника, вписанного в окружность, продолжены до пересечения. Докажите, что четыре точки, в которых биссектрисы двух образовавшихся углов пересекают стороны четырехугольника, являются вершинами ромба.

409*. Точки A_1, B_1, C_1 взяты произвольно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1, пересекаются в одной точке.

410*. Противоположные стороны четырехугольника продолжены до пересечения, и около четырех образовавшихся треугольников описаны окружности. Докажите, что все они пересекаются в одной точке.

411. Две окружности пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная к первой окружности, пересекающая вторую окружность в точке B, а через точку P — прямая, параллельная прямой AB и пересекающая окружности в точках D и C. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

412. Две окружности пересекаются в точках M и P. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AM, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

413. Докажите, что расстояние от точки окружности до прямой, содержащей хорду этой окружности, есть среднее геометрическое расстояний от концов хорды до касательной к окружности в этой точке.

414. Касательная в точке A к описанной около треугольника ABC окружности пересекает прямую BC в точке E, AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

415. Каждая из боковых сторон равнобедренного треугольника ABC с основанием AC разделена на три равные части, и через четыре точки деления проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и DBE, если $AB = BC = 3$, $AC = 4$.

416. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Прямые BC и BD пересекают окружности в точках P и Q. Докажите, что $CP = DQ$.

417. На серединном перпендикуляре к гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка O так, что $OA = a$, $OC = c$. Найдите расстояние от основания H высоты CH до середины отрезка OC.

418*. Докажите, что точки пересечения продолжений сторон разностороннего треугольника с касательными к описанной около него окружности в противоположных вершинах треугольника лежат на одной прямой.

419*. Докажите, что точка пересечения продолжений сторон AB и CD вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ лежит на одной прямой с точками пересечения прямой BC с касательной к окружности в точке D и прямой AD с касательной к окружности в точке C.

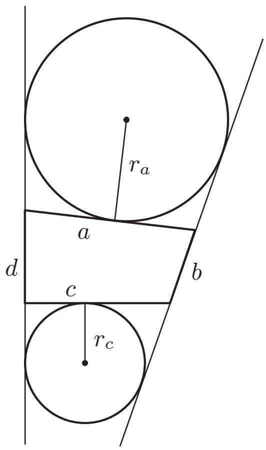


Рис. 391

420*. Докажите, что точка пересечения касательных к окружности в вершинах B и D вписанного в эту окружность четырехугольника $ABCD$ лежит на одной прямой с точками пересечения прямых AB и CD, AD и BC.

421. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен r, а радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы, равен R.

422. Докажите, что $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник, r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей.

423. Докажите, что площадь S выпуклого четырехугольника со сторонами a, b, c, d и полупериметром p выражается формулой

$$S = r_a(p-a) + r_c(p-c),$$

где r_a и r_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон, равных a и c (см. рис. 391).

424. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте треугольник, для которого эти точки являются основаниями высот. Сколько решений имеет задача?

Глава 9

ВЕКТОРЫ

§ 1. Сложение векторов

118. Сонаправленные векторы. Рассмотрим произвольный отрезок. На нем можно указать два направления: от одного конца к другому и наоборот (рис. 392). Чтобы выбрать одно из направлений, один конец отрезка назовем *началом*, а другой — *концом* и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу. Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется *направленным отрезком* или *вектором*. Любая точка плоскости также считается вектором, который называется *нулевым вектором*. На рисунке 393 векторы $\overrightarrow{AB}$ (A — начало, B — конец), $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ — ненулевые, а вектор $\overrightarrow{MM}$ — нулевой. Если точка A — начало вектора $\overrightarrow{a}$, то говорят, что *вектор* $\overrightarrow{a}$ *отложен от точки* A.

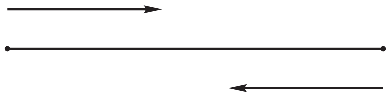


Рис. 392

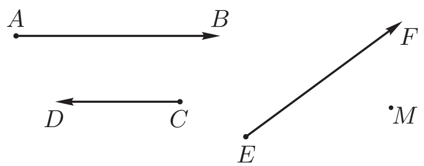


Рис. 393

Ненулевые векторы называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. На рисунке 394 векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MM}$ (вектор $\overrightarrow{MM}$ — нулевой) — коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ — не коллинеарны.

Интуитивно ясно, что если два ненулевых вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называются сонаправленными ($\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$), а во втором — противоположно направленными ($\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$). А как дать точное определение этих понятий? Давайте подумаем.

Рассмотрим сначала ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на параллельных прямых (рис. 395). Естественно назвать их *сонаправленными*, если их концы — точки B и D — лежат по одну сторону от прямой AC, т. е. от прямой, проходящей через их начала. Можно сказать иначе: ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на параллельных прямых, называются сонаправленными, если фигура $ABDC$ — трапеция или параллелограмм. Ясно, что эти два определения равносильны.

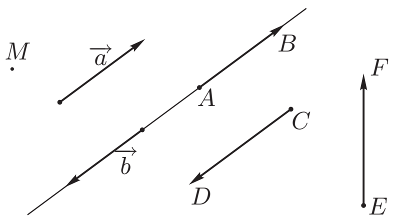


Рис. 394

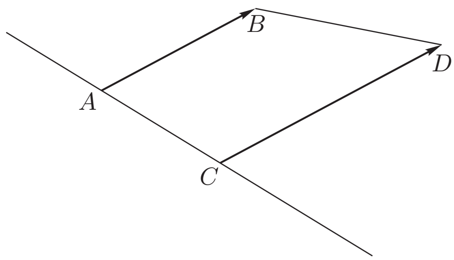


Рис. 395

Рассмотрим теперь ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой (рис. 396). Естественно назвать их *сонаправленными*, если один из лучей AB и CD целиком содержит другой луч. Можно дать и другую формулировку этого определения, если воспользоваться обозначениями, принятыми в п. 99. Пусть, например, луч AB целиком содержит луч CD (см. рис 396). Тогда точки B и D лежат по одну сторону от точки A, и поэтому числа $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ имеют одинаковые знаки. Числа $\overline{CD}$ и $\overline{AD}$ также имеют одинаковые знаки, поскольку луч CD содержится в луче AB. Следовательно, числа $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ имеют одинаковые знаки. Итак, *если один из лучей AB и CD целиком содержит другой луч, то числа $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ имеют одинаковые знаки*. Справедливо и обратное утверждение: *если точки A, B, C, D лежат на одной прямой и числа $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ имеют одинаковые знаки, то один из лучей AB и CD целиком содержит другой луч*. Сравнивая знаки чисел $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ со знаком числа $\overline{AD}$, докажите это самостоятельно. Тем самым мы приходим к такому определению: ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если числа $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ имеют одинаковые знаки.

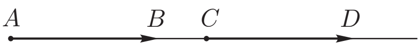


Рис. 396

К сказанному осталось добавить, что если два ненулевых коллинеарных вектора не сонаправлены, то они называются *противоположно направленными*. Условимся считать также, что нулевой вектор сонаправлен с любым вектором.

Докажем теперь важное утверждение о сонаправленных векторах.

З а д а ч а 1. *Доказать, что если* $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$ *и* $\overrightarrow{b} \uparrow\uparrow \overrightarrow{c}$, *причем вектор* $\overrightarrow{b}$ *— ненулевой, то* $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{c}$.

Р е ш е н и е*. Для удобства сформулируем задачу, используя другие обозначения: доказать, что если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_2B_2}$ и $\overrightarrow{A_2B_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_3B_3}$, причем вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$ — ненулевой, то $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_3B_3}$.

Если один из векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_3B_3}$ — нулевой, то $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_3B_3}$, поскольку нулевой вектор сонаправлен с любым вектором.

Допустим, что все три вектора — ненулевые. Возможны четыре случая.

1^0. Все данные векторы лежат на одной прямой. Из условий $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_2B_2}$ и $\overrightarrow{A_2B_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_3B_3}$ следует, что числа $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$, а также числа $\overline{A_2B_2}$ и $\overline{A_3B_3}$ имеют одинаковые знаки. Следовательно, знаки чисел $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_3B_3}$ совпадают, поэтому $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_3B_3}$.

2^0. Векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_3B_3}$ лежат на одной прямой, а вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$ — на прямой, параллельной первой. Пусть, для определенности, $\overrightarrow{A_1A_3} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_2B_2}$ (рис. 397, *а*). В этом случае фигура $A_2A_1A_3B_2$ — трапеция (или параллелограмм), а отрезок A_2A_3 — ее диагональ, поэтому точки A_1 и B_2 лежат по разные стороны от прямой A_2A_3. Точки B_2 и B_3 лежат по одну сторону от этой прямой. Следовательно, точки A_1 и B_3 лежат по разные стороны от прямой A_2A_3, а значит, и от точки A_3. Это означает, что числа $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_3B_3}$ имеют одинаковые знаки. Числа $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_1A_3}$ также имеют одинаковые знаки, поскольку

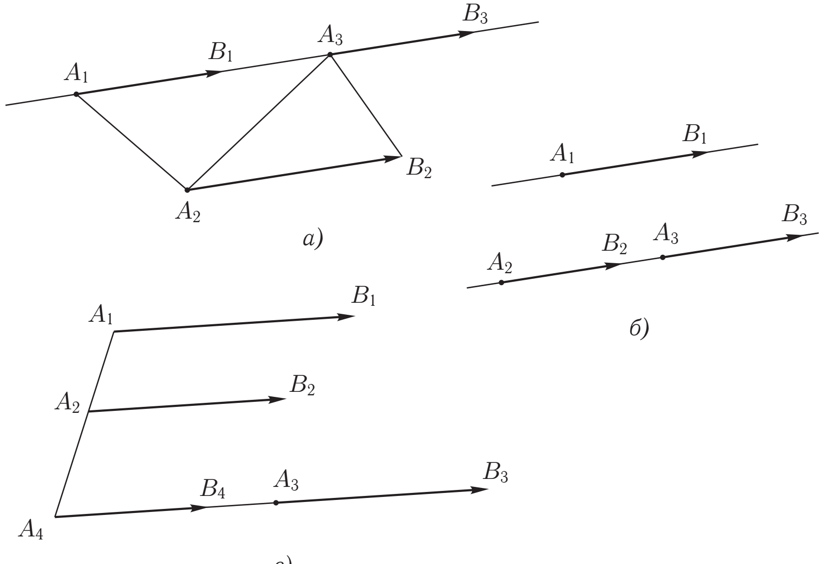


Рис. 397

точка B_1 лежит на луче A_1A_3. Следовательно, числа $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_3B_3}$ имеют одинаковые знаки, т. е. $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_3B_3}$.

3^0. Векторы $\overrightarrow{A_2B_2}$ и $\overrightarrow{A_3B_3}$ лежат на одной прямой, а вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ — на прямой, параллельной первой (рис. 397, *б*). Отложим от точки A_3 вектор $\overrightarrow{A_3C}$, длина которого равна A_3B_3 и который сонаправлен с вектором $\overrightarrow{A_1B_1}$. В соответствии с доказанным в п. 2^0, $\overrightarrow{A_3C} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_2B_2}$, поэтому $\overrightarrow{A_3C} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_3B_3}$ (см. п. 1^0), а так как $A_3C = A_3B_3$, то $\overline{A_3C} = \overline{A_3B_3}$. Следовательно, точки C и B_3 совпадают, и значит, $\overrightarrow{A_3B_3} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1B_1}$.

4^0. Данные векторы лежат на трех параллельных прямых. Пусть прямая A_1A_2 пересекается с прямой A_3B_3 в точке A_4. Отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{A_4B_4}$, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{A_2B_2}$ (рис. 397, *в*). Согласно доказанному в п. 2^0, $\overrightarrow{A_4B_4} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_3B_3}$. С другой стороны, $\overrightarrow{A_4B_4} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1B_1}$, так как концы этих векторов лежат по одну сторону от прямой A_1A_4. Следовательно, $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_3B_3}$ (см. п. 3^0). Утверждение доказано.

119. Равенство векторов. Два вектора называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны. Из этого определения и утверждения задачи 1 следует, что

если $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ *и* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$, *то* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}$.

Докажите самостоятельно следующее утверждение:

от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\overrightarrow{a}$, и притом только один.

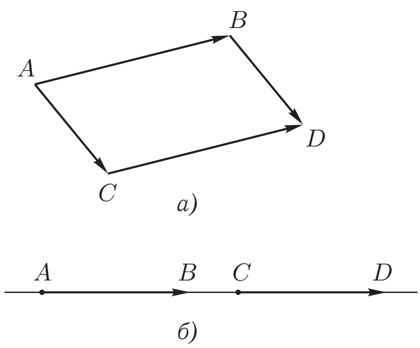


Рис. 398

Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой. Иногда про такие векторы говорят, что это один и тот же вектор, но отложенный от разных точек.

Отметим еще одно свойство равных векторов.

Задача 2. *Доказать, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*

Решение. Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых (рис. 398, *а*), то из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ следует, что четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Если же векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на одной прямой (рис. 398, *б*), то из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ следует, что $\overline{AB} = \overline{CD}$. По теореме Шаля $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{CD} + \overline{BC} = \overline{BD}$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, что и требовалось доказать.

120. Сумма векторов. Рассмотрим два вектора — $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\overrightarrow{a}$ (рис. 399). Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\overrightarrow{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой векторов* $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*. Рисунок 399 поясняет это название.

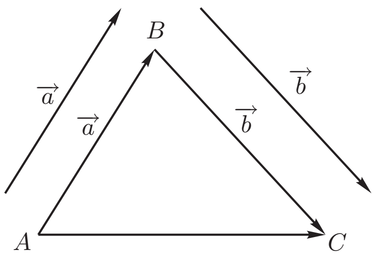


Рис. 399. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

Докажем, что если при сложении векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ точку A, от которой откладывается вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, заменить другой точкой A_1, то вектор $\overrightarrow{AC}$ заменится равным ему вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$. Иными словами, докажем, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 400).

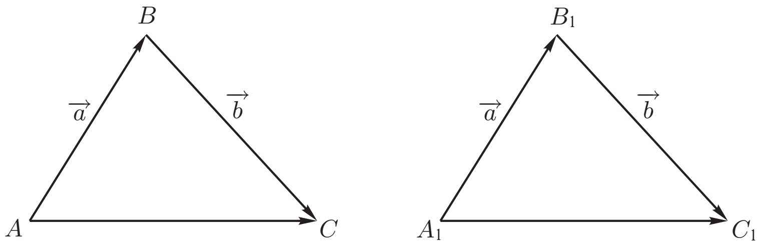


Рис. 400. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$

Из равенств $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ следует, что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ (задача 2 п. 119). Следовательно, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, а значит, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, что и требовалось доказать.

Правило треугольника можно сформулировать и таким образом:

для любых трех точек A, B и C имеет место равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Подчеркнем, что это равенство справедливо для любых точек A, B и C, в частности, в том случае, когда две из них или даже все три совпадают.

Теорема. *Для любых векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ справедливы равенства:*

1^0 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;

2^0 $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$.

Доказательство. 1^0. От произвольной точки A отложим векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$; от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$ (рис. 401). Поскольку $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, т. е. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{a}$. По правилу

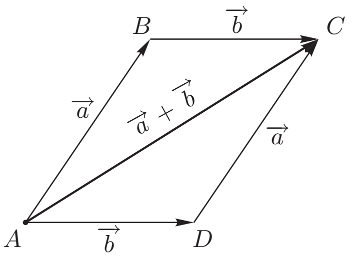


Рис. 401

треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$. Следовательно, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.

2^0. Пользуясь рисунком 402, докажите это утверждение самостоятельно.

З а м е ч а н и е 1. При доказательстве свойства 1^0 мы обосновали так называемое *правило параллелограмма* сложения неколлинеарных векторов: чтобы сложить неколлинеарные векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, нужно отложить от какой-нибудь точки A векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$ (рис. 403). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ окажется равным $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Правило параллелограмма часто используется в физике, например при сложении сил.

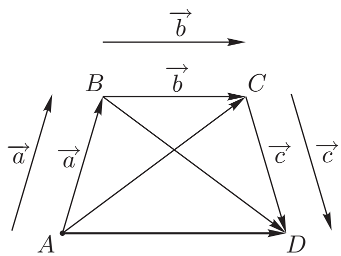


Рис. 402

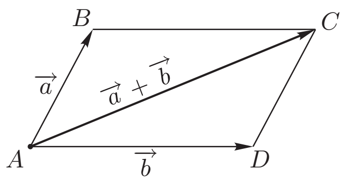


Рис. 403. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

З а м е ч а н и е 2. *Суммой нескольких векторов* называется вектор, который строится так: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма складывается с третьим вектором и т. д. Из доказанной теоремы следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.

З а м е ч а н и е 3. *Разностью векторов* $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\overrightarrow{b}$ равна вектору $\overrightarrow{a}$. Построить вектор $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ можно так. Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ (рис. 404). Тогда $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ (объясните, почему). Вектор, равный $\overrightarrow{0} - \overrightarrow{a}$, называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{a}$ и обозначается так: $-\overrightarrow{a}$.

Решим теперь две задачи.

З а д а ч а 3. *Доказать, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда середины отрезков AD и BC совпадают.*

Р е ш е н и е. Пусть точка O — середина отрезка AD (рис. 405), т. е. $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OA}$. Тогда $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO}$ или $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$. Из двух последних равенств следует, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ тогда

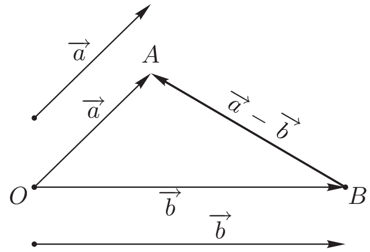


Рис. 404

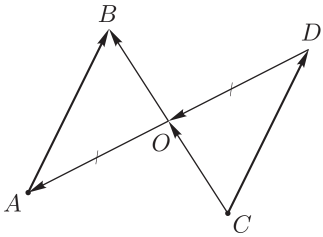


Рис. 405

и только тогда, когда $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OB}$, т. е. середина O отрезка AD является серединой отрезка BC. Утверждение доказано.

Задача 4. *Даны треугольник ABC и точка M. Точка M_1 симметрична точке M относительно середины стороны AB, точка M_2 симметрична точке M_1 относительно середины стороны BC, точка M_3 симметрична точке M_2 относительно середины стороны AC. Доказать, что точка M_3 симметрична точке M относительно вершины A.*

Решение. Поскольку середины отрезков AB и MM_1 совпадают (рис. 406), то $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M_1B}$ (задача 3). Середины отрезков BC и M_1M_2 также совпадают, поэтому $\overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{CM_2}$. Наконец, совпадают середины отрезков AC и M_2M_3, а значит, $\overrightarrow{CM_2} = \overrightarrow{M_3A}$. Таким образом, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{CM_2} = \overrightarrow{M_3A}$, т. е. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M_3A}$. Но это и означает, что точки M_3 и M симметричны относительно вершины A. Утверждение доказано.

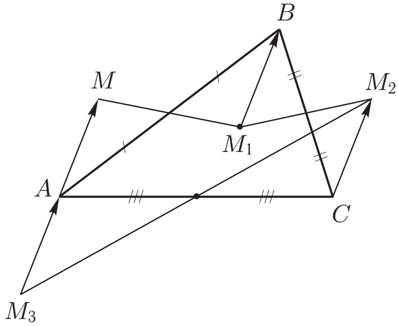


Рис. 406

Задачи

425. Внутри треугольника ABC взята точка M и построены параллелограммы $AMBM_1$, $BMCM_2$ и $CMAM_3$. Докажите, что прямые AM_2, BM_3 и CM_1 пересекаются в одной точке.

426. Точки M и N соответственно симметричны точкам B и C относительно середин сторон AC и AB треугольника ABC. Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

427. Точка M симметрична точке P стороны BC параллелограмма $ABCD$ относительно точки пересечения диагоналей этого параллелограмма. Докажите, что треугольники APD и CMB равны, а их стороны соответственно параллельны.

428. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена произвольная точка M. Докажите, что из отрезков MA, MB, MC и MD можно составить четырехугольник, вписанный в параллелограмм $ABCD$ так, что на каждой стороне параллелограмма будет лежать ровно одна вершина этого четырехугольника.

429*. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что внутри него есть такая точка, что любые три последовательные вершины многоугольника и эта точка являются вершинами некоторого параллелограмма. Сумма длин сторон всех этих параллелограммов равна p. Найдите число сторон и периметр многоугольника.

430*. Докажите, что четыре точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон данного четырехугольника, являются вершинами параллелограмма.

431. Докажите, что для любых двух векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ имеет место равенство: $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$.

432. Докажите, что для любых двух векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$: а) $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \leqslant |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$, причем знак равенства возможен только в том случае, когда $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$; б) $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| \leqslant |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$, причем знак равенства возможен только в том случае, когда либо $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$, либо один из векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — нулевой.

433*. Даны параллелограммы $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Докажите, что $BB_1 \leqslant CC_1 + DD_1$.

§ 2. Умножение вектора на число

121. Произведение вектора на число. *Произведением ненулевого вектора* $\overrightarrow{a}$ *на число* k называется такой вектор $\overrightarrow{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\overrightarrow{a}|$, причем векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ сонаправлены при $k \geqslant 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. *Произведением нулевого вектора на любое число* считается нулевой вектор.

Из этого определения непосредственно следует, что:

произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;

для любого числа k *и любого вектора* $\overrightarrow{a}$ *векторы* $\overrightarrow{a}$ *и* $k\overrightarrow{a}$ *коллинеарны*.

Рис. 407. $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, $\overline{CD} = k\overline{AB}$

Рассмотрим точку C, лежащую на прямой AB. Если $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ (рис. 407), то точка D также лежит на прямой AB, причем $\overline{CD} = k\overline{AB}$; обратно, если точка D лежит на прямой AB и $\overline{CD} = k\overline{AB}$, то $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$. Докажите эти утверждения самостоятельно.

Воспользуемся этим наблюдением для доказательства теоремы о свойствах произведения вектора на число.

Теорема. *Для любых чисел k, l и любых векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ справедливы равенства*:

1^0 $(kl)\overrightarrow{a} = k(l\overrightarrow{a})$;

2^0 $(k+l)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{a}$;

3^0 $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$.

Доказательство*. 1^0. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OA_1} = l\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OA_2} = k(l\overrightarrow{a})$, $\overrightarrow{OA_3} = (kl)\overrightarrow{a}$ (рис. 408). Имеем: $\overline{OA}_1 = l\overline{OA}$, $\overline{OA}_2 = k\overline{OA}_1 = kl\overline{OA}$, $\overline{OA}_3 = kl\overline{OA} = \overline{OA}_2$. Следовательно, $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_2}$, т. е. $(kl)\overrightarrow{a} = k(l\overrightarrow{a})$.

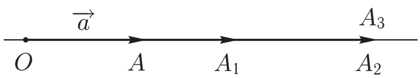


Рис. 408. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OA_1} = l\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OA_2} = k(l\overrightarrow{a})$, $\overrightarrow{OA_3} = (kl)\overrightarrow{a}$

2^0. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OC} = (k+l)\overrightarrow{a}$, а от точки B — вектор $\overrightarrow{BD} = l\overrightarrow{a}$ (рис. 409). Имеем: $\overline{OB} = k\overline{OA}$, $\overline{OC} = (k+l)\overline{OA}$, $\overline{BD} = l\overline{OA}$. По теореме Шаля $\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} = k\overline{OA} + l\overline{OA} = (k+l)\overline{OA} = \overline{OC}$. Следовательно, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$. Таким образом, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OC} = (k+l)\overrightarrow{a}$, т. е. $(k+l)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{a}$.

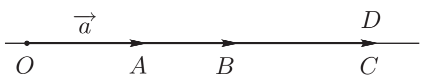


Рис. 409. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OC} = (k+l)\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BD} = l\overrightarrow{a}$

3^0. При $k = 0$ справедливость равенства очевидна. Пусть $k \neq 0$. Рассмотрим случай, когда векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ не коллинеарны (доказательство в случае коллинеарных векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ аналогично доказательству утверждения 2^0; проведите его самостоятельно). Отложим от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ (рис. 410, *а, б*). Ясно, что $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{b}$. Докажем, что $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{b}$.

Треугольники OA_1B_1 и OAB подобны с коэффициентом подобия $|k|$ (докажите это). Следовательно, $AB = |k| \cdot A_1B_1$ и $AB \parallel A_1B_1$, т. е. либо $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A_1B_1}$, либо $\overrightarrow{AB} = -k\overrightarrow{A_1B_1}$. Если $k > 0$, то точки B и B_1 лежат на одном луче с началом O (рис. 410, *а*), а потому по одну сторону от прямой AA_1; если же $k < 0$, то точки B и B_1 лежат на разных лучах с началом O (рис. 410, *б*), и значит, по разные стороны от прямой AA_1. В первом случае $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1B_1}$, во втором

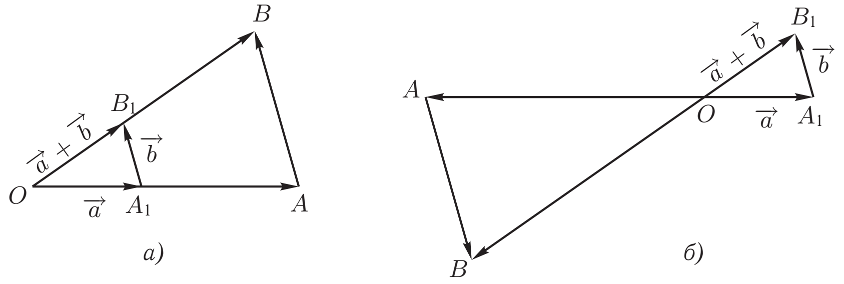


Рис. 410. а) $k>0$: $\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=k(\vec{a}+\vec{b})$, б) $k>0$: $\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=$ $=k(\vec{a}+\vec{b})$

случае $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{A_1B_1}$. Таким образом, и в том и в другом случае $\overrightarrow{AB}=$ $=k\overrightarrow{A_1B_1}$, т. е. $\overrightarrow{AB}=k\vec{b}$.

Итак, по построению $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OB_1}=k(\vec{a}+\vec{b})$. С другой стороны, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=k\vec{a}+k\vec{b}$, т. е. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$. Теорема доказана.

122. Несколько задач. Начнем с простой задачи.

З а д а ч а 1. *Точка C — середина отрезка AB, O — произвольная точка плоскости* (рис. 411). *Выразить вектор $\overrightarrow{OC}$* через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

Р е ш е н и е. По правилу треугольника

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}.$$

Складывая эти равенства, получаем: $2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{AC}+$ $+\overrightarrow{BC})$.

Так как точка C — середина отрезка AB, то $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Таким образом, $2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, или

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}). \tag{1}$$

Решим теперь чуть более трудную задачу.

З а д а ч а 2. *Доказать, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, меньше или равен полусумме двух других сторон, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда данный четырехугольник — трапеция или параллелограмм.*

Р е ш е н и е. Пусть M и N — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ (рис. 412). Имеем:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN},\quad \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}.$$

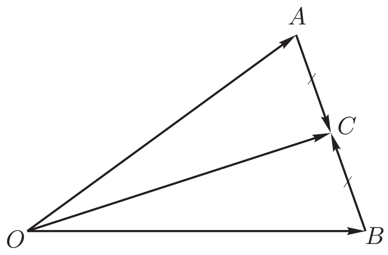


Рис. 411

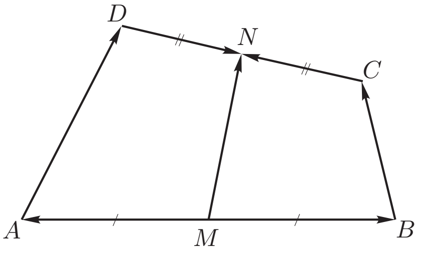


Рис. 412

Сложив эти равенства, получим:

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}).$$

Но M и N — середины сторон AB и CD, поэтому $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{0}$. Следовательно, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, откуда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Из этого равенства следует, что $MN \leqslant \dfrac{AD + BC}{2}$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены (объясните, почему), т. е. тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ — трапеция или параллелограмм. Утверждение доказано.

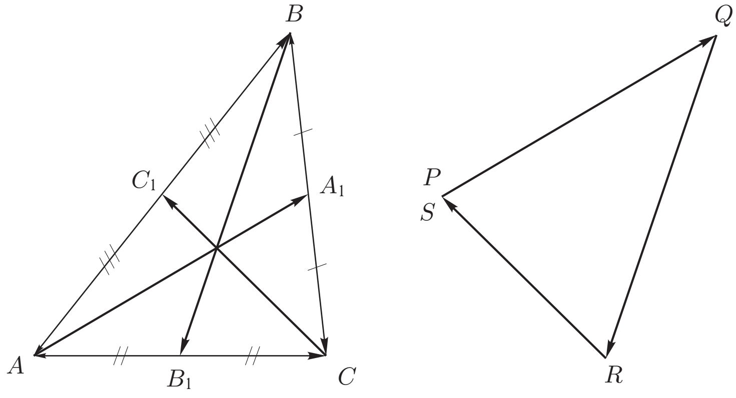
Воспользуемся результатом задачи 1 для решения еще одной задачи.

Задача 3. *Доказать, что из медиан произвольного треугольника можно составить новый треугольник, стороны которого соответственно параллельны этим медианам.*

Решение. Рассмотрим треугольник ABC с медианами AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 413, *а*). В соответствии с формулой (1) можно написать:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$
$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}),$$
$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

Складывая эти равенства и учитывая, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$, получаем: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$. Отсюда следует, что если построить векторы $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{CC_1}$, то точки P и S совпадут (рис. 413, *б*). Таким образом, стороны треугольника PQR соответственно равны и параллельны медианам треугольника ABC. Утверждение доказано.



а) б)

Рис. 413. б) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{CC_1}$

Замечание. В связи с задачей 3 возникает вопрос: а нельзя ли решить эту задачу без использования векторов? Конечно, можно! Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке 414. Если отрезок B_1B_2 — средняя линия треугольника ADC, то $B_1B_2 = \frac{1}{2}AD = AA_1$ и $B_1B_2 \parallel AA_1$. Далее, противоположные стороны BC_1 и B_2С четырехугольника BB_2CC_1 равны и параллельны, поэтому этот четырехугольник — параллелограмм. Следовательно, $B_2B = CC_1$ и $B_2B \parallel CC_1$. Итак, треугольник BB_1B_2 составлен из медиан треугольника ABC.

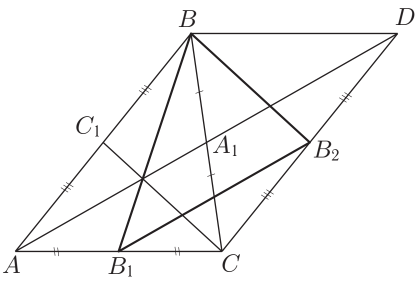


Рис. 414

Пользуясь рисунком 414, нетрудно указать способ построения треугольника ABC по трем медианам. Подумайте, как это сделать. Объясните также, почему площадь треугольника BB_1B_2 равна $2S - \frac{S}{2} - \frac{S}{2} - \frac{S}{4} = \frac{3}{4}S$, где S — площадь треугольника ABC.

Задачи

434. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ относятся как $1 : 2$, точка E — середина стороны CD. Докажите, что точка M, делящая отрезок AE в отношении $1 : 4$, считая от точки E, лежит на прямой BD.

435*. Середина каждой стороны выпуклого восьмиугольника соединена отрезками с серединами двух ближайших к этой стороне несмежных с нею сторон. Середины указанных отрезков являются вершинами некоторого нового восьмиугольника. Докажите, что: а) противоположные стороны нового восьмиугольника попарно параллельны и равны; б) четыре диагонали нового восьмиугольника, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке, а для каждой из оставшихся диагоналей найдется параллельная и равная ей диагональ.

436*. Середина каждой стороны выпуклого n-угольника ($n > 4$, $n \neq$ $\neq 8$) соединена отрезками с серединами двух ближайших к этой стороне несмежных с нею сторон. Середины указанных отрезков являются вершинами некоторого нового n-угольника. Докажите, что в исходном n-угольнике найдутся n диагоналей, сумма длин которых ровно в 4 раза больше периметра нового n-угольника.

437. Докажите, что: а) если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырехугольника равна его полупериметру, то этот четырехугольник — параллелограмм; б) из всех четырехугольников с данными диагоналями и углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.

438*. Докажите, что середины двух сторон треугольника, общая вершина этих сторон и центр тяжести указанного треугольника лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий: а) треугольник, составленный из медиан данного треугольника, подобен данному треугольнику; б) одна из сторон данного треугольника равна среднему квадратичному для двух других его сторон.

439. В произвольном четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины диагоналей AC и BD, а точки K и S — середины сторон AB и CD. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам AM, BN и KS.

440. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_8$ — середины сторон произвольного восьмиугольника, взятых последовательно. Докажите, что существует замкнутая ломаная из четырех звеньев, соответственно равных и параллельных отрезкам A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 и A_7A_8.

441. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны и $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, то существует единственное число k такое, что $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}$.

442. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ неколлинеарны, то для любого вектора $\overrightarrow{c}$ существуют числа x и y такие, что $\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$, причем эти числа определяются единственным образом.

443. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC, причем $CM : MA = 3 : 2$, $CN : NB = 2 : 3$. В каком отношении прямая MN делит медиану CK треугольника ABC?

444*. Стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ не параллельны. Точки M и N расположены соответственно на прямых BD и AC так, что $AM \parallel BC$, $BN \parallel AD$. Докажите, что отрезки MN и CD параллельны.

Глава 10

МЕТОД КООРДИНАТ

§ 1. Координаты точек и векторов

123. Ось координат. Рассмотрим произвольную прямую l, отметим на ней какую-нибудь точку O и назовем ее *началом координат*. Выберем на прямой l еще одну точку X и примем отрезок OX за единицу измерения отрезков. Вектор $\overrightarrow{OX}$ назовем *координатным вектором*. Прямую l с выбранным на ней координатным вектором $\overrightarrow{OX}$ назовем *осью координат*. Ось координат с началом O и координатным вектором $\overrightarrow{OX}$ обычно обозначают так: Ox (рис. 415, *а*).

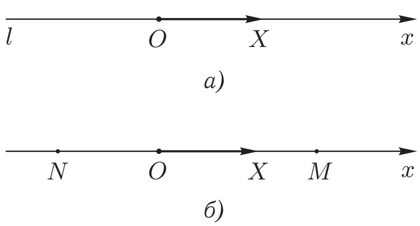


Рис. 415. а) $\overrightarrow{OX}$ — координатный вектор, $OX = 1$; б) $\overline{OX} = 1$, $\overline{OM} = OM > 0$, $\overline{ON} = -ON < 0$

Чтобы ввести координаты точек, лежащих на оси Ox, вспомним, что каждому отрезку OM можно сопоставить два числа: $\overline{OM}$ и $\overline{MO}$, имеющих разные знаки и равных по модулю числу, выражающему длину отрезка OM при выбранной единице измерения OX (п. 99). Будем считать, что $\overline{OX} = 1$. Тогда, в соответствии с правилом знаков, принятом в п. 99, для любой точки M, лежащей на луче OX, $\overline{OM} = OM > 0$, а для любой точки N, лежащей на продолжении луча OX, $\overline{ON} = -ON < 0$ (рис. 415, *б*).

Координатой точки M, лежащей на оси координат Ox и отличной от точки O, называется число $\overline{OM}$; из этого определения, в частности, следует, что координата точки X равна 1. Координатой точки O считается число 0. Тот факт, что точка M имеет координату x, условимся обозначать так: $M(x)$. Отметим, что для точки $M(x)$ имеет место равенство $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OX}$ (докажите это).

Выберем на оси координат какие-нибудь две точки: $A(x_1)$ и $B(x_2)$. По теореме Шаля $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = x_2 - x_1$. Итак,

$$\overline{AB} = x_2 - x_1. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что $AB = |x_2 - x_1|$, т. е.

длина отрезка, лежащего на оси координат, равна модулю разности координат его концов.

Пусть $M(x)$ — середина отрезка с концами $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Поскольку $\overline{AM} = \overline{MB}$, то $x - x_1 = x_2 - x$, откуда находим: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Таким образом,

координата середины отрезка, лежащего на оси координат, равна полусумме координат концов этого отрезка.

Отметим, что доказанные утверждения справедливы и в том случае, когда точки A и B совпадают, если считать, что длина «отрезка» с совпадающими концами равна нулю, а его середина совпадает с концами.

124. Прямоугольная система координат. Если на плоскости проведены две взаимно перпендикулярные оси координат Ox и Oy с общим началом O (рис. 416) и координатными векторами $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY}$ одинаковой длины, то говорят, что задана *прямоугольная система координат*. Оси Ox и Oy называются соответственно «*ось абсцисс*» и «*ось ординат*», а точка O — *началом координат*. Вся система координат обозначается так: Oxy.

Пусть M — произвольная точка, M_1 и M_2 — ее проекции [1] на оси Ox и Oy (рис. 417). *Абсциссой* x точки M называется координата точки M_1 на оси Ox, а *ординатой* y точки M — координата точки M_2 на оси Oy. Абсцисса и ордината точки M называются

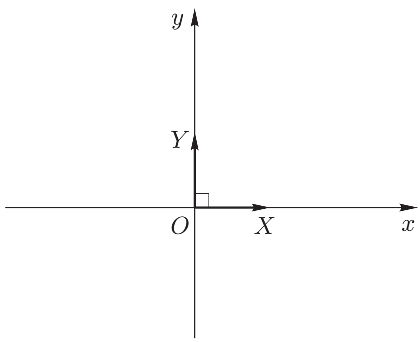


Рис. 416

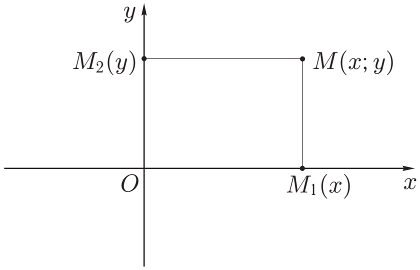


Рис. 417

координатами этой точки в системе координат Oxy. Точку M с координатами x и y обозначают так: $M(x; y)$.

Пусть $M(x; y)$ — середина отрезка с концами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Проведем через точки A, B и M прямые, перпендикулярные к оси Ox, и обозначим через $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$ и $M_1(x; 0)$ точки пересечения

[1] Если точка M лежит на прямой a, то ее проекцией на прямую a считается сама точка M.

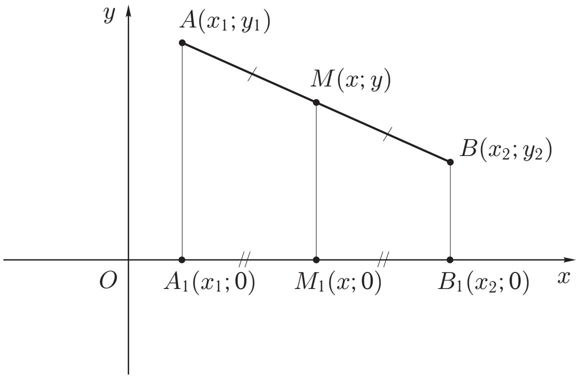


Рис. 418

этих прямых с осью Ox (рис. 418). Если точки A_1, B_1 и M_1 не совпадают, то по теореме Фалеса $A_1M_1 = M_1B_1$, т. е. точка M_1 — середина отрезка A_1B_1. Поэтому (см. п. 123)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Это равенство верно и в том случае, когда точки A_1, B_1 и M_1 совпадают. Аналогично доказывается справедливость равенства $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Таким образом,

каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов этого отрезка.

125. Координаты вектора. *Координатами вектора в прямоугольной системе координат* называются числа, равные разностям соответствующих координат его конца и начала. Координаты x и y вектора $\overrightarrow{a}$ записывают в фигурных скобках после обозначения вектора: $\overrightarrow{a}\{x; y\}$. Таким образом, если $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$. В частности, координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ (O — начало координат) совпадают с координатами точки M.

Докажем *теорему о координатах равных векторов.*

Теорема. *Два вектора равны тогда и только тогда, когда их координаты соответственно равны.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — данные векторы, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$ (рис. 419). Тогда $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, $\overrightarrow{CD}\{x_4 - x_3; y_4 - y_3\}$. Воспользуемся задачей 3 п. 120. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то середины отрезков AD и BC совпадают, поэтому координаты

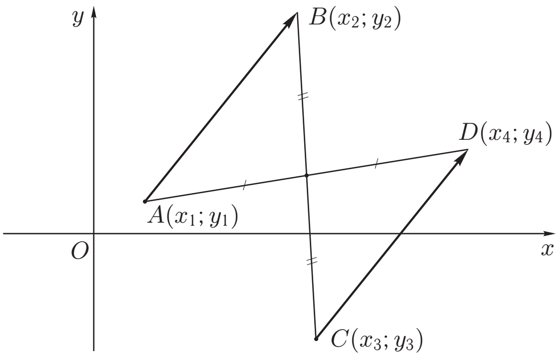


Рис. 419

середин этих отрезков соответственно равны:

$$\frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad \frac{y_1 + y_4}{2} = \frac{y_2 + y_3}{2}. \tag{2}$$

Отсюда получаем:

$$x_4 - x_3 = x_2 - x_1, \quad y_4 - y_3 = y_2 - y_1, \tag{3}$$

т. е. координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ соответственно равны.

Обратно, если координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ соответственно равны, т. е. выполнены равенства (3), то выполняются и равенства (2), а значит, середины отрезков AD и BC совпадают. Следовательно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Теорема доказана.

Если вектор $\overrightarrow{a}$ представлен в виде $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{b} + \beta\overrightarrow{c}$, где α и β — некоторые числа, то говорят, что *вектор* $\overrightarrow{a}$ *разложен по векторам* $\overrightarrow{b}$ *и* $\overrightarrow{c}$, а числа α и β называются *коэффициентами разложения* (см. в связи с этим задачу 442). Рассмотрим произвольный вектор $\overrightarrow{a}\{x; y\}$ и отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}$. Пусть M_1 и M_2 — проекции точки M на оси Ox и Oy (рис. 420). Так как $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OY}$, где $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY}$ — коорди-

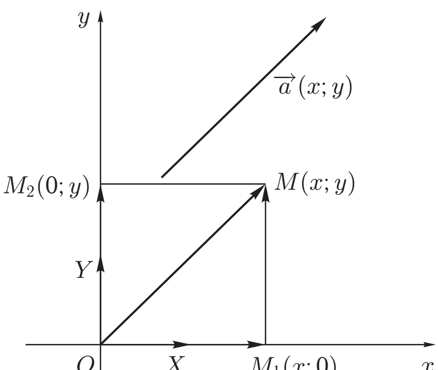


Рис. 420. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a} = x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY}$

натные векторы, то $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY}$. Таким образом, мы доказали, что *если вектор* $\overrightarrow{a}$ *имеет координаты* x *и* y, *то его можно разложить по координатным векторам* $\overrightarrow{OX}$ *и* $\overrightarrow{OY}$ *так, что коэффициенты разложения равны* x *и* y.

Справедливо и обратное утверждение: *если* $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY}$, *то числа* x *и* y *— координаты вектора* $\overrightarrow{a}$. Докажите это утверждение самостоятельно, а также выведите из доказанных утверждений три следствия:

каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов;

каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов;

каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Для вывода этих следствий воспользуйтесь свойствами суммы векторов и произведения вектора на число.

126. Длина вектора и расстояние между двумя точками. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{a}\{x; y\}$ и отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}$ (см. рис. 420). Если точка M не лежит ни на одной из осей координат, то по теореме Пифагора

$$OM = |\overrightarrow{a}| = \sqrt{OM_1^2 + M_1M^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Это равенство верно и в том случае, когда точка M лежит на оси координат (докажите это). Из него следует, что *расстояние между точками* $A(x_1; y_1)$ *и* $B(x_2; y_2)$ *выражается формулой*

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{4}$$

поскольку расстояние AB равно длине вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

127. Теорема Стюарта. Введение системы координат дает возможность изучать геометрические фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств, и тем самым использовать в геометрии методы алгебры. Такой подход к изучению свойств геометрических фигур называется *методом координат*.

Воспользуемся методом координат для доказательства *теоремы Стюарта*, названной так по имени шотландского астронома и математика Мэтью Стюарта (1717–1785), сформулировавшего ее в 1746 г. Предполагают впрочем, что эта теорема была известна намного раньше и была открыта Архимедом еще в III в. до н. э.

Теорема. *Если точка* D *лежит на прямой* BC, *то для любой точки* A *имеет место равенство*:

$$AC^2 \cdot \overline{DB} + AB^2 \cdot \overline{CD} - AD^2 \cdot \overline{CB} = \overline{CB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DB}.$$

Доказательство. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке C так, чтобы точка B лежала на оси Cx (рис. 421). Тогда точка C имеет координаты $(0; 0)$, а точки B, D и A — координаты $(b; 0)$, $(d; 0)$ и $(x; y)$, где b, d, x, y — некоторые числа. По формулам (4) и (1) имеем:

$$AC^2 = x^2 + y^2, AB^2 = (x - b)^2 + y^2,$$
$$AD^2 = (x - d)^2 + y^2,$$
$$\overline{DB} = b - d, \quad \overline{CD} = d, \quad \overline{CB} = b,$$

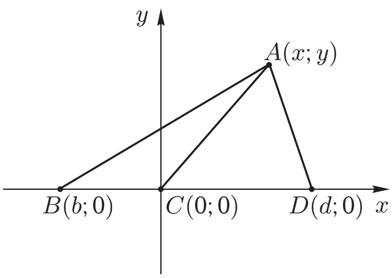


Рис. 421

следовательно,

$$AC^2\overline{DB} + AB^2\overline{CD} - AD^2\overline{CB} =$$
$$= (x^2 + y^2)(b - d) + [(x - b)^2 + y^2]d - [(x - d)^2 + y^2]b = bd(b - d).$$

Но произведение $\overline{CB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DB}$ также равно $bd(b - d)$. Теорема доказана.

Задачи

445. Даны точки $A(-1; 2)$, $B(3; 6)$ и $C(1; -4)$. Найдите медиану AM треугольника ABC и координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.

446. Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют координаты: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$. Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$, $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$.

447. Точки A и B имеют координаты: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Точка $C(x; y)$ делит отрезок AB так, что $AC = kCB$. Выразите координаты точки C через координаты точек A и B.

448. Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Найдите координаты центра тяжести этого треугольника.

449. Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(-1; 1)$, $B(2; 4)$, $C(\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Найдите координаты точки D.

450. В треугольнике ABC угол C — прямой, $BC = 8$, $AB = 10$, отрезок BE — биссектриса треугольника. Найдите медиану EF треугольника ABE.

451. Точка F лежит на диагонали BD ромба $ABCD$, а точка E лежит на стороне BC, причем $BF : FD = 2 : 3$, $BE : EC = 2 : 1$. Докажите, что точка F принадлежит отрезку AE, и найдите отношение $AF : FE$.

452. Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник. Докажите, что для любой точки M имеет место равенство: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

453. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, взаимно перпендикулярны, O — точка их пересечения. Найдите AD, если $OA = 1$, медиана CM треугольника ACD равна $\frac{5}{4}$, а высота OH треугольника BOC равна $\frac{1}{2}$.

454. Докажите, что три данные точки A, B и C лежат на одной прямой, причем точка B лежит между A и C, тогда и только тогда, когда для любой точки M выполняется равенство:

$$MA^2 \cdot BC + MC^2 \cdot AB - MB^2 \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA.$$

455. Биссектриса внешнего угла с вершиной A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Найдите AD.

456*. Докажите, что произведение диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений его противоположных сторон.

457*. Прямые, содержащие диагонали AC и BD произвольного четырехугольника $ABCD$, пересекаются в точке O. Докажите, что: а) $z^2[w + (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)] + w(\frac{w}{4} + abcd) = 0$, где $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, $z = \overline{OA} \cdot \overline{OC} - \overline{OB} \times \overline{OD}$, $w = (\overline{OA} - \overline{OC})^2(\overline{OB} - \overline{OD})^2 - (ac+bd)^2$; б) если произведение диагоналей выпуклого четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон, то около этого четырехугольника можно описать окружность.

§ 2. Уравнения прямой и окружности

128. Перпендикулярные векторы. Два ненулевых вектора называются *перпендикулярными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Выведем формулу, связывающую координаты двух перпендикулярных векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$.

Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 422). Тогда координаты точки A равны $(x_1; y_1)$, а координаты точки B равны $(x_2; y_2)$. Ясно, что $\vec{a} \perp \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ (докажите это). С другой стороны, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ тогда и только тогда, когда треугольник OAB — прямоугольный с прямым углом O, т. е. тогда и только тогда, когда $AB^2 = OA^2 + OB^2$ или $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$, т. е. $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Итак,

ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

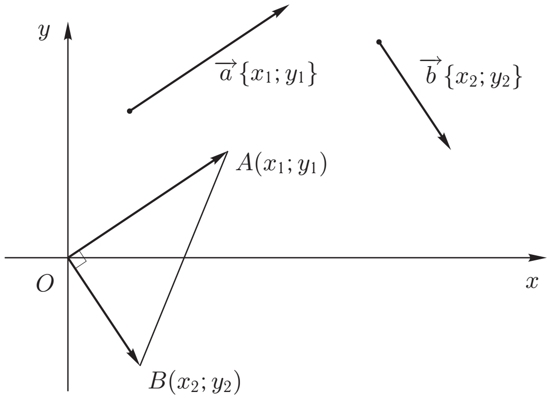


Рис. 422. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$

129. Уравнение прямой. Уравнение с двумя переменными x и y называется *уравнением линии* L в заданной прямоугольной системе координат Oxy, если ему удовлетворяют координаты любой точки линии L и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии. Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ и перпендикулярной к данному ненулевому вектору $\overrightarrow{n}\{a; b\}$ (рис. 423).

Если точка M, отличная от M_0, лежит на данной прямой, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{n}$ перпендикулярны, а если точка M не лежит на данной прямой, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{n}$ не перпендикулярны. Иными словами, точка M, отличная от M_0, лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$, т. е.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (1)$$

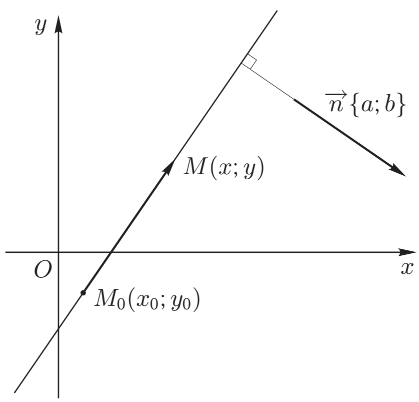


Рис. 423

Поскольку этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек данной прямой, включая точку M_0, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии, то уравнение (1) и есть *уравнение прямой, проходящей через данную точку* $M_0(x_0; y_0)$ *и перпендикулярной к данному ненулевому вектору* $\overrightarrow{n}\{a; b\}$.

Обозначим число $(-ax_0 - by_0)$ буквой c. Тогда уравнение (1) можно переписать так:

$$ax + by + c = 0. \tag{2}$$

Так как вектор $\overrightarrow{n}\{a; b\}$ — ненулевой, то хотя бы одно из чисел a и b не равно нулю, т. е.

уравнение прямой является уравнением первой степени.

Справедливо и обратное утверждение:

всякое уравнение первой степени, т. е. уравнение вида (2), в котором хотя бы одно из чисел a и b не равно нулю, *является уравнением прямой.*

В самом деле, пусть, например, число a в уравнении (2) отлично от нуля. Тогда это уравнение можно записать так:

$$a\left(x + \frac{c}{a}\right) + b(y - 0) = 0,$$

т. е. оно представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ и перпендикулярной к вектору $\overrightarrow{n}\{a; b\}$.

130. Уравнение окружности. Выведем *уравнение окружности* радиуса r с центром в точке $C(x_0; y_0)$ (рис. 424).

Точка $M(x; y)$ принадлежит данной окружности тогда и только тогда, когда $CM = r$, или $CM^2 = r^2$, т. е.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Это и есть искомое уравнение.

Решим теперь такую задачу.

Задача. *Найти множество всех точек, для которых сумма квадратов расстояний до двух данных точек постоянна.*

Решение. Пусть A и B — данные точки. Требуется найти множество всех таких точек M, для которых $AM^2 + BM^2 = k$, где k — данная величина.

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a; 0)$ и $(a; 0)$, где $a = \frac{1}{2}AB$ (рис. 425). Точка $M(x; y)$ принадлежит искомому множеству точек тогда и только тогда, когда

$$(x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = k.$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $2a = AB$, приводим это уравнение к виду:

$$x^2 + y^2 = \frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

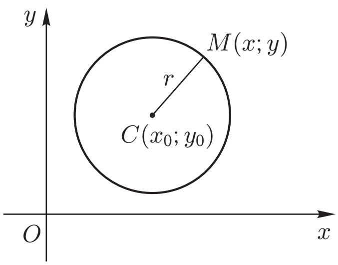


Рис. 424

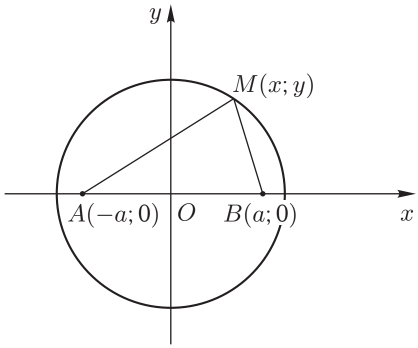


Рис. 425

При $k > \frac{AB^2}{2}$ это уравнение является уравнением окружности с центром O радиуса $R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}}$, где O — середина отрезка AB (рис. 425); при $k = \frac{AB^2}{2}$ ему удовлетворяют только координаты точки O, а при $k < \frac{AB^2}{2}$ не удовлетворяют координаты ни одной точки. Таким образом, искомое множество представляет собой либо окружность с центром O, либо саму точку O, либо не содержит ни одной точки, т. е. является *пустым множеством*.

Задачи

458. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют координаты: $\overrightarrow{AB}\{4; 2\}$, $\overrightarrow{AC}\{3; 4\}$. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

459. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a}\{x_1; y_1\}$ и $\overrightarrow{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны и имеют равные длины, то либо $x_2 = y_1$, $y_2 = -x_1$, либо $x_2 = -y_1$, $y_2 = x_1$.

460. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка K и на отрезке AK как на стороне построен квадрат $AKPM$, сторона KP которого пересекает отрезок AD. Докажите, что $BK = DM$.

461. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABDE$ и $BCPT$. Докажите, что отрезок DT вдвое больше медианы BM треугольника ABC и перпендикулярен к ней.

462. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей квадратов являются вершинами квадрата.

463. Докажите, что если концы одного из двух взаимно перпендикулярных отрезков лежат на противоположных сторонах квадрата (или их продолжениях), а концы другого — на двух других противоположных сторонах (или их продолжениях), то эти отрезки равны.

464*. На каждой из сторон квадрата отметили по точке, а затем стороны квадрата стерли. С помощью циркуля и линейки восстановите квадрат по этим четырем точкам. Всегда ли эта задача имеет решение?

465. Дан ненулевой вектор $\overrightarrow{p}\{p_1; p_2\}$. Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{p}$.

466. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

467. Даны точки $A(1; 2)$ и $B(-1; 3)$. Напишите уравнение: а) прямой AB; б) прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой AB.

468. Даны точки $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$ и $C(0; 4)$. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC.

469. Две прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Докажите, что эти прямые: а) параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$; б) перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

470. Прямая $y - mx - 4 = 0$ пересекает оси координат Ox и Oy в точках A и B. При каких значениях m медиана OC треугольника AOB равна $\sqrt{7}$?

471. Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(0; 4)$, $B(3; 0)$, $C(-3; 0)$. Напишите уравнение прямой, содержащей биссектрису угла ACB.

472. Даны прямая p и две точки A и B, из которых хотя бы одна не лежит на прямой p. Докажите, что если точка C движется по прямой p, то центр тяжести треугольника ABC движется по прямой, параллельной p.

473. В треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Найдите AC и BC, если $AB = 8$, $BH = 5$, $HC_1 = 4$.

474. Найдите координаты основания перпендикуляра, проведенного из точки $M(4; 8)$ к прямой, проходящей через точки $C(2; 3)$ и $D(6; 1)$.

475. Докажите, что линия, заданная уравнением $x(x + 2) = y(4 - y)$, является окружностью. Найдите ее радиус и координаты центра.

476. Напишите уравнение окружности, проходящей через три точки: $A(2; 2)$, $B(-4; 2)$, $C(3; 1)$.

477. Центр окружности, проходящей через точки $A(2; 3)$ и $B(5; 2)$, лежит на оси абсцисс. Напишите уравнение этой окружности.

478. Центр окружности, проходящей через точки $A(3; 0)$ и $B(-1; 2)$, лежит на прямой $x + y + 2 = 0$. Напишите уравнение этой окружности.

479. В квадрат вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин квадрата имеет одно и то же значение для всех точек окружности.

480*. Даны окружность и точки A и B на этой окружности. Докажите, что если точка C движется по данной окружности, то точка пересечения медиан треугольника ABC движется по окружности, радиус которой втрое меньше радиуса данной окружности.

481. Исследуйте взаимное расположение прямой, проходящей через точки $M_1(-4;-8)$ и $M_2(8;1)$, и окружности радиуса 5 с центром в точке $A(1;2)$.

482. С помощью метода координат исследуйте взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между радиусом r окружности и расстоянием d от центра окружности до прямой.

483. Напишите уравнения: а) окружности с центром $M(6;7)$, касающейся прямой $5x-12y-24=0$; б) касательных к окружности $x^2+y^2-10x-4y+25=0$, проведенных из начала координат.

484. Выведите уравнение касательной, проходящей через точку $(x_1;y_1)$ окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

485. С помощью метода координат исследуйте взаимное расположение двух окружностей в зависимости от соотношения между их радиусами r_1 и r_2 и расстоянием d между их центрами.

486. Исследуйте взаимное расположение двух окружностей с центрами A_1 и A_2 и радиусами r_1 и r_2, если: а) $A_1(1;2)$, $A_2(0;0)$, $r_1=2$, $r_2=1$; б) $A_1(-2;1)$, $A_2(1;-3)$, $r_1=2$, $r_2=3$; в) $A_1(0;2)$, $A_2(-1,3)$, $r_1=1$, $r_2=3$.

487. Даны точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых: а) $2AM^2-BM^2=2AB^2$; б) $AM^2+2BM^2=6AB^2$; в) $BM^2-AM^2=2AB^2$.

488*. Даны точки A, B и числа α, β, не равные нулю. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $\alpha AM^2+\beta BM^2=k$, где k — данная величина.

489. Точка B лежит на отрезке AC, причем $BC=2AB$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых: а) $AM^2+BM^2+CM^2=9AB^2$; б) $AM^2+4CM^2+3AB^2=3BM^2$.

490*. Даны точки A, B, C и числа α, β, γ. Найдите множество всех точек M, для которых сумма $\alpha AM^2+\beta BM^2+\gamma CM^2$ имеет постоянное значение, если: а) $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$; б) $\alpha+\beta+\gamma=0$.

§ 3. Радикальная ось и радикальный центр окружностей

131. Радикальная ось двух окружностей. Рассмотрим окружность радиуса R и какую-нибудь точку M. Через точку M проведем произвольную прямую a, пересекающую окружность в точках A и B (рис. 426, *а, б, в*). Напомним, что величина

$$\sigma=\overline{MA}\cdot\overline{MB}=OM^2-R^2$$

называется *степенью точки M относительно данной окружности*; она не зависит от того, какую именно прямую a мы провели (п. 115).

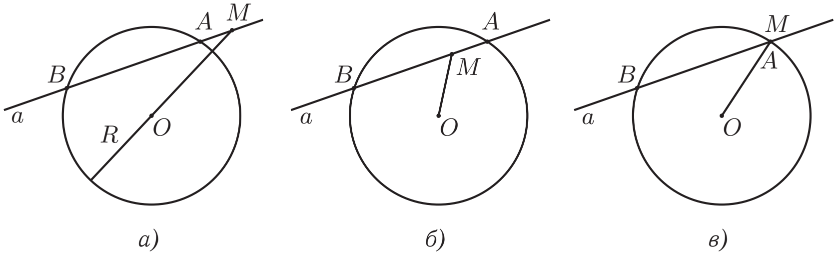


Рис. 426. а) $\sigma = \overline{MA} \cdot \overline{MB} > 0$; б) $\sigma = \overline{MA} \cdot \overline{MB} < 0$; в) $\sigma = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$

Как мы вскоре увидим, иногда бывает удобно рассматривать точку как окружность нулевого радиуса. Степенью точки M относительно такой «окружности» естественно назвать величину $\sigma = OM^2$, где O — центр «окружности».

Рассмотрим теперь две окружности и поставим такую задачу.

Задача 1. *Найти множество всех точек, для каждой из которых степени относительно двух данных окружностей равны.*

Решение. Пусть R и R_1 — радиусы данных окружностей, d — расстояние между их центрами O и O_1. Введем прямоугольную систему координат с началом O так, чтобы точка O_1 имела координаты $(d; 0)$ (рис. 427). Точка $M(x; y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда $OM^2 - R^2 = O_1M^2 - R_1^2$, т. е.

$$x^2 + y^2 - R^2 = (x - d)^2 + y^2 - R_1^2.$$

Раскрывая скобки, приведем это уравнение к виду:

$$2xd = d^2 + R^2 - R_1^2. \tag{1}$$

Возможны два случая:

1^0. $d = 0$, т. е. данные окружности — концентрические. Так как в этом случае $R \neq R_1$ (иначе данные окружности совпадают), то урав-

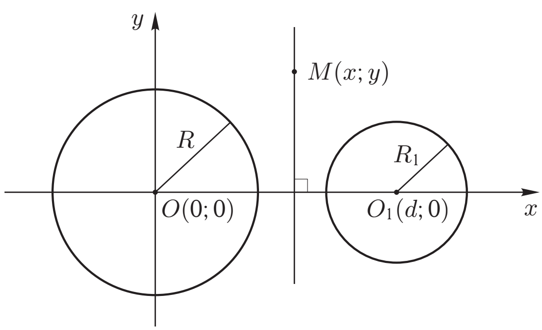


Рис. 427

нению (1) не удовлетворяют координаты ни одной точки (левая часть уравнения равна нулю для любого x, а правая не равна нулю). Таким образом,

если данные окружности — концентрические, то искомое множество не содержит ни одной точки.

2^0. $d \neq 0$. Из уравнения (1) находим:

$$x = \frac{d^2 + R^2 - R_1^2}{2d}. \tag{2}$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение прямой, перпендикулярной к вектору с координатами $\{1; 0\}$, т. е. перпендикулярной к оси Ox (рис. 427). Таким образом,

если данные окружности — неконцентрические, то искомое множество точек представляет собой прямую, перпендикулярную к их линии центров.

Эта прямая называется *радикальной осью* двух неконцентрических окружностей.

132. Расположение радикальной оси относительно окружностей. Напомним, что степень точки, лежащей вне окружности, равна квадрату касательной, проведенной к окружности из данной точки (п. 115). Поэтому

для каждой точки радикальной оси двух окружностей, лежащей вне этих окружностей, отрезки касательных, проведенные из этой точки к окружностям, равны (рис. 428).

Этот факт позволяет легко построить радикальную ось двух данных окружностей почти при любом их взаимном расположении.

В самом деле, если окружности лежат одна вне другой, то для построения радикальной оси достаточно провести две их общие касательные. Тогда радикальная ось будет прямой, проходящей через середины отрезков этих касательных (рис. 429).

Далее, если данные окружности касаются друг друга извне или изнутри, то их радикальной осью является общая касательная, про-

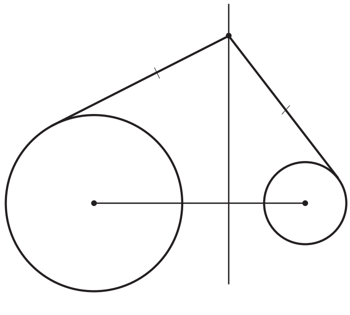


Рис. 428

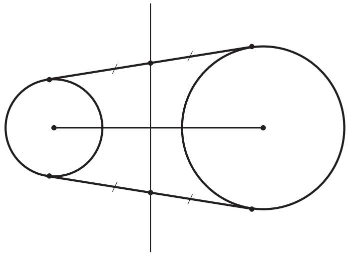


Рис. 429

ходящая через точку касания окружностей (рис. 430). В самом деле, степень точки касания окружностей относительно каждой из них равна нулю, поэтому точка касания лежит на радикальной оси. Радикальная ось представляет собой прямую, проходящую через эту точку и перпендикулярную к линии центров. А это и есть указанная общая касательная.

Рассмотрим теперь две пересекающиеся окружности. Поскольку степень каждой из точек пересечения относительно обеих окружностей равна нулю, то эти точки принадлежат радикальной оси. Следовательно, радикальная ось представляет собой прямую, проходящую через точки пересечения окружностей (рис. 431).

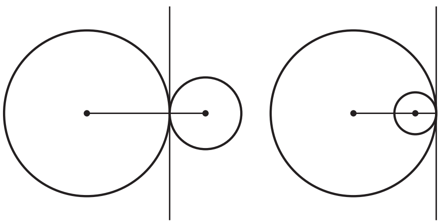


Рис. 430

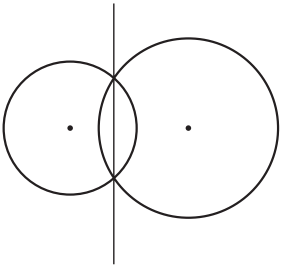


Рис. 431

Осталось рассмотреть две окружности, одна из которых лежит внутри другой. В этом случае построить радикальную ось труднее. Мы это сделаем в следующем пункте. Здесь же отметим лишь, что радикальная ось проходит вне окружностей. В самом деле, пусть, например, $R_1 < R$ (рис. 432). Вспомним формулу (2) п. 131. В рассматриваемом случае $d < R - R_1$ (см. рис. 432), или $R_1 < R - d$. Поэтому

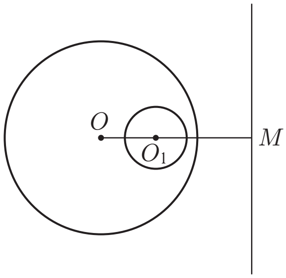
$$x = \frac{d^2 + R^2 - R_1^2}{2d} > \frac{d^2 + R^2 - (R-d)^2}{2d} = \frac{2Rd}{2d} = R,$$

т. е. $x > R$. Следовательно, точка пересечения радикальной оси и линии центров лежит вне окружностей, а значит, и радикальная ось проходит вне окружностей.

Расположение радикальной оси в случае, когда радиус одной из окружностей равен нулю, показано на рисунке 433.

Сформулируем два следствия из наших рассуждений.

Следствие 1. *Прямая, проходящая через середины отрезков двух внутренних касательных данных окружностей, проходит через середины отрезков их внешних касательных* (рис. 434). Это следует из того, что указанная прямая является радикальной осью данных окружностей.



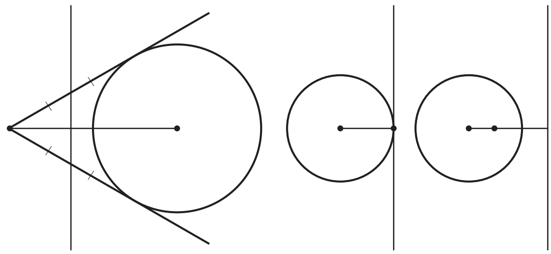


Рис. 432 Рис. 433

С л е д с т в и е 2. *Если две окружности касаются друг друга извне, то их общая внутренняя касательная делит пополам отрезки обеих их общих внешних касательных* (рис. 435).

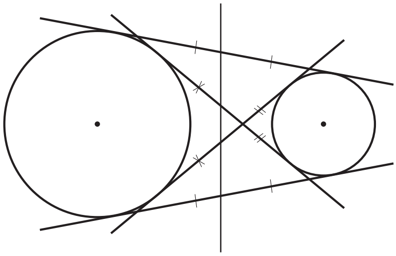


Рис. 434

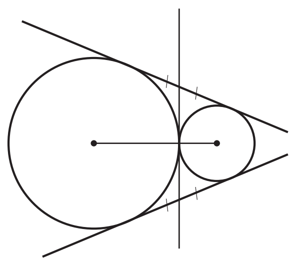


Рис. 435

133. Радикальный центр трех окружностей. Рассмотрим три окружности и проведем радикальные оси каждых двух из них.

Если центры окружностей лежат на одной прямой, то три проведенные радикальные оси либо параллельны друг другу, либо две из них (или все три) совпадают, поскольку каждая из них перпендикулярна к общей линии центров. Если же центры окружностей не лежат на одной прямой, то, как мы сейчас увидим, три радикальные оси пересекаются в одной точке, называемой *радикальным центром трех окружностей* (рис. 436). Итак, мы хотим доказать следующее утверждение.

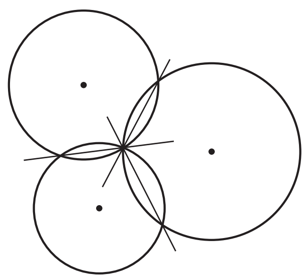


Рис. 436

Т е о р е м а. *Радикальные оси трех окружностей* (взятых попарно), *центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем сначала две радикальные оси — первой и второй окружностей, а также второй и третьей. Поскольку центры трех данных окружностей не лежат на одной прямой, то проведенные радикальные оси пересекаются в некоторой точке M. Степени точки M относительно первой и второй окружностей равны, так как она лежит на радикальной оси этих окружностей. По аналогичной причине ее степени относительно второй и третьей окружностей также равны. Следовательно, ее степени относительно первой и третьей окружностей равны. Но это означает, что точка M лежит на радикальной оси первой и третьей окружностей, а значит, все три радикальные оси пересекаются в точке M. Теорема доказана.

Из этой теоремы можно вывести большое количество следствий, каждое из которых было бы весьма сложной теоремой, если бы мы не знали свойств радикальных осей. Несколько таких следствий проиллюстрировано рисунками 437, 438. Воспользуемся одним из них для решения задачи, упомянутой в предыдущем пункте.

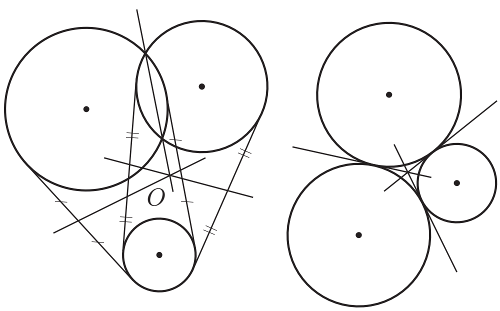


Рис. 437

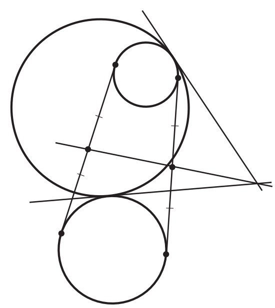


Рис. 438

З а д а ч а 2. *Построить радикальную ось двух окружностей, одна из которых лежит внутри другой.*

Р е ш е н и е. Проведем сначала какую-нибудь третью окружность так, чтобы она пересекла каждую из данных окружностей, а ее центр не лежал на линии центров данных окружностей (рис. 439). Затем проведем те две радикальные оси, которые проходят через точки пересечения окружностей. Тогда точка M их пересечения — радикальный центр трех окружностей. Значит, искомая радикальная ось проходит через точку M. Тем самым осталось провести через эту точку прямую, перпендикулярную к линии центров двух данных окружностей, — это и есть искомая радикальная ось.

Воспользуемся еще одним следствием для решения следующей задачи.

З а д а ч а 3. *Три окружности касаются друг друга извне в точках A, B и C* (рис. 440). *Прямая AB пересекает в точке M линию центров, проходящую через точку C. Доказать, что касательная MN к окружности, проходящей через точки A и B, равна MC.*

Р е ш е н и е. Радикальный центр O данных окружностей представляет собой точку пересечения общих внутренних касательных. Поскольку $OA = OB = OC$ (объясните почему), то окружность с центром O радиуса OA проходит через точки B и C. Далее, $MC \perp OC$. Следовательно, MC — касательная к четвертой окружности. Но точка M лежит на радикальной оси четвертой и той из данных окружностей, которая проходит через точки A и B. Поэтому $MN = MC$, что и требовалось доказать.

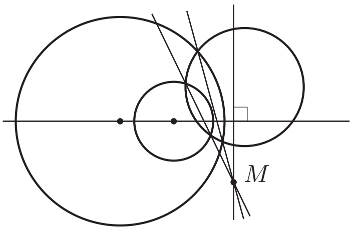


Рис. 439

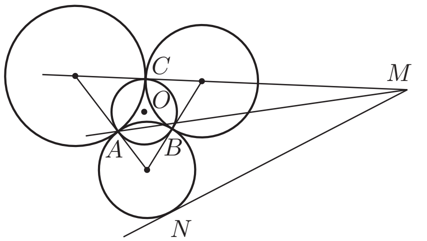


Рис. 440

134. Теорема Брианшона. В п. 116 мы рассмотрели весьма неожиданное свойство вписанного шестиугольника. Оказывается, что не менее неожиданным свойством обладает описанный шестиугольник. Теорема, которую мы сейчас докажем, связана с именем французского математика Шарля Жюля Брианшона (1785–1864).

Т е о р е м а. *Отрезки, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы нам потребуется следующий факт. Рассмотрим две прямые, касающиеся некоторой окружности в точках A и B, и отложим на них равные отрезки AC и BD так, чтобы точки C и D лежали в одной полуплоскости с границей AB (рис. 441). Тогда существует окружность, касающаяся данных прямых в точках C и D. В самом деле, данные прямые, равно как и точки C и D, симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB. Поэтому окружность с центром на этом серединном перпендикуляре, касающаяся прямой AC в точке C, касается прямой BD в точке D.

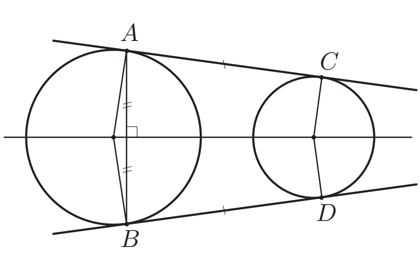


Рис. 441

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, стороны которого касаются окружности в точках K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, и продолжим его стороны A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1

на отрезки A_2B_3, A_2B_1, A_4B_2, A_4B_6, A_6B_4, A_6B_5 так, чтобы выполнялись равенства:

$$K_1B_3 = K_2B_1 = K_3B_2 = K_4B_6 = K_5B_4 = K_6B_5$$

(см. рис. 442). Построим три окружности, центры которых обозначим через C_1, C_3 и C_5, так, что первая касается прямых K_2B_1 и K_5B_4 в точках B_1 и B_4, вторая касается прямых K_1B_3 и K_4B_6 в точках B_3 и B_6, а третья касается прямых K_3B_2 и K_6B_5 в точках B_2 и B_5. Складывая равенства $A_1K_1 = A_1K_6$ и $K_1B_3 = K_6B_5$, получаем: $A_1B_3 = A_1B_5$. Далее, вычитая из равенства $K_4B_6 = K_3B_2$ равенство $A_4K_4 = A_4K_3$, находим: $A_4B_6 = A_4B_2$. Итак, $A_1B_3 = A_1B_5$, $A_4B_6 = A_4B_2$, т. е. соответственно равны отрезки касательных, проведенные из точек A_1 и A_4 к окружностям с центрами C_3 и C_5. Следовательно, прямая A_1A_4 — радикальная ось этих окружностей. Аналогично доказывается, что прямые A_2A_5 и A_3A_6 — радикальные оси окружностей с центрами C_1 и C_3, C_1 и C_5.

Четырехугольник $A_1A_2A_4A_5$ — выпуклый (объясните, почему), поэтому его диагонали A_1A_4 и A_2A_5 пересекаются в некоторой точке O. Диагонали A_2A_5 и A_3A_6 выпуклого четырехугольника $A_2A_3A_5A_6$ так-

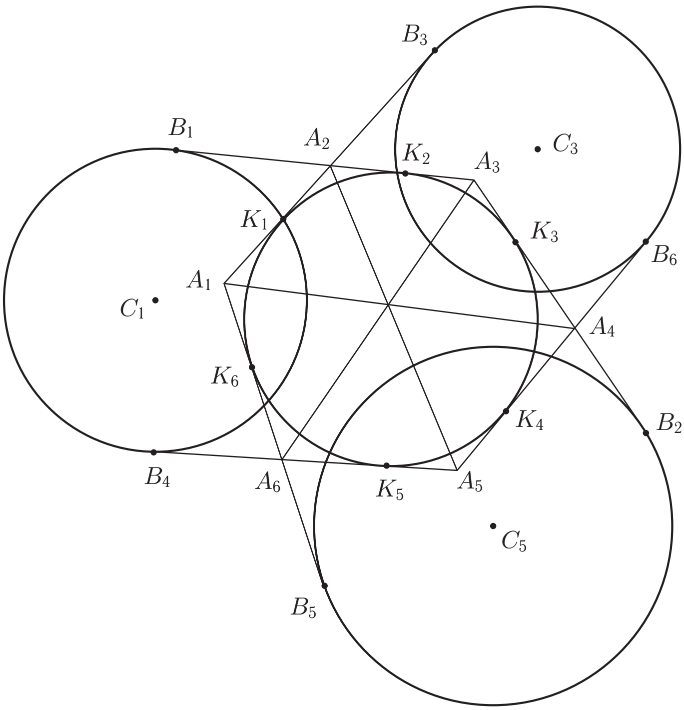


Рис. 442

же пересекаются. Но поскольку радикальные оси A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 пересекаются в одной точке (п. 133), то все три отрезка — A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 — пересекаются в точке O. Теорема доказана.

Задачи

491. Найдите множество всех точек, для каждой из которых отрезки касательных, проведенные к двум данным окружностям, равны.

492*. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка C_1, а на отрезке AC_1 — точка C_2 так, что треугольники ABC, ABC_1, ABC_2 подобны. Докажите, что точки C, C_1, C_2 и симметричные им относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB точки D, D_1, D_2 лежат на одной окружности.

493. Три окружности расположены так, что каждая из них лежит вне другой, а их центры не лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, пересекающая каждую из них под прямым углом (две окружности пересекаются в точке M под прямым углом, если касательные к этим окружностям, проведенные через точку M, взаимно перпендикулярны).

494. На двух сторонах треугольника как на диаметрах построены окружности. Докажите, что радикальная ось этих окружностей есть прямая, содержащая высоту треугольника, проведенную из общей вершины указанных сторон.

495*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1. На отрезках AA_1, BB_1 и CC_1 как на диаметрах построены три окружности. Докажите, что радикальный центр этих окружностей — ортоцентр треугольника ABC.

496. Докажите, что радикальная ось вписанной и вневписанной окружностей данного треугольника проходит через середину его стороны и перпендикулярна к биссектрисе угла, противоположного этой стороне.

§ 4. Гармонические четверки точек

135. Примеры гармонических четверок. Рассмотрим четыре точки A, B, C и D, лежащие на одной прямой. Будем говорить, что точки A, B, C, D (взятые в указанном порядке) образуют *гармоническую четверку*, если

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = -1. \qquad (1)$$

Из равенства (1) следует, что среди векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DB}$ три вектора сонаправлены (их длины берутся с одним и тем же знаком), а четвертый вектор направлен противоположно по отношению к ним (его длина берется с противоположным знаком).

Отметим, что равенство (1) равносильно каждому из следующих равенств:

$$\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DB}}{\overline{CB}\cdot\overline{AD}}=-1,\qquad \frac{\overline{CA}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}=-1,\qquad \overline{AC}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0.$$

Понятно, что можно написать еще несколько равенств, равносильных равенству (1).

Если точки B, C и D лежат на луче с началом A, причем точка C лежит между A и B, а точка B лежит между C и D (рис. 443), то точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда отрезок AB является средним гармоническим для отрезков AC и AD, т. е. $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}\right)$ (докажите это), чем объясняется название «гармоническая четверка точек».

Рис. 443. $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}\right)$

Приведем еще один пример гармонической четверки точек.

З а д а ч а 1. *К двум окружностям разных радиусов, расположенным вне друг друга, проведены две внешние и две внутренние общие касательные. Внешние касательные пересекаются в точке A, внутренние — в точке B, точки C и D — центры окружностей* (рис. 444). *Доказать, что точки A, B, C и D образуют гармоническую четверку.*

Р е ш е н и е. Прежде всего отметим, что точки A, B, C и D лежат на одной прямой (докажите это). Пусть r и R — радиусы окружностей. Используя подобие прямоугольных треугольников (см. рис. 444), получаем:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{r}{R},\qquad \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}=-\frac{R}{r}.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{DB}}{\overline{AD}\cdot\overline{CB}}=-1$. Это равенство, как уже отмечалось, равносильно равенству (1), поэтому точки A, B, C и D образуют гармоническую четверку, что и требовалось доказать.

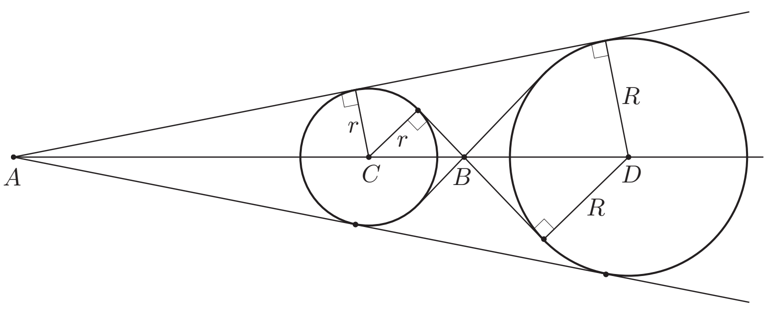


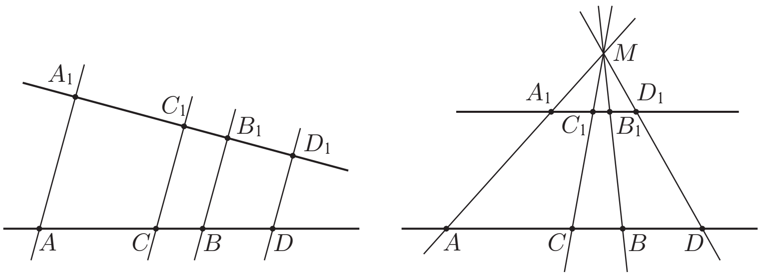
Рис. 444

Гармонические четверки обладают определенной симметрией: если A, B, C и D — гармоническая четверка, то C, D, A и B — также гармоническая четверка. Это следует из того, что равенство (1) равносильно равенству

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} = -1.$$

Основываясь на этом факте, иногда говорят так: *точки A и B гармонически разделяют точки C и D*, а точки C и D гармонически разделяют точки A и B.

Отметим два важных свойства гармонических четверок. Проведем через точки A, B, C и D, лежащие на одной прямой, четыре параллельные прямые. Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 — точки пересечения этих прямых с какой-нибудь другой прямой (рис. 445, *а*). Тогда если A, B, C и D — гармоническая четверка, то A_1, B_1, C_1 и D_1 — также гармоническая четверка. Аналогичным свойством обладают точки A_1, B_1, C_1 и D_1 пересечения прямых MA, MB, MC и MD с какой-нибудь прямой, параллельной прямой AD (рис. 445, *б*). Убедитесь в справедливости этих утверждений самостоятельно.



а) *б)*

Рис. 445

Воспользуемся первым из них для решения следующей задачи.

Задача 2. *В треугольнике ABC отрезок AA_1 — высота, отрезок AA_2 — биссектриса* (точки A_1 и A_2 не совпадают), *K_1 и K_2 — точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC* (рис. 446). *Доказать, что точки A_1, A_2, K_1 и K_2 образуют гармоническую четверку.*

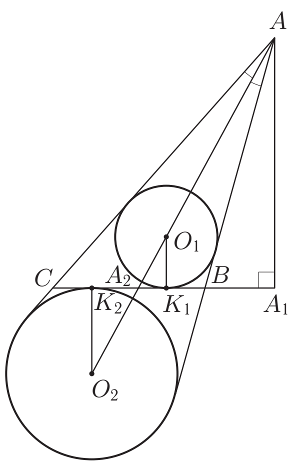


Рис. 446

Решение. Обозначим через O_1 и O_2 центры вписанной и вневписанной окружностей, указанных в условии задачи. Тогда согласно задаче 1 точки A, A_2, O_1 и O_2 образуют гармоническую четверку. Параллельные прямые, проходящие через эти точки и перпендикулярные к прямой BC, пересекают прямую BC в точках A_1, A_2, K_1 и K_2. Следовательно, точки A_1, A_2, K_1 и K_2 образуют гармоническую четверку, что и требовалось доказать.

136. Поляра. Рассмотрим еще одну задачу, связанную с гармоническими четверками.

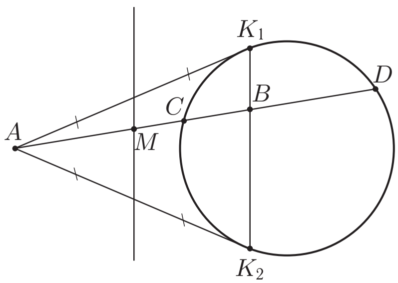


Рис. 447

Задача 3. *Из данной точки A проведены к данной окружности с центром O касательные AK_1, AK_2 и секущая, пересекающая окружность в точках C и D, а отрезок K_1K_2 — в точке B* (рис. 447). *Доказать, что точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку.*

Решение. Обозначим буквой M точку пересечения секущей AD с радикальной осью точки A и данной окружности (см. рис. 447). Поскольку указанная радикальная ось проходит через середины отрезков AK_1 и AK_2, то точка M — середина отрезка AB, т.е. $\overline{MB} = -\overline{MA}$. Имеем:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} = (\overline{MC} - \overline{MA})\cdot[\overline{MD} - (-\overline{MA})] + (\overline{MD} - \overline{MA})\cdot[\overline{MC} - (-\overline{MA})].$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} = 2(\overline{MC}\cdot\overline{MD} - MA^2).$$

Но степень точки M относительно данной окружности равна степени точки M относительно точки A: $\overline{MC}\cdot\overline{MD} = MA^2$. Следовательно, $\overline{AC}\cdot\overline{BD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} = 0$, что и требовалось доказать.

Прямая K_1K_2 называется *полярой* данной точки A относительно данной окружности. Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что если точка B не лежит на поляре, а прямая AB пересекает окружность в точках C и D, то точки C и D уже не будут гармонически разделять точки A и B. Поэтому можно сделать такой вывод:

если данная точка A лежит вне данной окружности, то множество точек B, для каждой из которых точки пересечения прямой AB и окружности гармонически разделяют точки A и B, представляет собой часть поляры точки A относительно данной окружности, лежащую внутри этой окружности.

137. Четырехвершинник. Рассмотрим четыре точки, любые три из которых не лежат на одной прямой, и соединим их попарно отрезками. Полученная фигура, состоящая из шести отрезков, называется *четырехвершинником.* Четырехвершинник имеет вид четырехугольника (либо выпуклого, как на рисунке 448, *а*, либо невыпуклого, как на рисунке 448, *б*), в котором проведены диагонали.

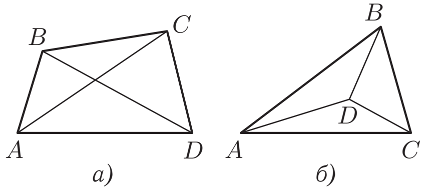


Рис. 448

З а д а ч а 4. *В четырехвершиннике $ABCD$ непересекающиеся отрезки AD и BC, а также AB и CD продолжены до пересечения в точках P и Q соответственно. Прямая PQ пересекает прямую AC в точке R, а прямую BD — в точке S* (рис. 449). *Доказать, что точки P и Q гармонически разделяют точки R и S.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник APQ. На его сторонах (либо на их продолжениях) взяты точки R, B и D так, что прямые AR, PB и QD пересекаются в одной точке (в точке C). Отсюда, согласно теореме Чевы, следует, что

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DP}} \cdot \frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{BA}} = 1.$$

С другой стороны, на сторонах этого же треугольника (либо их продолжениях) взяты точки D, B и S, лежащие на одной прямой. Следо-

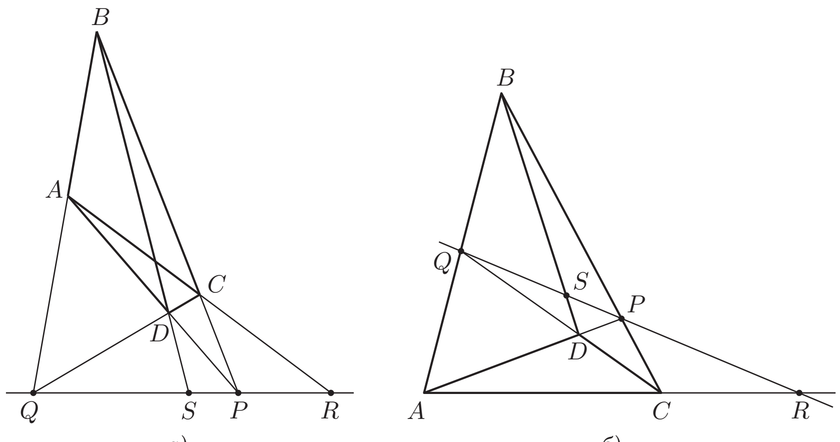


Рис. 449

вательно, согласно теореме Менелая

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DP}} \cdot \frac{\overline{PS}}{\overline{SQ}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{BA}} = -1.$$

Разделив первое из равенств на второе, получим:

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}} : \frac{\overline{PS}}{\overline{SQ}} = -1.$$

Это означает, что точки P, Q, R и S образуют гармоническую четверку, что и требовалось доказать.

138. Построение касательной с помощью одной линейки. Мы помним, как с помощью циркуля и линейки провести касательную к данной окружности через данную точку вне окружности. Оказывается, построение такой касательной можно выполнить, не используя циркуля, т. е. с помощью только одной линейки.

Задача 5. *Даны окружность и точка M вне этой окружности. Провести через точку M касательную к данной окружности с помощью только линейки* (т. е. не используя циркуля).

Решение. Проведем через точку M какие-нибудь две секущие, пересекающие данную окружность в точках A и B, C и D соответственно (рис. 450). Затем проведем диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ и обозначим буквой O точку их пересечения. Стороны AD и BC продолжим до пересечения в точке N. Проведем прямую ON и обозначим через K_1 и K_2 точки ее пересечения с окружностью. Осталось провести прямые MK_1 и MK_2 — это и есть искомые касательные.

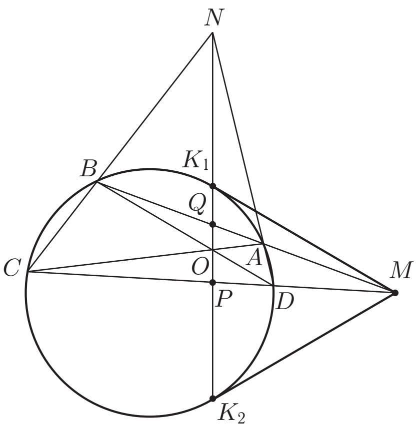


Рис. 450

Чтобы обосновать этот факт, докажем, что прямая K_1K_2 является полярой точки M относительно данной окружности. Отсюда по определению поляры и будет следовать, что MK_1 и MK_2 — касательные к окружности.

Обозначим буквами Q и P точки пересечения прямой K_1K_2 с отрезками AB и CD и рассмотрим четырехвершинник $AOBN$. Согласно задаче 4 точки D и C гармонически разделяют точки M и P, следовательно, точка P лежит на поляре точки M относительно данной окружности. Аналогично, рассматривая четырехвершинник $CODN$, приходим к выводу, что точки A и B гармонически разделяют точки M и Q, следовательно, точка Q также лежит на поляре точки M относительно данной окружности.

Таким образом, прямая PQ (или, что то же самое, прямая K_1K_2) есть поляра точки M относительно данной окружности.

Итак, мы построили касательные MK_1 и MK_2 к данной окружности, используя только линейку для проведения прямых и не используя циркуль.

Задачи

497. Четыре точки — $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$, $M_4(x_4; y_4)$ — лежат на прямой l. Докажите, что: а) если прямая l не параллельна оси ординат, то точки M_1, M_2, M_3, M_4 образуют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда $(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) = (x_1 - x_4)(x_3 - x_2)$; б) если прямая l не параллельна оси абсцисс, то они образуют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда $(y_1 - y_3)(y_2 - y_4) = (y_1 - y_4)(y_3 - y_2)$.

498. На прямой даны точки A, B и C. Докажите, что если точка C не совпадает с серединой отрезка AB, то существует, и притом только одна, точка D такая, что точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку, а если точка C — середина отрезка AB, то такой точки D нет.

499. На диаметре CD окружности отмечена точка A, а на продолжении этого диаметра — точка B так, что точки A и B гармонически разделяют точки C и D. Через точку B проведена прямая p, перпендикулярная к прямой CD. Докажите, что любая точка M прямой p и точка A гармонически разделяют точки P и Q, в которых прямая MA пересекается с окружностью.

Глава 11

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

§ 1. Соотношения между сторонами и углами треугольника

139. Синус и косинус двойного угла. Попробуем выразить синус и косинус острого угла, равного α, через синус и косинус угла $\frac{\alpha}{2}$. С этой целью рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, боковой стороной BC, равной a, и углом B, равным α. Проведем его высоты BH и CK (рис. 451). Из прямоугольного треугольника BCH находим: $CH = a\sin\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $AC = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$.

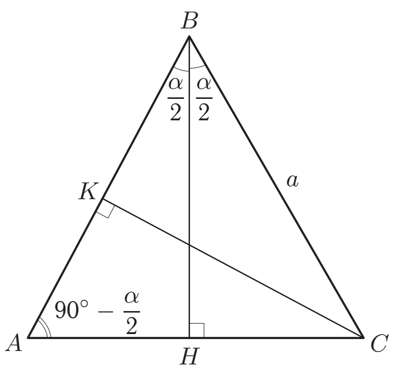


Рис. 451

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник ACK. Угол A этого треугольника равен $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, а угол C равен $90^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$. Поэтому $AK = AC\sin\frac{\alpha}{2} = 2a\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $CK = AC\cos\frac{\alpha}{2} = 2a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

Наконец, рассмотрим прямоугольный треугольник BCK. В нем $CK = a\sin\alpha$, $BK = a\cos\alpha$. Но $CK = 2a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $BK = AB - AK = a - 2a\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Приравнивая полученные выражения для CK и BK и сокращая на a, приходим к равенствам:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad (1)$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}. \qquad (2)$$

Учитывая, что согласно основному тригонометрическому тождеству $1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$, равенство (2) можно записать в виде:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

При $\alpha = 2\beta$ формулы (1) и (3) принимают вид:

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta, \quad \cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta.$$

Эти формулы называются *формулами синуса и косинуса двойного угла*.

140. Тригонометрические функции произвольных углов. Формулы (1) и (3) позволяют дать определение синуса и косинуса для углов α из промежутка $90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$:

синусом угла α *из промежутка* $90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ *называется число*

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

косинусом угла α *из промежутка* $90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ *называется число*

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Из этого определения, в частности, следует, что

$$\sin 90^\circ = 2\sin 45^\circ\cos 45^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1;$$

$$\cos 90^\circ = \cos^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0;$$

$$\sin 180^\circ = 2\sin 90^\circ\cos 90^\circ = 2\cdot 1\cdot 0 = 0;$$

$$\cos 180^\circ = \cos^2 90^\circ - \sin^2 90^\circ = 0 - 1 = -1.$$

Для определения *тангенса* α *при* $90^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$ *и котангенса* α при $90^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$ воспользуемся известными нам формулами:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{4}$$

Будем считать также, что при $\alpha = 90^\circ$ тангенс не определен, а при $\alpha = 180^\circ$ котангенс не определен, поскольку в этих случаях знаменатели в формулах (4) обращаются в нуль.

141. Формулы приведения. Воспользуемся формулами (1) и (3), а также известными нам формулами приведения, для вывода новых формул. Для любого α из промежутка $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ имеем:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = 2\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})\cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos^2(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \sin^2(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \\ = \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = -\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (5)$$

Формулы (5) также называются *формулами приведения*. Из этих формул следует, что

синус острого, прямого или тупого угла положителен;

косинус острого угла положителен, прямого — равен нулю, а тупого — отрицателен.

Формулы приведения (как старые, так и новые) позволяют дать определение синуса и косинуса $\alpha = 0^\circ$. Воспользуемся, например, формулами $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ и $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ и определим $\sin 0^\circ$ и $\cos 0^\circ$ по этим формулам при $\alpha = 0^\circ$:

$$\sin 0^\circ = \cos(90^\circ - 0^\circ) = \cos 90^\circ = 0,$$
$$\cos 0^\circ = \sin(90^\circ - 0^\circ) = \sin 90^\circ = 1.$$

Таким образом,

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1.$$

Принимая во внимания формулы (4), будем считать также, что $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, а $\operatorname{ctg} 0^\circ$ не определен.

Итак, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для всех α из промежутка $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$, причем для всех α из этого промежутка имеют место формулы (5) и *основное тригонометрическое тождество*: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (проверьте это).

142. Еще одна формула площади треугольника. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и попробуем выразить его площадь S через стороны AB, AC и угол A между ними.

Проведем высоту BH. Возможны три случая (рис. 452).

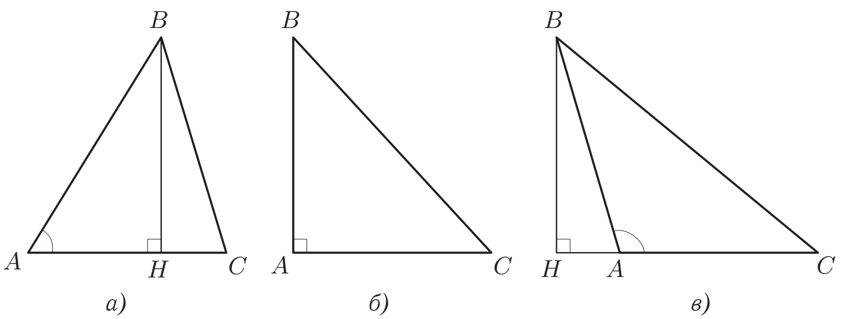


Рис. 452. а) $\angle A < 90^\circ$; б) $\angle A = 90^\circ$; в) $\angle A > 90^\circ$

1^0. Угол A — острый (рис. 452, *а*). Из прямоугольного треугольника ABH находим: $BH = AB \cdot \sin A$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

2^0. Угол A — прямой (рис. 452, *б*). В этом случае

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A,$$

поскольку $\sin A = 1$.

3^0. Угол A — тупой (рис. 452, *в*). Из прямоугольного треугольника ABH находим: $BH = AB \cdot \sin(180^\circ - A) = AB \cdot \sin A$. Поэтому

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

Мы видим, что во всех трех случаях ответ один и тот же:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A. \qquad (6)$$

Таким образом,

площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

143. Теорема синусов. Напомним, что площадь S треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса R, выражается формулой:

$$S = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$$

(см. задачу 1 п. 112). С другой стороны, как мы установили в п. 142,

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot CA \cdot \sin A.$$

Из этих двух равенств находим:

$$BC = 2R \sin A.$$

Аналогично получаем еще два равенства:

$$AB = 2R \sin C, \quad CA = 2R \sin B.$$

Итак,

каждая сторона треугольника равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла.

Это утверждение назовем *обобщенной теоремой синусов*. В качестве следствия из него получаем саму *теорему синусов*:

стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

В самом деле,

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R.$$

Воспользуемся обобщенной теоремой синусов для решения такой задачи.

Задача. *Выразить расстояние от вершины A остроугольного треугольника ABC до его ортоцентра H через угол A и радиус R описанной окружности.*

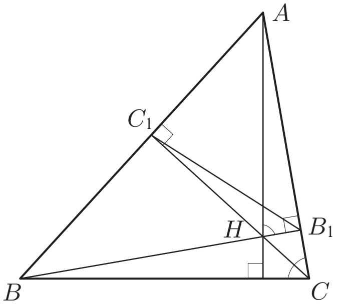


Рис. 453

Решение. Проведем высоты BB_1 и CC_1 (рис. 453). Из прямоугольного треугольника ABB_1 находим:

$$AB_1 = AB\cos A = 2R\sin C\cos A.$$

В прямоугольном треугольнике AHB_1 $\angle H = \angle C$ (объясните, почему). Поэтому $AH = \frac{AB_1}{\sin C} = \frac{2R\sin C\cos A}{\sin C} = 2R\cos A$. Итак,

$$AH = 2R\cos A. \tag{7}$$

Замечание 1. Формулу (7) можно вывести еще проще, если заметить, что отрезок AH — диаметр окружности, описанной около треугольника AB_1C_1, а этот треугольник подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\cos A$ (см. доказательство теоремы п. 106).

Замечание 2. В случае произвольного треугольника ABC аналогичная формула имеет вид: $AH = 2R|\cos A|$. Докажите это самостоятельно.

144. Теорема косинусов. Попробуем найти связь между сторонами $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$ треугольника ABC и его углом A (рис. 454, a). Для этого выразим площадь треугольника двумя способами: по формуле Герона и по формуле (6), а затем приравняем эти выражения. Получим равенство:

$$\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и заменяя $\sin^2 A$ на $1 - \cos^2 A$, преобразуем его к виду: $(b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4b^2c^2\cos^2 A$, откуда

$$|b^2 + c^2 - a^2| = 2bc|\cos A|.$$

Если угол A — острый, то (согласно обобщенной теореме Пифагора) $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ и $\cos A > 0$; если угол A — прямой, то $b^2 + c^2 - a^2 = 0$ и $\cos A = 0$; если же угол A — тупой, то $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ и $\cos A < 0$.

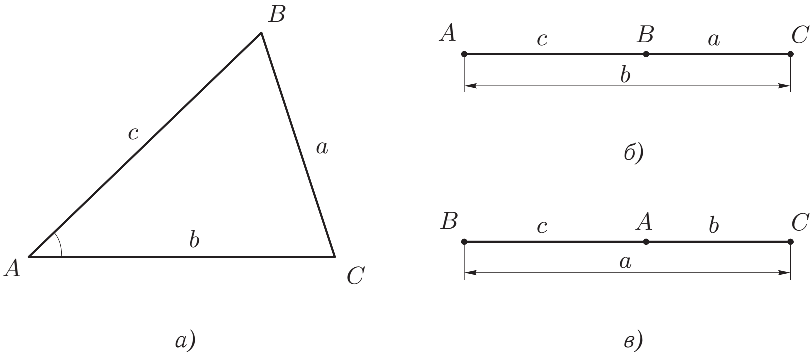


Рис. 454. а) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; б) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 0^\circ = (b-c)^2$; в) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 180^\circ = (b+c)^2$

Таким образом, во всех трех случаях справедливо равенство: $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A$, или

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Итак, мы доказали, что

квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Это утверждение называется *теоремой косинусов*. Отметим, что *теорема косинусов верна и для вырожденного треугольника*, т. е. для «треугольника», вершины которого лежат на одной прямой (рис. 454, *б, в*).

Задачи

500. На стороне AC треугольника ABC взята точка D. Найдите BD, если $AB = c$, $BC = a$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ABD = \varphi$.

501. Докажите, что площадь четырехугольника со сторонами a, b, c и d (последовательно) не превосходит $\frac{1}{2}(ab + cd)$.

502. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между содержащими их прямыми.

503*. Докажите, что площадь четырехугольника не превосходит одной четверти: а) суммы квадратов диагоналей; б) суммы квадратов сторон.

504. Докажите, что площадь S треугольника ABC выражается формулой: $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin(A + B)$, где R — радиус описанной окружности.

505. Докажите, что: а) если $0^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 90^\circ$, то $\sin\alpha < \sin\beta$; б) если $0^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180^\circ$, то $\cos\alpha > \cos\beta$.

506. Отрезки AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника A_1BC_1, если $AC = b$ и $\angle B = \beta$.

507. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABH, равны.

508*. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин сторон и относительно прямых, содержащих стороны, лежат на окружности, описанной около треугольника.

509. Биссектриса угла C треугольника CDE пересекает описанную окружность в точке M. Найдите CM, если $DE = m$, $\angle D = \varphi$, $\angle E = \gamma > \varphi$.

510. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равно отношению радиуса вписанной в треугольник ABC окружности к диаметру описанной около него окружности.

511*. Через середину C хорды AB проведены две хорды KL и MN, точки K и M лежат по одну сторону от прямой AB. Прямые AB и ML пересекаются в точке P, а прямые AB и KN — в точке Q. Докажите, что $CP = CQ$ (иногда это утверждение называют *теоремой о бабочке*).

512*. Из точки M, лежащей внутри треугольника ABC и расположенной на расстоянии d от центра описанной около него окружности радиуса R, проведены перпендикуляры MA_1, MB_1 и MC_1 к сторонам BC, CA и AB. Докажите, что отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC равно $\dfrac{R^2 - d^2}{4R^2}$.

513*. Докажите, что в произвольном треугольнике радиусы r и R вписанной и описанной окружностей связаны с расстоянием d между их центрами формулой: $d^2 = R^2 - 2Rr$.

514. Докажите, что в треугольнике ABC имеет место равенство:

$$\cos^2 A = \cos^2 C + \sin^2 B - 2\cos C \sin A \sin B.$$

515. Найдите угол A треугольника ABC и радиус описанной около него окружности, если $BC = 2$, $AC = 1 + \sqrt{3}$, $\angle C = 60°$.

516. Докажите, что медиана AM треугольника ABC выражается формулой $AM = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A}$.

517. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $2\sqrt{3}$, $AB = 4$, $\angle A = 60°$. Найдите среднюю линию этого треугольника, параллельную стороне AC.

518. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике со сторонами a, b, c, d (последовательно), диагоналями e, f и углом φ между ними: а) $\cos\varphi = \dfrac{|a^2+c^2-b^2-d^2|}{2ef}$; б) при $\varphi \neq 90^\circ$ площадь равна $\dfrac{|a^2+c^2-b^2-d^2|}{4}\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

519. Через точку M стороны AC треугольника ABC проведена прямая, параллельная AB и пересекающая AC в точке N. Биссектриса угла A пересекает отрезок MN в точке T. Найдите AB, если $AC = 3\sqrt{3}$, $BC = \sqrt{13}$, $CM = 2MA$, а радиус окружности, описанной около треугольника AMT, равен $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$.

520. В трапецию вписана окружность и около нее описана окружность, причем радиус описанной окружности в $\dfrac{2}{3}\sqrt{7}$ раз больше радиуса вписанной окружности. Найдите острые углы этой трапеции.

521. В окружности радиуса R проведены хорда MN и диаметр MP. Касательная к окружности в точке N пересекает продолжение диаметра MP за точку P в точке Q. Найдите медиану QD треугольника MQN, если $\angle Q = 60^\circ$.

522*. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Продолжения боковых сторон AD и BC за точки D и C пересекаются в точке E. Найдите радиус окружности, если периметр треугольника DCE равен p, $AB = a$, $\angle ADC = \alpha$.

523*. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности, радиус которой в k раз меньше отрезка AO, проведена прямая, параллельная BC и пересекающая стороны AB и AC в точках M и N. Найдите площадь треугольника ABC, если периметр треугольника AMN равен p, $BC = a$.

524*. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Найдите эти диагонали, если средняя линия трапеции равна 7, ее высота равна $\dfrac{15\sqrt{3}}{7}$, а угол AOD равен 120°.

525. В тупоугольном треугольнике ABC проведены медиана CM и биссектриса CD. Найдите синус угла ACB, если $AB = 14$, $DM = 1$, $\angle A = 45^\circ$.

§ 2. Использование тригонометрических формул при решении геометрических задач

145. Синус и косинус суммы и разности углов. Обобщенная теорема синусов и теорема косинусов позволяют вывести формулы, выражающие синус и косинус суммы двух углов через синусы и косинусы этих углов. В самом деле, рассмотрим произвольный треугольник ABC. По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A,$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B,$$
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

С другой стороны,

$$BC = 2R\sin A, \quad AC = 2R\sin B,$$
$$AB = 2R\sin C = 2R\sin(180^\circ - A - B) = 2R\sin(A+B),$$
$$\cos C = \cos(180^\circ - A - B) = -\cos(A+B).$$

Подставляя эти выражения в формулы теоремы косинусов и сокращая на $4R^2$, получим три тригонометрических тождества:

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2(A+B) - 2\sin B \cdot \sin(A+B) \cdot \cos A,$$
$$\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2(A+B) - 2\sin A \cdot \sin(A+B) \cdot \cos B,$$
$$\sin^2(A+B) = \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A \cdot \sin B \cdot \cos(A+B).$$

Сложим первые два тождества и приведем подобные члены:

$$0 = 2\sin^2(A+B) - 2\sin B \cdot \sin(A+B) \cdot \cos A - \\ - 2\sin A \cdot \sin(A+B) \cdot \cos B,$$

откуда

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B. \qquad (1)$$

Сложим теперь второе и третье тождества. После приведения подобных членов и сокращения на $2\sin A$, получим:

$$0 = \sin A - \sin(A+B) \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos(A+B).$$

Подставим в это равенство выражение для $\sin(A+B)$ по формуле (1):

$$0 = \sin A - \sin A \cdot \cos^2 B - \cos A \cdot \sin B \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos(A+B).$$

Но $\sin A - \sin A \cdot \cos^2 B = \sin A \cdot \sin^2 B$. Поэтому из нашего равенства находим:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B. \qquad (2)$$

Выведем теперь формулы синуса и косинуса разности углов A и B. Для этого представим A в виде $A = B + (A - B)$ и воспользуемся формулами (1) и (2):

$$\sin A = \sin B \cos(A-B) + \cos B \sin(A-B),$$
$$\cos A = \cos B \cos(A-B) - \sin B \sin(A-B).$$

Выражая отсюда $\sin(A - B)$ и $\cos(A - B)$, приходим к формулам:

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$$
$$\cos(A - B) = \cos A\ \cos B + \sin A \sin B.$$

Замечание 1. Формула (1) имеет простой геометрический смысл, иллюстрируемый рисунком 455. На этом рисунке изображен треугольник ABC с острыми углами A и B, R — радиус описанной окружности. Случаи, когда один из углов A и B — прямой или тупой, рассмотрите самостоятельно.

Замечание 2. Формула (2) также имеет простой геометрический смысл. Поясним его на примере остроугольного треугольника ABC (случаи прямоугольного и тупоугольного треугольника рассмотрите самостоятельно). Пусть CC_1 — высота треугольника, H — ортоцентр (рис. 456), R — радиус описанной окружности. В соответствии с обобщенной теоремой синусов

$$CC_1 = CB \sin B = 2R \sin A \sin B.$$

Но $CC_1 = CH + HC_1$, причем, согласно формуле (7) п. 143,

$$CH = 2R \cos C = 2R \cos(180^\circ - A - B) = -2R \cos(A + B),$$
$$HC_1 = AH \sin(90^\circ - B) = 2R \cos A \cos B.$$

Таким образом,

$$2R \sin A \sin B = -2R \cos(A + B) + 2R \cos A \cos B,$$

откуда и получается равенство (2).

146. Теорема Морлея. Теперь мы ответим на один из вопросов, записанных в нашем блокноте: *как доказать теорему Морлея*? Но сначала решим такую задачу.

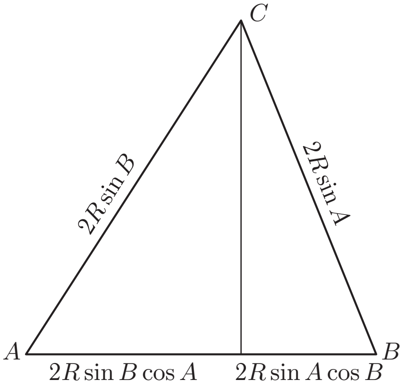


Рис. 455. $AB = 2R \sin C = 2R \sin(A + B)$

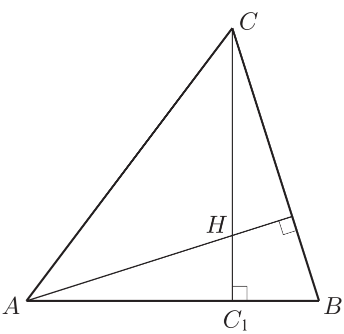


Рис. 456

Задача. *Доказать, что для произвольного угла* $\alpha \leqslant 60^\circ$ *имеет место тождество*:

$$\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha).$$

Решение. Преобразуем сначала левую часть этого равенства:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = \\ = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Преобразуем теперь правую часть:

$$4\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha) = \\ = 4\sin\alpha(\sin 60^\circ\cos\alpha + \cos 60^\circ\sin\alpha)(\sin 60^\circ\cos\alpha - \cos 60^\circ\sin\alpha) = \\ = 4\sin\alpha(\sin^2 60^\circ\cos^2\alpha - \cos^2 60^\circ\sin^2\alpha) = \\ = 4\sin\alpha\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cos^2\alpha - \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\alpha\right] = \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Таким образом, правая и левая части совпадают, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к доказательству теоремы Морлея.

Теорема. *Если через вершины произвольного треугольника* ABC *провести лучи* AB_1, AC_1, BA_1, BC_1, CA_1, CB_1, *делящие каждый из его углов на три равные части так, как показано на рисунке* 457, *то точки* A_1, B_1 *и* C_1 *окажутся вершинами равностороннего треугольника.*

Доказательство. Выразим B_1C_1 через углы треугольника ABC и радиус R описанной около него окружности. Для удобства введем обозначения: $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$ (см. рис. 457). Ясно, что $\alpha+\beta+\gamma = 60^\circ$ и $\alpha < 60^\circ$, $\beta < 60^\circ$, $\gamma < 60^\circ$.

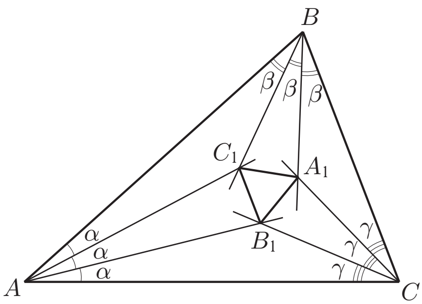


Рис. 457

В треугольнике ABC сторона AC равна $2R\sin B$, поэтому в треугольнике AB_1C: $AC = 2R\sin 3\beta$, $\angle B_1AC = \alpha$, $\angle B_1CA = \gamma$. Применим к этому треугольнику теорему синусов:

$$\frac{AC}{\sin B_1} = \frac{AB_1}{\sin\gamma}.$$

Поскольку $\angle B_1 = 180^\circ - \alpha - \gamma$ и $\alpha+\beta+\gamma = 60^\circ$, то $\sin B_1 = \sin(180^\circ-\alpha-\gamma) = \sin(\alpha+\gamma) = \sin(60^\circ-\beta)$. Таким образом, из полученной формулы находим:

$$AB_1 = \frac{2R\sin 3\beta \sin\gamma}{\sin(60^\circ - \beta)}.$$

Но, как мы доказали, $\sin 3\beta = 4\sin\beta\sin(60^\circ + \beta)\sin(60^\circ - \beta)$, поэтому

$$AB_1 = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ + \beta).$$

Аналогично из треугольника ABC_1 находим:

$$AC_1 = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ + \gamma).$$

Рассмотрим теперь какой-нибудь треугольник, два угла которого равны $(60^\circ + \beta)$ и $(60^\circ + \gamma)$. Такой треугольник существует, поскольку сумма этих углов меньше 180°. Ясно, что третий угол этого треугольника равен α. Пусть r — радиус описанной около него окружности. Тогда его стороны равны:

$$2r\sin(60^\circ + \beta), \quad 2r\sin(60^\circ + \gamma), \quad 2r\sin\alpha$$

(рис. 458). Этот треугольник подобен треугольнику AB_1C_1 по второму признаку подобия треугольников, поскольку его стороны, между которыми заключен угол α, пропорциональны сторонам AB_1 и AC_1:

$$\frac{AB_1}{2r\sin(60^\circ + \beta)} = \frac{AC_1}{2r\sin(60^\circ + \gamma)} = \frac{4R\sin\beta\sin\gamma}{r}.$$

Следовательно, $\dfrac{B_1C_1}{2r\sin\alpha} = \dfrac{4R\sin\beta\sin\gamma}{r}$, откуда

$$B_1C_1 = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

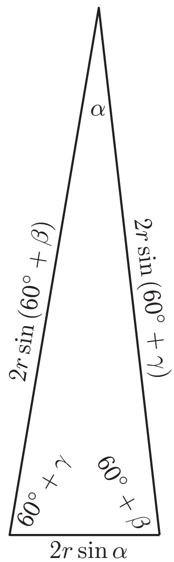


Рис. 458

В это выражение углы α, β и γ входят равноправно. Поэтому ясно, что выражения для A_1C_1 и A_1B_1 будут точно такими же. Но это и означает, что треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний. Теорема доказана.

147. Площадь четырехугольника. Пользуясь теоремой косинусов и формулой площади треугольника, докажем следующую теорему.

Теорема. *Квадрат площади S выпуклого четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ и полупериметром p выражается формулой*:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cdot\cos^2\frac{B+D}{2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Проведем диагональ AC четырехугольника и применим теорему косинусов к треугольникам ABC и ADC (рис. 459):

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos B, \quad AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cdot\cos D.$$

Приравняв правые части этих равенств, получим:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos B - 2cd\cos D,$$

откуда

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2\cos^2 B - 8abcd\cos B\cos D + 4c^2d^2\cos^2 D. \tag{4}$$

Четырехугольник $ABCD$ составлен из треугольников ABC и ADC, поэтому $S = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D$. Возведем обе части этого равенства в квадрат и умножим на 16:

$$16S^2 = 4a^2b^2\sin^2 B + 8abcd\sin B\sin D + 4c^2d^2\sin D.$$

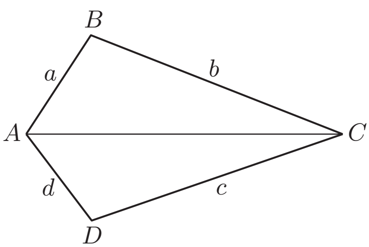


Рис. 459

Рассмотрим сначала случай, когда $\angle B + \angle D \leqslant 180^\circ$. Складывая полученное равенство с равенством (4) и учитывая, что $\cos B\cos D - \sin B\sin D = \cos(B + D)$, получаем:

$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = \\ = 4a^2b^2 - 8abcd\cos(B + D) + 4c^2d^2.$$

Но $\cos(B + D) = \cos^2\frac{B+D}{2} - \sin^2\frac{B+D}{2} = 2\cos^2\frac{B+D}{2} - 1$, поэтому это равенство можно переписать так:

$$16S^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\frac{B+D}{2}.$$

Осталось заметить, что

$$(2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$$

(проверьте это самостоятельно), поэтому из нашего равенства получается равенство (3).

Итак, мы доказали, что при $\angle B + \angle D \leqslant 180^\circ$ имеет место равенство (3). Теперь нетрудно заметить, что оно справедливо и в случае $\angle B + \angle D > 180^\circ$. В самом деле, в этом случае $\angle A + \angle C < 180^\circ$, поэтому имеет место равенство, аналогичное (3):

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

Но $\cos\frac{A+C}{2} = \cos\frac{360^\circ - B - D}{2} = \cos\left(180^\circ - \frac{B+D}{2}\right) = -\cos\frac{B+D}{2}$, поэтому мы вновь приходим к равенству (3). Теорема доказана.

Замечание. Если сторону d четырехугольника неограниченно уменьшать, то в пределе четырехугольник превратится в треугольник, а формула (3) — в формулу Герона. Можно сказать, что формула Герона является следствием формулы (3).

148. Площади вписанных и описанных четырехугольников. Поскольку и вписанный, и описанный четырехугольники являются выпуклыми, то для вычисления их площадей можно пользоваться формулой (3).

Так как противоположные углы B и D четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, составляют в сумме 180°, то $\cos\dfrac{B+D}{2}=0$. Поэтому применительно к четырехугольнику, вписанному в окружность, формула (3) принимает вид:

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d),$$

откуда

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,.$$

Эту формулу связывают с именем индийского математика и астронома Брахмагупты (598–ок. 660).

Обратимся теперь к четырехугольнику $ABCD$, описанному около окружности. В нем суммы противоположных сторон равны, поэтому

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)=a+c=b+d,$$

откуда $p-a=c$, $p-b=d$, $p-c=a$, $p-d=b$. Следовательно, квадрат его площади S выражается формулой

$$S^2=abcd-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}=abcd\Big(1-\cos^2\frac{B+D}{2}\Big)=abcd\sin^2\frac{B+D}{2}.$$

Отметим, что если в четырехугольник можно вписать окружность, и около него можно описать окружность, то $\sin^2\dfrac{B+D}{2}=\sin^2 90^\circ=1$, и для его площади S получается простая и красивая формула:

$$S=\sqrt{abcd}\,.$$

Замечание. Глядя на формулу (3), можно прийти к весьма неожиданному выводу:

из всех выпуклых четырехугольников с данными сторонами наибольшую площадь имеет четырехугольник, вписанный в окружность.

Это следует из того, что

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}\leqslant$$
$$\leqslant(p-a)(p-b)(p-c)(p-d),$$

причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $\cos^2 \dfrac{B+D}{2} = 0$, т. е. тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов B и D равна $180°$, а значит, около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

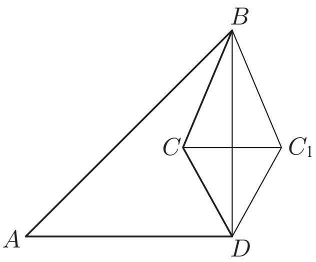


Рис. 460

Здесь, правда, возникает вопрос: верно ли, что для любого данного четырехугольника существует четырехугольник с такими же сторонами, вписанный в окружность? Оказывается, верно. Попробуйте доказать это самостоятельно.

Нетрудно заметить, что площадь выпуклого четырехугольника всегда больше площади невыпуклого четырехугольника с такими же сторонами (рис. 460). Следовательно,

из всех четырехугольников с данными сторонами наибольшую площадь имеет четырехугольник, вписанный в окружность.

Задачи

526. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = \sqrt{3}$, $BD = 1$, $\angle ABD = 120°$, $\angle BCA = 30°$, $\angle BCD = 60°$. Найдите BC.

527. Продолжение высоты CC_1 равнобедренного треугольника ABC с основанием AC пересекает описанную около него окружность в точке P. Касательная к этой окружности, проходящая через точку P, пересекает прямую AB в точке Q. Найдите AP и PQ, если $AB = \frac{5}{2}\sqrt{6}$, $AC = 5$.

528. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырехугольника $ABDE$, $AB = 4$, $\angle C = 45°$.

529. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Докажите, что: а) $AB + BC + CA = 8R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$; б) $BC + AC = 4R\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{|A-B|}{2}$.

530. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Докажите, что: а) $\dfrac{BC^2 - AC^2}{AB} = BC\cos B - AC\cos A$; б) $|BC - AC| = 4R\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{|A-B|}{2}$; в) $\dfrac{|AC - BC|}{AC + BC} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(|A-B|)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}$.

531. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R, а радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен r. Докажите, что $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

532. В треугольнике ABC $BC = a$, p — полупериметр, R — радиус описанной окружности. Докажите, что $p - a = 4R\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}$.

533. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R, а радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC, равен R_a. Докажите, что $R_a = 4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}$.

534*. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что отношение периметра треугольника $A_1B_1C_1$ к периметру треугольника ABC равно отношению радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, к радиусу окружности, описанной около него.

535*. Докажите, что сумма расстояний от центра окружности, описанной около остроугольного треугольника, до его сторон равна сумме радиусов указанной окружности и окружности, вписанной в этот треугольник.

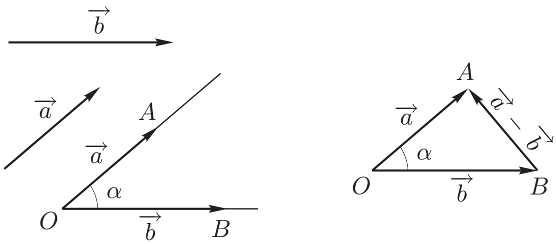
536*. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда сумма квадратов его сторон в 8 раз больше квадрата радиуса окружности, описанной около этого треугольника.

537*. На сторонах произвольного треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что центры этих равносторонних треугольников являются вершинами равностороннего треугольника.

§ 3. Скалярное произведение векторов

149. Угол между векторами. Рассмотрим два произвольных вектора: $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Отложим от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$. Если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB (рис. 461, *а*). Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что *угол между векторами* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *равен* α. Если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба — нулевые, то будем считать, что угол между ними равен $0°$.

Докажем, что величина α не зависит от выбора точки O, от которой откладываются векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Если хотя бы один из них — нулевой, то справедливость утверждения очевидна. Поэтому будем считать, что данные векторы — ненулевые. Пусть $\{x_1; y_1\}$ — координаты вектора $\overrightarrow{a}$,



а) *б)*

Рис. 461

а $\{x_2; y_2\}$ — координаты вектора $\overrightarrow{b}$ в какой-нибудь прямоугольной системе координат. Тогда $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$ — координаты вектора $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. Поскольку в треугольнике OAB $OA = |\overrightarrow{a}|$, $OB = |\overrightarrow{b}|$, $AB = |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$, то по теореме косинусов (рис. 461, *б*)

$$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - 2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\alpha.$$

Но

$$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 =$$
$$= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2) = |\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2),$$

поэтому из полученного равенства следует, что

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}. \qquad (1)$$

Таким образом, $\cos\alpha$, а значит и α, не зависит от выбора точки O.

Решим теперь две задачи.

Задача 1. *Доказать, что углы, стороны которых соответственно параллельны, либо равны, либо их сумма равна* 180°.

Решение. Пусть $\angle ABC = \alpha$ и $\angle DEF = \beta$ — углы, стороны которых соответственно параллельны: $BA \parallel ED$, $BC \parallel EF$. Из этого следует, что существуют такие числа k и l, что $\overrightarrow{ED} = k\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{EF} = l\overrightarrow{BC}$. Поэтому если $\overrightarrow{BA}\{x_1; y_1\}$ и $\overrightarrow{BC}\{x_2, y_2\}$, то $\overrightarrow{ED}\{kx_1; ky_1\}$ и $\overrightarrow{EF}\{lx_2; ly_2\}$. Воспользуемся формулой (1):

$$\cos\beta = \frac{kl(x_1x_2 + y_1y_2)}{|k\overrightarrow{BA}||l\overrightarrow{BC}|} = \frac{kl}{|kl|}\cos\alpha = \pm\cos\alpha.$$

Если $\cos\beta = \cos\alpha$, то $\beta = \alpha$; если же $\cos\beta = -\cos\alpha$, то $\beta = 180^\circ - \alpha$, т. е. $\alpha + \beta = 180^\circ$. Утверждение доказано.

Задача 2. *Доказать, что углы, стороны которых соответственно перпендикулярны, либо равны, либо их сумма равна* $180°$.

Решение. Пусть $\angle ABC = \alpha$ и $\angle DEF = \beta$ — углы, стороны которых соответственно перпендикулярны ($BA \perp ED$, $BC \perp EF$), $\overrightarrow{BA}\{x_1; y_1\}$ и $\overrightarrow{BC}\{x_2; y_2\}$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OX}\{y_1; -x_1\}$ и $\overrightarrow{OY}\{y_2, -x_2\}$. Ясно, что $\overrightarrow{OX} \perp \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OY} \perp \overrightarrow{BC}$, $|\overrightarrow{OX}| = |\overrightarrow{BA}|$, $|\overrightarrow{OY}| = |\overrightarrow{BC}|$. По формуле (1) $\cos\angle XOY = \dfrac{y_1y_2 + x_1x_2}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \cos\alpha$, поэтому $\angle XOY = \alpha$. Но стороны угла DEF соответственно параллельны сторонам угла XOY. Следовательно, либо $\beta = \alpha$, либо $\alpha + \beta = 180°$. Утверждение доказано.

Замечание. Задачи 1 и 2 можно, конечно, решить и без использования метода координат (см. задачи 141 и 142), но при этом придется рассмотреть несколько частных случаев. Метод координат удобен тем, что он позволяет провести общее рассуждение для всех этих случаев.

150. Определение и свойства скалярного произведения векторов. *Скалярным произведением двух векторов* называется произведение их длин на косинус угла между ними:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cos\alpha.$$

Из формулы (1) следует, что если ненулевые векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ имеют координаты $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$, то

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \tag{2}$$

Формула (2) верна и в том случае, когда один из данных векторов или оба — нулевые (убедитесь в этом самостоятельно).

Из определения скалярного произведения и формулы (2) следует, что

для любых векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *и любого числа* k *справедливы соотношения*:

1^0 $\overrightarrow{a}^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geqslant 0$, *причем* $\overrightarrow{a}^2 > 0$ *при* $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$;

2^0 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$;

3^0 $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$;

4^0 $(k\overrightarrow{a})\overrightarrow{b} = k(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$.

Докажите это самостоятельно.

Воспользуемся свойствами скалярного произведения для решения двух задач.

Задача 3. *Хорды* AB *и* CD *окружности радиуса* R *взаимно перпендикулярны. Доказать, что* $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

Решение. Пусть O — центр данной окружности. По условию векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ взаимно перпендикулярны, поэтому

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \\ = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0.$$

Векторы $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$ также взаимно перпендикулярны (рис. 462). Следовательно,

$$(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}) = \\ = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0.$$

Сравнивая полученные равенства, приходим к выводу, что $\overrightarrow{OB} \times \times \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$. Значит,

$$AC^2 + BD^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB})^2 = \\ = R^2 - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) + R^2 + R^2 - 2(\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}) + R^2 = 4R^2,$$

что и требовалось доказать.

Задача 4. *Из произвольной точки M окружности, описанной около треугольника ABC, проведены хорды MP и MQ, перпендикулярные к AB и AC соответственно. Доказать, что прямые BQ и CP параллельны.*

Решение. Пусть R — радиус описанной окружности. Поскольку $MP \perp AB$ и $MQ \perp AC$, то $BP^2 = 4R^2 - AM^2$ и $CQ^2 = 4R^2 - AM^2$ (см. задачу 3), поэтому $BP = CQ$. Далее, стороны углов BAC и PMQ взаимно перпендикулярны. Следовательно, эти углы либо равны, либо их сумма равна $180°$ (см. задачу 2 п. 149). И в том и в другом случае в соответствии с обобщенной теоремой синусов $PQ = 2R\sin A = BC$. Итак, $BP = CQ$ и $PQ = BC$ (рис. 463).

Пусть O — центр описанной окружности. Из равенства $BP = CQ$ следует, что $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC}|^2$, откуда получаем: $R^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + R^2 = R^2 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OC} + R^2$, т. е. $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OC}$. Аналогично, из равенства $PQ = BC$ находим: $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Введем теперь вектор $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC}$. Имеем:

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{x} = (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC}) = \\ = (\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB}) = 0,$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{x} = (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC}) = R^2 - R^2 = 0.$$

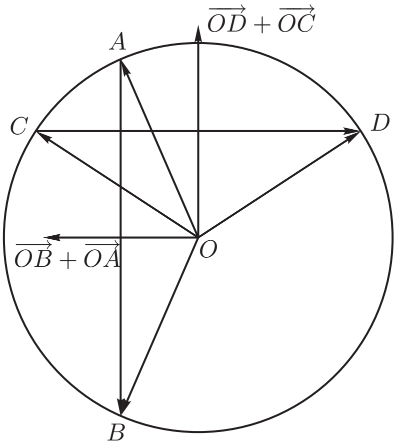


Рис. 462

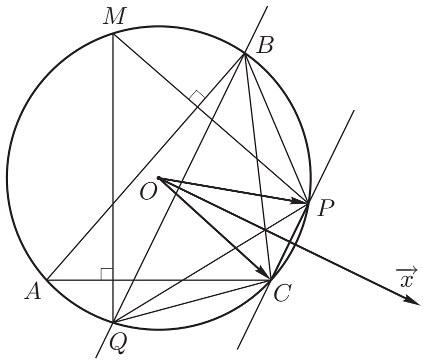


Рис. 463

Следовательно, $\overrightarrow{BQ} \perp \overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{x}$, поэтому $BQ \parallel CP$. Утверждение доказано.

151. Теорема Эйлера. Начнем с такой задачи.

З а д а ч а 5. *Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 464). Поскольку $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, то

$$AC^2 + BD^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 =$$
$$= 2\overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB}^2 = 2AD^2 + 2AB^2 = AD^2 + BC^2 + AB^2 + CD^2,$$

что и требовалось доказать.

Оказывается, что рассмотренное нами свойство параллелограмма является характеристическим. Это следует из *теоремы Эйлера*, названной так по имени открывшего ее выдающегося математика Леонарда Эйлера (1707–1783), швейцарца по происхождению, большую часть жизни работавшего в России. Сформулируем и докажем эту теорему.

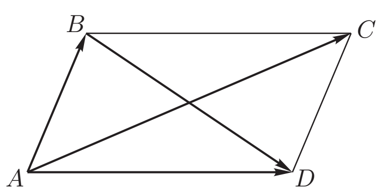


Рис. 464

Т е о р е м а. *Квадрат расстояния между серединами M и N диагоналей произвольного четырехугольника $ABCD$ выражается формулой*:

$$MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ (рис. 465). Поскольку $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})$, $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, то

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}).$$

Следовательно,

$$MN^2 = \frac{1}{4}(DB^2 + DA^2 + DC^2 - 2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}).$$

Из теоремы косинусов следует, что

$$2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA} = DB^2 + DA^2 - AB^2, \quad 2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = DB^2 + DC^2 - BC^2,$$
$$2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = DA^2 + DC^2 - AC^2.$$

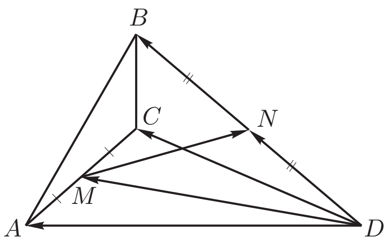


Рис. 465

Подставляя эти выражения в полученное равенство, приходим к равенству (3). Теорема доказана.

Теперь ясно, почему свойство параллелограмма, сформулированное в задаче 5, является характеристическим: если сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна сумме квадратов его сторон, то, как следует из теоремы Эйлера, расстояние между серединами диагоналей равно нулю, т. е. середины диагоналей совпадают и поэтому этот четырехугольник — параллелограмм.

152. Теорема Лейбница. Обратимся теперь к теореме, открытой немецким математиком, физиком и философом Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646–1716) — одним из основоположников фундаментального раздела математики — математического анализа.

Теорема. *Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Доказать, что для любой точки X имеет место равенство*:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3MX^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2.$$

Доказательство. Поскольку $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MX}$, $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MX}$, $\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MX}$, то

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MX})^2 + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MX})^2 + (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MX})^2 =$$
$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MX^2 - 2\overrightarrow{MX}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).$$

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Тогда

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{0}$$

(см. решение задачи 3 п. 122), откуда и следует справедливость нашего равенства. Теорема доказана.

Следствие. *Точка пересечения медиан треугольника является той точкой, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника принимает наименьшее значение* (объясните, как это утверждение получается из теоремы Лейбница).

Задачи

538. Точка K — середина стороны AD прямоугольника $ABCD$. Найдите угол между прямыми BK и AC, если $AD = \sqrt{2}\,AB$.

539. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Биссектриса угла BAM пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $AM = BK + DM$.

540. Найти медиану AM треугольника ABC, если $AB = 10$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60°$.

541. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка K. Найдите отношение $\dfrac{DK}{AB}$, если $AB = 3BC$, $AK = 7KB$, $\angle BAD = 60°$.

542. Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют координаты: $A(-1;2)$, $B(1;-2)$, $C(2;0)$, $D(1;6)$. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция, и найдите ее высоту.

543. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC. Найдите AM, если $AB = 4$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60°$, $BM = 3MC$.

544. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка E так, что прямая BE перпендикулярна к медиане AM. Найдите BC, если $AE = 3EC$, $AB = 2$, $\angle B = 60°$.

545. Точки K и M — соответственно середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Найдите AD, если $AK = 6$, $AM = 3$, $\angle KAM = 60°$.

546. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка N. Медиана AM пересекает отрезок CN в точке O. Найдите AB, если $AN = 3NB$, $AM = CN = 7$, $\angle MON = 60°$.

547*. Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC, точка K лежит на стороне BC, причем $DK \perp BC$, точка M — середина отрезка DK. Докажите, что $AK \perp BM$.

548. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle D \leqslant 180°$. Докажите, что $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2AB \cdot BC \cos B - 2BC \times CD \cos C + 2AB \cdot CD \cos(A + D)$.

549. Докажите, что стороны BC и AD четырехугольника $ABCD$ параллельны тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2BC \cdot AD$.

550. Докажите, что диагонали четырехугольника лежат на взаимно перпендикулярных прямых тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

551. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что ее высота равна среднему геометрическому для оснований.

552. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна h.

553. Докажите, что произведение диагоналей параллелограмма на косинус угла между ними равно модулю разности квадратов смежных сторон.

554. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, M — произвольная точка. Докажите, что величина $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ не зависит от выбора точки M.

555*. В треугольнике ABC точка O — центр описанной около треугольника окружности, H — ортоцентр, G — центр тяжести. Докажите, что: а) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; б) точка G лежит на отрезке OH, причем $HG = 2GO$.

556*. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Докажите, что: а) $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{AB+BC+CA}(AB \cdot \overrightarrow{AC} + AC \cdot \overrightarrow{AB})$; б) для любой точки M имеет место равенство: $\overrightarrow{MO} = \dfrac{1}{AB+BC+CA}(BC \times \times \overrightarrow{MA} + CA \cdot \overrightarrow{MB} + AB \cdot \overrightarrow{MC})$; в) $BC \cdot \overrightarrow{OA} + CA \cdot \overrightarrow{OB} + AB \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.

557*. Точка M лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC. Докажите, что величина $BC \cdot MA^2 + CA \cdot MB^2 + AB \cdot MC^2$ не зависит от выбора точки M.

558*. Точка M лежит на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Докажите, что: а) величина $MA^2 + MB^2 + MC^2$ не зависит от выбора точки M; б) одна из величин MA, MB и MC равна сумме двух других; б) величина $MA^4 + MB^4 + MC^4$ не зависит от выбора точки M.

559*. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда расстояние от его центра тяжести до центра описанной около него окружности в три раза меньше радиуса этой окружности.

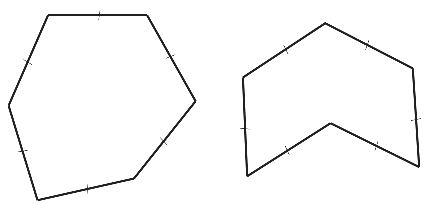
Глава 12

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА И ПЛОЩАДЬ

§ 1. Правильные многоугольники

153. Равносторонние и равноугольные многоугольники. Многоугольник называется *равносторонним*, если все его стороны равны. Равносторонними n-угольниками при $n = 3$ и $n = 4$ являются равносторонний треугольник и ромб. Эти многоугольники — выпуклые. Равносторонние n-угольники при $n > 4$ могут быть как выпуклыми (рис. 466, *а*), так и не выпуклыми (рис. 466, *б*).

Выпуклый многоугольник называется *равноугольным*, если все его углы равны. Примером равноугольного многоугольника является прямоугольник.



а) *б)*

Рис. 466

Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если все его углы равны и все стороны равны, т. е. правильный многоугольник является одновременно и равносторонним, и равноугольным. Квадрат и равносторонний треугольник являются примерами правильных многоугольников. Правильные многоугольники обладают следующими замечательными свойствами:

около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну;

в любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну;

центры описанной около правильного многоугольника и вписанной в него окружностей совпадают.

В самом деле, пусть O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ (рис. 467). Тогда $\Delta OA_1A_2, \Delta OA_2A_3, \ldots, \Delta OA_nA_1$ — равные друг другу равнобедренные треугольники (объясните, почему). Из равенства боковых сторон этих треугольников следует, что точка O — центр описанной

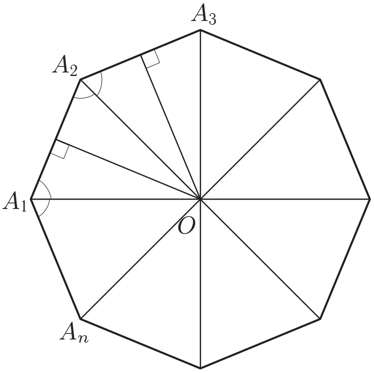


Рис. 467

окружности, а из равенства их высот следует, что O — центр вписанной окружности. Доказательство утверждений о единственности вписанной и описанной окружностей проведите самостоятельно.

Общий центр вписанной и описанной окружностей называется *центром* правильного многоугольника.

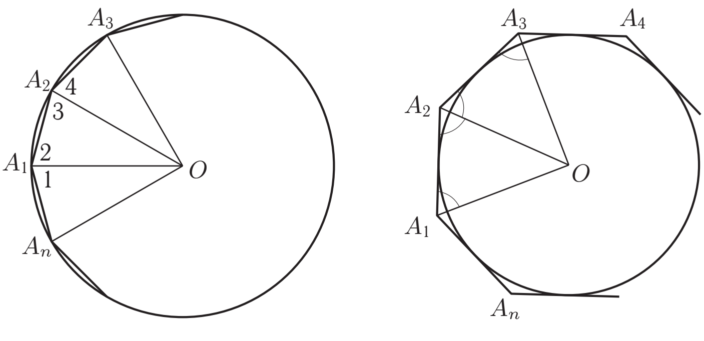
Докажем *теорему о признаках правильного многоугольника.*

Теорема. 1^0. *Равносторонний многоугольник, вписанный в окружность, — правильный;* 2^0 *равноугольный многоугольник, описанный около окружности, — правильный.*

Доказательство. 1^0. Рассмотрим равносторонний многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$, вписанный в окружность с центром O. Если $n = 3$, то утверждение теоремы очевидно, поэтому будем считать, что $n > 3$.

Поскольку любой многоугольник, вписанный в выпуклую линию, — выпуклый, то наш многоугольник — выпуклый. По условию все его стороны равны. Осталось доказать, что все его углы также равны. Рассмотрим треугольники OA_nA_1, OA_1A_2 и OA_2A_3 (рис. 468, *а*). Они равны по трем сторонам, а так как эти треугольники — равнобедренные, то $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. Поэтому $\angle A_1 = \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4 = \angle A_2$. Точно так же доказывается равенство других углов многоугольника. Следовательно, многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный.

2^0. Рассмотрим описанный около окружности с центром O многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$, каждый из углов которого равен α (рис. 468, *б*).



а) *б)*

Рис. 468

Докажем, что все его стороны равны. Поскольку $\angle A_1A_2O = \angle A_3A_2O$, то $\angle A_1A_2O = \frac{a}{2}$ и $\angle A_3A_2O = \frac{a}{2}$. Аналогично получаем: $\angle A_2A_1O = \frac{a}{2}$, $\angle A_2A_3O = \frac{a}{2}$. Следовательно, треугольники A_1A_2O и A_2A_3O — равнобедренные: $OA_1 = OA_2 = OA_3$. Углы при вершине O этих треугольников равны (каждый из них равен $180° - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = 180° - \alpha$), а значит, равны и сами треугольники. Поэтому $A_1A_2 = A_2A_3$. Аналогично доказывается, что $A_2A_3 = A_3A_4$ и т. д. Таким образом, многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный. Теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что *равносторонний многоугольник, описанный около окружности*, и *равноугольный многоугольник, вписанный в окружность, могут и не быть правильными* (рис. 469).

Рассмотрим теперь задачу, связанную с произвольным равноугольным многоугольником.

Задача 1. *На сторонах $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ равноугольного n-угольника отмечены точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Доказать, что периметр p многоугольника $B_1B_2\ldots B_n$ связан с периметром P многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ неравенствами*:

$$P\cos\frac{180°}{n} \leqslant p \leqslant P. \qquad (1)$$

Решение. Рассмотрим треугольник $B_1A_2B_2$ (рис. 470). В этом треугольнике $B_1B_2 \leqslant B_1A_2 + A_2B_2$. С другой стороны, $B_1B_2 \geqslant (B_1A_2 + A_2B_2)\sin\frac{A_2}{2}$ (см. задачу 3 п. 97), $\sin\frac{A_2}{2} = \sin\frac{n-2}{2n}180° = \cos\frac{180°}{n}$. Итак,

$$(B_1A_2 + A_2B_2)\cos\frac{180°}{n} \leqslant B_1B_2 \leqslant (B_1A_2 + A_2B_2).$$

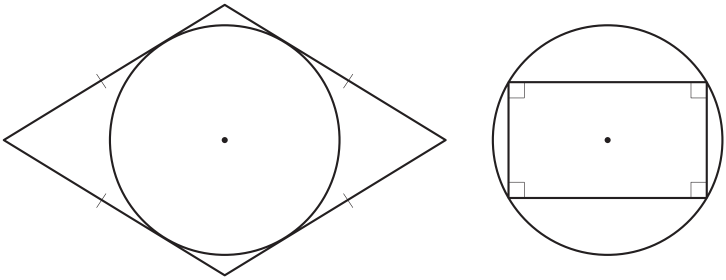


Рис. 469

Аналогично получаем: $(B_2A_3 + A_3B_3)\cos\dfrac{180^\circ}{n} \leqslant B_2B_3 \leqslant (B_2A_3 + A_3B_3), \ldots, (B_nA_1 + A_1B_1)\cos\dfrac{180^\circ}{n} \leqslant B_nB_1 \leqslant (B_nA_1 + A_1B_1)$. Сложив все эти неравенства, получим неравенства (1).

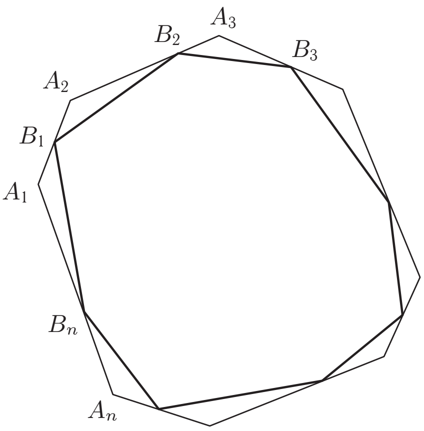


Рис. 470

Замечание 2. Все выписанные неравенства верны и в том случае, когда какие-то из точек B_i совпадают с вершинами многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ (проверьте это), т. е. длины некоторых «отрезков» равны нулю и некоторые «треугольники» становятся вырожденными. Поэтому в качестве следствия из доказанного утверждения получаем:

периметр P равноугольного n-угольника, описанного около выпуклой линии, и периметр p вписанного многоугольника, вершины которого являются общими точками линии и сторон описанного многоугольника, связаны неравенствами (1).

154. Построение правильных многоугольников. Обсудим теперь вопрос о построении правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Как построить правильный треугольник и правильный четырехугольник (квадрат), мы знаем. А как построить правильный шестиугольник?

Будем рассуждать так. Сторона правильного шестиугольника равна, очевидно, радиусу описанной около него окружности. Поэтому если задан произвольный отрезок PQ, то для построения правильного шестиугольника, стороны которого равны PQ, достаточно построить окружность радиуса PQ, взять на ней какую-нибудь точку A и, не меняя раствора циркуля, отметить на этой окружности последовательно точки B, C, D, E, F так, что $AB = BC = \ldots = EF = PQ$ (рис. 471). Проведя затем отрезки AB, BC, CD, DE, EF, FA, получим равносторонний шестиугольник $ABCDEF$, который, согласно теореме п. 153, является правильным, и его стороны равны отрезку PQ.

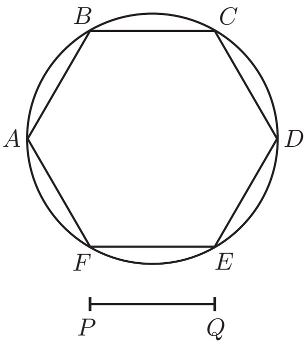
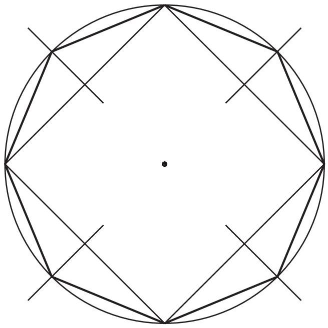
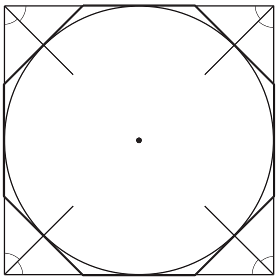


Рис. 471

Циркулем и линейкой можно построить и многие другие правильные многоугольники. Так, если уже построен какой-то правильный n-угольник, то, проводя серединные перпендикуляры к его сторонам до пересечения с описанной окружностью, можно построить правильный $2n$-угольник (рис. 472, *а*). Можно поступить иначе: в данный правильный n-угольник вписать окружность, а затем провести к ней касательные, перпендикулярные к биссектрисам углов данного n-угольника (рис. 472, *б*).



а) $n = 4$



б) $n = 4$

Рис. 472

Оказывается, что циркулем и линейкой можно построить также правильные десятиугольник, пятиугольник и пятнадцатиугольник. Прежде чем выполнить эти построения, решим такую задачу.

Задача 2. *Выразить сторону правильного десятиугольника через радиус R описанной окружности.*

Решение. Пусть AB — сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R с центром O (рис. 473). Поскольку $\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, то $AB = 2R\sin 18^\circ$. Это и есть ответ.

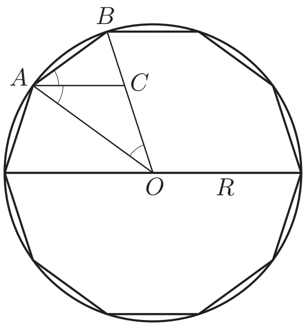


Рис. 473

Можно, однако, получить и другое выражение для стороны AB. Действительно, рассмотрим треугольник ABO и проведем его биссектрису AC. Так как $\angle AOB = 36^\circ$, то

$$\angle OAB = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ, \quad \angle BAC = \frac{1}{2}\angle OAB = 36^\circ.$$

Таким образом, треугольники AOB и CAB подобны по двум углам ($\angle AOB = \angle BAC = 36°$, угол B — общий). Поэтому

$$AB = AC, \quad \frac{AB}{OB} = \frac{BC}{AB}.$$

Далее, треугольник AOC — равнобедренный ($\angle AOC = \angle OAC = 36°$), следовательно, $AC = OC$.

Итак, $AB = AC = OC = R - BC$, откуда $BC = R - AB$, и пропорцию $\frac{AB}{OB} = \frac{BC}{AB}$ можно записать так:

$$\frac{AB}{R} = \frac{R - AB}{AB}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для AB ($AB^2 + R \cdot AB - R^2 = 0$), решая которое и учитывая, что $AB > 0$, находим: $AB = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R$.

Замечание. Сравнивая два выражения для AB, получаем: $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

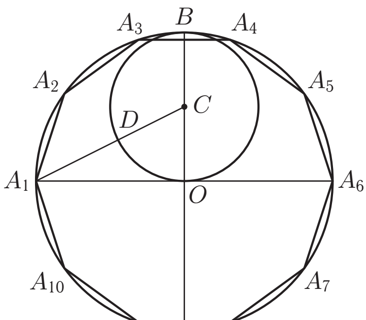


Рис. 474

Пользуясь полученным результатом, решим следующую задачу.

Задача 3. *В данную окружность вписать правильные десятиугольник и пятиугольник.*

Решение. Построим сначала правильный десятиугольник, вписанный в данную окружность радиуса R с центром O. Для этого проведем взаимно перпендикулярные радиусы OA_1 и OB и на отрезке OB как на диаметре построим окружность с центром C (рис. 474). Отрезок A_1C пересекает эту окружность в некоторой точке D. Докажем, что отрезок A_1D равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в данную окружность. В самом деле,

$$A_1D = A_1C - \frac{R}{2}, \quad A_1C = \sqrt{OA_1^2 + OC^2} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} R,$$

поэтому $A_1D = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R$, т. е. отрезок A_1D равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в исходную окружность.

Отметим на данной окружности точки $A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_9A_{10} = A_1D$. Десятиугольник $A_1A_2 \ldots A_{10}$ — искомый (рис. 474).

Для построения правильного пятиугольника, вписанного в ту же окружность, достаточно провести отрезки A_1A_3, A_3A_5, A_5A_7, A_7A_9, A_9A_1. Пятиугольник $A_1A_3A_5A_7A_9$ — искомый (на рисунке 474 он не изображен).

Перейдем к следующей задаче.

Задача 4. *В данную окружность вписать правильный пятнадцатиугольник.*

Решение. Пусть AB и AC — стороны правильных десятиугольника и шестиугольника, вписанных в окружность радиуса R с центром O, причем точки B и C расположены на окружности так, как показано на рисунке 475, *а*. Тогда, очевидно, $\smile AB = 36^\circ$, $\smile AC = 60^\circ$, поэтому $\smile BC = 24^\circ$. Следовательно, $\angle BOC = 24^\circ = \dfrac{360^\circ}{15}$, т. е. отрезок BC — сторона правильного пятнадцатиугольника, вписанного в ту же окружность. Так как мы умеем строить циркулем и линейкой отрезки $AB = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R$ (см. задачу 3) и $AC = R$, то можем построить и отрезок BC. Возьмем теперь на данной окружности произвольную точку A_1, и, пользуясь циркулем, отметим на этой окружности последовательно точки $A_2, A_3, \ldots, A_{15}$ так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{14}A_{15} = BC$. Проведя затем отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{14}A_{15}, A_{15}A_1$, получим искомый правильный пятнадцатиугольник $A_1A_2 \ldots A_{15}$ (рис. 475, *б*).

Замечание. В связи с рассмотренными нами построениями правильных многоугольников возникает вопрос: а любой ли правильный

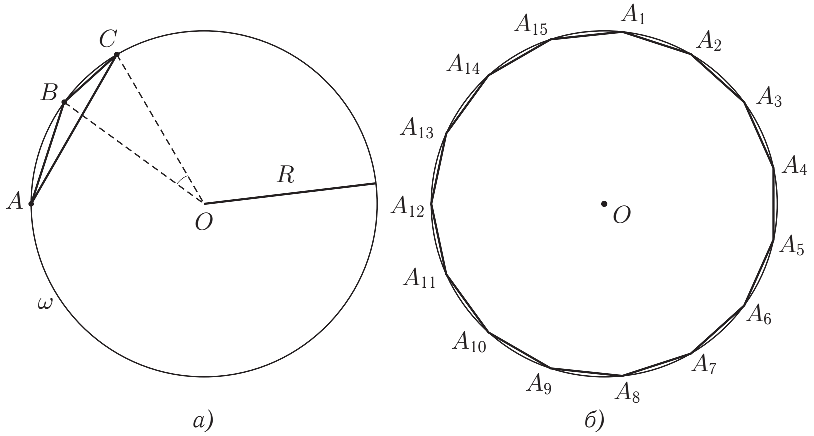


Рис. 475

многоугольник можно построить циркулем и линейкой? Оказывается, не любой. К. Ф. Гаусс доказал, что

построение правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки возможно тогда и только тогда, когда число n имеет следующее разложение на множители: $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_s$, где m — целое неотрицательное число, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные между собой простые числа вида $2^{2^k} + 1$.

Рассмотрим некоторые следствия из этой теоремы.

При $m = 0$, $s = 1$ число n имеет вид $2^{2^k} + 1$. Для значений k, равных 0, 1, 2, 3, 4, получаем: $n = 3$, $n = 5$, $n = 17$, $n = 257$, $n = 65537$.

При $m = 0$, $s = 2$ имеем: $n = p_1 p_2$. Если, например, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, то $n = 15$. Значит, согласно теореме Гаусса, можно построить циркулем и линейкой правильный 15-угольник, в чем мы уже убедились, решив задачу 4.

Число 7 — простое, но оно не является числом вида $2^{2^k} + 1$, поэтому с помощью циркуля и линейки нельзя построить правильный семиугольник. Точно так же нельзя построить правильный девятиугольник.

Отметим, наконец, что число $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ не удовлетворяет теореме Гаусса, поскольку простое число 3 входит сомножителем два раза. Следовательно, нельзя построить правильный 360-угольник, т. е. нельзя разделить циркулем и линейкой окружность на 360 равных частей. Поэтому циркулем и линейкой нельзя построить угол в 1°.

Задачи

560*. Докажите, что равносторонний n-угольник, описанный около окружности, при нечетном n является правильным, а при четном n его углы, взятые через один, равны.

561*. Докажите, что равноугольный n-угольник, вписанный в окружность, при нечетном n является правильным, а при четном n его стороны, взятые через одну, равны.

562. Докажите, что в правильном пятиугольнике любые две пересекающиеся диагонали делятся точкой пересечения на четыре отрезка, два из которых равны стороне пятиугольника.

563. Диагонали AC и BD правильного пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке M. Докажите, что $AM^2 = AC \cdot MC$.

564*. Докажите, что расстояния от произвольной внутренней точки правильного шестиугольника со стороной 1 до каждой из каких-нибудь трех его вершин не меньше 1.

565. На сторонах правильного шестиугольника вне его построены шесть квадратов. Докажите, что вершины этих квадратов, не совпадающие с вершинами шестиугольника, являются вершинами правильного двенадцатиугольника.

566. Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника, соединена с его вершинами. Образовавшиеся при этом шесть треугольников с вершиной в точке M раскрашены попеременно в красный и синий цвета. Докажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей синих треугольников.

567. Окружность с центром в точке O разделена на равные дуги n диаметрами. Докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из произвольной точки M, лежащей внутри окружности, к этим диаметрам, являются вершинами правильного многоугольника.

568. Около правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ описана окружность с центром O. Вершинами треугольника ABC являются середины сторон A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4 пятиугольника. Докажите, что точка O и центр O_1 окружности, вписанной в треугольник ABC, симметричны относительно прямой AC.

569*. Разрежьте правильный шестиугольник: а) на восемь равных трапеций; б) на шесть равных трапеций.

570. Разрежьте правильный шестиугольник на три равных пятиугольника.

571. Пол покрыт без пробелов и перекрытий плитками, которые имеют форму правильных равных между собой многоугольников. Докажите, что это возможно только для трех видов правильных многоугольников.

572*. Существует ли выпуклый пятиугольник, копиями которого можно полностью покрыть любую часть плоскости и: а) две стороны которого параллельны; б) никакие две стороны которого не параллельны?

573. Постройте правильный пятиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

§ 2. Длина

155. Длина окружности. Как измерить длину окружности? Если окружность достаточно велика (например, окружность цирковой арены, радиус которой равен 6,5 м), то ее длину можно приближенно измерить шагами. Заметим, однако, что при этом измеряется не сама длина окружности, а периметр вписанного в нее правильного многоугольника. Таким образом, *периметр правильного вписанного в окружность многоугольника является приближенным значением длины окружности.*

Рассмотрим квадрат, вписанный в окружность радиуса R. Проведя серединные перпендикуляры к его сторонам и отметив точки их пересечения с описанной окружностью (см. рис. 472, *а*), построим правильный вписанный восьмиугольник. Его периметр больше периметра квадрата (докажите это). Удвоим число сторон восьмиугольника. Получим правильный вписанный шестнадцатиугольник, периметр которого больше периметра восьмиугольника. Продолжив этот процесс, составим *монотонно возрастающую последовательность* p_n периметров правильных вписанных в данную окружность 2^n-угольников ($n = 2, 3, 4, \ldots$):

$$p_2 < p_3 < p_4 < \ldots$$

Заметим, что наша последовательность не может возрастать неограниченно. Это следует из того, что периметр вписанного в окружность многоугольника не превосходит периметра любого многоугольника, описанного около этой окружности (см. задачу 2 п. 65). Таким образом, каждый член p_i нашей последовательности не превосходит периметра любого описанного многоугольника, например периметра описанного квадрата, равного $8R$: $p_i \leqslant 8R$ при любом i. В этом случае говорят, что *последовательность* p_i *ограничена сверху* числом $8R$.

В конце нашей книги (см. Приложение 1 «Снова о числах») доказана следующая теорема:

любая монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху, имеет предел.

Эту теорему часто называют *теоремой Вейерштрасса* по имени немецкого математика Карла Теодора Вильгельма Вейерштрасса (1815–1897). Последовательность p_i удовлетворяет условиям этой теоремы и, следовательно, имеет предел. Он и принимается за длину окружности. Таким образом,

длиной окружности называется предел последовательности периметров правильных вписанных в нее 2^n*-угольников при неограниченном увеличении числа* n.

Поскольку периметр правильного 2^n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, равен $2^n \cdot 2R \cdot \sin \dfrac{180^\circ}{2^n}$, то отношение этого периметра к диаметру окружности, равное $2^n \cdot \sin \dfrac{180^\circ}{2^n}$, не зависит от диаметра. Отсюда следует, что и отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от диаметра, т. е. это отношение — одно и то же число для всех окружностей. Немецкий математик Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777) и французский математик Адриен Мари Лежандр (1752–1833) доказали, что это число, приближенно равное 3,141592, является иррациональным. Его обозначают греческой буквой π [1]) (читается «пи»). Тем самым, для длины l окружности радиуса R получается формула:

$$l = 2\pi R.$$

С л е д с т в и е 1. Поскольку дуга в 1° окружности радиуса R составляет $\dfrac{1}{360}$ часть этой окружности, то ее длина равна $\dfrac{2\pi R}{360}$. Следовательно, длина дуги с градусной мерой α равна $\dfrac{\pi R}{180^\circ}\alpha$.

[1]) Первая буква греческого слова $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$ (окружность).

Следствие 2. Ясно, что периметр правильного 2^n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, меньше длины этой окружности. Поэтому при любом n имеет место неравенство: $2^n \cdot 2R \cdot \sin\dfrac{180^\circ}{2^n} < 2\pi R$, или

$$\sin\frac{180^\circ}{2^n} < \frac{\pi}{2^n},$$

а значит, $\cos\dfrac{180^\circ}{2^n} = 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{180^\circ}{2^n}\right) > 1 - \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)^2$. При неограниченном увеличении числа n величина $\dfrac{\pi}{2^n}$ стремится к 0, следовательно, $\sin\dfrac{180^\circ}{2^n}$ стремится к 0, а $\cos\dfrac{180^\circ}{2^n}$ стремится к 1.

Замечание. В связи с нашими рассуждениями возникает такой вопрос: а если начать процесс удвоения числа сторон вписанного многоугольника не с квадрата, а с другого правильного многоугольника, получится ли у новой последовательности периметров тот же самый предел? Оказывается, что получится. Более того, можно на каждом шаге не удваивать число сторон правильного вписанного многоугольника, а произвольным образом увеличивать их число. Запишем пока это утверждение в блокнот в виде вопроса, а сейчас решим такую задачу.

Задача 1. *Доказать, что предел последовательности периметров равноугольных 2^n-угольников, описанных около окружности, при неограниченном увеличении числа n равен длине этой окружности.*

Решение. Периметр P_n описанного около окружности равноугольного и, следовательно, правильного 2^n-угольника равен $2^n \cdot 2R \times \operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{2^n}$, а периметр p_n правильного вписанного в нее 2^n-угольника равен $2^n \cdot 2R \cdot \sin\dfrac{180^\circ}{2^n}$. Таким образом, $P_n = \dfrac{p_n}{\cos\dfrac{180^\circ}{2^n}}$. При неограниченном увеличении числа n величина p_n стремится к длине окружности, а $\cos\dfrac{180^\circ}{2^n}$ стремится к 1. Следовательно, величина P_n также стремится к длине окружности. Утверждение доказано.

156. Длина линии. Как мы только что установили, предел последовательности периметров равноугольных 2^n-угольников, описанных около окружности, при неограниченном увеличении числа n равен длине этой окружности. Поэтому длину окружности можно определить и как предел последовательности периметров указанных многоугольников. Пользуясь этим наблюдением, дадим определение длины замкнутой выпуклой линии.

Рассмотрим сначала замкнутую выпуклую линию L, не имеющую угловых точек. Проведем две параллельные опорные прямые линии, а затем — две перпендикулярные к ним опорные прямые (рис. 476, a).

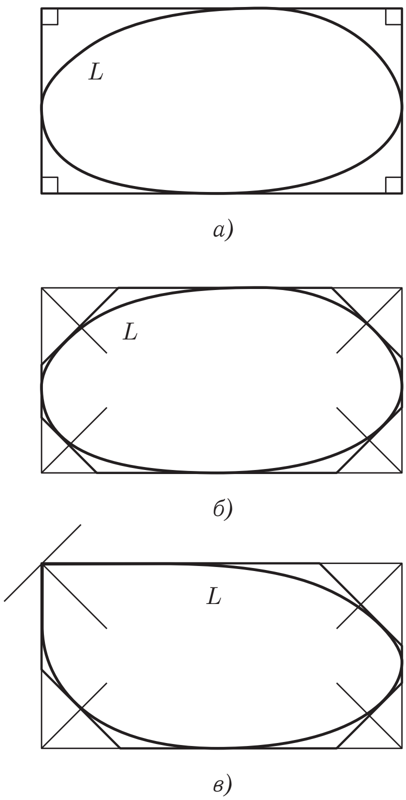


Рис. 476

В результате получится описанный около линии L прямоугольник. Проведя опорные прямые, перпендикулярные к биссектрисам углов этого прямоугольника, получим описанный около линии L равноугольный восьмиугольник (рис. 476, *б*), периметр которого меньше периметра прямоугольника (докажите это). Затем таким же способом построим равноугольный описанный шестнадцатиугольник, периметр которого меньше периметра восьмиугольника, и т. д. В результате мы получим *монотонно убывающую последовательность* P_n периметров описанных около линии L равноугольных 2^n-угольников ($n = 2, 3, 4, \ldots$):

$$P_2 > P_3 > P_4 > \ldots$$

Эта последовательность ограничена снизу, поскольку все ее члены положительны. Отсюда следует, что она имеет предел (докажите это, опираясь на теорему Вейерштрасса). Он и принимается за длину линии L.

Отметим, что наши рассуждения в основном останутся в силе и в том случае, когда линия L имеет угловые точки. Отличие состоит лишь в том, что некоторые вершины построенных 2^n-угольников в этом случае могут совпасть (рис. 476, *в*). Если условиться называть и такие многоугольники равноугольными 2^n-угольниками, то можно сформулировать следующее определение:

длиной замкнутой выпуклой линии называется предел последовательности периметров описанных около нее равноугольных 2^n-угольников при неограниченном увеличении числа n.

З а м е ч а н и е 1. Пусть P_n — периметр описанного около линии L равноугольного 2^n-угольника, p_n — периметр вписанного в нее многоугольника, вершинами которого являются общие точки сторон описанного многоугольника и линии L (рис. 477). Величины P_n и p_n связаны между собой неравенствами: $P_n \cos\dfrac{180^\circ}{2^n} \leqslant p_n \leqslant P_n$ (см. замечание 2 п. 153). При неограниченном увеличении числа n величина P_n стремится к длине линии L, а $\cos\frac{180^\circ}{2^n}$ стремится к 1. Следовательно, величина p_n также стремится к длине линии L.

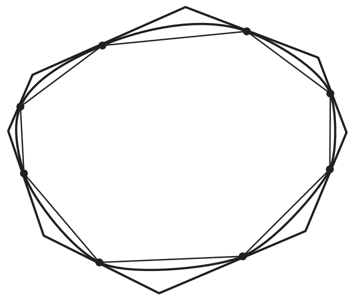


Рис. 477

Замечание 2. В связи с нашим определением длины замкнутой выпуклой линии возникает такой вопрос: а если начать процесс построения 2^n-угольников с какого-нибудь другого описанного прямоугольника, получится ли у новой последовательности периметров тот же самый предел? Оказывается, получится. Докажем это утверждение методом от противного.

Пусть, например, предел Q «новой» последовательности $Q_2, Q_3, \ldots$ меньше, чем предел P «старой» последовательности. Для каждого «старого» описанного многоугольника построим вписанный многоугольник, вершинами которого являются общие точки линии и «старого» многоугольника. Поскольку предел последовательности периметров построенных вписанных многоугольников также равен P (см. замечание 1), а $P > Q$, то в ней найдется периметр p_k, больший Q. Следовательно, найдется и такой периметр Q_i, который меньше p_k, т. е. найдется описанный многоугольник, периметр Q_i которого меньше, чем периметр p_k вписанного многоугольника. Но этого не может быть. Значит, $Q \geqslant P$. Аналогично доказывается, что $P \geqslant Q$. Таким образом, $Q = P$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. В курсе высшей математики понятие длины вводится не только для замкнутых выпуклых линий, но и для произвольных кривых. При этом оказывается, что существуют линии, любая часть которых не имеет длины!

Решим теперь такую задачу.

Задача 2*. *Доказать, что длина замкнутой выпуклой линии больше удвоенной ширины этой линии в любом направлении.*

Решение. Возьмем произвольную прямую a и докажем, что длина данной замкнутой выпуклой линии L больше ее удвоенной ширины в направлении a. С этой целью проведем две опорные прямые a_1 и a_2 линии L, перпендикулярные к a. Пусть A — общая точка линии L и прямой a_1, B — общая точка линии L и прямой a_2 (рис. 478). Может случиться, что прямая AB является опорной прямой линии L (рис. 478, *а*). Это случай рассмотрите самостоятельно. Если же прямая AB не является опорной, то она является секущей и, следовательно, разделяет линию L на два криволинейных сегмента (п. 69). Выберем на дуге одного из этих сегментов произвольную точку C, а на дуге другого — произвольную точку D (рис. 478, *б*). Периметр вписанного в линию L четырехугольника $ACBD$ меньше периметра

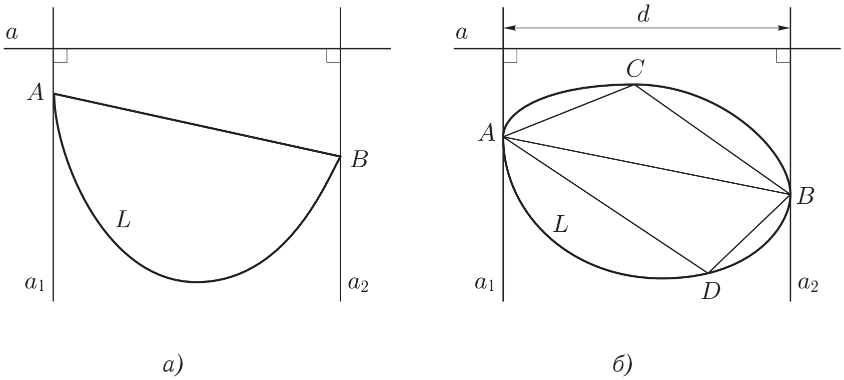


Рис. 478

любого описанного около нее многоугольника (см. задачу 2 п. 65). Поэтому длина l линии L больше или равна периметру четырехугольника $ACBD$:

$$l \geqslant AC + CB + BD + DA.$$

Но $AC + CB > AB$, $BD + DA > AB$, значит, $AC + CB + BD + DA > 2AB$. Следовательно, $l > 2AB$. Осталось заметить, что ширина d линии L в направлении a, равная расстоянию между параллельными прямыми a_1 и a_2, не превосходит расстояния между точками A и B этих прямых, т. е. $AB \geqslant d$. Таким образом, $l > 2d$, что и требовалось доказать.

157*. Теорема Барбье. Теперь мы можем ответить еще на один вопрос из нашего блокнота: как доказать теорему Барбье (*любые две кривые одинаковой постоянной ширины имеют равные длины*)? Эта удивительная теорема оказывается простым следствием еще более удивительного факта:

при любом n периметры равноугольных 2^n-угольников, описанных около двух кривых одинаковой постоянной ширины, равны.

Отсюда следует, что равны и пределы последовательностей этих периметров, т. е. равны длины любых двух кривых одинаковой постоянной ширины. Равенство же указанных периметров вытекает из того, что:

периметр P_n равноугольного 2^n-угольника, описанного около произвольной кривой постоянной ширины d, выражается формулой:

$$P_n = 2^n d \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{2^n}. \qquad (1)$$

Для доказательства справедливости формулы (1) воспользуемся методом математической индукции. При $n = 2$ эта формула верна, поскольку описанным равноугольным 2^n-угольником в этом случае является квадрат со стороной d, периметр которого равен $4d$, и такая же величина получается по формуле (1). Допустим, что справедливость формулы (1) установлена при некотором $n = k \geqslant 2$, и докажем, что тогда формула верна и при $n = k + 1$.

Рассмотрим равноугольный 2^k-угольник, описанный около кривой постоянной ширины d. Продолжим до пересечения его стороны, выходящие из противоположных вершин с номерами 1 и $2^{k-1}+1$. Получим параллелограмм (рис. 479), который является ромбом с высотой d (см. п. 111). Его диагональ, соединяющая вершины многоугольника, равна $\dfrac{d}{\cos\alpha}$, где $\alpha = \dfrac{180^\circ}{2^k}$ (докажите это). Проведем две опорные прямые, перпендикулярные к этой диагонали. Они разделят ее на три отрезка с длинами x, d и y (одна из величин x, y может оказаться равной нулю, если один из концов диагонали является угловой точкой кривой), при этом

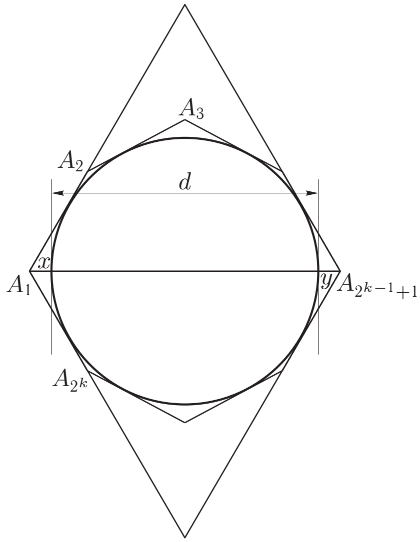


Рис. 479

$$x + y = \frac{d}{\cos\alpha} - d = d\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}.$$

Сделаем теперь разрезы по проведенным опорным прямым и отрежем от данного многоугольника два треугольника. В результате его периметр уменьшится на величину

$$\delta = \frac{2x}{\sin\alpha} - \frac{2x}{\sin\alpha}\cos\alpha + \frac{2y}{\sin\alpha} - \frac{2y}{\sin\alpha}\cos\alpha = \\ = 2(x+y)\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2d\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\cos\alpha\sin\alpha}.$$

Проделав аналогичную процедуру с остальными парами противоположных вершин, мы превратим данный 2^k-угольник в равноугольный описанный 2^{k+1}-угольник, периметр P_{k+1} которого меньше периметра P_k данного многоугольника на величину $\dfrac{2^k}{2}\delta$. Учитывая, что по предположению индукции P_k выражается формулой (1), т. е. $P_k = 2^k d \cdot \operatorname{tg}\alpha$, получаем:

$$P_{k+1} = P_k - \frac{2^k}{2}\delta = 2^k d \cdot \operatorname{tg}\alpha - 2^k d\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\cos\alpha\sin\alpha} =$$
$$= \frac{2^k d}{\cos\alpha\sin\alpha}[\sin^2\alpha - (1-\cos\alpha)^2] = \frac{2^{k+1}d(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} =$$
$$= \frac{2^{k+1}d}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2^{k+1}d\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2^{k+1}d\cdot\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{2^{k+1}}.$$

Итак, $P_{k+1} = 2^{k+1}d\cdot\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{2^{k+1}}$, т. е. формула (1) верна для $n = k+1$.

Таким образом, теорема Барбье доказана.

Следствие. *Длина любой кривой постоянной ширины d равна длине окружности диаметра d, т. е. равна πd.*

Задачи

574. Три равные окружности радиуса R попарно касаются друг друга в точках A, B, C. Найдите длину окружности, вписанной в криволинейный треугольник (т. е. «треугольник», состоящий из трех дуг окружностей) ABC.

575. Через концы дуги ABC, равной 120°, данной окружности проведены касательные к этой окружности, пересекающиеся в точке D. В полученную фигуру $ABCD$ вписана окружность. Докажите, что ее длина равна длине дуги ABC.

576. В круговом секторе с углом в 90° проведена дуга окружности такого же радиуса с центром в конце дуги сектора, разделяющая сектор на две части. Докажите, что длина окружности, вписанной в меньшую из этих частей, равна длине проведенной дуги.

577. На рисунке 480 изображены два криволинейных треугольника, образованных дугами окружностей радиуса R. Найдите сумму «углов» каждого из этих криволинейных треугольников, если их «периметры» равны P.

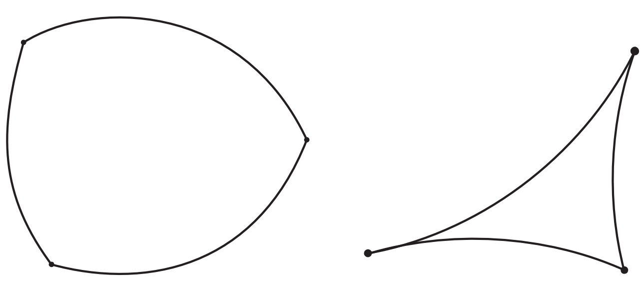


Рис. 480

578. Докажите, что длина хорды криволинейного сегмента меньше длины его дуги (т. е. меньше разности длины сегмента и длины его хорды).

§ 3. Площадь

158. Площадь фигуры. Вопрос о площади произвольной фигуры уже затрагивался в п. 83. Напомним, что площадь произвольной фигуры F вводится следующим образом. Рассматриваются множество всех многоугольников, целиком содержащих в себе фигуру F, и множество всех многоугольников, содержащихся в фигуре F (рис. 481). Ясно, что площадь каждого многоугольника из первого множества не меньше площади любого многоугольника из второго множества. Если существует величина S, для которой как в первом, так и во втором множестве найдутся многоугольники, площади которых сколь угодно мало отличаются от S, то величина S и принимается за площадь данной фигуры.

Если фигура F ограничена выпуклой линией L, то в качестве представителей первого множества можно взять описанные около L равноугольные 2^n-угольники, а в качестве представителей второго — вписанные в L 2^n-угольники (рис. 482), вершинами которых являются общие точки линии L и сторон описанных равноугольных 2^n-угольников (некоторые из вершин указанных многоугольников могут совпадать). Последовательность S_n площадей описанных многоугольников при удвоении числа их сторон (т. е. при увеличении n) монотонно убывает — это следует из самой процедуры построения описанных многоугольников (см. п. 156). Поскольку все члены последовательности S_n

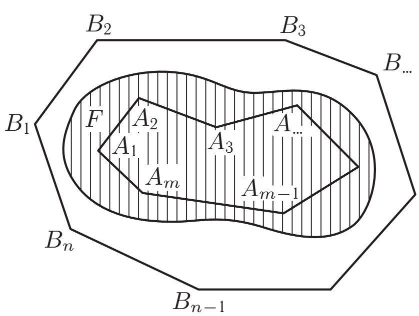


Рис. 481. Многоугольник $A_1A_2\ldots A_m$ содержится в фигуре F, многоугольник $B_1B_2\ldots B_m$ содержит фигуру F

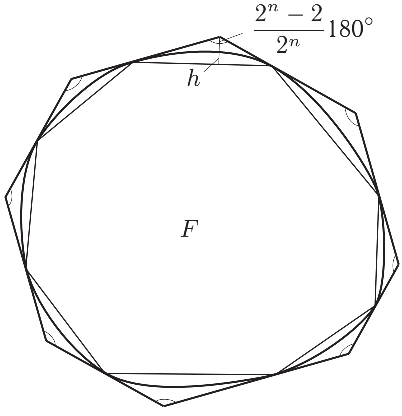


Рис. 482

положительны, то (согласно теореме Вейерштрасса) она имеет предел. Обозначим его буквой S.

С другой стороны, площадь s_n вписанного многоугольника меньше величины S_n на сумму площадей треугольников, у каждого из которых одна сторона является стороной вписанного многоугольника, а две другие — частями сторон описанного многоугольника (угол между ними равен $\frac{2^n-2}{2^n}180^\circ$). Эта сумма не превосходит половины произведения периметра p_n вписанного многоугольника на наибольшую из высот указанных треугольников, проведенных к сторонам вписанного многоугольника — обозначим ее буквой h. Пусть a — наибольшая из сторон описанного многоугольника, P_n — его периметр. Тогда

$$h < a\sin\left[180^\circ - \frac{2^n-2}{2^n}180^\circ\right] = a\sin\frac{360^\circ}{2^n} < P_n\sin\frac{360^\circ}{2^n},$$

поэтому

$$S_n - s_n \leqslant \frac{1}{2}p_n h < \frac{1}{2}p_n P_n \sin\frac{360^\circ}{2^n}.$$

При неограниченном увеличении числа n величины p_n и P_n стремятся к длине линии L (п. 156), а $\sin\frac{360^\circ}{2^n}$ — к нулю (п. 155). Следовательно, разность $S_n - s_n$ также стремится к нулю, т. е. последовательность s_n (так же, как S_n) стремится к S при неограниченном увеличении числа n. Отсюда следует, что как среди величин S_n, так и среди величин s_n найдутся величины, сколь угодно близкие к S, а значит, площадь фигуры F равна S. Итак,

площадь фигуры, ограниченной выпуклой линией, равна пределу площадей описанных около этой линии равноугольных 2^n*-угольников при неограниченном увеличении числа* n.

В частности, поскольку площадь равноугольного 2^n-угольника, описанного около окружности радиуса R, равна $\frac{1}{2}P_nR$, а величина P_n при неограниченном увеличении числа n стремиться к $2\pi R$, то *площадь круга радиуса* R *равна* πR^2.

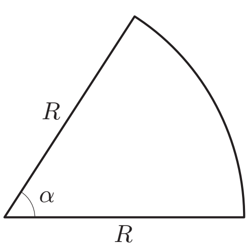


Рис. 483. Круговой сектор

Замечание 1. *Круговым сектором* называется часть круга, ограниченная дугой окружности и двумя радиусами (рис. 483). Поскольку круговой сектор с дугой в 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть круга, то его площадь равна $\frac{\pi R^2}{360}$, где R — радиус круга. Следовательно, площадь кругового сектора, дуга которого имеет градусную меру α, равна $\frac{\pi R^2}{360^\circ}\alpha$.

З а м е ч а н и е 2. В курсе высшей математики приводятся примеры фигур, ограниченных некоторыми замкнутыми линиями, но не имеющих площади. Доказывается, однако, что если фигура ограничена кривой, имеющей длину, то такая фигура имеет и площадь.

З а м е ч а н и е 3. Из теоремы Бойяи–Гервина следует, что любой многоугольник можно разрезать на такие части, из которых можно составить равновеликий этому многоугольнику квадрат. При этом квадрат, равновеликий данному многоугольнику, можно построить с помощью циркуля и линейки (докажите это). А можно ли построить квадрат, равновеликий данному кругу? Эта задача, получившая название «*задача о квадратуре круга*», возникла еще в глубокой древности, и лишь в 1882 году немецкий математик Карл Луиз Фердинанд Линдеман доказал, что такое построение невозможно.

159. Первый замечательный предел. Рассмотрим круговой сектор радиуса R, дуга которого имеет градусную меру α (рис. 484). Поскольку сектор содержит в себе равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными R, и углом между ними, равным α, то его площадь больше площади этого треугольника, т. е. $\frac{1}{2}R^2\sin\alpha < \frac{\pi R^2}{360^\circ}\alpha$, откуда получаем:

$$\sin\alpha < \frac{\pi}{180^\circ}\alpha. \qquad (1)$$

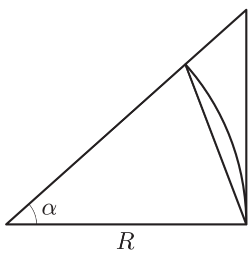


Рис. 484

С другой стороны, если $\alpha < 90^\circ$, то площадь нашего сектора меньше площади прямоугольного треугольника с катетом, равным R, и прилежащим острым углом, равным α, поскольку сектор содержится в этом треугольнике (см. рис. 484). Таким образом, $\frac{\pi R^2}{360^\circ}\alpha < \frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}\alpha$, откуда следует, что $\operatorname{tg}\alpha > \frac{\pi}{180^\circ}\alpha$, или $\sin\alpha > \frac{\pi}{180^\circ}\alpha\cdot\cos\alpha$. Итак, $\frac{\pi}{180^\circ}\alpha\cdot\cos\alpha < \sin\alpha < \frac{\pi}{180^\circ}\alpha$, т. е.

$$\frac{\pi}{180^\circ}\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < \frac{\pi}{180^\circ}. \qquad (2)$$

Из неравенства (1) следует, что если α стремится к нулю, то $\sin\alpha$ также стремится к нулю, а значит, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ стремится к единице. Поэтому левая часть неравенств (2) стремится к $\frac{\pi}{180^\circ}$, т. е. стремится к правой части. Значит, и средняя часть $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ стремится к $\frac{\pi}{180^\circ}$. Следовательно,

предел отношения $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ *при* α*, стремящемся к нулю, равен* $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Этот предел называется *первым замечательным пределом*.

Теперь мы можем ответить еще на один вопрос из нашего блокнота.

Задача 1. *Доказать, что при неограниченном увеличении числа сторон правильных многоугольников, вписанных в данную окружность, их периметры стремятся к длине этой окружности.*

Решение. Периметр правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, равен $2Rn\sin\dfrac{180^\circ}{n} = 2R\cdot 180^\circ\cdot\dfrac{\sin\dfrac{180^\circ}{n}}{\dfrac{180^\circ}{n}}$, а предел отношения $\dfrac{\sin\dfrac{180^\circ}{n}}{\dfrac{180^\circ}{n}}$ при неограниченном увеличении числа n равен $\dfrac{\pi}{180^\circ}$ (первый замечательный предел). Поэтому предел периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность, равен $2R\cdot 180^\circ\cdot\dfrac{\pi}{180^\circ} = 2\pi R$, что и требовалось доказать.

Решим еще одну задачу.

Задача 2. *Доказать, что сумма синусов углов выпуклого многоугольника меньше 2π, но может сколь угодно мало отличаться от 2π.*

Решение. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — углы выпуклого n-угольника. Воспользуемся равенством:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n = \\ = \sin(180^\circ - \alpha_1) + \sin(180^\circ - \alpha_2) + \ldots + \sin(180 - \alpha_n).$$

Поскольку, согласно неравенству (1), $\sin(180^\circ - \alpha_i) < \dfrac{\pi}{180^\circ}(180^\circ - \alpha_i) = \pi - \dfrac{\pi}{180^\circ}\alpha_i$, то

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n < (\pi - \frac{\pi}{180^\circ}\alpha_1) + \\ + (\pi - \frac{\pi}{180^\circ}\alpha_2) + \ldots + (\pi - \frac{\pi}{180^\circ}\alpha_n) = n\pi - \frac{\pi}{180^\circ}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

Но $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (n-2)\cdot 180^\circ$, поэтому $n\pi - \dfrac{\pi}{180^\circ}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 2\pi$, и мы получаем неравенство:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n < 2\pi.$$

Докажем теперь, что наша сумма синусов может сколь угодно мало отличаться от 2π. Рассмотрим правильный n-угольник. Для него

$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n =$

$$= n\sin\left(\frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ\right) = n\sin\frac{360^\circ}{n} = 360^\circ \cdot \frac{\sin\frac{360^\circ}{n}}{\frac{360^\circ}{n}}.$$

При неограниченном увеличении числа n эта величина стремится к $360^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 2\pi$, поэтому при достаточно большом n она будет сколь угодно мало отличаться от 2π. Утверждение доказано.

160. Изопериметрическая задача. Одной из классических задач геометрии является задача о нахождении такого многоугольника с заданным числом сторон, который при данном периметре имеет наибольшую площадь. Оказывается, что таким многоугольником является правильный многоугольник. Эта задача представляет собой пример так называемой *изопериметрической задачи*: при заданном периметре (отсюда и название — изопериметрическая) ищется n-угольник с наибольшей площадью. Более сложная изопериметрическая задача состоит в отыскании такой замкнутой линии, которая при заданной длине ограничивает фигуру наибольшей площади. Как мы вскоре увидим, этой линией оказывается окружность. В курсе высшей математики рассматривается широкий класс задач, в определенном смысле похожих на эти две. Имея в виду это сходство, все такие задачи называют изопериметрическими.

Попробуем сначала решить вторую задачу.

Теорема. *Из всех замкнутых кривых данной длины p окружность ограничивает фигуру наибольшей площади.*

Доказательство*. Докажем сначала, что если фигура F ограничена замкнутой линией L длины p, отличной от окружности, то всегда можно указать замкнутую выпуклую линию длины p, ограничивающую фигуру большей площади.

Если линия L — невыпуклая, то поступим так. Заменим линию L выпуклой линией L_1, состоящей из дуг и отрезков, так, как показано на рисунке 485, *а* (отрезки изображены пунктиром). Площадь S_1 фигуры F_1, ограниченной этой линией, больше площади S (так как фигура F_1 содержит в себе фигуру F), а длина p_1 линии L_1 меньше p (см. за-

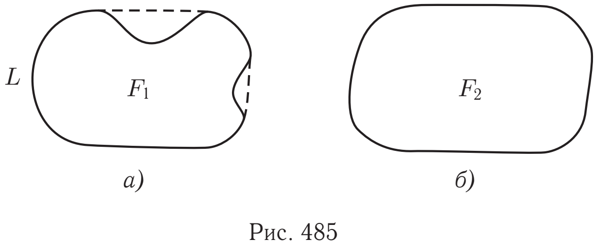


Рис. 485

дачу 578). Рассмотрим теперь фигуру F_2, подобную фигуре F_1, с коэффициентом подобия $\frac{p}{p_1}$ (вопрос о подобии произвольных фигур мы обсудим в главе XIII). Эта фигура ограничена выпуклой линией L_2 длины p, а ее площадь больше площади S_1 (рис. 485, *б*) и, следовательно, больше площади S. Таким образом, линия L_2 — искомая. Описанный процесс построения выпуклой линии L_2 для данной невыпуклой линии L условимся кратко называть *восстановлением выпуклости линии* L.

Пусть теперь L — выпуклая линия, отличная от окружности. Проведем какую-нибудь прямую, делящую линию L на две части одинаковой длины. Эта прямая делит фигуру F на две части. Если одна из частей имеет большую площадь, чем другая, то вместо другой части возьмем фигуру, симметричную первой части относительно проведенной прямой (рис. 486), после чего площадь увеличится. Если же обе части имеют равные площади, то заменим часть фигуры симметричной ей частью, отличной от полукруга. При необходимости восстановим выпуклость кривой, ограничивающей новую фигуру. В результате мы построим симметричную относительно некоторой прямой фигуру, ограниченную выпуклой линией длины p и имеющую не меньшую площадь, чем у исходной фигуры.

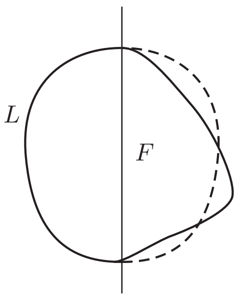
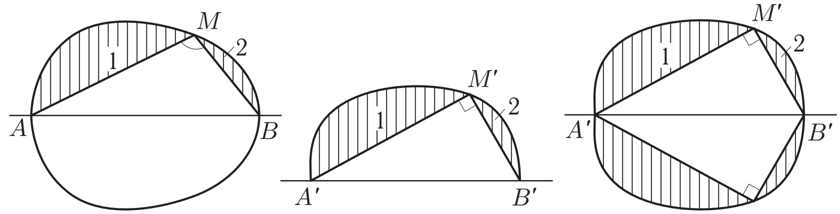


Рис. 486

Итак, новая фигура, а значит и ограничивающая ее линия, имеет ось симметрии. Пусть A и B — точки пересечения линии и оси симметрии (рис. 487, *а*). Выберем один из криволинейных сегментов с хордой AB. Предположим, что дуга этого сегмента отлична от полуокружности. Тогда на ней существует такая точка M, отличная от A и B, что угол AMB не равен $90°$ — в противном случае она представляла бы собой полуокружность. Разрежем сегмент на три части: два криволинейных сегмента 1 и 2 с дугами AM и MB и треугольник AMB. Затем сегменты 1 и 2 приложим друг к другу вершинами M так, чтобы



а) *б)* *в)*

Рис. 487

угол AMB стал прямым (рис. 487, *б*; на этом рисунке новые положения точек A, M и B обозначены через A', M' и B'). Полученный новый сегмент с хордой $A'B'$ состоит из тех же двух сегментов 1 и 2 и треугольника $A'M'B'$, площадь которого больше площади треугольника AMB (объясните, почему). Поэтому новый сегмент имеет большую площадь, чем старый, а длина его дуги, равная сумме длин дуг AM и MB, осталась, разумеется, той же.

Рассмотрим теперь фигуру, состоящую из нового сегмента и сегмента, симметричного ему относительно прямой $A'B'$ (рис. 487, *в*). Восстановив при необходимости выпуклость кривой, ограничивающей эту фигуру, мы получим замкнутую выпуклую линию длины p, ограничивающую фигуру большей площади, чем площадь исходной фигуры.

Итак, мы доказали, что если фигура ограничена замкнутой линией длины p, отличной от окружности, то всегда можно указать замкнутую выпуклую линию длины p, ограничивающую фигуру большей площади. Более того, как мы установили, новую линию можно считать симметричной относительно некоторой прямой.

В этом месте может показаться, что мы уже доказали теорему. В самом деле, из наших рассуждений следует, что если существует линия длины p, ограничивающая фигуру наибольшей площади, то эта линия является окружностью (поскольку если она не является окружностью, то можно указать линию той же длины и ограничивающую фигуру большей площади). Но возникает вопрос: откуда следует, что такая линия существует?

Попробуем рассуждать иначе. Рассмотрим произвольную замкнутую линию L длины p, отличную от окружности. Требуется доказать, что площадь S ограниченной этой линией фигуры меньше площади круга, ограниченного окружностью длины p, т. е. меньше величины $S_0 = \dfrac{p^2}{4\pi}$. Допустим, что $S \geqslant S_0$. Поскольку линия L отлична от окружности, то существует замкнутая выпуклая линия L_1 длины p, ограничивающая фигуру с площадью S_1, большей S, и следовательно, большей $S_0 = \dfrac{p^2}{4\pi}$. При этом линию L_1 можно считать симметричной относительно некоторой прямой, пересекающей ее в каких-то точках A_1 и B_1 (рис. 488, *а*). Отметим также, что линия L_1 отлична от окружности (так как $S_1 > S_0$).

Каждой точке M линии L_1 поставим в соответствие число $s(M)$, равное разности площади прямоугольного треугольника с катетами A_1M и B_1M и треугольника A_1MB_1 ($s(A_1) = s(B_1) = 0$). Выберем из точек линии L_1 такую точку M_1, для которой величина $s(M)$ принимает наибольшее значение (если таких точек несколько, то выберем любую из них), и положим $s(M_1) = s_1$. Разрежем сегмент с дугой $A_1M_1B_1$ по отрезкам A_1M_1 и B_1M_1 и повернем образовавшиеся два сегмента так, чтобы угол между их хордами стал прямым (см. рис. 488, *б*). В результате, как мы говорили, получится

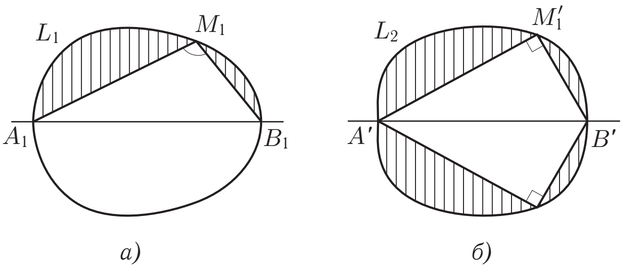


Рис. 488

сегмент с хордой $A'B'$, длина дуги которого такая же, как у исходного сегмента, а площадь больше на величину s_1. Достроим этот сегмент до симметричной относительно прямой $A'B'$ фигуры. Если окажется, что построенная симметричная фигура ограничена невыпуклой линией, то восстановим выпуклость линии. При этом площадь увеличится на некоторую величину w_1. Таким образом, если S_2 — площадь новой фигуры, то $S_2 = S_1 + 2s_1 + w_1$, где $s_1 > 0$, $w_1 \geqslant 0$.

Применив к новой фигуре ту же процедуру, что и к фигуре с площадью S_1, получим фигуру с площадью $S_3 = S_2 + 2s_2 + w_2$. Продолжая этот процесс, мы построим монотонно возрастающую последовательность $S_1, S_2, S_3, \ldots$ Выпуклую линию, ограничивающую построенную фигуру с площадью S_i, обозначим через L_i, а точки ее пересечения с осью симметрии — через A_i и B_i. Заметим, что последовательность S_n ограничена сверху (например, согласно задаче 2 п. 156, величиной $\frac{p^2}{4}$). По теореме Вейерштрасса она имеет предел. Следовательно, величина $S_{i+1} - S_i = 2s_i + w_i$, а значит и s_i, с ростом i становится сколь угодно малой, т. е. стремится к нулю.

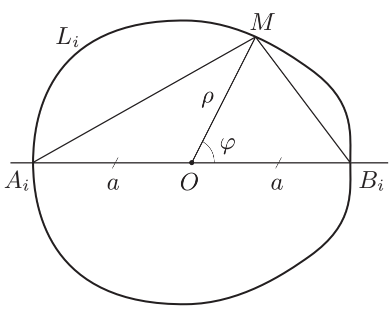


Рис. 489

Поскольку последовательность s_n при неограниченном увеличении числа n стремится к нулю, то величина $\delta = \sqrt{s_i}$ при достаточно большом i будет сколь угодно малой. Возьмем такое i, чтобы эта величина удовлетворяла двум неравенствам: $\delta < \frac{p}{8\pi^2}$ и $\delta < \frac{S_1 - S_0}{2\pi p}$ (напомним, что $S_0 = \frac{p^2}{4\pi}$).

Пусть M — точка линии L_i, O — середина отрезка A_iB_i, $OM = \rho$, $A_iB_i = 2a$, $\angle B_iOM = \varphi$ (рис. 489). Тогда $s(M) = \frac{1}{2}A_iM \cdot B_iM - \frac{1}{2}A_iB_i \cdot OM \cdot \sin\varphi$. Применяя теорему косинусов к треугольникам OMA_i и OMB_i, получаем:

$$s(M) = \frac{1}{2}\sqrt{\rho^2 + a^2 + 2a\rho\cos\varphi}\,\sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\varphi} - a\rho\sin\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\rho^2 + a^2)^2 - 4a^2\rho^2\cos^2\varphi} - a\rho\sin\varphi.$$

Поскольку $s(M) \leqslant s_i = \delta^2$, то $(\rho^2 + a^2)^2 - 4a^2\rho^2\cos^2\varphi \leqslant 4\delta^4 + 4a^2\rho^2\sin^2\varphi + 8\delta^2 a\rho\sin\varphi$, или

$$(\rho^2 - a^2)^2 \leqslant 4\delta^4 + 8\delta^2 a\rho\sin\varphi \leqslant 4\delta^4 + 8\delta^2 ah, \tag{3}$$

где $2h$ — ширина линии L_i в направлении, перпендикулярном к оси симметрии (рис. 489). Учитывая, что $4a < p$ и $4h < p$ (см. задачу 2 п. 156), $\delta < \frac{p}{8\pi^2} < \frac{p}{\sqrt{8}}$, неравенство (3) можно переписать так: $(\rho^2 - a^2)^2 < 4\delta^2\frac{p^2}{8} + 8\delta^2\frac{p^2}{16} = \delta^2 p^2$, откуда

$$a^2 - p\delta < \rho^2 < a^2 + p\delta. \tag{4}$$

Глядя на правое из неравенств (4), можно сделать вывод: линия L_i лежит в круге радиуса $\sqrt{a^2 + p\delta}$ с центром O. Следовательно, ее длина не превосходит длины окружности, ограничивающей этот круг (пользуясь результатами задач 1 и 2 п.п. 155 и 65, а также замечанием 1 п. 156, докажите это самостоятельно): $p \leqslant 2\pi\sqrt{a^2 + p\delta}$. Отсюда получаем:

$$a^2 \geqslant \frac{p^2}{4\pi^2} - p\delta. \tag{5}$$

Из этого неравенства следует, что $a^2 - p\delta \geqslant \frac{p^2}{4\pi^2} - 2p\delta > 0$ (напомним, что $\delta < \frac{p}{8\pi^2}$). Поэтому, глядя на левое из неравенств (4), можно сказать: окружность радиуса $\sqrt{a^2 - p\delta}$ с центром O лежит внутри линии L_i. Значит, длина этой окружности не превосходит длины линии L_i: $2\pi\sqrt{a^2 - p\delta} \leqslant p$, откуда:

$$a^2 \leqslant \frac{p^2}{4\pi^2} + p\delta. \tag{6}$$

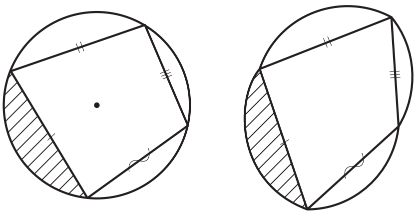
Вспомним теперь, что линия L_i лежит внутри круга радиуса $\sqrt{a^2 + p\delta}$, а значит, площадь S_i ограниченной ею фигуры меньше $\pi(a^2 + p\delta)$. Отсюда, с учетом неравенства (6), получаем:

$$S_i < \pi\left[\left(\frac{p^2}{4\pi^2} + p\delta\right) + p\delta\right] = p\left(\frac{p^2}{4\pi^2} + 2p\delta\right) = S_0 + 2\pi p\delta.$$

Поскольку $\delta < \dfrac{S_1 - S_0}{2\pi p}$, то $S_i < S_0 + S_1 - S_0 = S_1$. Но этого не может быть, так как последовательность S_n — монотонно возрастающая. Полученное противоречие означает, что площадь S исходной фигуры меньше, чем площадь S_0 круга. Теорема доказана.

Следствие. *Площадь вписанного многоугольника больше площади любого другого многоугольника с такими же сторонами.*

В самом деле, рассмотрим n-угольник, вписанный в окружность (рис. 490, *а*; на этом рисунке $n = 4$). Можно сказать, что круг составлен из этого n-угольника и n сегментов (на рисунке 490 один из сегментов заштрихован). Деформируем теперь нашу фигуру так, чтобы все сегменты не изменили своей формы (рис. 490, *б*). Новая фигура ограничена кривой линией, составленной из дуг сегментов, поэтому длина этой кривой такая же, как у исходной окружности, но сама кривая уже не является окружностью. Следовательно, площадь новой фигуры меньше, чем площадь исходной. С другой стороны, площади сегментов не изменились, так как не изменились сами сегменты. Значит, площадь уменьшилась за счет уменьшения площади многоугольника, т. е. площадь вписанного многоугольника больше площади любого другого многоугольника с такими же сторонами.



а) *б)*

Рис. 490

Замечание. Путем рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы, можно решить и первую из сформулированных нами изопериметрических задач, т. е. *доказать, что из всех многоугольников с заданным числом сторон и данным периметром наибольшую площадь имеет правильный многоугольник.* При доказательстве следует иметь в виду три обстоятельства:

площадь выпуклого многоугольника больше площади невыпуклого многоугольника с таким же периметром;

если в выпуклом многоугольнике $A_1A_2\ldots A_n$ $(n > 4)$ четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ не является вписанным (в какую-то окружность), то его можно отрезать и заменить вписанным четырехугольником с такой же стороной A_1A_4 и таким же периметром, отчего площадь всего многоугольника увеличится (в силу следствия из нашей теоремы);

если в выпуклом многоугольнике $A_1A_2\ldots A_n$ стороны A_1A_2 и A_2A_3 не равны, то от него можно отрезать треугольник $A_1A_2A_3$ и заменить его равнобедренным треугольником с основанием A_1A_3 и таким же периметром, отчего площадь всего многоугольника увеличится (это можно доказать с помощью формулы Герона).

Попробуйте решить эту изопериметрическую задачу самостоятельно.

Задачи

579. Площадь кругового кольца равна S. Радиус большей окружности равен длине меньшей. Найдите длину меньшей окружности.

580. Три равные окружности радиуса R попарно касаются друг друга в точках A, B, C. Найдите площадь криволинейного треугольника ABC.

581. Вершины правильного шестиугольника со стороной a являются центрами кругов радиуса $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Найдите площадь части шестиугольника, расположенной вне этих кругов.

582. Через точку A, взятую вне данной окружности радиуса R, проведены две секущие, одна из которых проходит через центр окружности, а другая — на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра окружности. Найдите площадь части круга, заключенной между этими секущими.

583. Три окружности радиусов R_1, R_2 и R_3 попарно касаются друг друга извне. Через точки касания проведена окружность. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

584. На сторонах остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности. Они пересекаются попарно в точках A и A_1, B и B_1, C и C_1. Докажите, что: а) точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB; б) сумма площадей криволинейных треугольников ABC_1, BCA_1 и CAB_1 равна сумме площади криволинейного треугольника $A_1B_1C_1$ и удвоенной площади треугольника ABC.

585. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Другая окружность такого же радиуса касается катетов этого треугольника, причем одной из точек касания является вершина треугольника. Найдите отношение площади треугольника к площади общей части двух данных кругов.

586*. Точка B лежит внутри угла AOC, причем $AO = BO = CO$. На отрезках AO, BO, CO как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся попарно в точках C_1, A_1, B_1. Докажите, что площадь криволинейного треугольника $A_1B_1C_1$ равна половине площади треугольника ABC.

587. Диаметры AB и CD данного круга взаимно перпендикулярны. На дуге ACB взяты произвольные точки P и Q, а внутри круга проведена дуга AB окружности с центром в точке D. Хорды DP и DQ пересекаются с этой дугой соответственно в точках M и N, точки P_1 и Q_1 — проекции точек P и Q на диаметр AB. Докажите, что площадь криволинейного четырехугольника $PQNM$ равна площади треугольника DP_1Q_1.

588. С помощью циркуля и линейки постройте окружность, ограничивающую круг площади, равной сумме площадей трех данных кругов.

Глава 13

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Движения

161. Осевая симметрия. Пусть a — какая-нибудь прямая. Каждой точке M сопоставим симметричную ей относительно прямой a точку M_1 (рис. 491). В результате каждой точке M будет сопоставлена некоторая точка M_1, и каждая точка M_1 окажется сопоставленной некоторой точке M. Иными словами, будет задано отображение плоскости на себя. Оно, как мы напомним (замечание 3 п. 44), называется осевой симметрией, а прямая a — осью симметрии.

Осевая симметрия — это отображение плоскости на себя, *сохраняющее расстояния* между точками. Поясним смысл этих слов. Пусть A и B — какие-нибудь точки, A_1 и B_1 — симметричные им точки относительно прямой a. Поскольку осевая симметрия является наложением, при котором отрезок AB накладывается на отрезок A_1B_1, то $A_1B_1 = AB$. Итак, расстояние между любыми точками A и B равно расстоянию между сопоставленными им точками A_1 и B_1. Это и означает, что осевая симметрия сохраняет расстояния между точками.

Осевая симметрия является наложением. Следовательно, при осевой симметрии каждый отрезок отображается на равный ему отрезок, прямая — на прямую, луч — на луч, треугольник — на равный ему треугольник, а угол — на равный ему угол. Здесь, однако, целесообразно внести одно уточнение. Обратимся к рисунку 492, на котором

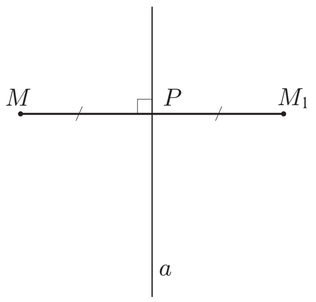


Рис. 491. Осевая симметрия

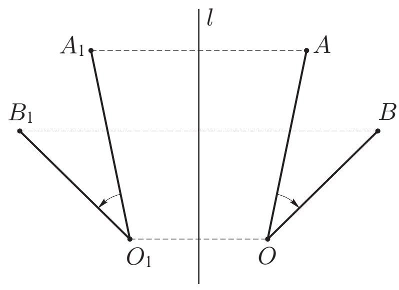


Рис. 492

изображены угол AOB и угол $A_1O_1B_1$, симметричный углу AOB относительно прямой l. Рассмотрим сначала угол AOB. Мы видим, что поворот вокруг точки O от OA к OB осуществляется по часовой стрелке. Обратимся теперь к углу $A_1O_1B_1$. В нем поворот вокруг точки O_1 от O_1A_1 к O_1B_1 осуществляется против часовой стрелки. Обычно это свойство осевой симметрии формулируют так: *осевая симметрия сохраняет величину угла, но меняет его ориентацию*.

162. Движение. Мы говорили, что осевая симметрия является отображением, сохраняющим расстояния. Любое отображение, обладающее этим свойством, называется движением. Таким образом, *движение плоскости — это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния*. Примером движения может служить любое наложение.

Отметим, что *движение, при котором точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, переходят соответственно в точки A_1, B_1 и C_1, определяется единственным образом*. Доказательство этого утверждения почти дословно совпадает с решением задачи 6 п. 47. Из этого следует, что

любое движение является наложением.

В самом деле, рассмотрим произвольное движение g и какие-нибудь точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки, в которые переходят точки A, B и C при движении g. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников, поэтому существует наложение, переводящее точки A, B и C в точки A_1, B_1 и C_1. Это наложение также является движением, поэтому оно совпадает с движением g. Таким образом, движение g является наложением, что и требовалось доказать.

Из определения движения следует, что *последовательное выполнение двух движений является движением* (объясните, почему). Выясним, какое движение получается в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий с различными осями l и m. Возможны два случая: 1^0 прямые l и m параллельны; 2^0 прямые l и m пересекаются. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1^0. Обозначим буквой d расстояние между параллельными прямыми l и m и введем систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой l, а прямая m имела уравнение $y = d$ (рис. 493). Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$. При симметрии относительно прямой l она перейдет в точку $N(x; -y)$. Точка N в свою очередь при симметрии относительно прямой m перейдет в такую точку M_1, что прямая m окажется серединным перпендикуляром к отрезку NM_1. Поэтому середина отрезка NM_1 имеет координаты $(x; d)$, а значит, сама точка M_1 — координаты $(x; y + 2d)$. Итак, в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий произвольная точка $M(x; y)$ перешла в точку $M_1(x; y + 2d)$, т. е. в такую точку M_1, что $\overrightarrow{MM}_1 = \overrightarrow{a}\{0; 2d\}$.

Отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M переходит в такую точку M_1, что вектор $\overrightarrow{MM}_1$ равен данному вектору $\overrightarrow{a}$, называется *параллельным переносом на вектор* $\overrightarrow{a}$. Итак, *результатом последовательного выполнения двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельный перенос на вектор, перпендикулярный к этим осям, длина которого равна удвоенному расстоянию между осями.*

Очевидно, верно и обратное утверждение: любой параллельный перенос можно представить как результат последовательного выполнения двух осевых симметрий. Отсюда следует, что параллельный перенос является движением, сохраняющим не только величину угла, но и его ориентацию.

2^0. Обозначим буквой O точку пересечения прямых l и m и выберем на этих прямых соответственно точки A и B так, чтобы угол AOB не был тупым (рис. 494). Поскольку при каждой из симметрий с осями l и m точка O остается на месте, или, как говорят, является *неподвижной точкой* этих отображений, то она остается неподвижной и в результате последовательного выполнения этих симметрий.

При симметрии относительно прямой l точка A останется неподвижной, а при симметрии относительно прямой m перейдет в такую точку A_1, что $OA_1 = OA$ и $\angle AOA_1 = 2\angle AOB$.

Возьмем теперь какую-нибудь точку M, не лежащую на луче OA. В результате последовательного выполнения двух осевых симметрий она перейдет в такую точку M_1, что $OM_1 = OM$, $\angle A_1OM_1 = \angle AOM$, причем ориентация этих углов одинаковая (объясните, почему). Следовательно, угол MOM_1 также равен $2\angle AOB$.

Таким образом, в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий точка O осталась на месте, а произвольная точка M перешла в такую точку M_1, что $OM_1 = OM$ и $\angle MOM_1 = 2\angle AOB$. Кроме того, направление поворота вокруг точки O от OM к OM_1 такое же, как от OA к OB (на рисунке 494 — против часовой стрелки). Это движение называется *поворотом вокруг точки O на угол, равный* $2\angle AOB$.

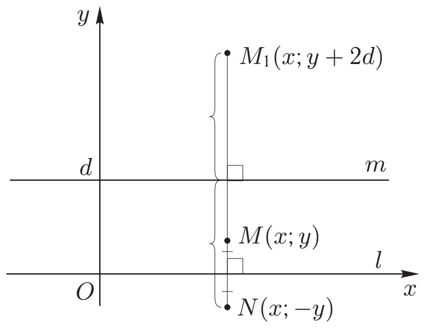


Рис. 493

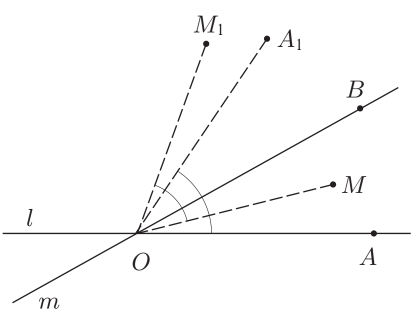


Рис. 494. $OM_1 = OM$, $\angle MOM_1 = 2\angle AOB$

Итак, *результатом последовательного выполнения двух осевых симметрий с пересекающимися осями является поворот вокруг точки пересечения осей на угол, вдвое больший угла между осями.*

З а м е ч а н и е 1. Если оси двух симметрий взаимно перпендикулярны (рис. 495), то в результате последовательного выполнения этих симметрий получится поворот на 180°, т. е. движение, сопоставляющее каждой точке плоскости симметричную ей точку относительно данной точки (точки пересечения осей). Такое движение называется *центральной симметрией*. Отметим также, что результатом последовательного выполнения двух осевых симметрий с совпадающими осями является так называемое *тождественное отображение* — движение, оставляющее все точки плоскости неподвижными.

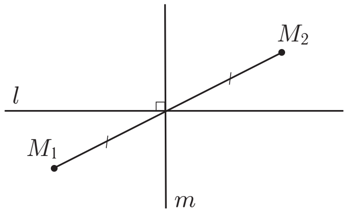


Рис. 495

З а м е ч а н и е 2. Как мы помним, любые две равные фигуры можно совместить не более, чем тремя осевыми симметриями (задача 6 п. 47). С другой стороны, любое движение является наложением. Следовательно, *любое движение представляет собой результат последовательного выполнения не более, чем трех осевых симметрий.*

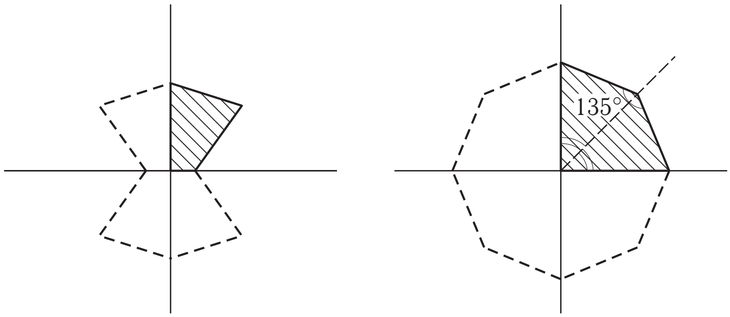
163. Использование движений при решении задач. Решения многих задач значительно упрощаются, если использовать движения. Приведем несколько примеров.

З а д а ч а 1. *Угол большой прямоугольной комнаты требуется отгородить двумя небольшими одинаковыми ширмами. Как следует расположить ширмы, чтобы отгороженная площадь была наибольшей?*

Р е ш е н и е. Построим фигуру, центрально симметричную ширмам относительно вершины угла комнаты, а также фигуры, симметричные ширмам относительно стен (рис. 496, *а*). В результате получится равносторонний восьмиугольник с длиной стороны, равной длине ширмы, и площадью в четыре раза большей, чем площадь, отгороженная ширмами. Но из всех таких восьмиугольников наибольшую площадь имеет правильный восьмиугольник (п. 160). Поэтому и отгороженная площадь будет наибольшей в том случае, когда ширмы будут расположены симметрично относительно биссектрисы угла комнаты, а угол между ними будет равен углу правильного восьмиугольника, т. е. равен 135° (рис. 496, *б*) .

З а д а ч а 2. *Доказать, что площадь четырехугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.*

Р е ш е н и е. Поскольку площадь невыпуклого четырехугольника меньше площади выпуклого четырехугольника с такими же сторонами,



а) *б)*

Рис. 496

то доказательство утверждения достаточно провести для выпуклого четырехугольника.

Прежде всего заметим, что если бы в условии задачи речь шла не о противоположных, а о соседних сторонах, то она решалась бы совсем просто. Действительно, диагональ AC четырехугольника $ABCD$ разделяет его на два треугольника (рис. 497), поэтому для его площади S получаем:

$$S = \frac{1}{2}(AB \cdot BC \cdot \sin B + CD \cdot AD \cdot \sin D) \leqslant \frac{1}{2}(AB \cdot BC + CD \cdot AD).$$

Наша задача сложнее, однако она легко сводится к только что решенной, если использовать симметрию. В самом деле, рассмотрим выпуклый четырехугольник со сторонами a, b, c, d и докажем, что для его площади S справедливо неравенство: $S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$. Проведем диагональ четырехугольника, выберем один из двух треугольников, на которые она разделяет четырехугольник, и построим треугольник, симметричный выбранному относительно серединного перпендикуляра к проведенной диагонали (рис. 498). Наглядно это можно представить себе так: четырехугольник разрезается по диагонали, выбранный треугольник переворачивается другой стороной и приставляется

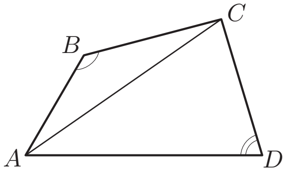


Рис. 497

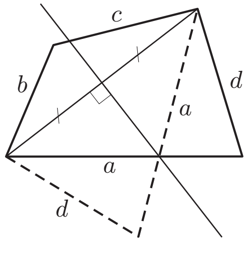


Рис. 498

к нетронутому треугольнику. В результате получается новый выпуклый четырехугольник с той же площадью S и теми же сторонами, но только следующими в другом порядке: стороны a и c, равно как b и d, в этом четырехугольнике уже не противоположные, а смежные. С учетом доказанного выше это и приводит к требуемому неравенству.

Задача 3. *Два поселка расположены по разные стороны реки. Где следует построить мост, чтобы путь из одного поселка в другой был самым коротким, если берега реки — параллельные прямые, а мост строится перпендикулярно к ним?*

Решение. Пусть точки A и B — поселки, отрезок A_1B_1 — мост (рис. 499). Путь из одного поселка в другой состоит из отрезков AA_1, A_1B_1 и B_1B. Поскольку длина моста не зависит от места его расположения, то путь будет самым коротким тогда, когда сумма $AA_1 + B_1B$ будет наименьшей.

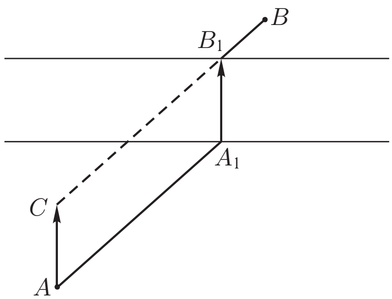


Рис. 499

Перенесем параллельно отрезок AA_1 на вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$. При этом точка A_1 перейдет в B_1, а точка A — в некоторую точку C. Поскольку $AA_1 = CB_1$, то $AA_1 + B_1B = CB_1 + B_1B$. Но сумма $CB_1 + B_1B$ принимает наименьшее значение тогда, когда точки C, B_1 и B лежат на одной прямой. Следовательно, мост нужно строить в точке пересечения прямой CB с тем берегом реки, на котором находится поселок B.

Задача 4. *На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки L, M и N. Доказать, что периметр треугольника LMN будет наименьшим в том случае, когда точки L, M и N — основания высот треугольника ABC, и выразить этот периметр через углы треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.*

Решение. Отметим на стороне BC какую-нибудь точку M (рис. 500, *а*) и выясним сначала, при каком расположении точек L и N периметр треугольника LMN будет наименьшим. Рассмотрим точки M_1 и M_2, симметричные точке M относительно прямых AC и AB. Поскольку $ML = M_2L$, $MN = M_1N$, то периметр треугольника LMN равен длине ломаной M_1NLM_2. Следовательно, наименьшее значение он принимает тогда, когда L и N — точки пересечения сторон AB и AC с прямой M_1M_2 (рис. 486, *б*). В этом случае периметр равен M_1M_2.

Выясним теперь, при каком положении точки M величина M_1M_2 имеет наименьшее значение. Заметим, что в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий с осями AC и AB точка M_1

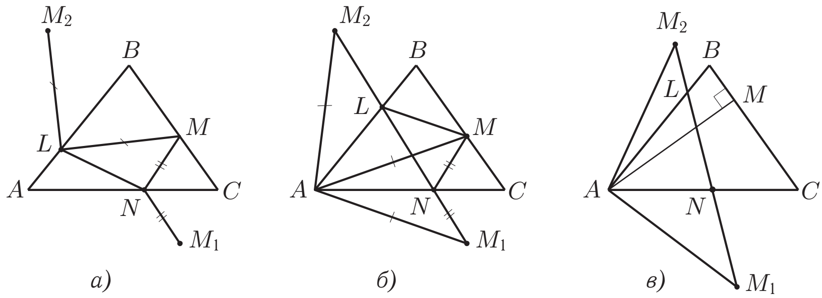


Рис. 500

переходит в M_2. Следовательно, $\angle M_1AM_2 = 2\angle A$ (п. 162). Кроме того, $AM_1 = AM_2 = AM$.

Из равнобедренного треугольника M_1AM_2 находим:

$$M_1M_2 = 2AM_1 \cdot \sin\frac{2A}{2} = 2AM \cdot \sin A.$$

Поскольку величина угла A задана, то величина M_1M_2 принимает наименьшее значение тогда, когда AM равно кратчайшему расстоянию от точки A до прямой BC, т. е. когда точка M является основанием высоты треугольника ABC. В этом случае $AM = AB \cdot \sin B$ (рис. 500, *в*), поэтому

$$M_1M_2 = 2AB \cdot \sin B \cdot \sin A = 4R \cdot \sin C \cdot \sin B \cdot \sin A,$$

где R — радиус описанной окружности.

Итак, наименьший периметр треугольника LMN равен $4R \cdot \sin A \times \times \sin B \cdot \sin C$, причем если точка M не является основанием высоты, то периметр больше этой величины. Аналогично доказывается, что если точки L и N не являются основаниями высот, то периметр треугольника LMN больше указанной величины. Следовательно, периметр треугольника LMN принимает наименьшее значение, равное $4R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, тогда и только тогда, когда точки L, M и N — основания высот треугольника ABC.

Решение следующей задачи основано на использовании поворота.

Задача 5. *На сторонах остроугольного треугольника ABC извне построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1* (рис. 501). *Доказать, что*:

1^0 *отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны, а угол между любыми двумя из них равен* $60°$;

2^0 *три окружности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в некоторой точке O*;

3^0 *прямые AA_1, BB_1 и CC_1 также пересекаются в точке O*;

4^0 *каждая сторона треугольника ABC видна из точки O под углом* $120°$;

5^0 *точка O является той точкой плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC принимает наименьшее значение.*

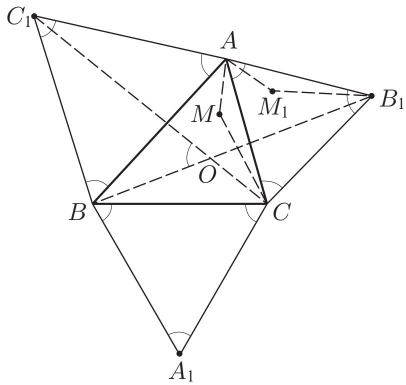


Рис. 501

Точку O часто называют *точкой Ферма* [1] треугольника ABC. Иногда ее называют также *точкой Торричелли* [2] этого треугольника.

Р е ш е н и е. 1^0. При повороте вокруг точки A на угол $60°$ (в соответствующем направлении) отрезок AC_1 переходит в AB, а отрезок AC — в AB_1. Поэтому отрезок CC_1 переходит в B_1B, а значит, $CC_1 = BB_1$, и угол между этими отрезками равен $60°$ (объясните, почему). Аналогично доказывается, что $CC_1 = AA_1$, и следовательно, $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Ясно также, что угол между любыми двумя из этих отрезков равен $60°$. Утверждение 1^0 доказано.

2^0. Пусть O — точка пересечения прямых BB_1 и CC_1. Согласно 1^0 угол BOC_1 равен $60°$. С другой стороны, угол BAC_1 также равен $60°$. Поэтому окружность, описанная около треугольника ABC_1, проходит через точку O. Аналогично доказывается, что через точку O проходит и окружность, описанная около треугольника CAB_1. Угол BOC, будучи смежным с углом BOC_1, равен $120°$, а угол BA_1C — $60°$. Следовательно, окружность, описанная около треугольника BCA_1, также проходит через точку O. Итак, все три окружности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в точке O. Утверждение 2^0 доказано.

3^0. При доказательстве утверждения 2^0 мы установили, что прямые BB_1 и CC_1 проходят через точку O пересечения трех окружностей, описанных около равносторонних треугольников. Аналогично доказывается, что через эту точку проходят прямые AA_1 и CC_1. Тем самым все три прямые проходят через точку O. Утверждение 3^0 доказано.

4^0. При доказательстве утверждения 2^0 было установлено, что угол BOC равен $120°$. Аналогично доказывается, что $\angle AOB = 120°$ и $\angle AOC = 120°$. Следовательно, каждая сторона треугольника ABC видна из точки O под углам $120°$. Утверждение 4^0 доказано.

---

[1] Ферма Пьер (1601–1665) — французский математик и юрист; автор знаменитой Великой теоремы Ферма.

[2] Торричелли Эванжелиста (1608–1647) — итальянский математик и физик.

5^0. Пусть M — произвольная точка плоскости. Вновь рассмотрим поворот вокруг точки A на угол $60°$, при котором отрезок CC_1 переходит в отрезок B_1B. Этот поворот переводит треугольник AMC [1]) в треугольник AM_1B_1, в котором $B_1M_1 = CM$ и $AM_1 = AM$. В равнобедренном треугольнике AMM_1 угол A равен $60°$, а значит, этот треугольник — равносторонний. Следовательно, $AM = M_1M$.

Итак, $CM = B_1M_1$, $AM = M_1M$, поэтому $CM + AM + BM = B_1M_1 + M_1M + MB$. Ясно, что эта сумма принимает наименьшее значение тогда, когда точки M и M_1 лежат на отрезке BB_1, причем M лежит между B и M_1. В этом случае углы AMB и AM_1B_1 равны $120°$ (как внешние углы равностороннего треугольника AMM_1), следовательно, точка M является точкой пересечения прямой BB_1 и окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC_1. Значит, она совпадает с точкой O. Утверждение 5^0 доказано.

Задачи

589. Докажите, что движение, представляющее собой результат последовательного выполнения трех осевых симметрий, оси которых не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке, не имеет ни одной неподвижной точки.

590*. Докажите, что если движение: а) имеет три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, то это движение — тождественное отображение; б) имеет две неподвижные точки и не является тождественным отображением, то это движение — осевая симметрия; в) имеет только одну неподвижную точку, то это движение — поворот вокруг неподвижной точки; г) не имеет ни одной неподвижной точки, то это движение — либо параллельный перенос, либо последовательное выполнение трех осевых симметрий, оси которых не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке.

591. Докажите, что если противоположные стороны шестиугольника попарно равны и параллельны, то его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

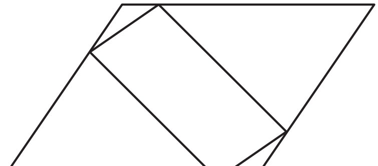


Рис. 502

592. Один параллелограмм вписан в другой (рис. 502). Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.

593. Через точки пересечения сторон непрямоугольного треугольника с окружностью, проходящей через основания высот, проведены прямые, перпендикулярные к этим сторонам. Докажите, что проведенные прямые пересекаются в одной точке.

---

[1]) Если точка M лежит на прямой AC, можно рассмотреть поворот вокруг какой-нибудь другой вершины треугольника ABC.

594*. Докажите, что существует не более одной точки такой, что на описанной около данного треугольника окружности лежат три точки, симметричные ей относительно: а) сторон треугольника; б) середин сторон треугольника.

595*. Шар находится в точке M бильярдного стола, имеющего форму прямоугольника $ABCD$. а) Как следует направить шар, чтобы отразившись от бортов AB, BC, CD и DA (по закону «угол падения равен углу отражения») он попал в заданную точку N? б) Всегда ли задача а) имеет решение?

596*. Бильярдный стол имеет форму прямоугольника, стороны которого выражаются целыми числами p и q, причем дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Докажите, что если шар, находящийся в одном из углов стола, выпустить под углом: а) $45°$ к борту, то после $p+q-2$ отражений он попадет в противоположный угол; б) $30°$ к борту, то он никогда не попадет в противоположный угол.

597. В каком направлении следует направить шар, касающийся одного из бортов прямоугольного бильярдного стола, чтобы отразившись последовательно от трех других бортов он вернулся в исходную точку, а затем повторил пройденный маршрут?

598. Какое наименьшее значение может принимать периметр четырехугольника, вершины которого лежат на сторонах прямоугольника с диагональю d (по одной вершине на каждой стороне)?

599. Стороны AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны, M и N — середины сторон AB и CD. Докажите, что угол между прямыми AD и MN равен углу между прямыми MN и BC (если $AD \parallel BC$, то каждый из этих углов равен, очевидно, $0°$).

600. Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D — в точке N. Докажите, что $|AB+CD-BC-AD|=2MN$.

601. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и CA в точках K_C, K_A и K_B, точки L_A и L_B симметричны соответственно K_A и K_B относительно биссектрис углов A и B. Докажите, что AL_BL_AB — трапеция.

602*. Найдите правильную формулировку и приведите решение задачи 5 п. 163 для следующих случаев: а) треугольник ABC — тупоугольный с тупым углом, меньшим $120°$; б) один из углов треугольника ABC больше $120°$; в) равносторонние треугольники построены не извне, а изнутри.

603. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены равносторонние треугольники: ABP — извне, BCQ — изнутри. Докажите, что $PQ=AC$.

604. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка M. Через вершины A, B, C и D проведены прямые, перпендикулярные к прямым BM, CM, DM и AM соответственно. Докажите, что все проведенные прямые пересекаются в одной точке.

605. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC взяты такие точки L, M и N, что $LM \parallel AC$ и $LN \parallel BC$. Докажите, что точка L и середины отрезков AM и BN являются вершинами правильного треугольника.

606. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AN = DN + BM$. Докажите, что луч AM — биссектриса угла BAN.

607. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_1, ACC_1A_2. Докажите, что: а) отрезки A_1C и A_2B равны и перпендикулярны друг другу; б) центры квадратов и середины отрезков BC и A_1A_2 являются вершинами квадрата.

608*. На сторонах выпуклого четырехугольника построены во внешнюю сторону квадраты. Докажите, что: а) отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и взаимно перпендикулярны; б) если этот четырехугольник — параллелограмм, то центры квадратов являются вершинами квадрата.

609. Углы ACB и A_1CB_1 равнобедренных треугольников ABC и A_1B_1C — прямые и одинаково ориентированные. Докажите, что медиана треугольника A_1BC, проведенная из вершины C, перпендикулярна отрезку AB_1 и равна его половине.

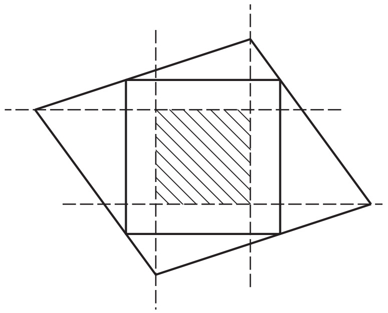


Рис. 503

610*. Через вершины параллелограмма проведены прямые, перпендикулярные к сторонам вписанного в него квадрата (рис. 503). Докажите, что проведенные прямые, пересекаясь, образуют новый квадрат.

611. Докажите, что вершина A, середина стороны BC и середина диагонали DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ являются вершинами правильного треугольника.

612. Найдите множество всех точек M, лежащих внутри и на сторонах равностороннего треугольника ABC, для каждой из которых $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

613. Через общую точку A двух пересекающихся окружностей проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды. Сколько решений имеет задача?

614. Через данную точку M проведите прямую так, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения этой прямой с данной прямой и данной окружностью, делился точкой M пополам.

615. Даны две концентрические окружности. Проведите (если это возможно) прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

616. Через данную точку внутри угла проведите прямую так, чтобы: а) отрезок этой прямой, заключенный внутри угла, делился данной точкой пополам; б) прямая отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

617. Даны угол и точки A, C внутри него. Постройте (если это возможно) параллелограмм $ABCD$, вершины B и D которого лежат на сторонах данного угла.

618. Даны угол hk и точка O внутри него. Постройте квадрат $ABCD$ с центром O так, чтобы точки B и D лежали на лучах h и k.

619. Постройте треугольник, если даны одна из его вершин и прямые, содержащие его биссектрисы, проведенные из двух других вершин.

620. Даны две точки и прямая. Постройте треугольник, у которого данные точки — середины сторон, а биссектриса, проведенная к одной из этих сторон, лежит на данной прямой.

621. Постройте равнобедренный треугольник по углу при вершине, противолежащей основанию, и разности боковой стороны и основания.

622. Постройте треугольник по разности двух его сторон и углам, противолежащим этим сторонам.

623. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

624*. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к этой стороне, и разности углов, прилегающих к ней.

625. Постройте выпуклый четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам так, чтобы диагональ AC была биссектрисой угла A.

626*. Постройте четырехугольник $ABCD$ с заданными сторонами AB и AD и углами B и D, если известно, что в него можно вписать окружность.

627. Впишите в данную окружность прямоугольник так, чтобы одна из его сторон была бы равна и параллельна данному отрезку.

628. Соедините две стороны данного треугольника отрезком, равным и параллельным данному отрезку.

629*. Даны окружность и ее непересекающиеся хорды AB и CD. Постройте точку X, лежащую на окружности, так, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, равный данному отрезку.

630. Постройте выпуклый четырехугольник по: а) двум противоположным сторонам и трем углам; б) трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой стороне; в)* четырем сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон.

631. Постройте параллелограмм по сторонам и углу между диагоналями.

632. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы одной из его вершин была данная точка P, а две другие лежали на данных прямых a и b.

633. Даны окружность, квадрат и точка P. Постройте равнобедренный треугольник PAB, в котором $PA = PB$, вершины A и B лежат соответственно на окружности и стороне квадрата, а $\angle APB = 45^\circ$.

634. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.

635. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник так, чтобы вершины его острых углов лежали на данных окружностях, а вершиной прямого угла являлась данная точка.

636. В данный квадрат впишите равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин совпала с вершиной квадрата, а две другие лежали на сторонах квадрата.

§ 2. Центральное подобие

164. Свойства центрального подобия. Пусть O — произвольная точка, k — любое число, отличное от нуля. *Центральным подобием* (или *гомотетией*) *с центром O и коэффициентом k* называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M переходит в такую точку M_1, что $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

Из этого определения следует, что точка O при центральном подобии остается неподвижной, причем при $k \neq 1$ других неподвижных точек нет. Если же $k = 1$, то неподвижными остаются все точки плоскости, и центральное подобие представляет собой тождественное отображение.

Обратим особое внимание на то, что коэффициент k центрального подобия может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 504). В частности, при $k = -1$ центральное подобие представляет собой центральную симметрию. В общем случае центральное подобие с отрицательным коэффициентом k можно представить как последовательное выполнение центрального подобия с коэффициентом $|k|$ и центральной симметрии относительно его центра (докажите это).

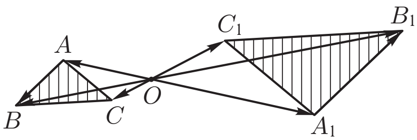


Рис. 504. $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1} = k\overrightarrow{OC}$, $k < 0$

Сформулируем теперь *основное свойство центрального подобия*.

Если при центральном подобии с коэффициентом k точки A и B переходят в точки A_1 и B_1, то $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$.

В самом деле (см. рис. 504),

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}.$$

Пользуясь этим свойством, можно доказать, что *при центральном подобии отрезок переходит в отрезок, луч — в луч, а прямая — в прямую.*

Докажем, например, первое из этих утверждений (остальные доказываются аналогично). Пусть M — произвольная точка отрезка AB, A_1, B_1 и M_1 — те точки, в которые переходят точки A, B и M при центральном подобии с центром O и коэффициентом k (рис. 505). Поскольку векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, то существует такое число m, что $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$. Учитывая, что точка M лежит на отрезке AB, получаем: $m = \dfrac{AM}{AB}$ и, следовательно, $0 \leqslant m \leqslant 1$. Для точки M_1 имеем: $\overrightarrow{A_1M_1} = k\overrightarrow{AM} = k \cdot m\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{A_1B_1}$, причем $0 \leqslant m \leqslant 1$, поэтому точка M_1 лежит на отрезке A_1B_1. Итак, каждая точка M отрезка AB переходит в какую-то точку M_1 отрезка A_1B_1. Аналогично доказывается, что в каждую точку отрезка A_1B_1 переходит некоторая точка отрезка AB. Следовательно, отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1. Утверждение доказано.

Отметим, что

если прямая проходит через центр подобия, то она переходит в себя; если же прямая AB не проходит через центр подобия, то она переходит в прямую, параллельную [1] *AB.*

В самом деле, первое из этих утверждений вытекает непосредственно из определения центрального подобия. Для доказательства второго утверждения проведем через центр O прямую, перпендикулярную к AB, и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с прямой AB (рис. 506). Пусть A_1 и B_1 — точки, в которые переходят A и B. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$ (k — коэффициент центрального подобия), поэтому прямая A_1B_1, как и прямая AB, перпендикулярна к прямой OH. Следовательно, прямые AB и A_1B_1 параллельны, что и требовалось доказать.

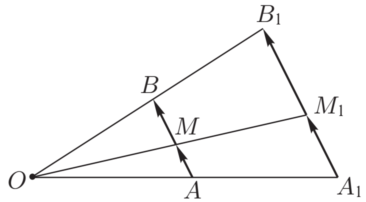


Рис. 505

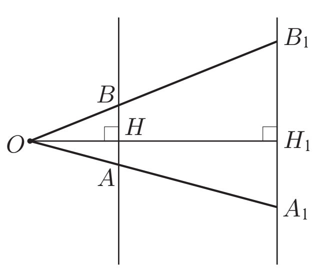


Рис. 506

[1] Здесь мы предполагаем, что коэффициент центрального подобия отличен от единицы.

Рассмотрим теперь треугольник ABC. Из основного свойства центрального подобия следует, что он переходит в треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого пропорциональны сторонам треугольника ABC. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, а значит, их углы соответственно равны. Тем самым мы установили еще одно важное свойство:

центральное подобие сохраняет углы.

Из основного свойства центрального подобия следует также, что

при центральном подобии с коэффициентом k окружность радиуса r с центром C переходит в окружность радиуса $|k|r$ с центром C_1, где C_1 — точка, в которую переходит C.

Доказательство этого утверждения проведите самостоятельно.

Замечание. Центральное подобие является частным случаем так называемого преобразования подобия. *Преобразованием подобия* с коэффициентом $k > 0$ называется отображение плоскости на себя, при котором любые две точки A и B переходят в такие точки A_1 и B_1, что $A_1B_1 = kAB$. Примерами преобразования подобия являются, очевидно, движение, центральное подобие, а также результат их последовательного выполнения. Докажите самостоятельно, что верно и обратное утверждение:

любое преобразование подобия представляет собой результат последовательного выполнения движения и центрального подобия.

Преобразование подобия часто используется в геометрии. С его помощью, например, можно ввести понятие подобия произвольных фигур: *две фигуры называются подобными, если существует такое преобразование подобия, при котором одна из них переходит в другую.* Из этого определения, в частности, следует, что *отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия* (поскольку при преобразовании подобия с коэффициентом k квадрат со стороной 1 переходит в квадрат со стороной k).

165. Теорема Наполеона. Применение центрального подобия позволяет значительно упростить решение целого ряда геометрических задач. В качестве первого примера приведем доказательство теоремы, которую обычно связывают с именем Наполеона Бонапарта.

Теорема Наполеона. *На сторонах треугольника извне построены равносторонние треугольники. Доказать, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника, центр которого находится в точке пересечения медиан исходного треугольника.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, ABC_1, AB_1C и A_1BC — равносторонние треугольники, G_A, G_B и G_C — их центры, G — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 507). Проведем доказательство для случая остроугольного треугольника (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). В пункте 163 (задача 5) мы установили, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1

равны, а углы между ними равны 60°. При центральном подобии с центром в середине стороны BC и коэффициентом $\frac{1}{3}$ точка A переходит G, а точка A_1 — в G_A. Поэтому прямые GG_A и AA_1 параллельны или совпадают, $GG_A = \frac{1}{3}AA_1$. По аналогичной причине прямые GG_B и BB_1, GG_C и CC_1 параллельны или совпадают, и $GG_B = \frac{1}{3}BB_1$, $GG_C = \frac{1}{3}CC_1$. Таким образом, отрезки GG_A, GG_B и GG_C равны и образуют между собой углы по 120°. Из этого следует, что треугольник $G_AG_BG_C$ — равносторонний, а G — его центр. Теорема доказана.

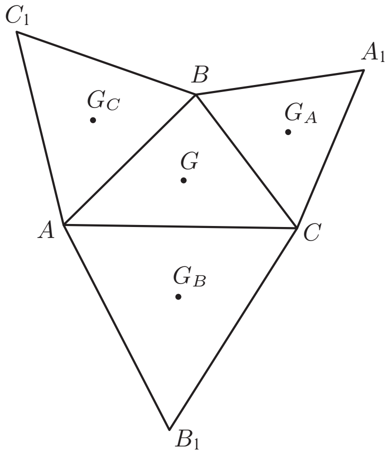


Рис. 507

166. Задача Эйлера. Сейчас мы приведем решение одной из красивейших задач геометрии, получившей название *задача Эйлера*. В ней, в частности, содержатся ответы на два вопроса из нашего блокнота. Эту задачу можно, конечно, решить и без применения центрального подобия. Но, как мы увидим, использование центрального подобия позволяет дать настолько наглядное решение, что его можно было бы даже не иллюстрировать рисунками!

З а д а ч а Э й л е р а. *Доказать, что в произвольном неравностороннем треугольнике*:

1^0 *точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника и их середин, лежат на описанной окружности*;

2^0 *середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности, центром которой является середина отрезка, соединяющего ортоцентр с центром описанной окружности, а ее радиус в два раза меньше радиуса описанной окружности* (эта окружность называется *окружностью Эйлера*);

3^0 *центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем ортоцентр с центром описанной окружности, и делит этот отрезок в отношении* $1:2$, *считая от центра описанной окружности* (прямая, на которой лежат четыре точки — ортоцентр, центр тяжести, центр описанной окружности и центр окружности Эйлера — называется *прямой Эйлера*);

4^0 *точки, симметричные центру описанной окружности относительно прямых, содержащих средние линии треугольника, лежат на окружности Эйлера.*

Решение. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 508). Условимся о следующих обозначениях: H — ортоцентр; G — центр тяжести; O — центр описанной окружности; R — ее радиус; A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB; A_2, B_2 и C_2 — основания высот, проведенных к этим сторонам; A_3, B_3 и C_3 — середины отрезков AH, BH и CH; A_4, B_4 и C_4 — точки, симметричные H относительно сторон треугольника; A_5, B_5 и C_5 — точки, симметричные H относительно середин этих сторон; A_6, B_6 и C_6 — точки, симметричные O относительно прямых B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 (на рисунке 508 они не отмечены). Приступим теперь к решению задачи.

1^0. Пусть R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника HBC. В соответствии с обобщенной теоремой синусов $BC = 2R_1 \sin\angle BHC = 2R \sin\angle BAC$. Стороны углов BHC и BAC взаимно перпендикулярны, поэтому они либо равны, либо составляют в сумме 180°. И в том и в другом случае $\sin\angle BHC = \sin\angle BAC$. Значит, $R_1 = R$. Из этого следует, что окружности, описанные около треугольников HBC и ABC, симметричны относительно прямой BC и относительно середины отрезка BC (рис. 509). Точка H лежит на окружности, описанной около треугольника HBC. Следовательно, симметричные ей точки A_4 и A_5 лежат на окружности, описанной

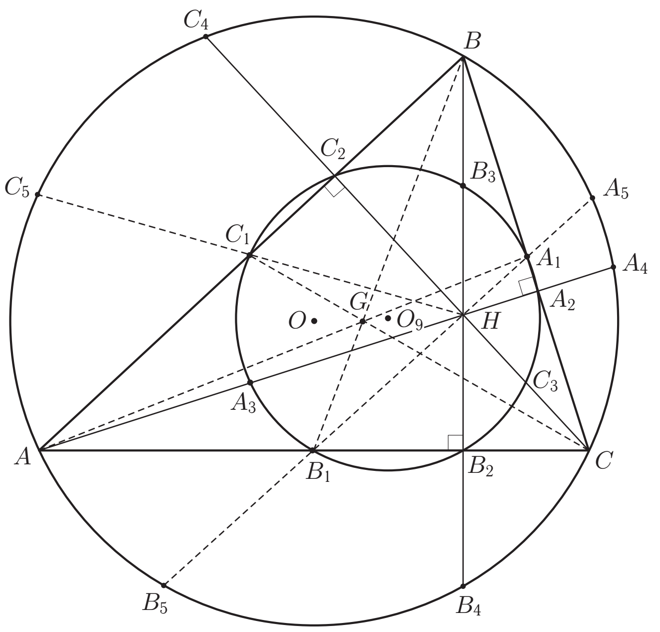


Рис. 508

около треугольника ABC. Аналогично доказывается, что точки B_4, B_5, C_4 и C_5 также лежат на этой окружности.

2^0. Рассмотрим центральное подобие с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$. При этом подобии описанная окружность переходит в окружность радиуса $\frac{R}{2}$, центр O_9 которой является серединой отрезка OH (рис. 508), а точки A_5, B_5, C_5, A_4, B_4, C_4, A, B, C описанной окружности переходят соответственно в точки A_1, B_1, C_1 (середины сторон), A_2, B_2 и C_2 (основания высот), A_3, B_3 и C_3 (середины отрезков AH, BH, CH). Следовательно, точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на окружности с центром O_9 радиуса $\frac{R}{2}$. Утверждение 2^0 доказано.

3^0. Рассмотрим теперь центральное подобие с центром G и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Медианы треугольника ABC делятся точкой G в отношении $1:2$, поэтому при рассматриваемом центральном подобии вершины A, B и C перейдут в середины A_1, B_1 и C_1 противоположных сторон (рис. 510). Следовательно, прямые, содержащие высоты треугольника, перейдут в прямые, перпендикулярные к его сторонам и проходящие через их середины, т. е. в серединные перпендикуляры к сторонам. Поэтому ортоцентр H перейдет в центр O описанной окружности. Это означает, что точка G лежит на отрезке OH и делит его в отношении $1:2$, считая от точки O, что и требовалось доказать.

4^0. Как только что отмечалось, при центральном подобии с центром G и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ вершины A, B и C переходят в середины A_1, B_1 и C_1 противоположных сторон, а точка H переходит в точку O. Из этого следует, что: а) окружность, описанная около треугольника ABC, переходит в окружность Эйлера; б) точки A_4, B_4 и C_4 описанной окружности, симметричные точке H относительно прямых BC, CA и AB, переходят в точки A_6, B_6 и C_6 окружности Эйлера, симметричные точке O относительно прямых B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1. Таким образом, точки A_6, B_6 и C_6 лежат на окружности Эйлера.

С л е д с т в и е. $AH = 2R|\cos A|$.

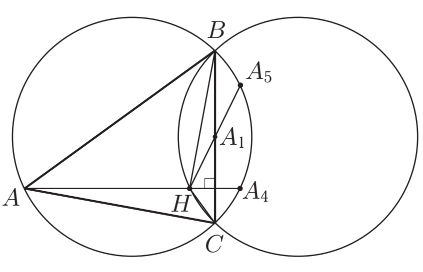


Рис. 509

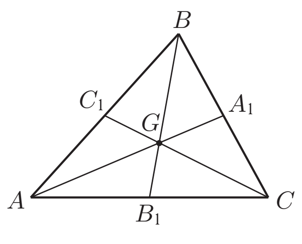


Рис. 510

В самом деле, отрезки AH и AB_4 симметричны относительно прямой AC (см. рис. 508), поэтому $AH = AB_4$. Хорды AC и BB_4 взаимно перпендикулярны. Следовательно, $AB_4^2 + BC^2 = 4R^2$ (см. задачу 3 п. 150). Но $BC = 2R\sin A$. Значит, $AH = AB_4 = 2R|\cos A|$.

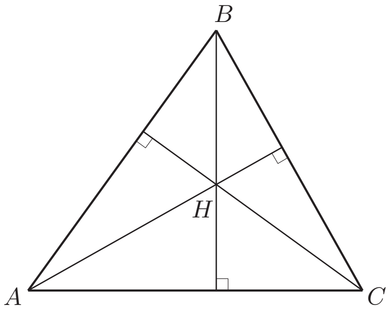


Рис. 511

З а м е ч а н и е. В ходе решения задачи Эйлера мы установили, что *радиус окружности, проведенной через две вершины и ортоцентр непрямоугольного треугольника, равен радиусу окружности, описанной около этого треугольника*. Теперь мы можем дать другое объяснение этого факта. Действительно, основания высот треугольников ABC и ABH, очевидно, совпадают (рис. 511). Следовательно, совпадают их окружности Эйлера. Поэтому радиусы описанных около них окружностей равны.

167. Прямая Симсона. Начнем с такой задачи.

З а д а ч а. *На окружности, описанной около треугольника, взята произвольная точка. Доказать, что точки, симметричные ей относительно сторон треугольника, лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр этого треугольника.*

Р е ш е н и е. Пусть: M — точка окружности, описанной около треугольника ABC; M_1, M_2 и M_3 — точки, симметричные точке M относительно прямых AB, BC и CA; N_1, N_2 и N_3 — точки пересечения (или касания) прямых MM_1, MM_2, MM_3 и описанной окружности; H — ортоцентр треугольника ABC; C_4 — точка, симметричная H относительно прямой AB (рис. 512). Проведем через центр описанной окружности прямую a, параллельную AB. При симметрии относительно прямой AB точка M_1 переходит в точку M, а точка H — в точку C_4. При симметрии относительно прямой a точка M переходит в точку N_1, а точка C_4 — в точку C. Таким образом, в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий с параллельными осями, т. е. параллельного переноса, отрезок M_1H переходит в отрезок N_1C, поэтому $M_1H \parallel N_1C$. Аналогично доказывается, что $M_2H \parallel N_2A$, $M_3H \parallel N_3B$. Но $N_1C \parallel N_2A \parallel N_3B$ (см. задачу 4 п. 150). Следовательно, точки H, M_1, M_2 и M_3 лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Отметим еще одно неожиданное свойство, связанное с описанной около треугольника окружностью.

Т е о р е м а. *Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или их продолжениям) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой, проходящей через*

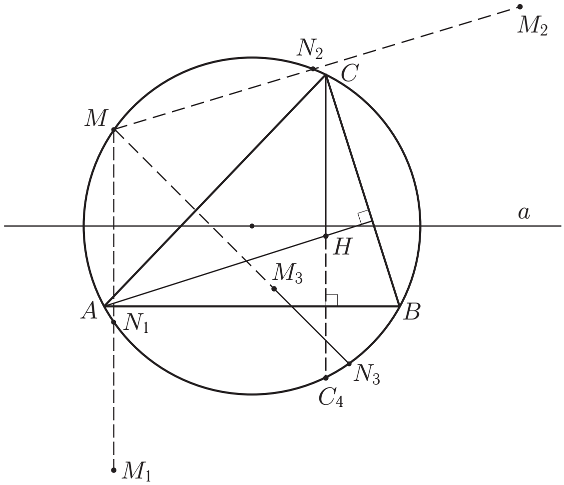


Рис. 512

середину отрезка, соединяющего эту точку с ортоцентром данного треугольника.

Эта прямая называется *прямой Симсона* [1].

Доказательство. Пусть M — точка окружности, описанной около треугольника ABC; M_1, M_2 и M_3 — точки, симметричные точке M относительно прямых AB, BC и CA; H — ортоцентр треугольника ABC (см. рис. 512). Точки M_1, M_2, M_3 и H лежат на одной прямой. При центральном подобии с центром M и коэффициентом $\frac{1}{2}$ эта прямая переходит в прямую (обозначим ее буквой a), проходящую через середину отрезка MH, причем точки M_1, M_2 и M_3 переходят в основания перпендикуляров, проведенных из точки M к прямым AB, BC и CA. Следовательно, прямая a и есть прямая Симсона. Теорема доказана.

Задачи

637. Докажите, что если стороны двух неравных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны, то эти треугольники *центрально-подобны*, т. е. существует такое центральное подобие, при котором один из них переходит в другой.

638. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках, симметричных данной точке относительно середин сторон данного четырехугольника с площадью S.

639. Выпуклый четырехугольник с площадью S разбит диагоналями на четыре треугольника. Найдите площадь четырехугольника,

[1] Симсон Роберт (1687–1768) — шотландский математик.

вершинами которого являются точки пересечения медиан указанных треугольников.

640. На сторонах треугольника ABC с прямым углом C извне построены квадраты ABB_1A_1, ACC_1A_2 и BCC_2B_2. Докажите, что: а) прямые AB_2 и A_2B отсекают от катетов треугольника ABC равные отрезки; б) прямые AB_2, A_2B и высота треугольника ABC, проведенная из вершины C, пересекаются в одной точке.

641*. На сторонах треугольника ABC извне построены квадраты с центрами O_A, O_B и O_C. Докажите, что: а) отрезки AO_A и O_BO_C равны и перпендикулярны; б) прямые AO_A, BO_B и CO_C пересекаются в одной точке.

642. Окружность касается боковых сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC в точках M и N, а также окружности, описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка MN является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

643*. Две окружности равных радиусов, лежащие одна вне другой, касаются изнутри третьей окружности в точках A и B. Через произвольную точку M третьей окружности проведены прямые MA и MB, пересекающие первые две окружности в точках C и D. Докажите, что $AB \parallel CD$.

644. Докажите, что точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC, центр вписанной в треугольник окружности и центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, лежат на одной прямой.

В задачах 645–657 и указаниях к ним используются обозначения, принятые в начале решения задачи Эйлера.

645. Докажите, что: а) Отрезки A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 — диаметры окружности Эйлера, а треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$ симметричны относительно центра окружности Эйлера; б) $A_1B_2 = A_1C_2 = B_1C_1$, $B_1A_2 = B_1C_2 = A_1C_1$, $C_1A_2 = C_1B_2 = A_1B_1$, а вершины треугольника $A_2B_2C_2$ симметричны вершинам треугольника $A_1B_1C_1$ относительно серединных перпендикуляров к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$; в) $A_3B_2 = A_3C_2 = A_3H$, $B_3A_2 = B_3C_2 = B_3H$, $C_3A_2 = C_3B_2 = C_3H$.

646. Сформулируйте утверждения о взаимном расположении точек A, B, C, A_4, B_4, C_4, A_5, B_5, C_5, аналогичные утверждениям задачи 645.

647. Докажите, что $A_1A_3 \perp B_2C_2$, $B_1B_3 \perp A_2C_2$, $C_1C_3 \perp A_2B_2$.

648. Докажите, что касательная к описанной около треугольника ABC окружности в точке A, касательная к его окружности Эйлера в точке A_1 и прямая B_2C_2 параллельны друг другу.

649. Докажите, что: а) четырехугольник AOA_1A_3 — параллелограмм; б) четырехугольник A_3OA_1H — параллелограмм.

650. Докажите, что четырехугольник $A_1B_3C_1O$ — параллелограмм.

651. Докажите, что длина отрезка AA_4 в четыре раза больше расстояния от центра окружности Эйлера до стороны BC.

652. Точка O_1 симметрична центру O описанной около треугольника ABC окружности относительно стороны BC. Докажите, что середина отрезка AO_1 является центром окружности Эйлера треугольника ABC.

653. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная BC и пересекающая описанную окружность в точке M. Докажите, что точка G лежит на отрезке MA_2 , причем $MG = 2GA_2$.

654. Углы треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Докажите, что середины сторон и основания высот этого треугольника являются шестью вершинами правильного семиугольника.

655*. На окружности, описанной около треугольника ABC, взята произвольная точка M. Докажите, что прямая MH пересекает окружность, описанную около треугольника AA_2M, в точке N, лежащей на окружности Эйлера треугольника ABC.

656*. Докажите, что если F — точка Ферма остроугольного треугольника ABC, то прямые Эйлера треугольников ABF, BCF и CAF пересекаются в точке пересечения медиан треугольника ABC.

657*. На прямой Эйлера треугольника ABC взята такая точка M, что точка O является серединой отрезка HM. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на прямой CO и удалена от точки C на расстояние, равное $\frac{4}{3}$ радиуса описанной окружности.

658. Докажите, что прямые, симметричные произвольной прямой, проходящей через ортоцентр треугольника, относительно его сторон, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной около этого треугольника окружности.

659. На окружности, описанной около данного треугольника, взята произвольная точка M. Докажите, что прямая Симсона, соответствующая этой точке, пересекает прямую, соединяющую точку M с ортоцентром данного треугольника, в точке, лежащей на окружности Эйлера этого треугольника.

660. Треугольник ABC вписан в окружность. Для какой точки этой окружности прямая AB является прямой Симсона?

661. Треугольник ABC вписан в окружность. Через точку D этой окружности проведена прямая, перпендикулярная к BC и пересекающая окружность в точке D_1. Докажите, что прямая AD_1 параллельна прямой Симсона, соответствующей точке D.

662. Треугольник вписан в окружность и для двух точек этой окружности построены прямые Симсона. Докажите, что угол между этими прямыми равен половине величины дуги, заключенной между указанными точками окружности.

663. Докажите, что две прямые Симсона, соответствующие двум диаметрально противоположным точкам описанной около треугольника окружности, взаимно перпендикулярны.

664. Даны угол ABC и точка M внутри него. На стороне BC постройте точку, равноудаленную от прямой AB и точки M.

665. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC постройте соответственно точки D и E так, чтобы выполнялось равенство: $AD = DE = EC$.

666. Постройте треугольник ABC по заданным суммам сторон $AC + BC$, $AB + AC$ и углу B.

667. Постройте окружность, касающуюся двух данных прямых и данной окружности.

668. Дан треугольник ABC. Постройте две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

669. Решите задачу 615 с применением центрального подобия.

§ 3. Инверсия

168. Определение инверсии. В этом параграфе мы рассмотрим еще одно геометрическое преобразование, которое называется инверсией. Начнем с определения.

Инверсией относительно окружности радиуса R с центром O называется отображение плоскости (без точки O) на себя, при котором каждой точке M, отличной от O, сопоставляется такая точка M_1, что $\overrightarrow{OM_1} = \left(\dfrac{R}{OM}\right)^2 \overrightarrow{OM}$; точке O не сопоставляется никакая точка (рис. 513). Точка O называется *центром* инверсии, а величина R — ее *радиусом*. Таким образом:

точка M_1 лежит на луче OM;

$OM_1 = \dfrac{R^2}{OM}$ или $OM_1 \cdot OM = R^2$.

Из последней формулы следует, что если точка M лежит внутри круга радиуса R с центром O, т. е. $OM < R$, то $OM_1 > R$, а значит, точка M переходит в точку M_1, лежащую вне круга. Если же точка M лежит вне указанного круга, то она переходит в точку, лежащую внутри него. Наконец, если точка M лежит на границе этого круга, то она переходит в себя. Таким образом,

множество всех точек, остающихся неподвижными при инверсии относительно данной окружности, представляет собой саму эту окружность.

Сделаем еще одно полезное наблюдение. Из определения инверсии следует, что если точка M переходит в M_1, то точка M_1 переходит в M (объясните, почему). Поэтому

если при инверсии фигура F переходит в фигуру F_1, то фигура F_1 переходит в F.

Как отмечалось выше, если точки M и M_1 не совпадают, то одна из них лежит вне, а другая — внутри круга с центром O радиуса R. Пусть, например, точка M лежит вне круга. Проведем касательную MK (рис. 514) и рассмотрим треугольники OKM_1 и OKM. Угол O у этих треугольников общий. Кроме того, $OM_1 \cdot OM = OK^2$,

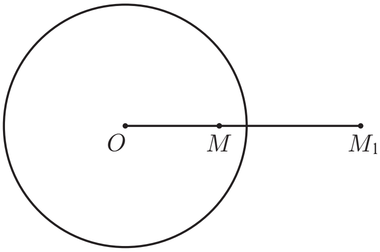


Рис. 513

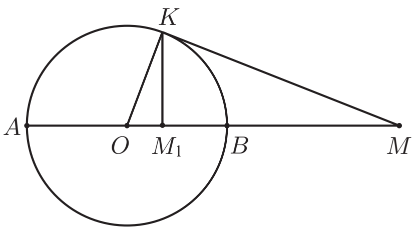


Рис. 514

или $\dfrac{OM_1}{OK} = \dfrac{OK}{OM}$. Следовательно, они подобны по второму признаку подобия треугольников. Но в треугольнике OKM угол K — прямой. Значит, в треугольнике OKM_1 угол M_1 — прямой. Таким образом, прямая M_1K является полярой точки M относительно данной окружности (п. 136). Иными словами,

прямая OM и поляра точки M пересекаются в точке M_1.

Последнее утверждение можно сформулировать иначе. Пусть A и B — точки пересечения прямой OM с нашей окружностью. Вспомнив свойства поляры, мы можем сказать, что

точки A и B гармонически разделяют точки M_1 и M (рис. 514).

Поскольку положение каждой точки гармонической четверки однозначно определяется заданием трех других точек, то это свойство можно было бы положить в основу определения инверсии.

При решении задач с использованием инверсии часто оказывается полезной формула, связывающая расстояние между двумя точками с расстоянием между теми точками, в которые они переходят при инверсии. Выведем эту формулу. Пусть M и N — данные точки, M_1 и N_1 — те точки, в которые они переходят при инверсии относительно окружности радиуса R с центром O. Поскольку $\overrightarrow{OM}_1 = \left(\dfrac{R}{OM}\right)^2 \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}_1 = \left(\dfrac{R}{ON}\right)^2 \overrightarrow{ON}$, то

$$M_1N_1^2 = |\overrightarrow{ON}_1 - \overrightarrow{OM}_1|^2 = \left|\frac{R^2}{ON^2}\overrightarrow{ON} - \frac{R^2}{OM^2}\overrightarrow{OM}\right|^2 = \\ = \frac{R^4}{OM^2ON^2}(OM^2 + ON^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}).$$

Так как выражение в скобках равно $(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{MN}^2 = MN^2$, то
$$M_1N_1 = \frac{R^2 \cdot MN}{OM \cdot ON}. \tag{1}$$

169. Основные свойства инверсии. Рассмотрим инверсию относительно окружности радиуса R с центром O. Выясним, во что при этой инверсии переходит произвольная окружность. Возможны два случая: 1^0 окружность не проходит через центр инверсии; 2^0 окружность проходит через центр инверсии. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1^0. Пусть M_1 — точка, в которую переходит произвольная точка M данной окружности (рис. 515). Тогда $OM_1 \cdot OM = R^2$. Проведем прямую OM и обозначим буквой N вторую точку пересечения этой прямой с данной окружностью (если OM — касательная, то точки M и N совпадают). Поскольку векторы $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{ON}$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\overrightarrow{OM}_1 = k \times \times \overrightarrow{ON}$. Умножая это равенство скалярно на вектор $\overrightarrow{OM}$, получаем: $\overrightarrow{OM}_1 \cdot \overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$, или $R^2 = k\sigma$, где $\sigma = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ — степень точки O относительно данной окружности (п. 115).

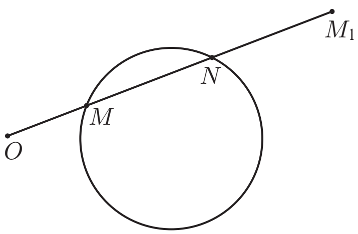


Рис. 515

Итак, $\overrightarrow{OM}_1 = k \cdot \overrightarrow{ON}$, где $k = \dfrac{R^2}{\sigma}$. Это означает, что M_1 — та точка, в которую переходит точка N при центральном подобии с центром O и коэффициентом $\dfrac{R^2}{\sigma}$. Следовательно, при рассматриваемой инверсии каждая точка M данной окружности переходит в точку M_1 окружности, получаемой из данной центральным подобием с центром O и коэффициентом $\dfrac{R^2}{\sigma}$. Аналогично доказывается, что в любую точку этой окружности переходит какая-то точка данной окружности. Таким образом,

если данная окружность не проходит через центр O инверсии, то она переходит в окружность, получаемую из данной центральным подобием с центром O и коэффициентом $\dfrac{R^2}{\sigma}$, где σ — степень точки O относительно данной окружности.

2^0. Пусть OA — диаметр данной окружности, M — произвольная ее точка (отличная от A и O), A_1 и M_1 — точки, в которые переходят A и M при рассматриваемой инверсии (рис. 516). Треугольники OMA и OM_1A_1 имеют общий угол O. Кроме того, $OA_1 \cdot OA = OM_1 \cdot OM$, или $\dfrac{OA_1}{OM_1} = \dfrac{OM}{OA}$. Поэтому эти треугольники подобны. Но угол OMA — прямой. Следовательно, угол OA_1M_1 — также прямой. Это означает, что каждая точка M данной окружности переходит в точку M_1 прямой, перпендикулярной к диаметру OA, или, что то же самое, параллельной касательной к данной окружности в точке O. Аналогично доказывается, что в каждую точку этой прямой переходит какая-то точка данной окружности. Таким образом,

если окружность проходит через центр O инверсии, то она переходит в прямую, параллельную касательной к этой окружности в точке O.

Теперь нетрудно ответить и на такой вопрос: во что при рассматриваемой инверсии переходит прямая? Непосредственно из определения инверсии следует, что

прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя.

Если же прямая не проходит через центр O инверсии, то можно рассуждать так. Проведем к ней перпендикуляр OA и отметим на луче OA точку A_1, в которую переходит точка A (рис. 517). Как мы установили, при рассматриваемой инверсии окружность с диаметром OA_1 переходит в нашу прямую. Следовательно, наша прямая переходит в эту окружность. Итак,

прямая, не проходящая через центр O инверсии, переходит в окружность, проходящую через точку O, причем касательная к этой окружности в точке O параллельна данной прямой.

Полученные нами результаты можно коротко сформулировать так:

при инверсии любая прямая (окружность) переходит в прямую или окружность.

Это — *первое основное свойство инверсии.*

Рассмотрим теперь две пересекающиеся прямые, угол между которыми равен α (рис. 518). Если центр O инверсии не лежит ни на одной из них, то они переходят в две пересекающиеся окружности, проходящие через точку O (объясните, почему). Поскольку касательная к каждой окружности в точке O параллельна той прямой, которая

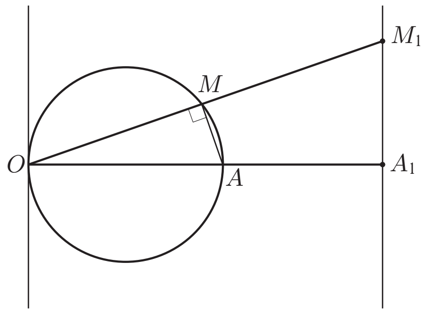


Рис. 516

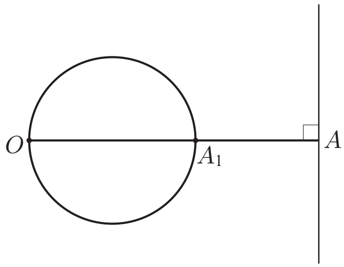


Рис. 517

перешла в эту окружность, то угол между касательными к окружностям в точке O равен α. Ясно, что таким же будет и угол между касательными к окружностям во второй точке их пересечения. Поэтому если договориться называть *углом между пересекающимися окружностями* угол между их касательными в точке пересечения, то можно сказать так: если каждая из двух пересекающихся прямых при инверсии переходит в окружность, то угол между этими окружностями равен углу между прямыми. Пользуясь рисунком 519, сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для случая, когда точка O лежит на одной из прямых или является точкой их пересечения.

Далее, рассмотрим прямую и окружность, касающиеся друг друга. Естественно считать, что угол между ними в этом случае равен $0°$. Если центр O инверсии не совпадает с точкой их касания, то они перейдут в две окружности или в прямую и окружность, имеющие единственную общую точку (ту, в которую перейдет точка касания), т. е. касающиеся друг друга. Если же точка O совпадает с точкой касания, то они перейдут в две параллельные прямые, угол между которыми также естественно считать равным $0°$. Таким образом, и в том и в другом случае угол между прямой и окружностью оказывается равным углу между теми прямыми или окружностями, в которые они переходят.

Рассмотрим, наконец, две окружности, пересекающиеся под некоторым углом α. Это означает, что касательные к ним в точке пересечения пересекаются под углом α. Как мы выяснили, при инверсии эти касательные перейдут в прямые или окружности L_1 и L_2, пересекающиеся под тем же углом α. С другой стороны, линии L_1 и L_2 будут касаться тех прямых или окружностей, в которые перейдут наши две окружности. Значит, наши окружности перейдут в две прямые или окружности, пересекающиеся под тем же углом α. Аналогично доказывается, что

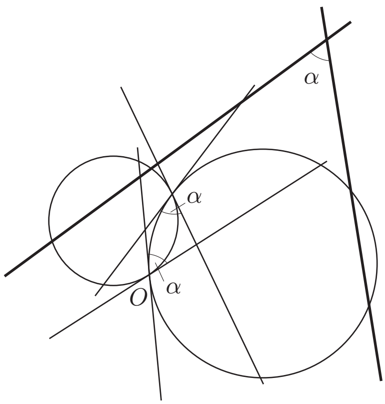


Рис. 518

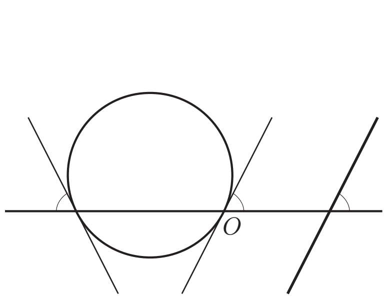


Рис. 519

если прямая и окружность пересекаются под некоторым углом α, то те прямые или окружности, в которые они переходят при инверсии, пересекаются под тем же углом α.

Подводя итог наших исследований, можно сказать, что

при инверсии сохраняются углы между прямыми и окружностями.

Это — *второе основное свойство инверсии.*

Из него, в частности, следует, что

если данная окружность ортогональна к той окружности, относительно которой производится инверсия (т. е. угол между ними равен 90°), *то она переходит в себя* (объясните, почему).

Обратим особое внимание на то, что *инверсия* (подобно осевой симметрии) *сохраняет углы, но меняет их ориентацию* (см. рис. 518, 519).

170. Теорема Птолемея. Применение инверсии дает большие дополнительные возможности при решении задач и доказательстве теорем. В качестве первого примера ее использования приведем доказательство теоремы, связанной с именем древнегреческого ученого Клавдия Птолемея (ок. 100–ок. 178) и выражающей еще одно характеристическое свойство вписанного четырехугольника.

Теорема. *Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, AC — та из его диагоналей, которая разделяет его на два треугольника (рис. 520). Рассмотрим инверсию с центром A произвольного радиуса R. Если точки A, B, C и D лежат на одной окружности, то точки B_1, C_1 и D_1, в которые переходят при этой инверсии B, C и D, лежат на одной прямой, причем $B_1D_1 = B_1C_1 + C_1D_1$.

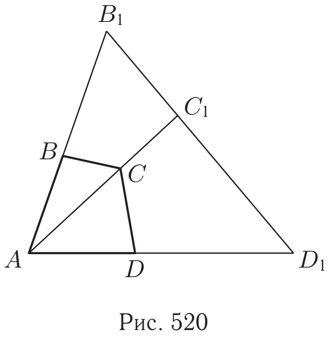


Рис. 520

Обратно, если выполнено равенство $B_1D_1 = B_1C_1 + C_1D_1$, то точки B_1, C_1 и D_1 лежат на одной прямой, откуда следует, что точки B, C и D лежат на окружности, проходящей через центр A инверсии. Таким образом, около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда выполнено равенство $B_1D_1 = B_1C_1 + C_1D_1$. Используя формулу (1) из п. 168, это равенство можно записать так:

$$\frac{R^2 \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{R^2 \cdot BC}{AB \cdot AC} + \frac{R^2 \cdot CD}{AC \cdot AD}.$$

Полученное равенство, в свою очередь, равносильно равенству $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$, что и доказывает теорему.

171. Формула Эйлера. Следующая удивительная теорема связана с именем Леонарда Эйлера.

Теорема. *В произвольном треугольнике радиусы r и R вписанной и описанной окружностей связаны с расстоянием d между их центрами формулой*: $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности и сторон треугольника, O — центр вписанной окружности (рис. 521). Рассмотрим инверсию относительно вписанной окружности. Поскольку прямая B_1C_1 — поляра точки A относительно этой окружности, то при указанной инверсии вершина A перейдет в середину отрезка B_1C_1. По аналогичной причине вершины B и C перейдут в середины отрезков A_1C_1 и A_1B_1. Значит, окружность, описанная около треугольника ABC, перейдет в окружность Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$, радиус которой равен $\dfrac{r}{2}$. Как отмечалось в пункте 169, эта окружность может быть получена из описанной окружности центральным подобием с центром O и коэффициентом $\dfrac{r^2}{\sigma}$, где σ — степень точки O относительно описанной окружности. Но $\sigma = d^2 - R^2$, поэтому радиус указанной окружности Эйлера равен $\dfrac{r^2 \cdot R}{|d^2 - R^2|}$. Учитывая, что $R > d$ (докажите это) и приравнивая два выражения для радиуса ($\dfrac{r}{2} = \dfrac{r^2 \cdot R}{R^2 - d^2}$), получаем формулу Эйлера. Теорема доказана.

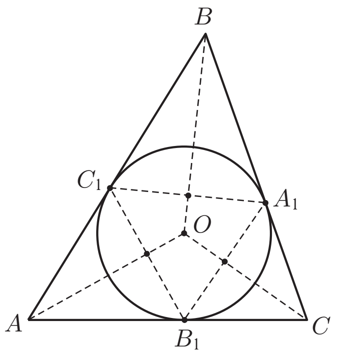


Рис. 521

172. Окружности Аполлония. Докажем еще одну теорему.

Теорема. *Множество всех таких точек, для которых отношение расстояний до двух данных точек постоянно и отлично от единицы, представляет собой окружность, ортогональную ко всем окружностям, проходящим через эти две точки.*

Доказательство. Пусть A и B — данные точки, $k \neq 1$ — некоторое положительное число, M — произвольная точка рассматриваемого множества, т. е. $\dfrac{BM}{AM} = k$ (рис. 522). При инверсии относительно окружности с центром A радиуса AB точка B останется неподвижной, а точка M перейдет в такую точку M_1, что, согласно формуле (1) из п. 168,

$$BM_1 = \frac{AB^2 \cdot BM}{AB \cdot AM} = k \cdot AB.$$

Таким образом, точка M_1 лежит на окружности с центром B радиуса $k \cdot AB$. С другой стороны, любая точка N этой окружности переходит при данной инверсии в такую точку N_1, что

$$BN_1 = \frac{AB^2 \cdot BN}{AB \cdot AN} = \frac{AB \cdot k \cdot AB}{AN} = k \cdot \frac{AB^2}{AN} = k \cdot AN_1,$$

т. е. в точку нашего множества. Следовательно, окружность с центром B радиуса $k \cdot AB$ и наше множество точек переходят при указанной инверсии друг в друга. При $k \neq 1$ эта окружность не проходит через центр инверсии, поэтому наше множество точек — окружность. Осталось заметить, что все прямые, проходящие через точку B, ортогональны к окружности с центром B, а при рассматриваемой инверсии они (за исключением прямой AB) переходят в окружности, проходящие через A и B. Значит, наша окружность ортогональна ко всем этим окружностям. Теорема доказана.

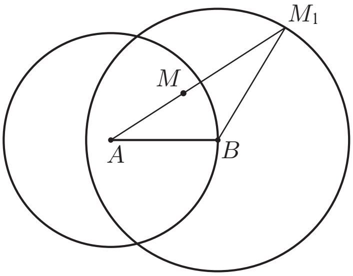


Рис. 522

Окружности, соответствующие для данных точек A и B различным значениям $k \neq 1$ (рис. 523), рассматривались еще во II в. до н. э. древнегреческим математиком Аполлонием (ок. 262–ок. 190 до н. э.) в его трактате «О кругах». Поэтому их называют *окружностями Аполлония*.

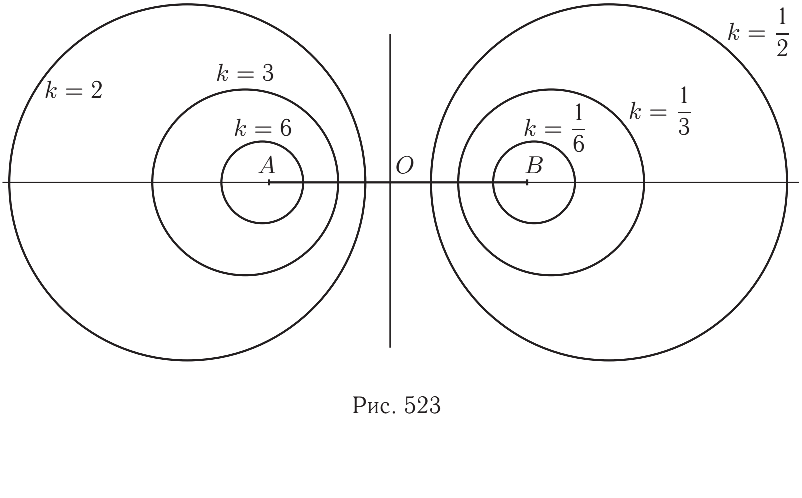


Рис. 523

Замечание. Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что если точки P и Q лежат по разные стороны от окружности Аполлония, соответствующей точкам A и B и числу k (т. е. одна из них лежит в круге, а другая — вне круга), то числа $\frac{BP}{AP} - k$ и $\frac{BQ}{AQ} - k$ имеют разные знаки, а если по одну сторону, то одинаковые знаки.

Решим теперь такую задачу.

Задача. *Даны две точки A, B и прямая l, не перпендикулярная к прямой AB. Для каждой точки M прямой l составим отношение $\frac{BM}{AM}$. С помощью циркуля и линейки построить те точки, в которых это отношение принимает наибольшее и наименьшее значения.*

Решение. Рассмотрим произвольную точку N на прямой l и вычислим отношение $k = \frac{BN}{AN}$. Если $k \neq 1$, то рассмотрим окружность Аполлония для точек A и B, определяемую этим числом. Точка N лежит на этой окружности и на прямой l, поэтому прямая l либо пересекает окружность, либо касается ее. Если прямая l пересекает окружность (рис. 524, a), то точки прямой l, лежащие по одну сторону от N (а именно на хорде окружности), находятся внутри окружности, а лежащие по другую сторону от N — вне этой окружности. Следовательно, для точек M, лежащих по одну сторону от N, отношение $\frac{BM}{AM}$ больше k, а по другую сторону — меньше k. Поэтому отношение $\frac{BM}{AM}$ не может принимать в точке N ни наибольшего, ни наименьшего значения. Ясно также, что аналогичная ситуация имеет место в случае, когда $k = 1$ и, следовательно, точка N является точкой пересечения прямой l с серединным перпендикуляром к отрезку AB (объясните, почему в этом случае отношение $\frac{BM}{AM}$ не может принимать в точке N ни наибольшего, ни наименьшего значения).

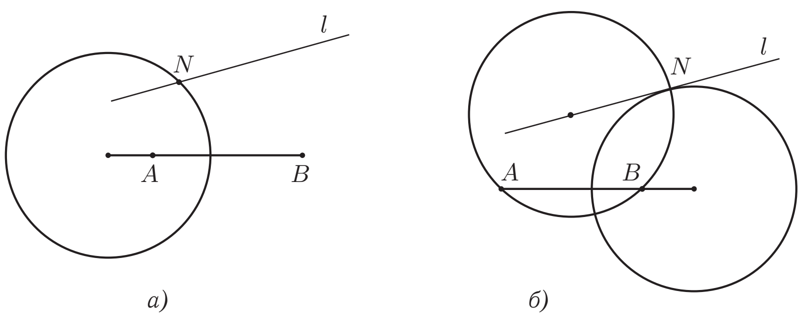


Рис. 524

Итак, наибольшее и наименьшее значения отношения $\frac{BM}{AM}$ могут достигаться (и, согласно замечанию, достигаются) только в тех точках, в которых прямая l касается окружностей Аполлония (рис. 524, *б*). Следовательно, в этих точках окружность, проходящая через A и B, должна быть перпендикулярна к прямой l, а значит, прямая l проходит через ее центр.

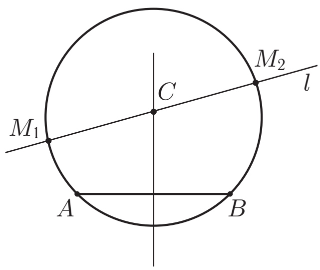


Рис. 525

Теперь нетрудно выполнить построение. Сначала построим серединный перпендикуляр к отрезку AB и отметим точку C его пересечения с данной прямой l (рис. 525). Затем проведем окружность с центром C радиуса CA. Точки M_1 и M_2 пересечения этой окружности с данной прямой — искомые.

173. Окружности Аполлония нужны даже флибустьерам. В замечательной книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» (Библиотечка «Квант», 1981, вып. 8) приведен ряд примеров использования окружностей Аполлония для решения задач, связанных с нахождением наилучшей тактики преследования одного корабля другим. Рассмотрим задачу, похожую на задачи этого цикла.

Флибустьеры с острова Ямайка узнали, что на якоре перед Пуэрто-Бельо стоит испанский галион, груженный золотом. Как только закончится шторм, галион выйдет в Карибское море и возьмет курс на пролив между островами Гаити и Пуэрто-Рико (рис. 526). Флибустьеры тоже ждут конца шторма, поэтому выйти из Кингстона они могут лишь одновременно с испанцами. Какой курс следует взять флибустьерам после окончания шторма, чтобы по возможности не разминуться с испанцами?

Задача решается следующим образом. Флибустьеры при всех своих отрицательных качествах были непревзойденными мастерами в навигации. Поэтому они рассуждали так. Если бы было известно отношение k скорости флибустьерского судна к скорости галиона, то можно было бы найти все точки, в которые их корабль и галион могут попасть одновременно. В самом деле, путь, который они пройдут до момента встречи, в k раз больше пути, пройденного испанцами. Значит, все возможные точки встречи лежат на окружности Аполлония, определяемой равенством $\frac{BM}{AM} = k$, где M — точки встречи, а точки A и B соответствуют Пуэрто-Бельо и Кингстону. Начертив на карте эту окружность, флибустьеры увидели бы, что курс галиона пересекает ее в двух точках. Поэтому, взяв курс на любую из них, они наверняка встретятся с испанцами, если, конечно, испанцев не перехватит кто-нибудь другой. Из этих последних соображений флибустьеры предпочли бы ту из двух точек, которая ближе к Пуэрто-Бельо.

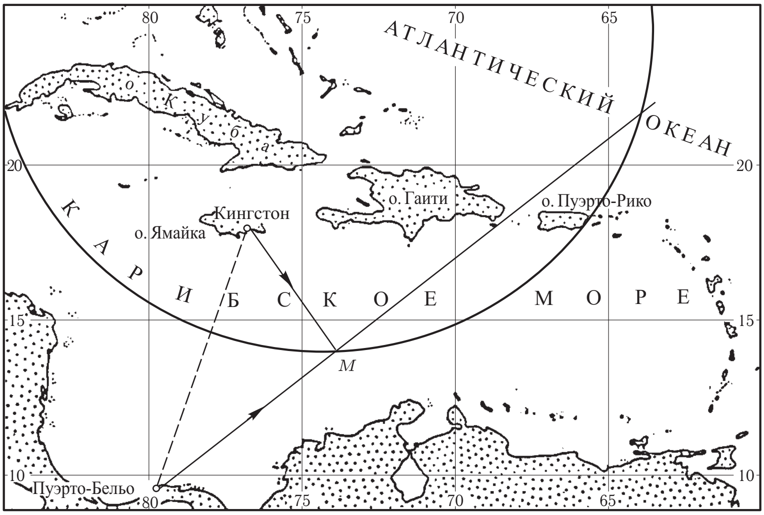


Рис. 526

Но флибустьеры точно не знают, каково отношение скорости их корабля к скорости испанского галиона. Поэтому они построят на карте точку курса галиона, в которой это отношение принимает наименьшее значение (рис. 527), и в этой точке организуют засаду — встанут

Рис. 527

на якорь и будут ждать прибытия галиона. Во всяком случае, если в этой точке они не встретят галион, то в любой другой точке они его не встретят и подавно.

174. Теорема Фейербаха. В 1822 году немецкий математик Карл Вильгельм Фейербах (1800–1834), преподаватель гимназии в Эрлангене, обнаружил настолько замечательное свойство окружности Эйлера, что даже саму эту окружность многие математики стали называть окружностью Фейербаха. Доказанная им теорема звучит так.

Теорема. *Окружность Эйлера данного треугольника касается вписанной в него и всех трех вневписанных окружностей.*

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC K_1 и K_2 — точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC (рис. 528). Докажем, что окружность Эйлера касается этих двух окружностей (для двух других вневписанных окружностей доказательство аналогичное).

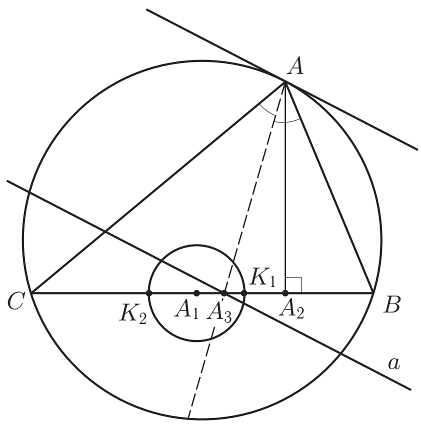


Рис. 528

Рассмотрим инверсию относительно окружности с диаметром K_1K_2 (случай, когда точки K_1 и K_2 совпадают, рассмотрите самостоятельно). Поскольку точки K_1 и K_2 симметричны относительно середины A_1 стороны BC (см. задачу 7 п. 117), то центром этой окружности является точка A_1. Вписанная и вневписанная окружности ортогональны к ней, поэтому при указанной инверсии каждая из них перейдет в себя.

Далее, пусть AA_2 — высота, AA_3 — биссектриса треугольника ABC. Точки K_1 и K_2 гармонически разделяют точки A_2 и A_3 (см. задачу 2 п. 135), поэтому при рассматриваемой инверсии точка A_2 перейдет в A_3. Поскольку окружность Эйлера проходит через центр инверсии A_1 и точку A_2, то она перейдет в прямую, проходящую через точку A_3 и параллельную касательной к окружности Эйлера в точке A_1. С другой стороны, как мы помним (п. 166), при центральном подобии с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ вершина A переходит в точку A_1, а окружность, описанная около треугольника ABC — в окружность Эйлера. Из этого следует, что касательная к окружности Эйлера в точке A_1 параллельна касательной к описанной окружности в точке A. Таким образом, можно сказать, что при рассматриваемой инверсии окружность Эйлера перейдет в прямую a, проходящую через точку A_3 и параллельную касательной к описанной окружности в точке A (см. рис. 528), т. е. в общую касательную вписанной и вневписанной окружностей (см. задачу 8 п. 117).

Итак, при инверсии относительно окружности с диаметром K_1K_2 вписанная и вневписанная окружности переходят в себя, а окружность Эйлера — в их общую касательную. Из этого следует, что окружность Эйлера касается обеих этих окружностей. Теорема доказана.

Замечание. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. В конце п. 166 мы обратили внимание на то, что треугольники ABC, ABH, AHC и HBC имеют общую окружность Эйлера. Каждый из этих треугольников имеет свою вписанную и три вневписанных окружности, и все они, согласно теореме Фейербаха, касаются окружности Эйлера. Таким образом, окружность Эйлера треугольника ABC касается 16 различных окружностей, связанных с этим треугольником!

175. Задача Аполлония. Применение инверсии открывает новые возможности при решении задач на построение. В частности, используя инверсию, удается сравнительно просто решить одну из древнейших задач геометрии — *задачу Аполлония*. Она состоит в следующем.

Задача Аполлония. *Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.*

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры данных окружностей, r_1, r_2, r_3 — их радиусы. Как мы помним, для двух окружностей возможны пять случаев взаимного расположения. Посидев полчаса с бумагой и ручкой, Вы поймете, что для трех окружностей возможны более 50 случаев взаимного расположения! Однако рассматривать все эти случаи отдельно не обязательно. Использование инверсии позволяет указать общий для всех случаев метод решения задачи. Правда, для описания этого метода нам все же придется выделить несколько частных случаев.

Рассмотрим сначала случай, когда первая и вторая окружности касаются друг друга (изнутри или извне — безразлично). При инверсии с центром в точке их касания и произвольным радиусом эти окружности перейдут в параллельные прямые, а третья окружность — в какую-то окружность или прямую (рис. 529). Построить окружность, касающуюся двух параллельных прямых и либо окружности, либо прямой, легко (объясните, как это сделать). С другой стороны, нетрудно построить и ту окружность, в которую переходит построенная при рассматриваемой инверсии. Для этого достаточно построить точки, в которые переходят какие-нибудь три точки этой окружности (как это сделать, легко понять, если приглядеться к рисунку 514), а затем провести через них окружность — она и будет искомой.

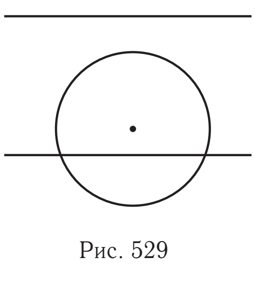


Рис. 529

Отметим, что даже в рассмотренном случае решение задачи существует не всегда (рис. 530, *а*). Если же оно существует, то может быть не единственным (рис. 530, *б*).

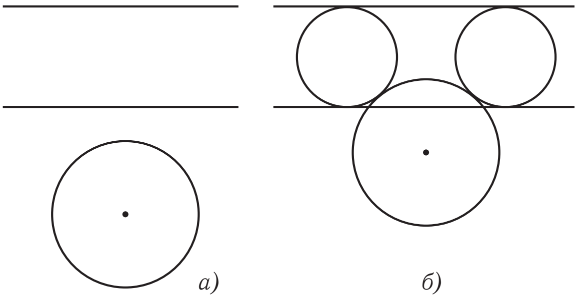


Рис. 530

Любой другой частный случай сводится к описанному. Пусть, например, каждая из окружностей находится вне других (рис. 531), и требуется построить окружность, касающуюся первой и второй извне, а третьей — изнутри. Рассмотрим окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами $r_1 + \frac{1}{2}(O_1O_2 - r_1 - r_2)$ и $r_2 + \frac{1}{2}(O_1O_2 - r_1 - r_2)$. Эти окружности касаются друг друга. Вместо третьей окружности рассмотрим окружность с тем же центром O_3, но радиусом $r_3 - \frac{1}{2}(O_1O_2 - r_1 - r_2)$ (что делать в случае, когда эта величина окажется нулевой или отрицательной, мы скажем чуть позже). Окружность, касающуюся трех новых окружностей, мы уже умеем строить. Искомая же окружность отличается от нее только радиусом — он больше на величину $\frac{1}{2}(O_1O_2 - r_1 - r_2)$, поэтому и ее можно построить (объясните, как).

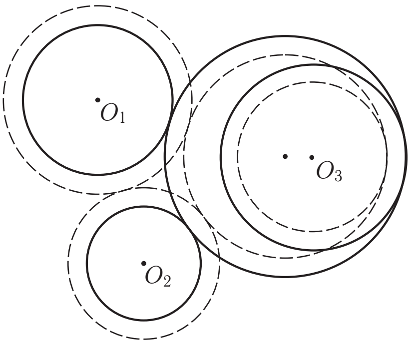


Рис. 531

Теперь уже ясно, что если первая и вторая окружности пересекаются, то их радиусы нужно уменьшить на соответствующую величину (так, чтобы новые окружности касались друг друга). Если в процессе наших построений какой-то из радиусов станет нулевым, то вместо окружности нужно рассматривать ее центр (окружность нулевого радиуса). Если же он станет отрицательным, то в качестве радиуса следует взять модуль полученной величины, но изменить тип касания: извне — на изнутри и наоборот.

В заключение отметим, что все наши рассуждения останутся в силе и в том случае, когда какая-нибудь из окружностей является точкой (окружностью нулевого радиуса) или прямой (окружностью бесконечно большого радиуса). Итак, теперь мы умеем решать следующие задачи:
построить прямую или окружность, касающуюся

1^0 трех данных окружностей;

2^0 двух данных окружностей и проходящую через данную точку;

3^0 данной окружности и проходящую через две данные точки;

4^0 данной прямой и двух данных окружностей;

5^0 двух данных прямых и данной окружности;

6^0 данной окружности, данной прямой и проходящую через данную точку;

7^0 двух данных прямых и проходящую через данную точку;

8^0 данной прямой и проходящую через две данные точки.

Задачи

670. При инверсии с центром O точки M и N переходят в точки M_1 и N_1. Докажите, что треугольники OMN и OM_1N_1 подобны.

671. Докажите, что через две точки, лежащие внутри данной окружности, можно провести ровно две окружности, касающиеся данной.

672*. Вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC. Другая окружность касается извне вписанной в треугольник ABC окружности и указанной вневписанной. Докажите, что точки касания окружностей лежат на прямой, проходящей через точку A.

673. Каждая из четырех окружностей касается извне двух других окружностей, причем ни одна из них не касается сразу трех. Докажите, что четыре точки касания лежат на одной окружности.

674*. На отрезке AB взята произвольная точка M. Окружность касается окружностей с диаметрами AB, MA и MB. Докажите, что диаметр этой окружности равен расстоянию от ее центра до прямой AB.

675. Три окружности проходят через одну точку, A, B и C — вторые точки их пересечения. Углы между окружностями, пересекающимися в точках A и B, равны α и β. Найдите угол между окружностями, пересекающимися в точке C.

676. Известно, что около четырехугольника $ABCD$ нельзя описать окружность. Докажите, что угол между окружностями, описанными около треугольников ABC и ABD, равен углу между окружностями, описанными около треугольников ACD и BCD.

677. Три окружности имеют общую точку M; A, B, C — вторые точки пересечения второй и третьей, первой и третьей, первой и второй окружностей соответственно. Докажите, что три окружности, проходящие через точки M и A, M и B, M и C, ортогональные соответственно к первой, второй и третьей окружностям, также имеют общую точку.

678. Три окружности имеют общую точку M; A, B, C — вторые точки пересечения второй и третьей, первой и третьей, первой и второй окружностей соответственно. Докажите, что три окружности, проходящие через точки M и A, M и B, M и C и делящие пополам углы между второй и третьей, первой и третьей, первой и второй окружностями соответственно, также имеют общую точку.

679. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка M не лежит на этой прямой. Докажите, что точка M и центры окружностей, описанных около треугольников MAB, MBC и MCA, лежат на одной окружности.

680*. Докажите теорему, обратную теореме о прямой Симсона: через точки пересечения сторон треугольника или их продолжений с некоторой прямой проведены прямые, перпендикулярные к этим сторонам; если проведенные прямые пересекаются в одной точке, то эта точка лежит на окружности, описанной около данного треугольника.

681*. Докажите, что для любых двух окружностей, не имеющих общих точек, существует инверсия, переводящая эти окружности в концентрические.

682. Точка M лежит вне окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны MA, MB и MC.

683. Около правильного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ описана окружность и на ее дуге A_1A_n взята точка M. Докажите, что

$$\frac{1}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{1}{MA_2 \cdot MA_3} + \ldots + \frac{1}{MA_{n-1} \cdot MA_n} = \frac{1}{MA_1 \cdot MA_n}.$$

684. Докажите, что стороны a, b, c, d, диагонали m, n и сумма φ ($\varphi \leqslant 180^\circ$) противоположных углов выпуклого четырехугольника связаны между собой равенством: $a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi = m^2n^2$; объясните, почему это утверждение называют *обобщенной теоремой Птолемея*.

685. Углы A, B и C треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Докажите, что $\dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AB}$.

686. В шестиугольнике $ABCDEF$, вписанном в окружность, $AC = CE = EA$, $BE + DA + FC = p$. Найдите периметр этого шестиугольника.

687. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Докажите что $AB + AC \leqslant 2AD$.

688. На дуге CD описанной около квадрата $ABCD$ окружности взята точка P. Докажите, что: а) $PA + PC = \sqrt{2}\,PB$; б) $PA - PC = \sqrt{2}\,PD$, в) $PC + PD = \sqrt{2}\,\dfrac{PA + PB}{\sqrt{2} + 1}$.

689. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность, проходящая через точку A, пересекает отрезки AB, AC и AD в точках P, Q и R соответственно. Докажите, что $AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC$.

690. Окружность, вписанная в неравносторонний треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что прямая, проходящая через ее центр и центр окружности, описанной около треугольника ABC, является прямой Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$.

691. Докажите, что в произвольном треугольнике радиусы R и r описанной и вневписанной окружностей связаны с расстоянием d между их центрами соотношением: $d^2 = R^2 + 2Rr$.

692. Четырехугольник вписан в окружность и описан около другой окружности. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью, взаимно перпендикулярны.

693. Докажите, что диаметр окружности, вписанной в треугольник, не превосходит радиуса окружности, описанной около этого треугольника.

694. Докажите, что отношение произведения сторон треугольника к их сумме не превосходит квадрата радиуса описанной около треугольника окружности.

695*. Окружность радиуса r лежит внутри окружности радиуса R, d — расстояние между их центрами. Докажите, что если $d^2 \neq R^2 - 2Rr$, то не существует треугольника, для которого одна из окружностей была бы вписанной, а другая — описанной; если же $d^2 = R^2 - 2Rr$, то таких треугольников бесконечно много.

696*. Точки C_1, A_1 и B_1 — середины сторон AB, BC и CA треугольника ABC; K_C, K_A и K_B — точки касания этих сторон и вписанной окружности; точки L_A, L_B и L_C симметричны K_A, K_B и K_C относительно биссектрис углов A, B и C. Докажите, что если треугольник ABC не является равнобедренным, то прямые A_1L_A, B_1L_B и C_1L_C пересекаются в одной точке.

697. Докажите, что длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда: а) прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна к одной из биссектрис; б) расстояние от центра вписанной окружности до одной из вершин равно среднему геометрическому для радиуса вписанной и диаметра описанной окружностей; в) расстояние от точки пересечения продолжения одной из биссектрис с описанной окружностью до стороны, за которую эта биссектриса продолжена, равно радиусу вписанной окружности; г) одна из биссектрис делится центром вписанной окружности в отношении $2:1$, считая от вершины.

698. Докажите, что любые две неконцентрические окружности, не имеющие общих точек, являются окружностями Аполлония для некоторых точек A и B, соответствующими двум значениям отношения $\frac{BM}{AM}$.

699. Даны точки A и B и окружность, не проходящая через эти точки, причем ее центр не лежит на прямой AB. Для каждой точки M окружности составляется отношение $\frac{BM}{AM}$. Постройте точки, в которых это отношение принимает наибольшее и наименьшее значения.

700. Два корабля находятся вблизи прямолинейного участка берега, один из них преследует другой. Скорости кораблей известны обоим капитанам. Какого курса следует держаться: а) преследуемому, чтобы увеличить время преследования; б) преследующему, чтобы уменьшить время преследования?

701. Два корабля преследуют третий в открытом море, скорости кораблей известны всем трем капитанам. Какой курс следует держать каждому из трех кораблей, исходя из интересов их команд?

702. Два корабля, сближаясь, движутся так, что курс каждого из них остается неизменным относительно прямой, соединяющей корабли. Постройте точку встречи кораблей, если их скорости известны.

703. Вершина данного квадрата является центром инверсии, а противоположная вершина лежит на окружности инверсии. Постройте фигуру, в которую переходит квадрат при этой инверсии.

704. Вершина данного квадрата является центром инверсии, а две другие вершины лежат на окружности инверсии. Постройте фигуру, в которую переходит квадрат при этой инверсии.

705. Постройте фигуру, в которую переходит треугольник при инверсии относительно описанной около него окружности.

706. Даны отрезок AB, две прямые и точка M. Через точку M проведите прямую, пересекающую данные прямые в таких точках X и Y, что $MX \cdot MY = AB^2$.

707. Даны отрезок AB, две окружности и точка M. Через точку M проведите прямую, пересекающую данные окружности в таких точках X и Y, что $MX \cdot MY = AB^2$.

708*. В данную окружность впишите четырехугольник, продолжения сторон которого проходят через четыре данные точки.

709*. В данную окружность впишите треугольник, продолжения сторон которого проходят через три данные точки.

Приложение 1

Снова о числах*

176. Неотрицательные вещественные числа. В п. 11 мы говорили о том, что числа появляются в результате измерения чего-либо, в частности, в результате измерения отрезков. Вспомним процедуру измерения отрезков.

Пусть A_0B_0 — измеряемый отрезок, EF — выбранная единица измерения отрезков. На луче A_0B_0 отложим отрезок $A_0A_1 = EF$, на луче A_1B_0 — отрезок $A_1A_2 = EF$ и т. д. до того момента, когда либо точка A_n совпадет с точкой B_0, либо точка B_0 окажется лежащей между A_n и A_{n+1} (согласно аксиоме Архимеда такой момент обязательно наступит при некотором $n \geqslant 0$, рис. 532). В первом случае говорят, что

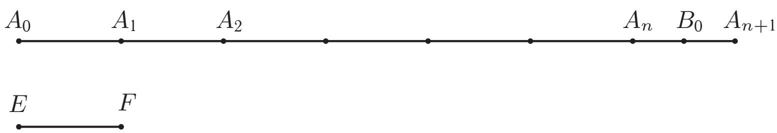


Рис. 532

длина отрезка A_0B_0 при единице измерения EF выражается числом n. Во втором случае можно сказать, что длина отрезка A_0B_0 при единице измерения EF приближенно выражается числом n. Для более точного измерения отрезок EF делят на 10 равных отрезков и с помощью одного из них (обозначим его PQ) измеряют описанным способом остаток A_nB_0. Если при этом отрезок PQ укладывается целое число k раз в отрезке A_nB_0 без остатка, то говорят, что длина отрезка A_0B_0 при единице измерения EF выражается числом n, k (n целых, k десятых). В противном случае отрезок PQ также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Таким способом можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Полученная в результате измерения отрезка десятичная дробь называется *положительным вещественным числом*. Итак,

при выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным вещественным числом.

Число a, выражающее длину отрезка AB при единице измерения EF, часто называют *отношением отрезков AB и EF*. Говорят также, что *отрезок AB равен произведению отрезка EF на число a* ($AB = aEF$), или что *отрезок EF укладывается в отрезке AB a раз*.

Отметим, что если указанным выше способом измерить вырожденный отрезок AA (т. е. отрезок, концы которого совпадают), то его длина окажется равной 0. В этом случае можно сказать, что отрезок AA

равен произведению отрезка EF на число 0 ($AA = 0 \cdot EF$), или что отрезок EF укладывается в отрезке AA 0 раз. Число 0 также считается вещественным числом, однако его не относят к положительным числам.

Совокупность всех положительных вещественных чисел и числа 0 называют *неотрицательными вещественными числами*.

Перейдем теперь к следующему вопросу. Пусть $a = n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$ — произвольная десятичная дробь, EF — отрезок, принятый за единицу измерения. Существует ли отрезок, длина которого при единице измерения EF выражается десятичной дробью a? Будем рассуждать так. На каком-нибудь луче с началом A отметим точки $B_1, B_2, \ldots$ так, что $AB_1 = (n + \frac{\alpha_1}{10})EF$, $AB_2 = (n + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2})EF,\ldots$ Множество точек $A, B_1, B_2, \ldots$ ограничено, так как все эти точки принадлежат отрезку AC, где C — точка на том же луче, такая, что $AC = (n + 1)EF$ (рис. 533). Следовательно, согласно аксиоме 14^0 (п. 44) суще-

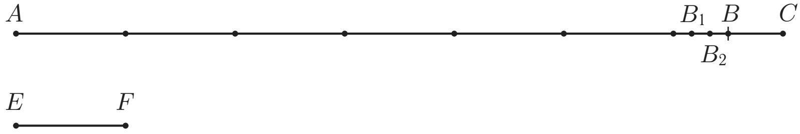


Рис. 533

ствует наименьший отрезок AB, содержащий все эти точки. Можно ли утверждать, что отрезок AB — искомый?

Применим к отрезку AB процедуру измерения отрезков. Пусть $m{,}\beta_1\beta_2\ldots$ — число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения EF. Отрезок AB_1 содержится в отрезке AB, поэтому отрезок EF укладывается в отрезке AB не менее, чем n раз, т. е. $m \geqslant n$. С другой стороны, если $\alpha_1 \neq 9$, то отрезок $AC_1 = (n{,}(\alpha_1 + 1))EF$ содержит в себе все точки $A, B_1, B_2, \ldots$ и, следовательно, содержит в себе отрезок AB: $AB \leqslant AC_1 = (n{,}(\alpha_1 + 1))EF < (n + 1)EF$, а значит, $m < n + 1$. Поэтому в этом случае $m = n$. Если же $\alpha_1 = 9$, то $AB \leqslant AC = (n + 1)EF$, и потому $m \leqslant (n + 1)$. Итак, при $\alpha_1 \neq 9$ выполняется равенство $m = n$, а при $\alpha_1 = 9$ — неравенства $n \leqslant m \leqslant (n + 1)$.

Чему же равно число m в случае $\alpha_1 = 9 : n$ или $(n + 1)$? Попробуем это выяснить. Если $\alpha_2 \neq 9$, то отрезок $AC_2 = (n{,}\alpha_1(\alpha_2 + 1))EF$ содержит в себе все точки $A, B_1, B_2, \ldots$ и, следовательно, содержит в себе отрезок AB: $AB \leqslant AC_2 = (n{,}\alpha_1(\alpha_2 + 1))EF < (n + 1)EF$, а значит, $m < n + 1$. Поэтому в этом случае $m = n$. Если же $\alpha_2 = 9$, то $AB \leqslant AC = (n + 1)EF$ (напомним, что мы рассматриваем случай $\alpha_1 = 9$), и потому $m \leqslant (n + 1)$. Итак, при $\alpha_1 \neq 9$ и также при $\alpha_1 = 9$, но $\alpha_2 \neq 9$, выполняется равенство $m = n$, а при $\alpha_1 = \alpha_2 = 9$ — неравенства $n \leqslant m \leqslant (n + 1)$.

Продолжая аналогичные рассуждения, мы приходим к выводу: если хотя бы одно из чисел α_i отлично от 9, то $m = n$; если же все числа α_i равны 9, то $n \leqslant m \leqslant (n+1)$.

Осталось выяснить ситуацию в случае $a = n{,}99\ldots 9\ldots$. Допустим, что $m = n$, т. е. отрезок EF укладывается в отрезке AB n раз, но не укладывается $(n+1)$ раз. Рассмотрим отрезок $AC = (n+1)EF$. По предположению точки B и C не совпадают. Поэтому, применив процесс измерения к отрезку BC, при некотором k получим: $BC \geqslant \dfrac{EF}{10^k}$. Из этого следует, что $AB \leqslant (n+1)EF - \dfrac{EF}{10^k} = n{,}9\ldots 9 \cdot EF$, где число $n{,}9\ldots 9$ имеет k знаков после запятой. Но это противоречит условию — все десятичные знаки после запятой, в частности, $(k+1)$-ый, у дроби a равны 9. Полученное противоречие означает, что $m \neq n$, поэтому $m = n+1$.

Итак, десятичной дроби $n{,}99\ldots$ соответствует отрезок $AB = (n+1)EF$. Путем аналогичных рассуждений нетрудно установить (сделайте это самостоятельно), что любой десятичной дроби вида $n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_m - 1)99\ldots$ соответствует отрезок AB, равный $(n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)EF$. Таким образом, если данная десятичная дробь a — периодическая, причем ее период состоит из одной цифры 9, то отрезок AB искомым не является. Если же данная десятичная дробь a не является периодической дробью, период которой состоит из одной цифры 9, то, как мы видели, $m = n$. Аналогично доказывается, что $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$ и т. д. Таким образом, отрезок AB в этом случае — искомый.

Теперь, наконец, мы можем ответить на поставленный вопрос: существует ли отрезок, длина которого при единице измерения EF выражается данной десятичной дробью a? Если дробь a не является периодической дробью, период которой состоит из одной цифры 9, то существует — таким отрезком является отрезок AB. Если же $a = n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_m - 1)99\ldots$, то не существует. В самом деле, допустим, что искомый отрезок XY существует. Тогда он больше каждого из отрезков $AB_1, AB_2, \ldots$ — это следует из самой процедуры измерения отрезков. Поэтому $XY \geqslant AB$ (поскольку AB — наименьший из отрезков, содержащих в себе все точки $A, B_1, B_2, \ldots$). Но $AB = (n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)EF$. Следовательно, у десятичной дроби, выражающей длину отрезка XY, на m-ом месте после запятой находится число α_m, а не $(\alpha_m - 1)$. Полученное противоречие означает, что искомого отрезка в этом случае не существует.

Из сказанного можно сделать несколько выводов:

периодическая десятичная дробь, период которой состоит из одной цифры 9, *не является положительным вещественным числом* (поскольку не существует отрезка, длина которого выражалась бы этим числом);

если десятичная дробь не является периодической дробью, период которой состоит из одной цифры 9*, то она является неотрицательным вещественным числом*;

при выбранной единице измерения отрезков для любого положительного вещественного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

177. Сравнение неотрицательных вещественных чисел. Сравнение вещественных чисел основано на сравнении отрезков. Пусть a и b — произвольные неотрицательные вещественные числа. Примем какой-нибудь отрезок PQ за единицу измерения отрезков и на луче PQ отложим отрезки $PA = aPQ$ и $PB = bPQ$. Если точки A и B совпадают, то числа a и b считаются равными. Ясно, что равенство $a = b$ выполняется тогда и только тогда, когда все десятичные знаки чисел a и b совпадают. Пусть точки A и B не совпадают, например, $PA < PB$. В этом случае считается, что $a < b$. Неравенство $a < b$ выполняется, очевидно, тогда и только тогда, когда первый из десятичных знаков числа a, отличный от соответствующего десятичного знака числа b, меньше этого десятичного знака числа b. Таким образом, мы приходим к следующему правилу сравнения двух неотрицательных вещественных чисел $a = n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$ и $b = m{,}\beta_1\beta_2\ldots$:

если $n = m$ и при всех i выполняются равенства $\alpha_i = \beta_i$, то $a = b$; если же либо $n < m$, либо $n = m$ и при некотором i выполняются соотношения $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}$, $\alpha_i < \beta_i$, то $a < b$.

Отметим, что применительно к конечным десятичным дробям это правило дает тот же результат, что и обычное сравнение рациональных чисел, причем для любого числа $n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots$ имеют место неравенства

$$n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \leqslant n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots \leqslant n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m + \frac{1}{10^m}.$$

Ясно также, что

1^0 *если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.*

178. Сложение неотрицательных вещественных чисел. Пусть a и b — произвольные неотрицательные вещественные числа, EF — отрезок, принятый за единицу измерения. Возьмем какой-нибудь луч с началом O и отложим на нем последовательно отрезки $OA = aEF$ и $AB = bEF$. *Суммой* $a + b$ чисел a и b назовем число, которым выражается длина отрезка OB при единице измерения EF. Из этого определения следует, что

2^0 *если $a < c$, то $a + b < c + b$, а если $b < c$, то $a + b < a + c$*;

3^0 *для любого a имеет место равенство $a + 0 = a$.*

Ясно, что применительно к конечным десятичным дробям наше определение дает тот же результат, что и обычное правило составления суммы двух рациональных чисел. С другой стороны, для любых двух чисел $a = n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\ldots$ и $b = k{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_i\ldots$ при всех m имеют место неравенства

$$a_m + b_m \leqslant a + b \leqslant a_m + b_m + 2\cdot\frac{1}{10^m}, \qquad (2)$$

где $a_m = n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$ и $b_m = k{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$ — рациональные числа. Из этого следует, что для любых неотрицательных вещественных чисел имеют место те же тождества, что и для рациональных чисел:

4^0 $a + b = b + a$;

5^0 $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Из неравенств (1) также следует, что сумма чисел a и b не зависит от выбора отрезка EF (единицы измерения отрезков).

Замечание. Аналогичным образом (с помощью отрезков) определяется разность двух чисел, второе из которых не превосходит первое.

179. Умножение положительных вещественных чисел. Пусть a и b — произвольные положительные вещественные числа, EF — отрезок, принятый за единицу измерения. Построим сначала отрезок $AB = aEF$, а затем — отрезок $AC = bAB$. *Произведением* ab чисел a и b назовем число, которым выражается длина отрезка AC при единице измерения EF. Из этого определения следует, что для любого положительного числа a:

6^0 $1\cdot a = a$;

7^0 *существует такое положительное число a^{-1}, что $aa^{-1} = 1$.*

Для доказательства утверждения 7^0 следует рассмотреть отрезок $AB = aEF$ и в качестве a^{-1} взять число, выражающее длину отрезка EF при единице измерения AB.

Ясно, что применительно к конечным десятичным дробям наше определение дает тот же результат, что и обычное правило составления произведения двух рациональных чисел. С другой стороны, для любых двух чисел $a = n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\ldots$ и $b = k{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_i\ldots$ при всех m имеют место неравенства

$$a_m b_m \leqslant ab \leqslant a_m b_m + \left(a_m + b_m + \frac{1}{10^m}\right)\cdot\frac{1}{10^m},$$

где $a_m = n{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$ и $b_m = k{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$ — рациональные числа. Из этого следует, что произведение положительных вещественных чисел не зависит от выбора единицы измерения отрезков и для любых положительных вещественных чисел имеют место те же тождества, что и для рациональных чисел:

8^0 $ab = ba$;

9^0 $a(bc) = (ab)c$;

10^0 $a(b + c) = ab + ac$.

Замечание. Рассмотрим уравнение $ax = b$, где a и b — данные положительные вещественные числа, x — искомое число, и умножим обе его части на число a^{-1}. Согласно утверждениям 9^0, 8^0, 7^0 и 6^0, получим:

$$a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = (aa^{-1})x = 1 \cdot x = x = a^{-1}b,$$

т. е. $x = a^{-1}b$. С другой стороны, в соответствии с утверждениями 9^0, 7^0, 6^0,

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1 \cdot b = b,$$

т. е. число $x = a^{-1}b$ является решением нашего уравнения. Это число естественно назвать *частным от деления числа b на число a.*

180. Отрицательные вещественные числа. Рассмотрим произвольную прямую l и отметим на ней какие-нибудь две точки — O и P. Примем отрезок OP за единицу измерения отрезков. Прямую OP назовем *числовой осью*, луч OP — *положительной полуосью*, а второй луч с началом O — *отрицательной полуосью*. Каждой точке A положительной полуоси соответствует положительное число a, выражающее длину отрезка OA, и обратно: каждому положительному числу a соответствует такая точка A положительной полуоси, для которой $OA = a \cdot OP$. Условимся считать, что точке O соответствует число 0. Каждой точке B отрицательной полуоси поставим в соответствие символ $-b$, где b — положительное число, выражающее длину отрезка OB, и назовем этот символ *отрицательным вещественным числом*. Модулем отрицательного числа $-b$ назовем положительное число b, а модулем неотрицательного числа — само это число.

Условимся обозначать отрицательные числа, как и неотрицательные, одной буквой без указания знака. Модуль числа a будем обозначать так: $|a|$.

Совокупность всех неотрицательных и отрицательных вещественных чисел назовем множеством *вещественных чисел*. Ясно, что каждой точке A числовой оси соответствует единственное вещественное число a и обратно: каждому вещественному числу a соответствует единственная точка A числовой оси.

Правило сравнения двух произвольных вещественных чисел формулируется следующим образом. Прежде всего, любое отрицательное число считается меньшим числа 0. Далее, если $a > 0$, а $b < 0$, то считается, что $b < a$. Пусть $a < 0$ и $b < 0$. Тогда считают, что $a = b$, если $|a| = |b|$, и $a > b$, если $|a| < |b|$.

Введение отрицательных чисел позволяет придать смысл разности $a - b$ в том случае, когда $a < b$. Именно, в этом случае полагают $a - b = -(b - a)$.

Сложение произвольных вещественных чисел a и b определяется так:
если $a \geqslant 0$, $b < 0$, то полагают $a + b = a - |b|$;
если $a < 0$, $b \geqslant 0$, то полагают $a + b = b - |a|$;
если $a < 0$, $b < 0$, то полагают $a + b = -(|a| + |b|)$.

Отметим, что

11^0 *для любого вещественного числа a существует такое вещественное число b*, что $a + b = 0$ (если $a \geqslant 0$, то $b = -a$, а если $a < 0$, то $b = |a|$).

Умножение произвольных вещественных чисел a и b определяется так:
если хотя бы одно из чисел a, b равно нулю, то полагают $ab = 0$;
если $a > 0$, $b < 0$, то полагают $ab = -(a|b|)$;
если $a < 0$, $b > 0$, то полагают $ab = -(|a|b)$;
если $a < 0$, $b < 0$, то полагают $ab = |a||b|$.

Из этого определения следует, что

12^0 *если $a < b$, $c > 0$, то $ac < bc$.*

Докажите это самостоятельно. Докажите также, что для любых вещественных чисел справедливы утверждения 1^0–10^0.

181. Точная верхняя грань. Множество **M** вещественных чисел называется *ограниченным сверху*, если все числа этого множества не превосходят некоторого числа a. Число a в этом случае называется *верхней гранью* множества **M**. Ясно, что если a — верхняя грань множества **M**, то и любое число, большее a, также является его верхней гранью. Наименьшая из всех верхних граней множества **M** называется *точной верхней гранью* этого множества.

Докажем *теорему о точной верхней грани.*

Теорема. *Любое непустое множество вещественных чисел, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть **M** — произвольное множество вещественных чисел, ограниченное сверху некоторым числом a, и пусть b — какое-нибудь число из этого множества. Если множество **M** не содержит других чисел, кроме b, и также если все остальные числа из множества **M** меньше b, то число b, очевидно, является точной верхней гранью множества **M**. Если же множество **M** содержит числа, большие b, то рассмотрим на числовой оси множество точек M, соответствующее всем этим числам, а также точки A и B, соответствующие числам a и b. Множество точек M ограничено — все они содержатся в отрезке AB. Следовательно, существует наименьший отрезок BC, содержащий все эти точки. Число c, соответствующее точке C, является, очевидно, точной верхней гранью множества **M**. Теорема доказана.

Замечание. Утверждения 1^0–12^0, аксиому Архимеда в ее числовой формулировке (число 1 можно повторить слагаемым столько раз, что полученная сумма станет больше любого наперед заданного числа) и утверждение теоремы о точной верхней грани можно принять в качестве аксиом вещественных чисел [1]. В роли основных понятий при этом будут выступать «число», «меньше», «сумма» и «произведение».

---

[1] Предполагается, что аксиома 3^0 начинается со слов «существует такое число 0, что», а аксиома 6^0 — со слов «существует такое число 1, что».

182. Теорема Вейерштрасса. Вспомним формулировку теоремы Вейерштрасса (п. 155): *монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху, имеет предел*. Подумаем, как можно доказать эту теорему. Прежде всего, ясно, что без определения понятия «предел последовательности» доказательство провести нельзя. Начать, тем самым, нужно с определения предела последовательности.

Определение. *Число a называется пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$ имеет место неравенство*: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Вдумаемся в это определение. В нем утверждается, что как бы ни было мало положительное число ε, все равно для достаточно больших номеров (больших N) все члены последовательности будут отличаться от числа a меньше, чем на ε.

Теперь, когда мы знаем, что такое предел последовательности, можно приступить к доказательству теоремы Вейерштрасса.

Рассмотрим произвольную монотонно возрастающую ограниченную сверху последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots$ и обозначим буквой a точную верхнюю грань множества этих чисел. Докажем, что число a является пределом нашей последовательности. С этой целью возьмем произвольное положительное число ε и рассмотрим число $a - \varepsilon$. По определению точной верхней грани это число не является верхней гранью рассматриваемого множества, поэтому найдется такое число a_N, что $a - \varepsilon < a_N$. Поскольку данная последовательность монотонно возрастает, то при всех $n > N$ имеют место неравенства $a - \varepsilon < a_N < a_n$, откуда $a - a_n < \varepsilon$. Учитывая, что $a - a_n \geqslant 0$, перепишем полученное неравенство так: $|a_n - a| < \varepsilon$. Подведем итог: мы взяли произвольное $\varepsilon > 0$ и для него нашли такой номер N, что при всех $n > N$ имеет место неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Но это и означает, что число a — предел нашей последовательности. Таким образом, наша последовательность имеет предел, что и требовалось доказать.

183. Двоичная форма записи числа. Измерить отрезок можно, конечно же, не только в геометрии Евклида, но и в геометрии Лобачевского. В связи с этим, однако, возникает такой вопрос. Мы знаем, как, опираясь на теорему Фалеса, разделить данный отрезок (единицу измерения) на 10 равных частей. Но как найти одну десятую данного отрезка в геометрии Лобачевского, или хотя бы доказать, что существует отрезок, равный одной десятой части данного отрезка?

Заметим, что как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского любой отрезок имеет середину (пользуясь теоремой о высоте равнобедренного треугольника, докажите это утверждение самостоятельно). Оказывается, что этого уже достаточно для того, чтобы измерить любой отрезок. В самом деле, пусть требуется измерить отрезок AB с помощью отрезка EF, принятого за единицу измерения. Согласно аксиоме Архимеда существует такое целое число n, что отрезок EF целиком укладывается в отрезке AB n раз, но не укладывается $(n+$

$+\,1)$ раз. Возьмем лист бумаги, ручку и напишем: $n;$. Если у нас получился остаток, то разделим отрезок EF пополам и посмотрим, укладывается ли его половина в остатке? Если да, то после символа «;» напишем 1, а если нет — 0. В результате получится запись вида $n;\alpha_1$, где α_1 — либо 1, либо 0. Разделим половину отрезка EF пополам, и посмотрим, укладывается ли полученный отрезок (четвертая часть отрезка EF) в новом остатке. Записав результат, получим символ $n;\alpha_1\alpha_2$, где α_2 — либо 1, либо 0, и продолжим процесс измерения. В конце концов (возможно, через бесконечное количество шагов) получится символ $n;\alpha_1\alpha_2\ldots$, где α_i — либо 1, либо 0. Этот символ является записью нашего результата измерения отрезка AB. Ему можно придать более единообразный вид, если договорится записывать целые числа с помощью 1 и 0 по следующему очевидному правилу: $0 \to 0$, $1 \to 1$, $2 \to 10$, $3 \to 11$, $4 \to 100$, $5 \to 101$ и т. д. Тогда наш символ примет вид $\beta_1\ldots\beta_k;\alpha_1\alpha_2\ldots$, где каждая из цифр β_i, α_i — либо 1, либо 0. Этот символ называется *двоичной формой записи вещественного числа*, или кратко — *двоичной дробью*.

Вернемся теперь к вопросу о существовании отрезка, равного одной десятой части данного отрезка. Рассмотрим произвольный отрезок AB и (9 раз последовательно откладывая на луче AB отрезки, равные AB) построим отрезок $AC = 10 \cdot AB$. Примем отрезок AC за единицу измерения и описанным выше способом выразим длину отрезка AB двоичной дробью $0;\alpha_1\alpha_2\ldots$. Эта дробь является двоичной формой записи рационального числа $\dfrac{1}{10}$ и не зависит от выбора отрезка AB. Теперь нетрудно доказать существование отрезка, равного одной десятой части произвольного отрезка EF. Отметим на луче EF точки $F_1, F_2, \ldots$ так, что $EF_1 = \dfrac{\alpha_1}{2}EF$, $EF_2 = (\dfrac{\alpha_1}{2} + \dfrac{\alpha_2}{2^2})EF$, ... Множество точек $E, F_1, F_2, \ldots$ ограничено — все эти точки принадлежат отрезку EF. Следовательно, существует наименьший отрезок EG, содержащий все эти точки. Отрезок EG — искомый.

Итак, как и в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского, существует отрезок, равный одной десятой части данного отрезка, что дает возможность в любой из этих геометрий записывать результат измерения отрезка в виде десятичной дроби. Это не означает, однако, что двоичная форма записи числа нигде не используется. Более того, она играет фундаментальную роль в современной науке и технике. Объясняется это тем, что целый ряд встречающихся нам ситуаций можно описать в терминах «да — нет»: «число четное — число нечетное», «сигнал есть — сигнала нет», «женщина — мужчина» и т. д. Каждую из таких ситуаций можно условиться обозначать символами «0 — 1», а совокупность таких ситуаций — числом в двоичной форме. Например, если контрольная работа каждого ученика оценивается по двубальной системе (зачет — незачет), то ее результат можно записать в журнал в виде столбца из 0 и 1, т. е. в виде некоторого числа в двоичной форме.

Рассмотрим систему, которая может находиться только в одном из двух состояний. Пусть, например, это будет лампочка, которая может либо гореть, либо не гореть. Такую систему можно рассматривать как простейшую ячейку памяти. Говорят, что эта ячейка хранит в себе 1 бит информации. Чем больше простейших ячеек, тем большую информацию в них можно хранить. Например, двоичная запись в школьном журнале (количество ячеек здесь равно количеству учеников в списке) хранит информацию о результатах контрольной работы целого класса. При помощи большого количества лампочек можно изготовить информационное табло. Еще больше информации содержится в черно-белой фотографии, состоящей из черных и белых зернышек. Биты информации образуют байты, килобайты, мегабайты и т. д., а сама информация может быть записана в виде числа в двоичной форме. Эта идея широко используется во многих областях науки — в информатике, термодинамике, квантовой механике и т. д., на ней основана работа компьютера.

184. О взаимном расположении прямой и окружности. При рассмотрении взаимного расположения прямой и окружности (п. 36), а также двух окружностей (п. 38), мы в некоторых случаях опирались на наглядные представления о свойствах окружности. Теперь мы можем восполнить этот пробел. Начнем с взаимного расположения прямой и окружности.

Рассмотрим окружность с центром O радиуса r и прямую p, не проходящую через точку O. Проведем из точки O перпендикуляр OH к прямой p (рис. 534) и обозначим длину этого перпендикуляра, т. е.

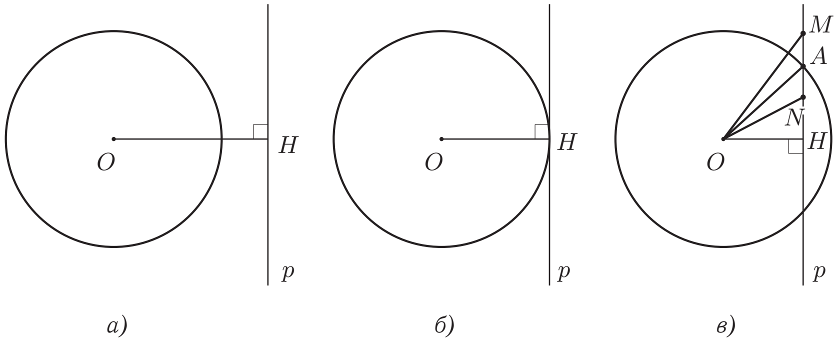


Рис. 534. а) $OH = d > r$; б) $OH = d = r$; в) $OH = d < r$, $MH = r$

расстояние от точки O до прямой p, буквой d. Мы помним (п. 36), что если $d > r$, то прямая и окружность не имеют общих точек (рис. 534, *а*), а если $d = r$, то прямая и окружность имеют только одну общую точку (рис. 534, *б*). Доказательства этих утверждений, правомерные как в случае геометрии Евклида, так и в случае геометрии Лобачевского, были приведены в п. 36. В случае же $d < r$ требуются более аккуратные рассуждения. Проведем их.

Поскольку $OH = d < r$, то точка H лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью. Отметим на прямой p точку M, для которой $MH = r$ (рис. 534, *в*). Гипотенуза OM прямоугольного треугольника MOH больше катета MH, поэтому $OM > r$, а значит, точка M лежит вне круга, ограниченного данной окружностью. Таким образом, один конец отрезка MH (точка H) лежит внутри указанного круга, а другой (точка M) — вне этого круга.

Рассмотрим множество всех точек N отрезка HM, для которых $ON < r$. Это множество ограничено (все рассматриваемые точки содержатся в отрезке HM), поэтому существует наименьший отрезок HA, содержащий все указанные точки. Докажем, что $OA = r$.

Допустим, что $OA < r$, т. е. $OA = r - \delta$, где $\delta > 0$ (рис. 535, *а*). Отложим на луче HA отрезок $HB = HA + \dfrac{\delta}{2}$ и воспользуемся неравен-

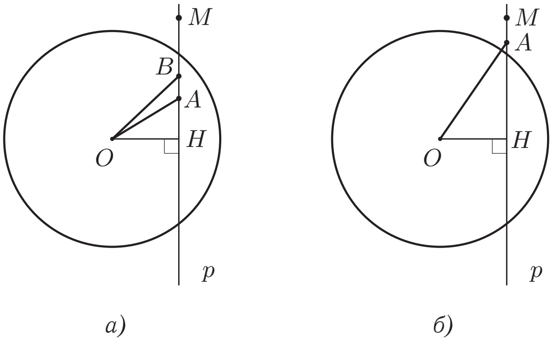


Рис. 535. а) $OA = r - \delta$, $AB = \delta/2$; б) $OA > r$

ством треугольника применительно к треугольнику OAB: $OB < OA + AB = OA + \dfrac{\delta}{2} = r - \delta + \dfrac{\delta}{2} = r - \dfrac{\delta}{2} < r$. Но по предположению все точки N отрезка HM, для которых $ON < r$, содержатся в отрезке HA, а точка B не содержится в этом отрезке. Полученное противоречие означает, что $OA \geqslant r$.

Если предположить, что $OA > r$ (рис. 535, *б*), то путем аналогичных рассуждений (проведите их самостоятельно) получится противоречие с предположением о том, что HA — наименьший отрезок, содержащий все точки N отрезка HM, для которых $ON < r$. Следовательно, $OA = r$, т. е. точка A является общей точкой прямой p и окружности. Теперь точно также, как в п. 36, можно доказать, что в рассматриваемом случае прямая p и данная окружность имеют ровно две общие точки.

Выведем два следствия из доказанного утверждения.

Следствие 1. *Если $a < 2b$, то существует равнобедренный треугольник с основанием, равным a, и боковыми сторонами, равными b.*

В самом деле, возьмем отрезок $BH = \frac{a}{2}$ и проведем через точку H прямую $p \perp BH$ (рис. 536). Проведем теперь окружность с центром B радиуса b. Так как по условию $BH < b$, то эта окружность пересечет прямую p в двух точках. Обозначим одну из этих точек буквой A. Осталось отложить на луче BH отрезок $BC = a$, и мы получим искомый равнобедренный треугольник ABC.

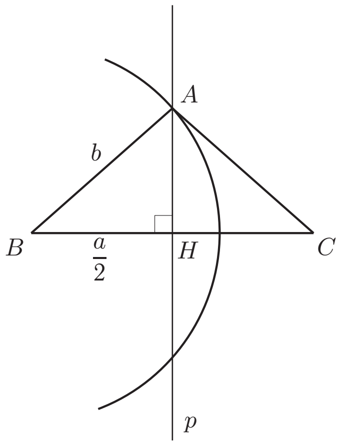
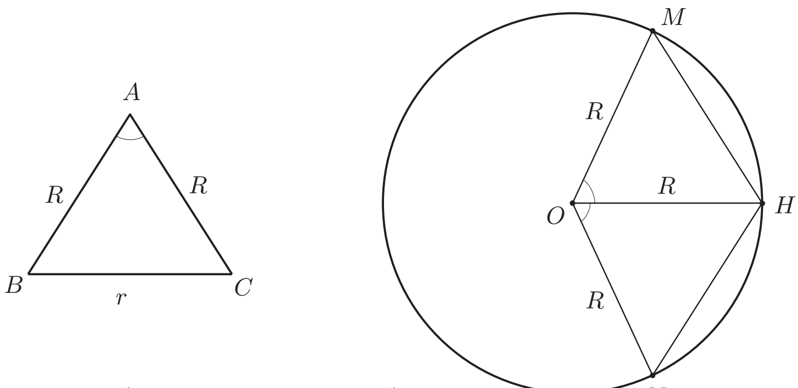


Рис. 536

Следствие 2. *Если центр окружности радиуса r лежит на окружности радиуса R и $r < 2R$, то окружности пересекаются в двух точках.*

Действительно, рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием $BC = r$ и боковыми сторонами, равными R (рис. 537, *а*; согласно следствию 1 такой треугольник существует). Пусть H — центр окружности радиуса r, лежащий на окружности радиуса R с центром O (рис. 537, *б*). Отложим от луча OH углы, равные углу BAC, и обозначим точки пересечения сторон этих углов с окружностью радиуса R, отличные от H, буквами M и N. Каждый из треугольников HOM и HON равен треугольнику ABC по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, $HM = HN = r$. Таким об-



а) *б)*

Рис. 537

разом, точки M и N являются общими точками наших окружностей. Других общих точек данные окружности не имеют (см. п. 38).

185. Об измерении углов. Измерение углов аналогично измерению отрезков, но имеет свою специфику — мы не можем с помощью циркуля и линейки построить угол, равный 1° (п. 154), и разделить его на 60 равных частей. Как же быть? Попробуем рассуждать также, как в п. 183.

Мы знаем, что из точки, не лежащей на данной прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой. Следовательно, существует прямой угол. Его часто обозначают буквой d (первая буква французского слова *droit* — прямой). Далее, поскольку каждый угол имеет биссектрису (см. замечание п. 47), то существуют углы, равные $\frac{d}{2}, \frac{d}{4}, \ldots, \frac{d}{2^n}, \ldots$. Это дает возможность измерить любой угол, т. е. выразить его величину при единице измерения d конечной или бесконечной двоичной дробью (отметим, что аксиома Архимеда при этом не используется, поскольку угол, равный $\frac{d}{2^n}$, укладывается в любом угле не более, чем 2^{n+1} раз).

Возникает, однако, другой вопрос: для любого ли вещественного числа α $(0 < \alpha < 2)$ существует угол, равный αd, т. е. угол, величина которого при единице измерения d выражается числом α? Попробуем ответить на этот вопрос. Пусть число α представляет собой двоичную дробь $\alpha_0;\alpha_1\alpha_2\ldots$ (напомним, что каждая из цифр α_i — либо 1, либо 0). Проведем произвольный луч OA, построим окружность с центром O радиуса OA и на одной из полуокружностей с диаметром AC отметим последовательно точки $A_1, A_2, \ldots$ (рис. 538) так, чтобы $\angle AOA_0 = \alpha_0 d$, $\angle A_0OA_1 = \frac{\alpha_1}{2}d$, $\angle A_1OA_2 = \frac{\alpha_2}{4}d, \ldots$ (некоторые из этих точек окажутся совпадающими). Проведем теперь из отмеченных точек перпендикуляры $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ к прямой OA. Множество точек $B_1, B_2, \ldots$ ограничено — все они содержатся в отрезке AC. Следовательно, существует наименьший отрезок AB, содержащий все эти точки. Через точку B проведем прямую, перпендикулярную к AC. Поскольку $OB < OA$, то эта прямая пересечет нашу полуокружность в некоторой точке M (п. 184). Угол AOM — искомый.

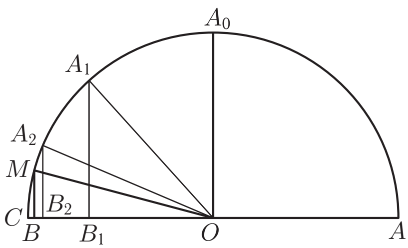


Рис. 538

Итак, любой угол можно измерить (т. е. выразить его величину при единице измерения d некоторым вещественным числом α), и обратно: для любого вещественного числа α $(0 < \alpha < 2)$ существует угол, равный αd.

186. О взаимном расположении двух окружностей. Рассмотрим две окружности радиусов r_1 и r_2, центры O_1 и O_2 которых находятся на расстоянии d друг от друга (рис. 539). Для определенности будем считать, что $r_1 \geqslant r_2$. Мы помним (п. 38), что если $r_2 < |d - r_1|$ (рис. 539, *а, б*), то окружности не имеют общих точек, а если $r_2 = |d - r_1|$ (рис. 539, *в, г*), то окружности имеют единственную общую точку (т. е. касаются друг друга). Доказательства этих утверждений были приведены в п. 38. В случае же $r_2 > |d - r_1|$ (рис. 539, *д, е*) требуются более аккуратные рассуждения. Проведем их.

Начнем с доказательства такого вспомогательного утверждения: если для любого (сколь угодно малого) ε круг с центром M радиуса ε содержит как точки круга K с центром O_1 радиуса r_1, так и точки, не принадлежащие кругу K, то точка M лежит на границе круга K. В самом деле, если предположить, что точка M не лежит на границе круга K, то, полагая $\varepsilon = \frac{1}{2}|O_1M - r_1| < |O_1M - r_1|$, мы получим окружность с центром M радиуса ε, не имеющую общих точек с границей круга K (рис. 540), поэтому ограничиваемый ею круг будет либо

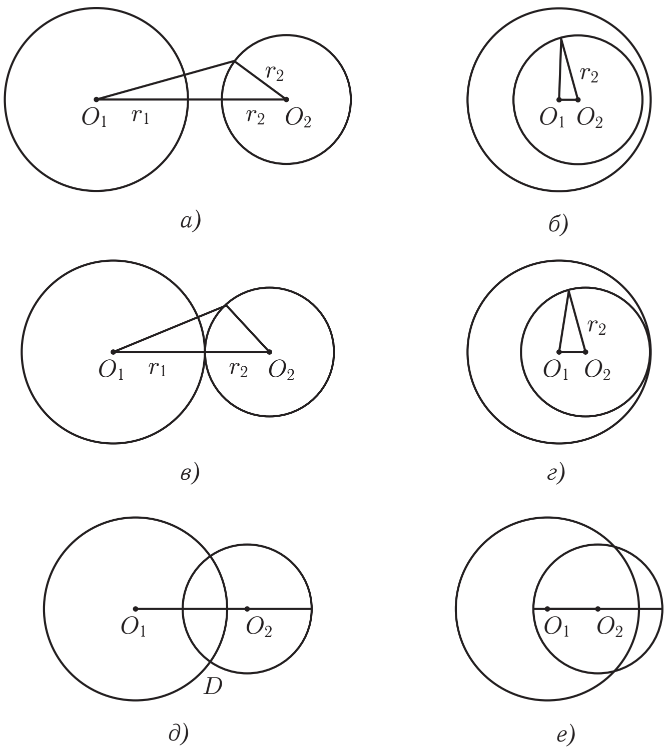


Рис. 539

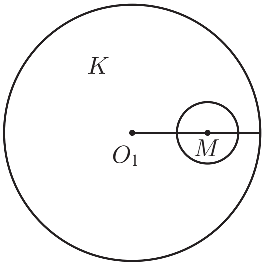
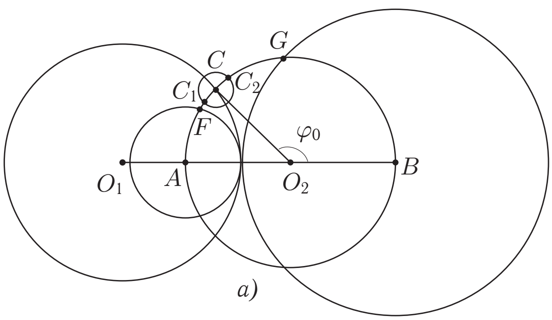


Рис. 540

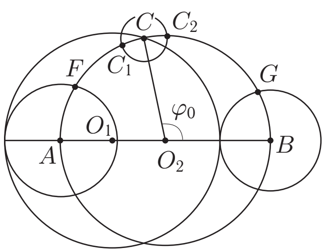
целиком принадлежать кругу K, либо целиком лежать вне этого круга. И то и другое противоречит условию, что и доказывает справедливость нашего утверждения.

Вернемся теперь к нашим окружностям радиусов r_1 и r_2 с центрами O_1 и O_2. Для точки A второй окружности, лежащей на прямой O_1O_2 по ту же сторону от точки O_2, что и O_1, получаем: либо $O_1A = d - r_2 < r_1$ (рис. 541, *а*), либо $O_1A = r_2 - d < r_2 \leqslant r_1$ (рис. 541, *б*), т. е. точка A лежит внутри круга, ограниченного первой окружностью. Более того, все точки второй окружности, лежащие внутри круга K_1 с центром A радиуса $r_1 - O_1A$, также лежат внутри круга, ограниченного первой окружностью, поскольку в нем лежит весь круг K_1.

Для точки B второй окружности, расположенной на прямой O_1O_2 так, что точка O_2 лежит между точками O_1 и B (см. рис. 541, *а, б*), получаем: $O_1B = d + r_2 > r_1$, т. е. точка B лежит вне круга, ограниченного первой окружностью. Более того, все точки второй окружности, лежащие внутри круга K_2 с центром B радиуса $O_1B - r_1$, также



а)



б)

Рис. 541

лежат вне круга, ограниченного первой окружностью, поскольку вне его лежит весь круг K_2.

Выберем одну из полуокружностей с диаметром AB и обозначим буквами F и G точки пересечения этой полуокружности с границами кругов K_1 и K_2 (см. следствие 2 п. 184). Каждой точке M выбранной полуокружности поставим в соответствие число $\varphi(M)$, равное величине угла BO_2M. Множеству всех точек M рассматриваемой полуокружности, лежащих вне первого круга, соответствует ограниченное сверху множество чисел $\varphi(M)$ $(\varphi(M) < \varphi(F))$, поэтому это множество чисел имеет точную верхнюю грань $\varphi_0 \leqslant \varphi(F)$. Отметим также, что $\varphi_0 \geqslant \varphi(G)$.

Рассмотрим теперь такую точку C нашей полуокружности, для которой угол BO_2C равен φ_0 (такая точка, согласно результатам п. 185, существует), и докажем, что эта точка принадлежит первой окружности. Рассмотрим окружность с центром C произвольного (сколь угодно малого) радиуса ε. Эта окружность при достаточно малом ε пересекает нашу полуокружность в двух точках — C_1 и C_2 (C_1 лежит на дуге AC). При этом $\varphi(C_1) > \varphi_0$, а $\varphi(C_2) < \varphi_0$. Следовательно, точка C_1 принадлежит кругу, ограниченному первой окружностью, а точка C_2 не принадлежит этому кругу. Но это (согласно доказанному выше вспомогательному утверждению) и означает, что точка C лежит на первой окружности.

Итак, каждая из полуокружностей второй окружности имеет общую точку с первой окружностью. Следовательно, в рассматриваемом случае окружности имеют две общие точки (см. п. 38).

Приложение 2

Снова о геометрии Лобачевского

Напомним, что к открытию новой геометрии Н. И. Лобачевский пришел, пытаясь доказать V постулат Евклида от противного. Он предположил, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую. В надежде получить противоречие он вывел из этого предположения целый ряд логических следствий, некоторые из которых упоминались выше. В своих исследованиях Н. И. Лобачевский уходил все глубже и глубже. Построенная им система теорем по степени развитости уже мало отличалась от системы теорем евклидовой геометрии. В частности, им были выведены формулы для длины окружности, площади круга, соотношения между сторонами и углами треугольников, аналогичные теоремам синусов и косинусов, формула, связывающая сумму углов треугольника с его площадью (не имеющая аналога в евклидовой геометрии, где сумма углов треугольника равна 180° независимо от его площади). Но противоречия так и не обнаруживалось. Вместе с тем, это, конечно, не означало, что противоречия вообще нет — оно могло появиться при дальнейшем развитии теории. Иными словами, вопрос о непротиворечивости построенной Н. И. Лобачевским геометрии оставался открытым.

В отсутствии каких-либо противоречий в новой геометрической системе Н. И. Лобачевского окончательно убедило сделанное им наблюдение, связанное с так называемой *сферической геометрией*. Начало сферической геометрии было положено, по-видимому, еще в IV веке до нашей эры древнегреческим ученым Евдоксом (ок. 408–ок. 355 до н. э.), а систематическое изложение этой науки, принадлежащее Менелаю Александрийскому, относится к I веку нашей эры. В сферической геометрии роль плоскости играет сфера, а роль прямых — большие окружности этой сферы, т. е. окружности, радиус которых равен радиусу сферы (на глобусе большими окружностями являются, например, меридианы и экватор). Геометрически большие окружности характеризуются тем, что из всех линий, лежащих на сфере и соединяющих две данные точки, кратчайшей является дуга большой окружности. В сферической геометрии можно рассматривать треугольники (фигуры, состоящие из трех точек, не лежащих на одной большой окружности, и соединяющих их трех дуг больших окружностей), многоугольники, окружности, можно вывести формулы для длины окружности, площади круга, соотношения между сторонами и углами треугольников, аналогичные теоремам синусов и косинусов, формулу, связывающую сумму углов треугольника с его площадью (оказывается, что в сферической геометрии сумма углов треугольника всегда больше 180°). Во все эти формулы будет входить радиус данной сферы.

Н. И. Лобачевский заметил, что если в указанных формулах заменить радиус сферы на мнимое число, т. е. квадратный корень из отрицательного числа, то они превратятся в формулы построенной им геометрии. Конечно, в природе нет ничего похожего на сферу мнимого радиуса. Но важно другое. Из этого наблюдения можно сделать вывод о том, что если бы в формулах геометрии Лобачевского содержалось какое-нибудь противоречие, то точно такое же противоречие содержалось бы в формулах сферической геометрии. Это, в свою очередь, означало бы наличие противоречий в евклидовой геометрии, поскольку сферическая геометрия выводится из евклидовой. Но непротиворечивость евклидовой геометрии не вызывала сомнений. Поэтому непротиворечивой следовало признать и геометрию Лобачевского.

Сообщение об открытии новой геометрии было сделано Н. И. Лобачевским 7 (19) февраля 1826 года. Позже, в 1832 году независимо от Н. И. Лобачевского к аналогичным выводам пришел венгерский математик Янош Бойяи (1802–1860), сын Ф. Бойяи. Идеи, близкие к идеям Н. И. Лобачевского и Я.Бойяи, были обнаружены в рукописях К. Ф. Гаусса после его смерти.

Рассуждения Н. И. Лобачевского не показались его современникам убедительными ввиду, главным образом, их чрезмерной по тем временам абстрактности. Чтобы убедить математиков в непротиворечивости новой геометрии, нужно было найти какой-нибудь более наглядный, чем сфера мнимого радиуса, объект, на котором выполнялись бы аксиомы геометрии Лобачевского. Впервые такой объект был найден итальянским математиком Эудженио Бельтрами (1835–1900). В основе его рассуждений лежало понятие *внутренней геометрии поверхности*, введенное ранее К. Ф. Гауссом. В этой геометрии роль плоскости играет произвольная поверхность, а роль прямых — кратчайшие линии на этой поверхности (каждая такая линия характеризуется тем, что любая не слишком большая ее дуга является кратчайшей среди всевозможных дуг, лежащих на поверхности и соединяющих две данные точки этой поверхности). В частности, внутренняя геометрия сферы — это сферическая геометрия. Э. Бельтрами интересовал вопрос: нет ли в евклидовом пространстве поверхности, внутренняя геометрия которой совпадала бы с геометрией Лобачевского? Спустя 42 года после открытия Н. И. Лобачевским новой геометрии, в 1868 году он обнаружил, что такими поверхностями являются так называемые *поверхности постоянной отрицательной кривизны*, изучавшиеся ранее немецким математиком Фердинандом Миндингом (1806–1885). Пример поверхности постоянной отрицательной кривизны приведен на рисунке 542. Эта поверхность, называемая *псевдосферой*, может быть получена так. Допустим, что на плоскости задана система координат Oxy. Представим себе человека, который движется из точки O вдоль оси Oy и тянет на веревке упирающегося осла. Кривая, по которой при этом движется осел, называется трактриссой (от латинского слова trahere, что означает «тянуть, увлекать»). Геометрически она характеризуется тем, что отрезок касательной к ней, заключенный между точкой касания и осью Oy, сохраняет постоянную длину (рис. 543). Если вращать трактриссу вокруг оси Oy, то получится псевдосфера.

Нетрудно видеть, что псевдосфера имеет ребро, за которое она не продолжается. Это означает, что на псевдосфере реализуется геометрия не всей плоскости Лобачевского, а лишь некоторой ее части. В самом деле, если кратчайшая линия упирается в ребро, то за ребро она не может быть продолжена, в то время как на плоскости Лобачевского любой отрезок может быть продолжен в обе стороны неограниченно. Исследуя известные к этому времени поверхности постоянной отрицательной кривизны, Э.Бельтрами установил, что все они имеют острия или ребра, за которые продолжены быть не могут. Его попытки найти такую поверхность, на которой реализовывалась бы геометрия всей плоскости Лобачевского оказались безуспешными. Более того, в 1901 году великий немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943) доказал, что такой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве нет. Таким образом, путь, избранный Э. Бельтрами, не привел его к полному решению вопроса о непротиворечивости геометрии Лобачевского. Но, несмотря на это, его работы имели огромное мировоззренческое значение. Поверхности отрицательной кривизны были существенно более наглядными объектами, нежели сфера мнимого радиуса. Психологический барьер был преодолен, и теперь уже никто из математиков не сомневался в истинности геометрии Лобачевского.

Работы Э. Бельтрами интересны и в другом отношении. Во второй половине XX века выяснилось, что некоторые свойства поверхностей постоянной отрицательной кривизны описываются уравнениями, широко используемыми в ряде разделов современной теоретической физики, химии, биологии. Тем самым, и геометрия Лобачевского оказалась

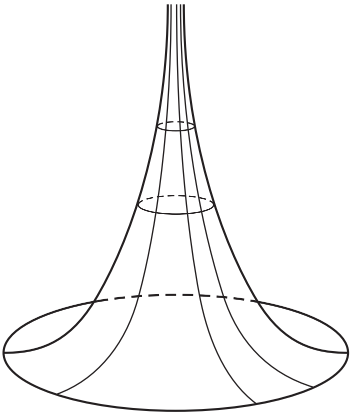


Рис. 542

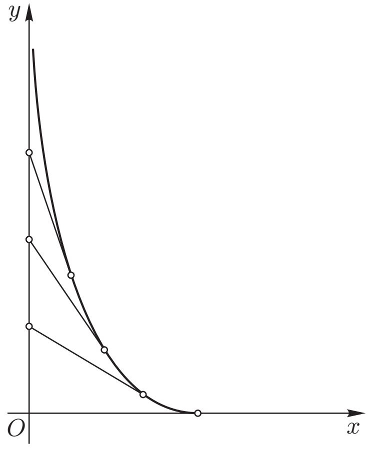


Рис. 543

непосредственно связанный с целым рядом проблем современного естествознания.

Спустя три года, в 1871 году, немецкий математик Феликс Клейн (1849–1925), опираясь на работы англичанина Артура Кэли (1821–1895), полностью решил вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского. Он, как говорят, построил модель этой геометрии, т. е. указал такую совокупность объектов, для которой выполняются все аксиомы геометрии Лобачевского. Эту модель принято называть теперь *моделью Кэли–Клейна*. В ней плоскость Лобачевского представляет собой внутренность круга, а расстояния между точками измеряются таким образом, что граница этого круга, называемая *абсолютом*, недостижима — она находится на бесконечно большом расстоянии от любой внутренней точки круга (точные формулы для вычисления расстояния между двумя точками мы здесь не приводим, поскольку они достаточно сложные). Прямой в модели Кэли–Клейна считается любая хорда абсолюта (концы этой хорды не являются точками плоскости Лобачевского, так как они бесконечно удалены). Движением (т. е. отображением плоскости Лобачевского на себя, сохраняющим расстояния между точками) является любое отображение рассматриваемого круга на себя, при котором каждая точка абсолюта переходит в некоторую точку абсолюта, а каждая прямая — в некоторую прямую. Ясно, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесконечно много прямых, не имеющих с данной ни одной общей точки (рис. 544). Можно доказать также, что все остальные аксиомы, общие для геометрий Евклида и Лобачевского, в этой модели выполнены. Отметим, что аналогичную модель можно построить и для стереометрии Лобачевского. Для этого в качестве абсолюта следует взять сферу, а в качестве прямых — хорды этой сферы.

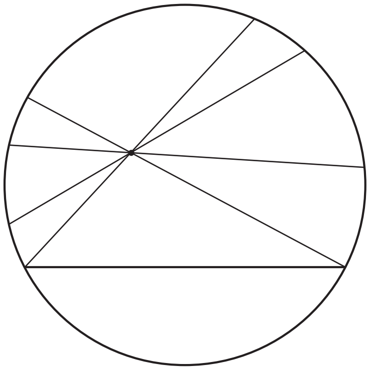


Рис. 544

Примечательно, что из рассмотрения модели Кэли–Клейна можно сделать вывод о связи геометрии Лобачевского со специальной теорией относительности, созданной в 1905 году выдающимся физиком Альбертом Эйнштейном (1879–1955), проживавшим в то время в Швейцарии. Основным постулатом этой теории является экспериментально установленный факт: скорость света в пустоте не зависит от того, в какой системе отсчета ее измеряют. Из этого постулата следует, что законы классической механики верны лишь приближенно. Они могут сильно нарушаться в том случае, когда скорости тел очень велики. Формулы, верные при любых скоростях, и составляют основу специальной теории относительности. В классической механике обычно рассматривают пространственные координаты и время события в отдельности. В специальной теории относительности удобнее рассматривать эти величины в совокупности, опираясь на понятие четырехмерного пространства. Каждое событие изображается в этом пространстве точкой: первые три координаты — это пространственные координаты события, а четвертая — момент времени, когда это событие произошло. Наряду с указанным четырехмерным пространством рассматривают также трехмерное пространство скоростей. Оно строится так. Пусть V_x, V_y, V_z — координаты вектора скорости какого-нибудь тела в данной системе отсчета. Изобразим скорость этого тела точкой с координатами $(V_x; V_y; V_z)$. Аналогичным образом поступим со всеми телами. Пространство, в котором по указанному правилу точки изображают скорости тел, и называется *пространством скоростей*. Для простоты ограничимся движением тел на плоскости. Тогда пространство скоростей будет двумерным. Всякое тело имеет скорость, меньшую скорости света, поэтому пространство скоростей состоит лишь из точек, находящихся внутри круга, радиус которого равен скорости света, т. е. из точек плоскости Лобачевского в модели Кэли–Клейна. Сама система отсчета изображается центром круга — ее скорость относительно нее самой равна нулю. Оказывается, что скорости тел, движущихся друг относительно друга в одном и том же направлении, изображаются точками, лежащими на одной хорде, т. е. на одной прямой плоскости Лобачевского. Если мы перейдем в другую систему отсчета, то каждая точка внутри круга перейдет в какую-то точку внутри того же круга, а точки ограничивающей его окружности — в точки этой же окружности. Действительно, в новой системе отсчета скорости тел будут иными, но они по-прежнему будут меньше скорости света; сама же скорость света останется прежней. Тела, двигавшиеся друг относительно друга в одном и том же направлении, в новой системе отсчета останутся движущимися друг относительно друга в одном и том же направлении. Поэтому точки, лежащие на одной хорде, перейдут в точки, лежащие на одной хорде. Тем самым, переходу к новой системе отсчета соответствует некоторое движение плоскости Лобачевского. Это позволяет использовать формулы геометрии Лобачевского для описания сложных физических процессов, например, производить кинематические расчеты ядерных реакций. При этом оказывается, что различие между теорией относительности и классической механикой точно такое же, как между геометрией Лобачевского и геометрией Евклида.

Через 11 лет после работы Ф.Клейна, в 1882 году выдающийся французский математик Анри Пуанкаре (1854–1912) предложил еще одну модель геометрии Лобачевского. В *модели Пуанкаре*, как и в модели Кэли-Клейна, плоскость Лобачевского представляет собой внутренность круга с бесконечно удаленной границей, но прямыми считаются не хорды, а дуги окружностей, ортогональных к абсолюту (и его диаметры). На рисунке 545 изображена та же ситуация в модели Пуанкаре, что и на рисунке 544 в модели Кэли–Клейна.

Замечательной особенностью модели Пуанкаре является тот факт, что угол между прямыми на плоскости Лобачевского в этой модели равен обычному углу между соответствующими им дугами. В частности, равные треугольники изображаются в ней как фигуры из трех дуг с соответственно равными углами, поскольку в геометрии Лобачевского имеет место признак равенства треугольников по трем углам. Подчеркнем, что при этом расстояние между точками плоскости Лобачевского, конечно же, не равно обычному расстоянию между точками круга — оно измеряется по более сложному правилу (так, что точки абсолюта бесконечно удалены от внутренних точек круга).

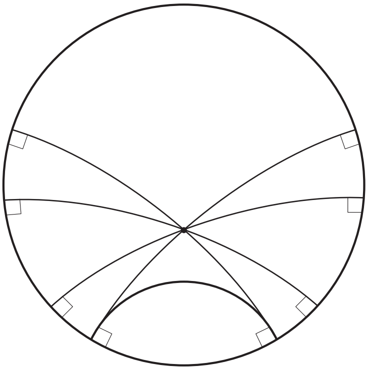


Рис. 545

Рассмотрим примеры движений плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре. Прежде всего, движением является поворот всего круга вокруг его центра. В самом деле, при таком повороте каждая точка круга переходит в точку этого же круга, каждая «прямая» — в «прямую», а каждый «треугольник» — в равный ему «треугольник», поскольку углы нового «треугольника» соответственно равны углам исходного «треугольника». Следовательно, при таком отображении плоскости Лобачевского на себя сохраняются и расстояния между точками, а значит, оно является движением. По аналогичной причине движением является и осевая симметрия относительно диаметра круга. Несколько более сложным примером движения является инверсия относительно произвольной «прямой». При такой инверсии абсолют переходит в себя, так как он ортогонален к этой «прямой». Следовательно, каждая точка круга, ограниченного абсолютом, переходит в точку этого же круга. Далее, поскольку при инверсии сохраняются углы между прямыми и окружностями, то любая окружность, ортогональная к абсолюту, переходит в окружность, ортогональную к абсолюту (или его диаметр). Иными словами, каждая «прямая» переходит в «прямую». Поэтому каждый «треугольник» переходит в «треугольник», равный исходному по трем углам, и, следовательно, при рассматриваемом отображении плоскости Лобачевского на себя сохраняются расстояния между точками.

Ясно, что результатом последовательного выполнения рассмотренных нами движений плоскости Лобачевского также является некоторое ее движение. Оказывается, верно и обратное утверждение: в общем случае движение плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре представляет собой результат последовательного выполнения инверсии относительно «прямой», осевой симметрии относительно диаметра абсолюта и поворота вокруг его центра.

Интересно, что рассмотренная модель была найдена А. Пуанкаре в связи с его исследованиями в области теории так называемых автоморфных функций, широко применяющихся не только в математике, но и в теоретической физике. При разработке этой теории он столкнулся с очень большими трудностями, которые, однако, удалось легко преодолеть с помощью применения идей геометрии Лобачевского. Таким образом, уже к концу XIX столетия геометрия Лобачевского не только получила всеобщее признание, но и органически вошла в аппарат математики. В XX веке ее роль была осмыслена значительно глубже. В частности, по оценкам астрономов, окружающее нас пространство в космических масштабах описывается, скорее всего, именно этой геометрией. Можно вполне определенно сказать, что в наши дни интерес ученых к геометрии Лобачевского не только не ослабевает, но и заметно возрастает.

Ответы и указания

ГЛАВА I

1. Указание. Рассмотреть прямую, проходящую через какие-то две данные точки. На этой прямой по условию задачи лежит еще одна из четырех данных точек. Предположить, что четвертая данная точка не лежит на этой прямой и получить противоречие с условием задачи. **2**. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из п. 4. **3**. Указание. См. указание к задаче 1. **4**. На разных лучах. Указание. Предположить, что точки A и B лежат на одном луче с началом O, и получить противоречие с условием задачи. **5**. Да. Указание. Ответ обосновать путем рассуждений, аналогичных приведенным при решении задачи 3 в п. 4. **6**. Да. Указание. См. указание к задаче 5. **7**. Указание. Воспользоваться задачей 3 из п. 4. **8**. Да. Указание. Для обоснования ответа сначала доказать, что точки B и C лежат в разных полуплоскостях с границей a. **9**. Нет. Указание. Для обоснования ответа сначала доказать, что точки A и D лежат в одной полуплоскости с границей a. **10**. $ab = 1$. **11**. $\frac{n}{m}$. **12**. Указание. Рассмотреть два возможных случая: точки B и C лежат по разные стороны или по одну сторону от точки A. **13**. $3a$. **14**. $60°$. **16**. 0,(428571). **17**. 1,732. **18**. Указание. Доказать, что угол ABD — развернутый. **20**. Указание. Пусть OA и OB — биссектрисы вертикальных углов; доказать, что угол AOB — развернутый. **21**. $180°$. **22**. Указание. Предположить, что прямые m и n совпадают и воспользоваться теоремой п. 12. **23**. Указание. Сначала доказать с помощью наложения равенство полученных треугольников. **24**. Указание. Использовать наложение одного треугольника на другой. **25**. Указание. Воспользоваться признаками параллельности двух прямых. **26**. Указание. Воспользоваться признаками параллельности двух прямых. **27**. Указание. Сначала доказать, что $\angle BAC = \angle DEC$, а затем воспользоваться признаком параллельности двух прямых. **28**. Указание. Воспользоваться признаками параллельности двух прямых. **29**. Указание. Воспользоваться признаками параллельности двух прямых. **30**. Указание. Воспользоваться признаками параллельности двух прямых.

ГЛАВА II

31. Нет. **32**. Указание. Воспользоваться тем, что углы B и C треугольника ABC — острые. **33**. Указание. Воспользоваться следствием из теоремы п. 18. **34**. Указание. Сначала доказать, что угол ADB — тупой. **35**. Указание. Пусть прямая BM пересекает сторону AC в точке D; применить теорему о внешнем угле треугольника к треугольникам CMD и ADB. **36**. Указание. Сначала доказать, что угол ACB — тупой. **37**. $AB = 12{,}5$ см, $BC = 15$ см. **38**. б) 8 см. **39**. 6 см или 10 см. **40**. Указание. Предположить, что основание высоты совпадает с вершиной или лежит на продолжении стороны, и получить противоречие с условием задачи. **41**. Указание. Задача решается аналогично задаче 40. **42**. Указание. Воспользоваться теоремой об углах равнобедренного треугольника. **43**. Указание. Применить теорему об углах равнобедренного треугольника к треугольникам AMB и AMC. **44**. Указание. Применить теорему об углах равнобедренного треугольника к треугольникам ABC и CDE и воспользоваться равенством вертикальных углов ACB и ECD. **45**. $40°$. **46**. Указание. Пусть, например, точка B лежит между A и C; предположить, что $AD = BD = CD$ и сначала доказать с помощью теоремы об углах равнобедренного треугольника, что $\angle ABD = \angle CBD = 90°$. **47**. Указание. Воспользоваться теоремами пп. 21 и 22. **48**. $KF = 8$ см, $\angle DEK = 86°$, $\angle EFD = 90°$. **49**. Указание. Пусть в треугольнике ABC медиана AM является высотой, т. е. $MB = MC$ и $AM \perp BC$; мысленно перегнуть плоскость по прямой AM так, чтобы треугольник AMB наложился на треугольник AMC и доказать, что в результате перегибания точки B и C совместятся. **50**. Указание. Предположить, что медиана AM является высотой треугольника ABC и воспользоваться задачей 49. **51**. Указание. Пусть в треугольнике ABC биссектриса AD является высотой, т. е. $\angle BAD = \angle CAD$ и $AD \perp BC$; мысленно перегнуть плоскость по прямой AD так, чтобы треугольник ABD наложился на треугольник ACD. **52**. Указание. Воспользоваться задачей 1 из п. 25. **53**. Указание. Воспользоваться тем, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета. **54**. Указание. Используя неравенства $AA_1 \geqslant BC$, $AA_1 \leqslant AC$ и $BB_1 \geqslant AC$, $BB_1 \leqslant BC$, сначала доказать, что $AC = BC$, а высоты AA_1 и BB_1 совпадают со сторонами AC и BC. **55**. Указание. Воспользоваться теоремой п. 25 и задачей 1 п. 25. **56**. Указание. Соединить один из концов отрезка с вершиной треугольника и воспользоваться задачей 1 п. 25. **57**. Указание. Продолжить отрезок AD до пересечения со стороной BC и воспользоваться задачей 1 п. 25. **58**. Указание. Сначала с помощью теоремы о внешнем угле треугольника доказать, что $\angle AB_1B > \angle ABB_1$ и $\angle CB_1B > \angle CBB_1$, а затем применить теорему п. 25 к треугольникам ABB_1 и CBB_1. **59**. Указание. а) Воспользоваться задачей 49; б) если точки M_1 и M_2 лежат по одну сторону от точки H, то сначала доказать, что угол AM_1M_2 — тупой, а затем применить теорему п. 25 к треугольнику AM_1M_2; если же точки M_1 и M_2 лежат по разные стороны от точки H, то сначала отметить точку M_1' между H и M_2 так, что $HM_1' = HM_1$ и воспользоваться утверждением п. а); в), г) применить метод доказательства от противного. **60**. Указание. Мысленно перегнуть плоскость по прямой AD, отметить на стороне AB точку C_1, с которой в результате перегибания совместится точка C, и воспользоваться тем, что $\angle ADC_1 = \angle ADC$. Далее рассмотреть треугольник BC_1D и доказать, что $C_1D = CD$, а угол BC_1D равен внешнему углу при вершине C треугольника ABC. Затем воспользоваться тем, что указанный внешний угол больше угла B, и применить к треугольнику BC_1D теорему п. 25. **61**. Указание. Воспользоваться задачей 60 и применить метод доказательства от противного. **62**. Указание. Воспользоваться задачами 60 и 61. **63**. а) 8 см; б) 10 см; в) 5 см или 3 см. **64**. Указание. Воспользоваться неравенством треугольника. **65**. Указание. Доказать методом от противного. **66**. 7 см, 7 см и 11 см. **67**. Указание. Применить неравенство треугольника к треугольникам AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. **68**. Указание. Пусть стороны BC и AD пересекаются в точке M; применить неравенство треугольника к треугольникам AMC и BMD. **69**. 2 дм. **70**. Указание. Воспользоваться задачей 2 п. 26. **71**. Указание. Продолжить отрезок BA за точку A на отрезок AD, равный AC. Пусть прямая AM пересекает отрезок CD в точке H. Сначала доказать, что отрезок AH — биссектриса равнобедренного треугольника ACD и, следовательно, медиана и высота. Используя этот факт, доказать, что $MD = MC$, и применить неравенство треугольника к треугольнику BMD. **72**. Указание. Из точки C провести перпендикуляр CH к прямой a и продолжить его на отрезок HD, равный CH. Точка пересечения отрезка BD с прямой a и есть искомая точка A. Для доказательства этого провести через точку A прямую, перпендикулярную к a, затем доказать, что эта прямая делит пополам угол BAC и воспользоваться задачей 71. **73**. Указание. Сначала доказать равенство треугольников ADE, BEF и CFD. **74**. Указание. Сначала доказать равенство треугольников ADF, BED и CFE. **75**. Указание. Воспользоваться: а) первым признаком равенства треугольников; б) вторым признаком равенства треугольников; в) четвертым признаком равенства треугольников (п. 28). **76**. Указание. Воспользоваться: а) первым признаком равенства треугольников; б) вторым признаком равенства треугольников; в) четвертым признаком равенства треугольников. **77**. а) Указание. Сначала доказать, что $OM = OP$; б) $37°30'$. **78**. $\Delta ABD = \Delta CBD$, $\Delta AED = \Delta CFD$, $\Delta BDE = \Delta BDF$. **79**. $\Delta AOB = \Delta COD$, $\Delta AOD = \Delta COB$, $\Delta ABC = \Delta CDA$, $\Delta ABD = \Delta CDB$. **80**. $\Delta ABD = \Delta AEC$, $\Delta BCD = \Delta EDC$, $\Delta BOC = \Delta EOD$. **81**. Указание. Сначала доказать, что $OA = OC$ и $OB = OD$. **82**. Указание. Сначала доказать, что $\angle OAB = \angle OBA$ и $\angle CAB = \angle DBA$, а затем применить второй признак равенства треугольников к треугольникам ABC и ABD. **83**. $\Delta ABD = \Delta ACD$, $\Delta ABC = \Delta DCB$, $\Delta AOB = \Delta DOC$. **84**. $\Delta ABC = \Delta ADC$, $\Delta ABE = \Delta CDF$, $\Delta BCE = \Delta DAF$. **85**. Указание. Сначала доказать, что угол KOK_1 — развернутый. **86**. Указание. Сначала доказать, что $\Delta ABO = \Delta FEO$. **87**. Указание. Сначала с помощью четвертого признака равенства треугольников доказать, что $\Delta AOC = \Delta BOD$. **88**. Указание. Рассмотреть отдельно случаи, когда углы A и A_1: а) острые; б) прямые; в) тупые. **89**. Указание. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$, $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$; продолжить сторону AB на отрезок BD, равный BC, а сторону A_1B_1 — на отрезок B_1D_1, равный B_1C_1, и доказать сначала, что равны треугольники ADC и $A_1D_1C_1$, BDC и $B_1D_1C_1$. **90**. Указание. Пусть ΔABC — данный треугольник, $AB > BC$; продолжить медиану BM на отрезок ME, равный BM, доказать, что $\angle MEA = \angle MBC$ и $EA = BC$, а затем применить к треугольнику ABE теорему п. 24. **91**. Указание. Рассмотрите отдельно случаи, когда угол AMB: а) прямой; б) тупой; в) острый. **92**. Указание. Сначала доказать, что $AB = A_1B_1$ и $\angle B = \angle B_1$. **93**. Указание. Рассмотреть два случая — данные высота и медиана: а) не совпадают; б) совпадают. В каждом случае сначала доказать, что стороны данных треугольников соответственно равны. **94**. Указание. б) Воспользоваться свойством углов равнобедренных треугольников ADB и ADC. **95**. 9 см. **96**. Указание. Воспользоваться теоремой 2 п. 31. **97**. Указание. Доказать, что $AM = BM$, а затем воспользоваться теоремой 2 п. 31. **98**. Указание. Воспользоваться теоремами 1 и 2 п. 31. **99**. Указание. Доказать методом от противного. **100**. Указание. Пусть K — точка пересечения прямой a и отрезка MB. Рассмотреть два случая: точка K лежит на отрезке AB, и точка K не лежит на этом отрезке. Во втором случае воспользуйтесь неравенством треугольника применительно к треугольнику AMK. **101**. Указание. а) Сначала доказать, что $\angle OBC = \angle OCB$; б) воспользоваться теоремой 2 п. 31. **103**. Указание. Для произвольной точки M данного отрезка AB с серединой O рассмотреть такую точку M_1, что $OM_1 = OM$. **104**. а) две; б) бесконечно много; в) одну. **105**. A, E, O. **107**. Указание. Сначала доказать, что луч MO — биссектриса угла AHВ. **108**. Две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых. **109**. Указание. Сначала доказать, что $\Delta ABD = \Delta CAE$. **110**. Указание. Сначала доказать, что $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$. **111**. Указание. Воспользоваться задачей 51. **112**. Указание. Воспользоваться задачей п. 23. **114**. 29 см. **115**. а) Да; б) нет; в) да. **116**. O и X. **117**. Прямая, плоскость. **118**. Указание. Сначала доказать, что расстояние от центра окружности до любой прямой, проходящей через точку A, меньше радиуса окружности. **119**. $2a$. **120**. Указание. Воспользоваться задачей 113. **121**. Указание. Сначала доказать, что линия центров перпендикулярна к AB и к CD. **122**. 20 см. **123**. Указание. Сначала построить биссектрису данного угла. **125**. Указание. б) Сначала построить треугольник, у которого стороны соответственно равны двум данным сторонам и удвоенной данной медиане; в) если данные высота и медиана не равны, то сначала построить прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна данной медиане, а один из катетов равен данной высоте; если же данные высота и медиана равны, то задача сводится к построению равнобедренного треугольника по основанию и высоте (медиане), проведенной к основанию; г) если данные высота и биссектриса не равны, то сначала построить прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна данной биссектрисе, а один из катетов равен данной высоте; если же данные высота и биссектриса равны, то задача сводится к построению равнобедренного треугольника по углу, противолежащему основанию, и высоте (биссектрисе), проведенной из вершины этого угла. **126**. Четыре, три, два, одно или ни одного решения. Указание. Воспользоваться задачей 108. **127**. Указание. Сначала построить серединный перпендикуляр к отрезку AB; задача не имеет решения, если прямая AB перпендикулярна к прямой a. **128**. Указание. Сначала построить серединный перпендикуляр к отрезку AB и окружность радиуса PQ с центром C. **129**. Указание. Сначала построить биссектрису данного угла и серединный перпендикуляр к данному отрезку. **130**. Указание. Воспользоваться задачей 72. **131**. Указание. Пусть O — центр данной окружности, R — ее радиус; построить сначала треугольник MON, у которого $MN = R$, $ON = 2R$.

ГЛАВА III

132. Да. Указание. Взять на прямой a любую точку, отличную от точки пересечения прямых a и b, и провести через нее прямую, параллельную прямой b. **133**. Указание. Доказать методом от противного, используя задачу 132. **135**. Указание. Сначала доказать, что $BC \parallel AD$. **136**. Указание. Сначала доказать, что $\angle MDA = \angle MAD$. **137**. 48°, 66°, 66°. **138**. а) Да; б) да. **139**. Указание. Воспользоваться свойствами параллельных прямых. **140**. Указание. Воспользоваться задачей 139. **141**. Указание. а) Воспользоваться тем, что $\angle A = \angle ACM$ и $\angle ACM + \angle BCN = 90°$; б) сначала доказать, что треугольник BCD — равнобедренный. **142**. Указание. Воспользоваться задачей 141. **143**. Указание. Сначала доказать, что углы треугольника, прилежащие к указанной стороне, равны. **144**. Указание. Пусть биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O; сначала доказать, что треугольники MBO и NCO — равнобедренные. **145**. Указание. Пусть прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O; сначала доказать, что треугольники MBO и NCO — равнобедренные. **146**. Указание. Сначала доказать, что ЕО $= BE$ и $OD = DC$. **147**. Указание. Через точку A_1 провести прямую a_1, параллельную прямой a, и доказать, что точки B_1 и C_1 лежат на прямой a_1. **148**. Указание. а) Воспользоваться рассуждениями из п. 50; б) сначала доказать, что $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$. **149**. Всегда. Указание. Сначала построить биссектрису угла, а затем прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную к этой биссектрисе. **150**. Четыре решения. Указание. Воспользоваться задачей 108. **151**. Указание. Из точек O_1 и O_2 провести перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к прямой MP и воспользоваться тем, что $MP = 2H_1H_2$ и $M_1M_2 \leqslant O_1O_2$. **152**. Указание. Сначала доказать, что середина отрезка XY равноудалена от прямых a и b. **153**. Прямую, параллельную данным прямым и находящуюся на равных расстояниях от нее. **154**. Две прямые, параллельные данной прямой и расположенные на данном расстоянии по разные стороны от нее. **155**. Указание. Воспользоваться задачей 2 п. 53. **156**. Указание. Воспользоваться задачей 146. **157**. Два решения, одно решение или ни одного решения. Указание. Воспользоваться задачей 153. **158**. Указание. а) Сначала построить какой-нибудь треугольник с двумя данными углами; б) пусть ΔABC — искомый треугольник с данным углом A, биссектрисой AA_1 и высотой BH. Сначала построить угол A и провести прямую, параллельную одной из сторон угла, на расстоянии BH от этой стороны и пересекающую другую сторону угла. Точка пересечения и есть вершина B. Затем построить биссектрису угла A и отложить на ней отрезок AA_1; в) сначала провести параллельные прямые, расстояние между которыми равно данной высоте; г) сначала построить угол, равный данному; затем построить прямую, пересекающую одну из сторон угла, параллельную прямой, содержащей другую сторону угла, и расположенную от этой прямой на расстоянии, равном данной высоте; далее построить прямую, параллельную первым двум прямым и равноудаленную от них; д) сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной стороне, а один из катетов равен данной высоте. Затем построить серединный перпендикуляр к этому катету.

ГЛАВА IV

159. Указание. Сначала доказать, что $\angle ACD + \angle BCE = 90°$. **160**. 20°. **161**. Указание. Пусть два угла данного треугольника равны α и β; доказать, что углы каждого из трех треугольников, о которых идет речь в задаче, соответственно равны $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$. **162**. а) остроугольный; б) остроугольный. **163**. Обратное утверждение верно. **164**. $90° - \frac{\alpha}{2}$. **166**. 9 см. **167**. Указание. а) Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 30°$, $\angle B = 60°$; сначала провести биссектрису BD, а затем перпендикуляр DM к гипотенузе BC; б) задача решается так же, как в п. 54. **168**. 70°, 70°, 40°. **169**. $90° - 2\alpha$. **171**. Указание. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $\angle B = \alpha$, AD — биссектриса, AH — высота, AM — медиана; сначала доказать, что $\angle BAM = \angle CAH = \alpha$. **172**. 45°. **173**. 180°. **174**. Указание. Пусть в треугольнике ABC медиана AM и высота AH делят угол A на три равных угла: BAH, HAM и MAC; провести перпендикуляр MD к стороне AC и сначала доказать, что $MD = \frac{1}{2}MC$. **175**. 70°. Указание. Пусть O — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой BM; сначала доказать, что $\Delta AOC = \Delta MOC$. **176**. 30°.

177. 80°. **178**. Указание. Воспользоваться следствием 3 из п. 55. **179**. Указание. Сначала построить треугольник, у которого длина одной стороны равна данному периметру, а прилежащие к ней углы равны половинам данных углов. **180**. Указание. Пусть ΔABC — искомый треугольник, у которого даны BC, $\angle B - \angle C$, $AB + AC$; на продолжении стороны CA за точку A отложить отрезок AA_1, равный отрезку AB, и построить сначала треугольник CBA_1. **181**. 6,8 и 10,2. **182**. Указание. Применить теоремы п. 56 к треугольникам ABB_1 и AA_1B_1. **183**. Указание. Пусть B_1 — середина AC, C_1 — середина AB; воспользоваться тем, что отрезок B_1C_1 — средняя линия треугольников BAM и CAN. **184**. Указание. Через каждую из данных середин сторон провести прямую, параллельную прямой, проходящей через две другие середины сторон. **185**. Указание. Сначала доказать, что $\Delta AOB = \Delta A_1O_1B_1$ и $\Delta AOC = \Delta A_1O_1C_1$. **186**. Указание. а) Воспользоваться тем, что серединный перпендикуляр к катету параллелен другому катету и потому пересекает гипотенузу в ее середине; б) воспользоваться задачей 144. **187**. Равнобедренный или прямоугольный. **188**. Указание. Воспользоваться тем, что серединный перпендикуляр к основанию равнобедренного треугольника содержит проведенную к основанию высоту. **189**. Указание. Пусть высоты треугольника ABC пересекаются в вершине A; сначала доказать, что отрезок BA является высотой треугольника ABC. **191**. Указание. Воспользоваться тем, что в равностороннем треугольнике центры описанной и вписанной окружностей совпадают, а также свойством катета, лежащего против угла в 30°. **192**. Задача имеет одно решение, если три данные точки не лежат на одной прямой, и не имеет решений, если они лежат на одной прямой. Указание. Сначала построить серединные перпендикуляры к двум отрезкам, концами которых являются данные точки.

ГЛАВА V

193. Указание. Воспользоваться тем, что сумма длин всех звеньев ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы. **194**. Указание. Несколько раз воспользоваться неравенством треугольника. **195**. Да. Указание. Рассмотреть, например, четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 1$, $CD = DA = 4$, и взять внутри четырехугольника точку M, столь близкую к точке D, что $MA + MB + MC > 10$. **196**. Указание. Пять раз воспользоваться неравенством треугольника. **197**. Указание. Сравнить углы C и D треугольника BCD. **198**. Указание. Воспользоваться наложением. **199**. Указание. Рассмотреть ту из точек многоугольника, которая наименее удалена от данной точки внутренней области. **200**. Указание. Соединить вершины данного n-угольника через одну и сравнить сумму длин проведенных диагоналей с удвоенным периметром n-угольника, а также с периметром образовавшейся «звезды». **201**. Указание. Пользуясь задачей 2 п. 65, сначала доказать, что $OA_1 + OA_2 < P - A_1A_2$. **202**. Нет. Указание. Сравнить сумму углов выпуклого стоугольника с суммой углов 97 треугольников. **203**. Указание. Доказать методом от противного. **204**. Указание. Сначала доказать, что при пересечении прямых AB, CD и EF образуется равносторонний треугольник. **205**. Указание. Через произвольную точку плоскости провести прямые, параллельные диагоналям семиугольника, и рассмотреть получившиеся углы. **206**. $180°$. Указание. Учесть, что точка O является точкой пересечения биссектрис углов четырехугольника. **207**. Указание. Пусть O — центр данной окружности, R — ее радиус, a — длина каждой из указанных хорд; рассмотреть окружность с центром O радиуса $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. **208**. Указания. а) Пользуясь свойством отрезков касательных, доказать, что $AB + CD = BC + AD$; б) доказать методом от противного. **209**. Точка пересечения диагоналей четырехугольника. Указание. Сравнить сумму расстояний от произвольной точки до двух противоположных вершин с длиной диагонали, соединяющей эти вершины. **210**. Указание. Воспользоваться неравенством треугольника. **211**. Указание. Воспользоваться задачами 210 и 193. **212**. Указание. Воспользоваться задачей 210. **213**. Указание. Рассмотреть наибольшую диагональ и две диагонали, имеющие с ней общие концы. **214**. Указание. Сначала доказать, что периметр данного четырехугольника не меньше 10. **215**. Указание. Сравнить длины указанных отрезков с длиной диагонали параллелограмма. **216**. Указание. Воспользоваться свойством диагоналей параллелограмма. **217**. Указание. Сначала доказать, что $AT \parallel CM$. **218**. Указание. Рассмотреть треугольник TMP, где M — середина BC, T — середина AD, P — середина ED, воспользоваться теоремой Вариньона применительно к четырехугольнику $ABCD$, а затем — теоремой о средней линии треугольника. **219**. Указание. Пусть M — данная точка, K — точка, симметричная вершине A данного угла относительно точки M; через точку K провести прямые, параллельные сторонам угла. **220**. Указание. Воспользоваться тем, что середина K отрезка MP лежит на отрезке AC, причем $AK = 3KC$. **221**. Параллелограмм вместе с вутренней областью. Указание. Воспользоваться задачей 219. **222**. Указание. Сначала доказать, что диагонали данного четырехугольника делят его углы пополам. **223**. Указание. Предположить, что точка пересечения диагоналей четырехугольника не является их серединой, построить параллелограмм, лежащий внутри четырехугольника, и прийти к противоречию с утверждением задачи 2 п. 65. **224**. Указание. а) Воспользоваться тем, что радиус, перпендикулярный к хорде, делит ее пополам; б) сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого соединяет центры окружностей, а один из катетов равен половине данного отрезка. **225**. $90°$. Указание. Достроить прямоугольник до квадрата $AKPD$. **226**. 90°. Указание. Воспользоваться теоремой Гаусса и признаком прямоугольника. **227**. Указание. а) Через вершину меньшего основания провести прямую, параллельную боковой стороне; б) через вершину меньшего основания провести прямую, параллельную диагонали. **228**. Указание. Воспользоваться признаком равенства треугольников по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон (см. замечание 2 п. 41). **229**. $\frac{1}{2}|a-b|$. Указание. Сначала доказать, что точки M и T лежат на прямой, содержащей среднюю линию трапеции. **230**. c. Указание. Сначала доказать, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон данной трапеции — прямоугольник. **231**. а) $\frac{a-b}{2}$; б) $\frac{a-b}{2}$. Указание. а) Воспользоваться теоремами о средних линиях треугольника и трапеции; б) продолжить боковые стороны до пересечения. **232**. Указание. Через вершину меньшего основания каждой из двух трапеций провести прямую, параллельную боковой стороне. **233**. Указание. Провести из точки M три луча, параллельные сторонам треугольника ABC, и рассмотреть диагонали получившихся равнобедренных трапеций. **234**. Указание. а), б) Воспользоваться идеей решения задачи 232; в) сначала провести через вершину основания искомой трапеции прямую, параллельную ее диагонали.

ГЛАВА VI

235. См. рис. 546. **236**. См. рис. 547. **237**. См. рис. 548. **238**. См. рис. 549. **239**. См. рис. 550. **240**. См. рис. 551. **241**. См. рис. 552. **242**. Указание. Доказать методом от противного: предположить, что отрезок BD делит данный треугольник ABC на два равных тре-

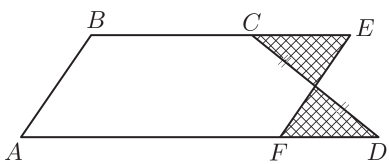


Рис. 546. $EF \parallel AB$

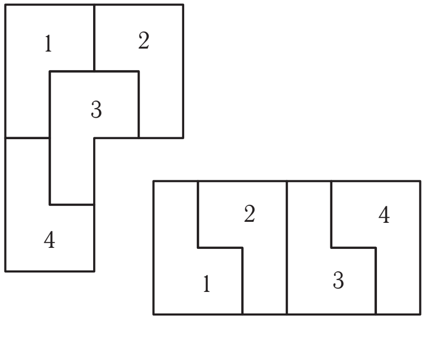


Рис. 547

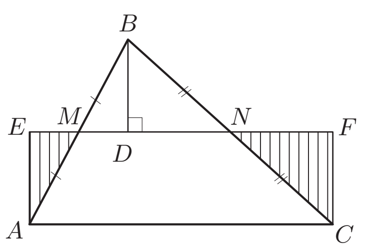
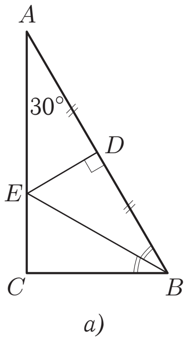


Рис. 548



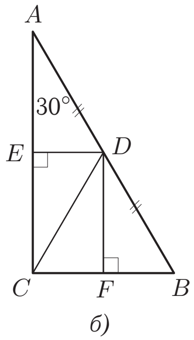


Рис. 549

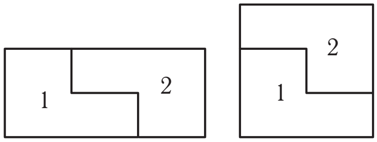


Рис. 550

угольника и рассмотреть углы ADB и CDB. **243**. Указание. Сначала доказать, что параллелограмм $ABCD$ равносоставлен с параллелограммом $AEKD$. **244**. Указание. Воспользоваться равенствами $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + S_4 + S_5 + S_6 = S_1 + S_6 + S_7 + S_2 = \frac{1}{2}S$, где S — площадь данного многоугольника. **245**. Указание. Воспользоваться идеей решения задачи п. 83. **246**. Указание. Воспользоваться идеей решения задачи п. 83. **247**. Указание. Воспользоваться формулой площади треугольника. **248**. а) Нет; б) да; в) да. Указание. а) Воспользоваться тем, что высота треугольника меньше одной из сторон, имеющих с ней общую вершину; б) рассмотреть равнобедренный треугольник с достаточно большим основанием и достаточно малой высотой, проведенной к нему; в) рассмотреть равнобедренный треугольник, у которого основание больше 2 км. **249**. Указание. а) Соединить центр вписанной окружности с вершинами многоугольника и найти сумму площадей образовавшихся треугольников; б) воспользоваться идеей решения задачи а). **250**. Указание. Пусть прямая BM пересекает сторону AC в точке D; воспользоваться тем, что треугольники AMD и CMD имеют общую высоту. **251**. Указание. Воспользоваться задачей 250. **252**. $\frac{p^2}{8}$. Указание. Пусть

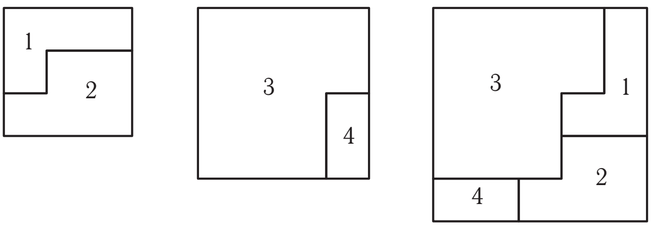


Рис. 551

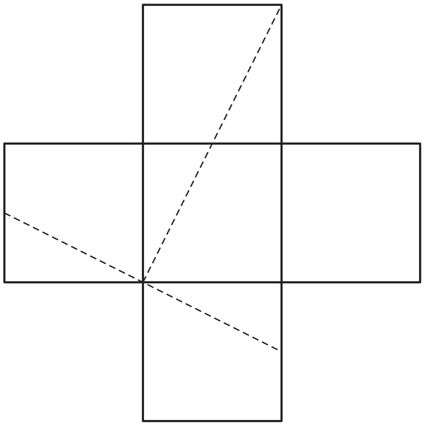


Рис. 552

одна из данных сторон равна x; сначала доказать, что площадь треугольника не превосходит $\frac{1}{2}x(p-x)$. **253**. У к а з а н и е. а) Соединить точку основания с противолежащей вершиной и воспользоваться тем, что площадь равнобедренного треугольника равна сумме площадей двух получившихся треугольников; б) воспользоваться идеей решения задачи а); в) соединить указанную точку с вершинами и воспользоваться тем, что площадь равностороннего треугольника равна сумме площадей трех получившихся треугольников. **254**. У к а з а н и е. Доказать, что $\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3}$. **255**. $\frac{\alpha}{2}$. У к а з а н и е. Сначала, используя теорему 1 п. 87, доказать, что $CD \parallel MK$. **256**. 1 : 4. У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой 1 п. 87. **257**. 5 : 12. У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой 1 п. 87. **258**. У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой 2 п. 87. **259**. 3 : 4. У к а з а н и е. Достроить данный треугольник до параллелограмма. **260**. $\left(\frac{m}{n}\right)^3$. У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что $S_{AMP} = \frac{m}{n}S_{CMP}$, $S_{BKP} = \frac{n}{m}S_{CKP}$, $S_{CMP} = \frac{m}{n}S_{CKP}$. **261**. 1 : 2. У к а з а н и е. Сначала доказать, что $S_{AA_1B} = S_{AA_1B_1}$ и $S_{AA_1C} = S_{AA_1C_1}$. **262**. У к а з а н и е. Сначала доказать, что длина перпендикуляра, проведенного из точки M к прямой AD, равна полусумме длин перпендикуляров, проведенных к той же прямой из точек B и C. **263**. а) Сначала доказать, что $S_{ABCM} = S_{ABCO}$, $S_{ADCM} = S_{ADCO}$, где O — середина отрезка BD. б) Два отрезка прямых, каждая из которых проходит через середину одной из диагоналей четырехугольника $ABCD$ параллельно другой его диагонали; в) Искомая точка является точкой пересечения прямых, каждая из которых проходит через середину одной из диагоналей четырехугольника $ABCD$ параллельно другой его диагонали. **264**. Указание. Сначала доказать, что $S_{AOE} = S_{COE}$, и воспользоваться задачей 263, а. **265**. Указание. Воспользоваться теоремой Фалеса. **266**. Указание. Провести высоты треугольников AOB и AOD из вершин B и D. **267**. Указание. Через точку K провести прямые, перпендикулярные к сторонам параллелограмма. **268**. Указание. Сравнить площади указанных треугольников с площадью параллелограмма $APDE$. **269**. $\frac{S}{2}$. Указание. Воспользоваться идеей доказательства теоремы Вариньона. **270**. $1:5$. Указание. Воспользоваться свойством средней линии треугольника. **271**. Указание. Воспользоваться задачей 269. **272**. а) $\frac{ab}{2}$; б) c^2. Указание. Воспользоваться теоремой Вариньона. **273**. ab. Указание. Воспользоваться теоремой Вариньона. **274**. $\frac{1}{2}|S_1 - S_2|$, если оба треугольника расположены по одну сторону от общего основания, и $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$, если треугольники расположены по разные стороны от общего основания. **275**. Указание. Пусть $MNPQ$ — четырехугольник с вершинами на сторонах данного параллелограмма, причем диагональ NQ параллельна стороне параллелограмма; из вершин M и P провести перпендикуляры к прямой NQ. **276**. Указание. Сначала доказать, что $S_{ABD} = S_{EDC}$ и $S_{BDK} = S_{CDK}$. **277**. $\frac{5}{12}S$. Указание. Сначала доказать, что $BO : OD = 1 : 2$. **278**. $\frac{5}{24}$. Указание. Воспользоваться теоремами об отношении площадей треугольников. **279**. Указание. Через указанную середину боковой стороны провести прямую, параллельную другой стороне, и сравнить площадь трапеции с площадью получившегося параллелограмма. **280**. Указание. Воспользоваться задачей 279. **281**. а) Указание. Воспользоваться равновеликостью треугольников ABD и ACD. б) $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. **282**. m^2. Указание. Воспользоваться задачей 269. **283**. $\frac{\sqrt{5}+5}{2}$. Указание. Сначала доказать, что каждая диагональ данного пятиугольника параллельна одной из его сторон, а затем воспользоваться равенством треугольников, общей стороной которых является диагональ пятиугольника. **284**. $1:20$. Указание. Сначала доказать, что $AP = \frac{2}{5}AM$. **285**. $\frac{1}{6}$. Указание. Сначала доказать, что $AM = MP = PC$. **286**. $\frac{16\sqrt{15}}{5}$ см^2. Воспользоваться задачей 247 и формулой Герона. **287**. 3,2 см. Указание. Воспользоваться формулой Герона. **288**. 72 см^2. Указание. Сначала найти площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника, а затем воспользоваться задачей 259.

289. 45 см^2. Указание. Пользуясь формулой Герона, найти площадь треугольника ABC, а затем применить теорему 1 п. 88. **290**. $\sqrt{7}$. Указание. Воспользоваться формулой (8) п. 92 и теоремой 1 п. 88. **291**. а) $2\sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$; б) $\dfrac{a^2+4ab+b^2}{2\sqrt{3}}$. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора. **292**. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора. **293**. $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора. **294**. $\dfrac{3a^2}{(\sqrt{3}+2)^2}$. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора. **295**. Указание. Провести две высоты из соседних вершин параллелограмма и рассмотреть образовавшиеся прямоугольные треугольники, гипотенузами которых являются диагонали параллелограмма. **296**. Указание. Достроить треугольник ABC до прямоугольника $ACBD$ и через точку O провести прямые, параллельные сторонам прямоугольника. **297**. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора. **298**. $\dfrac{a^2+a(d-b)}{a-b}\sqrt{bd}$. Указание. Сначала доказать, что $(b+d)^2 = h^2 + (b-d)^2$, где h — высота данной трапеции. **299**. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора. **300**. 8 см^2. Указание. Сначала доказать, что $S_{ABMN} = \dfrac{3}{4}S_{ABC}$. **301**. 24 см^2. Указание. Рассмотреть четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон данной трапеции. **302**. $3\sqrt{5}$ см. Указание. Воспользоваться теоремой Вариньона.

ГЛАВА VII

303. Указание. Воспользоваться вторым и первым признаками подобия треугольников. **304**. Указание. Рассмотреть два случая — точка K лежит между: 1) точками A и T; 2) точками T и D. Сначала доказать, что отрезки AM и MC пропорциональны отрезкам KP и PC, а затем воспользоваться задачей 303. **305**. Указание. Сначала доказать, что $\Delta ACD \sim \Delta PBO$ и $\Delta CDE \sim \Delta BDP$, где O — центр окружности, E — точка пересечения прямых AC и PD. **306**. Указание. Сначала доказать, что $\Delta AOB \sim \Delta DOC$. **307**. Указание. Сначала доказать, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. **308**. Указание. Сначала доказать, что $\Delta ACH \sim \Delta BCP$. **309**. Указание. Сначала доказать, что $\Delta KBH \sim \Delta ABH$ и $\Delta MBH \sim \Delta CBH$. **310**. Указание. Пусть PM — прямая, параллельная одной стороне угла и пересекающая другую сторону в точке M; используя подобие треугольников, доказать, что $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{PM}$. **311**. 90°. **312**. 30°, 60°, 90°. **313**. Указание. а) Использовать тот же прием, что и в решении задачи 2 п. 96; б) использовать тот же прием, что и в решении задачи 2 п. 96; в) сначала доказать последовательно подобие треугольников AHD и $A_1H_1D_1$, ABH и $A_1B_1H_1$, ACH и $A_1C_1H_1$, либо использовать тот же прием, что и в решении задачи 2 п. 96; г) воспользоваться задачей 313, а. **314**. Указание. Отметить точку D на продолжении стороны AC за точку C и точку D_1 на продолжении стороны A_1C_1 за точку C_1 так, что $CD = CB$, $C_1D_1 = C_1B_1$, и сначала доказать, что $\Delta ABD \sim \Delta A_1B_1D_1$. **315**. Указание. Провести высоту BD треугольника ABC, доказать подобие треугольников BDC и AEH и воспользоваться тем, что отрезки BE и AO — сходственные медианы этих треугольников. **316**. Указание. Пусть E — точка пересечения прямых MP и OB, F — точка пересечения прямых MQ и OA; сначала доказать, что $EF \parallel RS$, а затем — что $\Delta MPF \sim \sim \Delta EPO$ и $\Delta MPO \sim \Delta EPF$. **317**. Указание. Воспользоваться подобием треугольников APM и CKT. **318**. Указание. Воспользоваться подобием треугольников AMB и APD. **319**. Указание. Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O; воспользоваться подобием треугольников AOD и BOC, а также теоремой Пифагора. **320**. Указание. На продолжении стороны CA отложить отрезок AD, равный AB, и доказать, что $\Delta ABC \sim \Delta BCD$. **321**. Указание. Сначала доказать, что на стороне AB можно взять точку D так, что $\angle ACD = 90° - \frac{a}{2}$, а затем воспользоваться подобием треугольников ABC и CBD. **322**. Указание. Воспользоваться теоремой об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. **323**. $\sqrt{S_1S_2}$. Указание. Воспользоваться тем, что коэффициент подобия исходного и отсекаемого треугольников равен $\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$. **324**. $2\sqrt{S_1S_2}$. Указание. Воспользоваться тем, что каждый из полученных треугольников подобен исходному треугольнику. **325**. $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$. Указание. Воспользоваться задачей 324. **326**. $\frac{k^2}{2(k+1)}$. **327**. $\frac{ab}{a+2b}$. Указание. Сначала доказать, что отрезок MP параллелен основаниям трапеции. **329**. $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **330**. 30°, 45°, 135°, 150°. **331**. Указание. а) Рассмотреть прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1, в которых $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$, и сначала доказать, что эти треугольники подобны; б), в) воспользоваться основным тригонометрическим тождеством и утверждением а). **332**. Указание. а) Рассмотреть треугольник ABC, у которого $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, провести высоту h из вершины C и выразить стороны AC и BC через h и синусы углов α и β; затем воспользоваться тем, что в треугольнике ABC против большего угла лежит бóльшая сторона и обратным утверждением; б) воспользоваться основным тригонометрическим тождеством и утверждением а); в) воспользоваться утвержденией а) и б); г) воспользоваться утверждением в). **333**. Указание. Воспользоваться обобщенной теоремой Фалеса и теоремой о биссектрисе треугольника (п. 88). **334**. Указание. Воспользоваться теоремой о пропорциональных отрезках в треугольнике и теоремой о биссектрисе треугольника (п. 88). **335**. $m : 2n$. Указание. Воспользоваться теоремой о пропорциональных отрезках в треугольнике. **336**. $1 : 5$. Указание. Воспользоваться теоремой о пропорциональных отрезках в треугольнике. **337**. $\dfrac{2(k+1)}{k^2+3k}$. Указание. См. указание к задаче 334. **338**. Указание. Сначала доказать, что отрезки, на которые разбивается боковая сторона трапеции точкой K, пропорциональны отрезкам, на которые разбивается другая сторона точкой H. **339**. $\dfrac{9}{70}$. Указание. Воспользоваться теоремой о пропорциональных отрезках в треугольнике. **341**. Указание. Пусть луч CT пересекает сторону AB в точке C_1, а луч CO пересекает сторону AB в точке C_2; используя теорему Чевы доказать, что точки C_1 и C_2 делят отрезок AB в одном и том же отношении и, следовательно, совпадают. **342**. Указание. Воспользоваться теоремой Менелая. **343**. Указание. Воспользоваться тем, что прямоугольный треугольник подобен каждому из треугольников, на которые он разбивается высотой, проведенной из вершины прямого угла. **344**. Указание. Воспользоваться подобием треугольников, полученных в результате проведения указанного отрезка и диагоналей трапеции. **345**. Указание. Сначала выразить площади исходной и двух равновеликих трапеций через их основания и высоты. **346**. Указание. Пусть AD и BC — основания трапеции $ABCD$, $BC < AD$, M — конец указанного отрезка, лежаший на стороне AB; через точки B и M провести прямые, параллельные стороне CD, и воспользоваться подобием получившихся треугольников. **347**. Среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое, среднее квадратичное. **348**. Указание. Воспользоваться подобием треугольников MAB и MND, PCN и AND. **350**. $\dfrac{39}{4}\sqrt{15}$. Указание. Воспользоваться задачей 349, а затем доказать, что боковые стороны трапеции равны 8 и 12. **351**. Указание. Пусть в треугольнике ABC $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 4$; провести биссектрисы BD и CE и воспользоваться подобием треугольников ABC, BDC и ACE. **352**. Указание. а) Воспользоваться утверждением п. 103 и задачей 343; б) воспользоваться утверждением а) и равенством $CD \cdot AB = AC \cdot BC$. **353**. Указание.

Воспользоваться задачей 346. **354**. Указание. Воспользоваться тем, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований. **355**. Указание. Воспользоваться задачей 345. **356**. Указание. Воспользоваться задачей 344. **357**. Указание. Сначала построить какой-нибудь треугольник AB_1C_1, подобный искомому треугольнику ABC. **358**. Указание. Сначала построить какой-нибудь треугольник AB_1C_1, подобный искомому треугольнику ABC. **359**. Указание. Сначала построить какой-нибудь равнобедренный треугольник, подобный искомому; затем, используя основание и высоту, проведенную к основанию, в построенном треугольнике, построить отрезок, равный основанию искомого треугольника. **360**. Указание. Сначала построить какой-нибудь треугольник AB_1C_1 с данным углом A и углом B_1, равным B; затем, используя сторону AC_1 и медиану B_1M_1 треугольника AB_1C_1, построить отрезок, равный стороне AC искомого треугольника. **361**. Указание. Сначала построить трапецию $AB_1C_1D_1$, в которой угол A равен данному углу, $\angle D_1 = \angle D$ и $AB_1 : B_1C_1 = 1 : 2$; затем на луче AD_1 отложить отрезок AD, равный данному, через точку D провести прямую, параллельную C_1D_1, и провести луч AC_1. **362**. Указание. Сначала построить трапецию $AB_1C_1D_1$, в которой угол A равен данному углу, $AB_1 : B_1C_1 : AD_1 = 1 : 1 : 2$. **363**. Указание. Построить трапецию, одно из оснований которой — данный отрезок, а другое лежит на данной прямой; а) воспользоваться задачей 3 п. 101; б) провести прямые через точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции и точки, в которых отрезки, соединяющие середину одного основания трапеции с вершинами другого, пересекают диагонали трапеции. **364**. Указание. Воспользоваться задачей 356. **365**. Указание. Сначала построить ромб, диагонали которого равны M_1N_1 и M_2N_2. **366**. Указание. Пусть $\angle COD$ — данный угол; построить отрезок CE так, чтобы: а) $CM = ME$; б) $CM : ME = P_1Q_1 : P_2Q_2$; затем через точку E провести прямую, параллельную прямой OC. **367**. Указание. Сначала доказать, что $\Delta APH \sim \Delta CPB$. **368**. б) Нет. Указание. а), б), в) Воспользоваться задачей 2 п. 107.

ГЛАВА VIII

369. Указание. Провести диаметр BC и рассмотреть подобные треугольники ADB и BAC. **370**. Указание. Пусть E — точка пересечения прямой BD и общей касательной; доказать, что $\angle CAD = 90^\circ - \angle ACE = 90^\circ - \angle CAE = \angle CAB$. **371**. а) Дуга окружности с диаметром MO без своих концов; б) окружность с диаметром MO; в) окружность с диаметром MO без точка M. **372**. Пусть CD — диаметр, перпендикулярный к диаметру AB; искомое множество точек состоит из двух окружностей с диаметрами OC и OD. **373**. $\frac{4S}{a}$. Указание. Учесть, что $AB \perp CD$ и $\Delta AO_1O_2 = \Delta BO_1O_2$. **374**. Прямоугольник или равнобедренная трапеция. **375**. Указание. Воспользоваться задачей 374 и свойством отрезков касательных, проведенных из одной точки (п. 36). **376**. Указание. Провести общую внутреннюю касательную. **377**. Указание. Воспользоваться свойством отрезков касательных, проведенных из одной точки (п. 36), и равенством отрезков внешних касательных (п. 110). **378**. Задача имеет решение, если радиус внутренней окружности не меньше половины радиуса внешней. Указание. Построить сначала окружность, касающуюся внешней окружности изнутри, радиус которой в четыре раза меньше радиуса внешней окружности. **379**. Указание. Построить сначала прямоугольный треугольник с катетами, равными диаметру и радиусу данной окружности. **380**. Указание. Сначала построить хорду, равную данному отрезку, а затем провести окружность, концентрическую с данной и касающуюся этой хорды. **381**. Указание. Пусть A и B — данные точки; сначала построить окружность, концентрическую с данной и касающуюся отрезка AB в его середине M, затем построить на ней точку N так, чтобы отрезок MN был равен половине данного отрезка, и, наконец, провести через точки A и B прямые, параллельные MN. **382**. Указание. Воспользоваться определением кривой постоянной ширины. **383**. Указание. Воспользоваться той же идеей, что и при построении треугольника Рело. **384**. Число n должно быть нечетным. **385**. Указание. Воспользоваться той же идеей, что и при построении треугольника Рело с «заглаженными» угловыми точками. **386**. Указание. Радиус первой дуги можно взять произвольным, а затем пристраивать к ней последовательно остальные дуги. **387**. Указание. Взять две точки данной кривой и рассмотреть две опорные прямые, перпендикулярные к прямой, их соединяющей. **388**. Указание. Воспользоваться задачей 387. **389**. Указание. Многократно прикладывая один край линейки к данной дуге так, чтобы он был опорной прямой, проводить прямые вдоль другого края линейки, а затем начертить «огибающую» к построенным прямым (рис. 553). **390**. Указание. Доказать, что $\angle DAB = \angle DBA$. **391**. Указание. Заметив, что точки B_1 и H лежат на окружности с диаметром AB, доказать, что $\angle ABC = \angle C_1B_1H$. **392**. Указание. Сначала доказать, что точки C и K лежат на окружности с диаметром PE и, следовательно, $\angle PCK = 60°$; аналогично доказать, что $\angle PBK =$

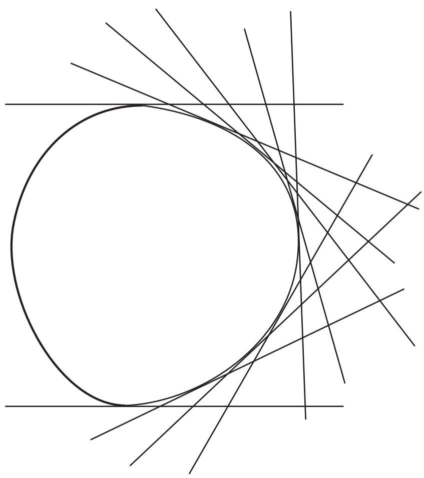


Рис. 553

$= 60°$. **393**. Указание. Сначала доказать, что точки P и C лежат на окружности с диаметром AB, поэтому величина угла APC постоянна. **394**. Указание. Рассмотреть четырехугольники $ABCM$ и $ABDP$ и воспользоваться свойством углов вписанного в окружность четырехугольника. **395**. Указание. Воспользоваться задачей 1 п. 112. **396**. Указание. Воспользоваться теоремой 2 п. 87 и задачей 395. **397**. $\dfrac{ab}{c}$. Указание. Воспользоваться задачей 1 п. 112. **398**. Указание. Воспользоваться теоремой об угле между пересекающимися хордами. **399**. Указание. Воспользоваться теоремой об угле между пересекающимися хордами. **400**. Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. **401**. Указание. Сначала доказать, что $\angle APB = \angle AOB$, а затем воспользоваться задачей 400. **402**. Указание. Найти сумму углов C и K четырехугольника $CDKE$. **403**. Указание. Воспользоваться характеристическим свойством вписанного в окружность четырехугольника. **404**. $\angle BAM = 146°$, $\angle BCM = 107°$. Указание. Сначала доказать, что точка M лежит на окружности с центром A радиуса AB. **405**. $\angle A = 60°$, $\angle B = 15°$, $\angle C = 105°$ или $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$, $\angle C = 15°$. Указание. Сначала доказать, что точки B, C, P и M лежат на одной окружности. **406**. Указание. Сначала доказать, что точки K, P, C и центр вписанной окружности лежат на одной окружности, а затем выразить угол BPC через углы треугольника ABC. **407**. Указание. Выразить угол между указанными биссектрисами через два противоположных угла четырехугольника. **408**. Указание. Воспользоваться задачей 407. **409**. Указание. Пусть D — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1 и BA_1C_1, отличная от C; сначала, используя равенства $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB + \angle A_1DB_1 + \angle A_1DC_1 + \angle B_1DC_1 = 540°$ и $\angle CAB + \angle B_1DC_1 = \angle ABC + \angle A_1DC_1 = 180°$, доказать, что $\angle BCA + \angle A_1DB_1 = 180°$. **410**. Указание. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые AD и BC — в точке E, K — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников BCP и CDE, отличная от C; доказать, что и остальные окружности проходят через точку K, поскольку, например (при соответствующем выборе обозначений B и D), $\angle DKP = \angle DKC + \angle CKP = \angle DEC + \angle ABE = \angle DAP$. **411**. Указание. Сначала доказать, что угол, смежный с углом BAD, равен углу APD, а угол APD равен углу ABC. **412**. Указание. Сначала доказать, что один из углов, образованных прямой AB и касательной, равен углу AMP. **413**. Указание. Пусть A — данная точка окружности, BC — хорда, AD — перпендикуляр к прямой BC, BE и CP — перпендикуляры к касательной в точке A; сначала доказать, что треугольники ABD и CAP, а также ADC и BEA, подобны. **414**. Указание. Воспользоваться задачей 5 п. 114. **415**. $\sqrt{2}$. Указание. Воспользоваться теоремой о квадрате касательной применительно к двум секущим, выходящим из точки A. **416**. Указание. Сначала доказать, что $\Delta ABC \sim \Delta DBA$, а затем воспользоваться теоремой о квадрате касательной. **417**. $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2-c^2}$. Указание. Доказать, что степень точки H относительно окружности с центром O радиуса OA равна CH^2, и применить теорему о медиане к треугольнику OCH. **418**. Указание. Пусть ABC — данный треугольник; воспользоваться теоремой Паскаля: рассмотреть вписанный шестиугольник $ABB_1CC_1A_1$, стороны AA_1, BB_1 и CC_1 неограниченно уменьшаются, и, в конце концов, точка A_1 «сливается» с точкой A, точка B_1 — с точкой B, а точка C_1 — с точкой C. **419**. Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 418. **420**. Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 418. **421**. rR. Указание. Воспользоваться формулой (3) п. 117. **422**. Указание. Воспользоваться формулой (3) п. 117. **423**. Указание. Продолжить стороны b и d до пересечения и воспользоваться формулой (3) п. 117. **424**. Четыре. Указание. Воспользоваться соображениями, высказанными в начале п. 117.

ГЛАВА IX

425. Указание. Сначала доказать, что $\overrightarrow{AM}_3 = \overrightarrow{BM}_2$ и $\overrightarrow{CM}_3 = \overrightarrow{BM}_1$. **426**. Указание. Доказать, что $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NA}$. **427**. Указание. Сначала доказать, что $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{MB}$. **428**. Указание. Провести через точку M прямую, параллельную AB, и воспользоваться результатом задачи 427 применительно к двум образовавшимся параллелограммам. **429**. Шесть, $\frac{p}{4}$. Указание. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — данный многоугольник, O — указанная точка; сначала доказать, что $\overrightarrow{OA}_7 = \overrightarrow{OA}_1$ и, следовательно, $n = 6$. **430**. Указание. Сначала доказать, что если точки M и N симметричны относительно середины отрезка AB, то $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. **431**. Указание. Прибавить к обеим частям равенства $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}$ вектор $-\vec{b}$. **432**. Указание. Воспользоваться неравенством треугольника. **433**. Указание. Доказать, что $\overrightarrow{CC}_1 = \overrightarrow{BB}_1 + \overrightarrow{DD}_1$, и воспользоваться задачей 432. **434**. Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$. **435**. Указание. Сначала доказать, что каждая из двух противоположных сторон нового восьмиугольника параллельна той диагонали исходного восьмиугольника, которая делит исходный многоугольник на два пятиугольника, и равна четверти этой диагонали; б) воспользоваться результатом задачи а). **436**. Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 435, а). **437**. Указание. а) Воспользоваться задачей 2 п. 122; б) воспользоваться теоремой Вариньона и задачей 437, а. **438**. Указание. а) Отметить на рисунке 414 равные углы;

б) воспользоваться задачей а), теоремой о медиане и тем, что согласно замечанию п. 122 коэффициент подобия указанных в п. а) треугольников равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **439**. Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{KS}$ через векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB}$. **440**. Указание. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_8$ — вершины данного восьмиугольника (A_1 — середина B_1B_2, A_2 — середина B_2B_3 и т. д.), O — произвольная точка плоскости; пользуясь формулой (1) п. 117, выразить векторы $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_8}$ через векторы $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB_2}$,...,$\overrightarrow{OB_8}$, а затем найти сумму $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{A_7A_8}$. **441**. Указание. Положить $k = \frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}$, если $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$, и $k = -\frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}$, если $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$. **442**. Указание. Отложить указанные векторы от общего начала, а затем воспользоваться правилом параллелограмма и задачей 441. **443**. $CP : PK = 12 : 13$. Указание. Пусть P — точка пересечения прямой MN и медианы CK; в соответствии с задачей 441 положить $\overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{MP} = y\overrightarrow{MN}$, выразить векторы $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, а затем воспользоваться равенством $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MP}$ и задачей 442. **444**. Указание. Используя равенства $\overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + q(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + r\overrightarrow{AD} = s(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB}$, выразить числа p, q, r, s через числа x и y, а затем выразить векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

ГЛАВА X

445. $\sqrt{10}$; $\{3; -1\}$. **446**. Указание. Найти координаты середин диагоналей AC и BD. **447**. $x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}$, $y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}$. **448**. $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$. Указание. Воспользоваться задачей 447. **449**. $\left(\frac{3\sqrt{3}+4}{5}; \frac{3\sqrt{3}+8}{5}\right)$. **450**. $\frac{3\sqrt{145}}{3}$. Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом в точке C и точками A и B на осях координат. **451**. $\frac{AF}{FE} = \frac{3}{2}$. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы вершины ромба лежали на осях координат. **452**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы две смежные стороны прямоугольника лежали на осях координат. **453**. $\frac{3\sqrt{6}-2}{4}$. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы вершины данного четырехугольника лежали на осях координат, и воспользоваться подобием треугольников AOD и OHC. **454**. Указание. Для доказательства утверждения, связанного со словом «тогда», взять в качестве точки M точку B; для доказательства утверждения, связанного со словами «только тогда», воспользоваться теоремой Стюарта. **455**. $\sqrt{\dfrac{a^2bc}{(b-c)^2}-bc}$. Указание. Воспользоваться теоремой о биссектрисе внешнего угла треугольника (п. 88) и теоремой Стюарта. **456**. Указание. Пусть O — точка пересечения диагоналей данного четырехугольника $ABCD$; применить теорему Стюарта к точкам A, B, C, O и воспользоваться подобием треугольников OAB и OCD, OAD и OBC. **457**. Указание. а) Трижды применяя теорему Стюарта, выразить b, c и d через a, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$; б) воспользоваться задачей 457, а. **458**. Указание. Рассмотреть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ и воспользоваться условием перпендикулярности двух векторов. **459**. Указание. Воспользоваться условием перпендикулярности двух векторов и формулой длины вектора. **460**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы точки A, B, D, K имели соответственно координаты $(0;0)$, $(0;a)$, $(a;0)$, $(x;y)$, и, пользуясь результатом задачи 459, доказать, что точка M имеет координаты $(y;-x)$. **461**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы точки B, A, D, C имели соответственно координаты $(0;0)$, $(a;0)$, $(0;-a)$, $(x;y)$; затем, пользуясь результатом задачи 459, доказать, что точка T имеет координаты $(-y;x)$, после чего найти координаты векторов $\overrightarrow{DT}$ и $\overrightarrow{BM}$. **462**. Указание. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм; ввести прямоугольную систему координат так, чтобы точки A, D, B, C имели соответственно координаты $(0;0)$, $(a;0)$, $(x;y)$, $(a+x;y)$, и, используя результат задачи 459 и формулу координат середины отрезка, найти координаты точек пересечения диагоналей квадратов. **463**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы вершины квадрата имели координаты $(0;0)$, $(a;0)$, $(0;a)$, $(a;a)$, а затем воспользоваться условием перпендикулярности двух векторов и формулой длины вектора. **464**. Не всегда. Указание. Пусть A, B, C, D — отмеченные точки, взятые последовательно; построить такой отрезок BE, что $BE=AC$ и $BE\perp AC$; если точка E не совпадет с точкой D, то воспользоваться задачей 463. **465**. $p_2(x-x_0)-p_1(y-y_0)=0$. Указание. Сначала доказать, что искомая прямая перпендикулярна к вектору $\overrightarrow{n}\{p_2;-p_1\}$. **466**. $(y_2-y_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(y-y_1)$. Указание. Воспользоваться задачей 465. **467**. а) $x+2y-5=0$; б) $y=2x$. **468**. $5x+3y-1=0$. Указание. Воспользоваться задачей 465. **469**. Указание. Воспользоваться тем, что векторы $\overrightarrow{n}_1\{k_1;-1\}$ и $\overrightarrow{n}_2\{k_2;-1\}$ перпендикулярны соответственно к первой и второй прямым. **470**. $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. **471**. $2y - x - 3 = 0$. **472**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы одна из осей координат совпала с прямой p. **473**. $AC = \frac{25}{4}$, $BC = \frac{3}{4}\sqrt{41}$. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы точки A и B лежали на одной из осей координат, а точка C — на другой. **474**. $(\frac{8}{5}; \frac{16}{5})$. Указание. Сначала написать уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно к прямой CD. **475**. $\sqrt{5}$; $(-1; 2)$. **476**. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$. **477**. $(x - \frac{8}{3})^2 + y^2 = \frac{85}{9}$. **478**. $(x + + \frac{1}{3})^2 + (y + \frac{5}{3})^2 = \frac{125}{9}$. **479**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы три вершины квадрата лежали на осях координат. **480**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом в центре данной окружности радиуса R так, чтобы хорда AB была параллельна оси координат (либо лежала на этой оси, если AB — диаметр окружности); затем воспользоваться задачей 448 и доказать, что для любой точки C, лежащей на данной окружности и не совпадающей с точками A и B, точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на окружности радиуса $\frac{R}{3}$. **481**. Касаются в точке $(4; -2)$. **482**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы одна из осей координат совпадала с прямой, а центр P окружности лежал на другой оси. **483**. а) $(x - 6)^2 + (y - - 7)^2 = 36$; б) $y = 0$ и $y = \frac{20}{21}x$. **484**. $(x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - - y_1) = 0$. Указание. Воспользоваться тем, что вектор, началом и концом которого являются точки $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$, перпендикулярен к искомой касательной. **485**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с центром одной окружности, а центр другой окружности лежал на оси абсцисс. **486**. а) Пересекаются в точках $M_1(1; 0)$ и $M_2(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5})$; б) касаются друг друга извне в точке $M(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5})$; в) первая окружность лежит внутри второй. **487**. а) Окружность радиуса $2AB$ с центром в точке B_1, симметричной точке B относительно точки A; б) окружность радиуса $\frac{4}{3}AB$, центр C которой лежит на отрезке AB, причем $AC = = \frac{2}{3}AB$; в) прямая, перпендикулярная к прямой AB и пересекающая ее в такой точке C, что $AC = \frac{1}{2}AB$, $BC = \frac{3}{2}AB$. Указание.

В каждом случае ввести прямоугольную систему координат с началом в точке A так, чтобы точка B лежала на оси координат, а затем вывести уравнение искомого множества точек. **488**. Окружность, точка или пустое множество при $\alpha+\beta\neq 0$; прямая, перпендикулярная к отрезку AB, при $\alpha+\beta=0$. Указание. См. указание к задаче 487. **489**. а) Окружность радиуса $\frac{\sqrt{11}}{3}AB$, центр D которой лежит на отрезке BC, причем $BD=\frac{1}{3}AB$; б) окружность радиуса $\frac{3}{2}AB$, центр D которой лежит на луче BC, причем $CD=\frac{3}{2}AB$ и точка C лежит между B и D. Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом в точке B так, чтобы точки A и C лежали на оси координат, а затем вывести уравнение искомого множества точек. **490**. а) Окружность, точка или пустое множество; б) прямая, вся плоскость или пустое множество. **491**. Радикальная ось двух данных окружностей, если они не имеют общих точек; радикальная ось без общей хорды, если окружности пересекаются; радикальная ось без точки касания, если окружности касаются друг друга. **492**. Указание. Сначала доказать, что степени точек A и B относительно окружности, проходящей через точки C, C_1 и C_2, равны. **493**. Указание. Центр искомой окружности — радикальный центр трех данных окружностей. **494**. Указание. Воспользоваться тем, что линия центров построенных окружностей содержит среднюю линию данного треугольника. **495**. Указание. Сначала, используя задачу 494, доказать, что радикальный центр окружностей с диаметрами AB, AA_1 и BB_1 совпадает с точкой пересечения высот треугольника. **496**. Указание. Воспользоваться тем, что линия центров вписанной и вневписанной окружностей содержит биссектрису треугольника. **497**. а) Указание. Сначала доказать, что проекции точек M_1, M_2, M_3 и M_4 на ось абсцисс образуют гармоническую четверку точек тогда и только тогда, когда $(x_1-x_3)(x_2-x_4)=$ $=(x_1-x_4)(x_3-x_2)$. **498**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы прямая AB была не параллельна оси ординат (например, совпадала с осью абсцисс), и воспользоваться задачей 497, а. **499**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат (например, с началом в центре окружности и осью абсцисс, совпадающей с прямой CD) и воспользоваться задачей 495, а.

ГЛАВА XI

500. $\dfrac{ac\sin\beta}{a\sin(\beta-\varphi)+c\sin\varphi}$. Указание. Воспользоваться тем, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABD и CBD. **501**. Указание. Провести ту из диагоналей четырехугольника, которая разделяет его на два треугольника. **502**. Указание. В случае выпуклого четырехугольника воспользоваться

зоваться тем, что его площадь равна сумме площадей четырех треугольников с общей вершиной. **503**. Указание. а) Воспользоваться задачей 502; б) воспользоваться задачей 501. **504**. Указание. Воспользоваться обобщенной теоремой синусов. **505**. Указание. а) Воспользоваться теоремой синусов; б) воспользоваться задачей 505, а и формулой (2) п. 139. **506**. $\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\beta$. Указание. Воспользоваться подобием треугольников ABC и A_1BC_1 и обобщенной теоремой синусов. **507**. Указание. Сначала доказать, что синусы углов ACB и AHB равны. **508**. Указание. Воспользоваться задачей 507. **509**. $\frac{m}{\sin(\varphi+\gamma)}\sin\frac{\gamma-\varphi}{2}$. Указание. Воспользоваться теоремой о вписанном угле и обобщенной теоремой синусов применительно к треугольнику CDM. **510**. Указание. Сначала найти отношение площадей треугольников OB_1C_1 и OBC, где O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. **511**. Указание. Пусть $\angle ACN = \alpha$, $\angle ACK = \beta$, $\angle CKN = \gamma$; используя равенство $KQ \cdot QN = (AC - CQ)(AC + CQ)$ и теорему синусов применительно к треугольникам CKQ и CNQ, выразить CQ через AC и углы α, β, γ, после чего обратить внимание на то, что углы α и β входят в полученное выражение равноправно. **512**. Указание. Сначала доказать, что $C_1B_1 = AM\sin A$, $C_1A_1 = BM\sin B$, $\angle B_1C_1M = \angle CAM$, $\angle A_1C_1M = \angle CBM$, затем продолжить отрезок AM до пересечения с окружностью в точке D и применить к треугольнику BDM теорему синусов, заметив, что $\angle D = \angle C$, $\angle MBD = \angle CBM + \angle CAM = \angle A_1C_1B_1$, написать формулу площади треугольника $A_1B_1C_1$ и учесть, что $AM \cdot MD = R^2 - d^2$. **513**. Указание. Воспользоваться задачами 512 и 510. **514**. Указание. Воспользоваться теоремой косинусов, обобщенной теоремой синусов и основным тригонометрическим тождеством. **515**. $45°$; $\sqrt{2}$. Указание. Воспользоваться теоремой косинусов и обобщенной теоремой синусов. **516**. Указание. Воспользоваться теоремой о медиане (п. 88) и теоремой косинусов. **517**. $1+\sqrt{6}$. Указание. Воспользоваться обобщенной теоремой синусов и теоремой косинусов. **518**. Указание. Воспользоваться теоремой косинусов и задачей 502. **519**. 7. Указание. Пользуясь тем, что треугольник AMT — равнобедренный, найти угол A, после чего воспользоваться теоремами синусов и косинусов. **520**. $60°$ и $60°$. Указание. Сначала, пользуясь теоремой косинусов, выразить стороны и диагонали трапеции через радиус вписанной окружности и один из острых углов, а затем применить обобщенную теорему синусов. **521**. $R\sqrt{\frac{5}{6}+\frac{5}{12}\sqrt{3}}$. Указание. Сначала доказать, что $\angle M = 15°$, а затем применить теорему косинусов к треугольнику DNQ. **522**. $\dfrac{ap\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{2a+p(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2})}$. Указание. Пусть r — искомый радиус; пользуясь свойством отрезков касательных, сначала доказать, что $AE = \dfrac{p}{2} + r\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $BE = \dfrac{p}{2} + a - r\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, а затем применить теорему косинусов к треугольнику ABE. **523**. $\dfrac{p^2-a^2}{4\sqrt{k^2-1}}$. Указание. Сначала доказать, что $AB + AC = p$, затем выразить синус и косинус угла A через k, а произведение $AB \cdot AC$ — через a, p и k. **524**. 10 и 6. Указание. Через вершину меньшего основания провести прямую, параллельную диагонали, и применить теорему косинусов к образовавшемуся треугольнику. **525**. $\dfrac{\sqrt{2}\,(2\sqrt{2}-1)}{6}$. Указание. Сначала доказать, что тупым может быть только угол B, затем, пользуясь теоремой о биссектрисе треугольника, выразить BC через AC, после чего применить теоремы косинусов и синусов к треугольнику ABC. **526**. $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$. Указание. Доказать, что $\angle BDC = 90^\circ + \angle BAC$, и применить теорему синусов к треугольникам ABC и BDC. **527**. $\sqrt{\dfrac{15}{2}}$; 6. Указание. Пусть $\angle ABC = 2\beta$; выразить углы AQP и PAQ через угол β и применить теорему синусов к треугольнику APQ. **528**. $\sqrt{5}$. Указание. Сначала, используя теорему о квадрате касательной, доказать, что $\Delta CDE \sim \Delta CAB$, и найти DE; затем применить обобщенную теорему синусов к треугольникам AEB и BDE, заметив, что $\angle AEB = \angle DBE + 45^\circ$. **529**. Указание. а) Воспользоваться обобщенной теоремой синусов и формулой синуса суммы углов; б) представить углы A и B в виде $A = \dfrac{A+B}{2} + \dfrac{A-B}{2}$, $B = \dfrac{A+B}{2} - \dfrac{A-B}{2}$. **530**. Указание. а) Воспользоваться теоремой косинусов; б) см. указание к задаче 529, б; в) воспользоваться задачами 529, б и 530, а. **531**. Указание. Воспользоваться двумя формулами площади треугольника и задачей 529, а. **532**. Указание. Воспользоваться задачей 531 и тем, что $p - a = r\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$. **533**. Указание. Воспользоваться задачей 532 и формулой (3) п. 117. **534**. Указание. Воспользоваться тем, что $A_1B_1 = AB\cos C$, $B_1C_1 = BC\cos A$, $C_1A_1 = CA\cos B$, а также задачами 529, а и 531. **535**. Указание. Сначала доказать, что $\cos A + \cos B - \cos(A+B) = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}$, а затем воспользоваться задачей 531. **536**. Указание. Сначала доказать, что $\sin^2 A + \sin^2 B +$

$+\sin^2(A+B) = 2(1-\cos A\cos B\cos(A+B))$. **537**. Указание. Пользуясь теоремой косинусов, доказать, что квадрат каждой стороны интересующего нас треугольника равен $\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\,S)$, где a, b и c — стороны исходного треугольника, S — его площадь. **538**. 90°. Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом в точке K так, чтобы сторона AD лежала на оси, и найти угол между векторами $\overrightarrow{BK}$ и $\overrightarrow{AC}$. **539**. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы стороны AD и AB лежали на осях, и записать равенство косинусов углов KAB и KAM в координатах. **540**. 7. Указание. Воспользоваться тем, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. **541**. $\frac{\sqrt{337}}{24}$. Указание. Выразить вектор $\overrightarrow{DK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. **542**. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. Указание. Сравнить координаты векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$, а затем найти скалярное произведение вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор, перпендикулярный к вектору $\overrightarrow{BC}$. **543**. $\sqrt{43}$. Указание. Выразить вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. **544**. $\frac{8}{3}$. Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BE}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. **545**. 4. Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. **546**. $4\sqrt{7}$. Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. **547**. Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. **548**. Указание. Воспользоваться равенством: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. **549**. Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$. **550**. Указание. См. указание к задаче 549 ($ABCD$ — данный четырехугольник). **551**. Указание. Воспользоваться задачей 550. **552**. h^2. Указание. Воспользоваться задачей 550. **553**. Указание. Найти скалярное произведение векторов, соответствующих диагоналям. **554**. Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{MA}$. **555**. Указание. а) Воспользоваться тем, что $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$; б) воспользоваться задачами 448 и 555, а. **556**. Указание. а) Доказать, что точка O, удовлетворяющая указанному равенству, лежит на биссектрисе угла A, и воспользоваться задачами 2 и 3 п. 107; б) воспользоваться задачей 556, а; в) воспользоваться задачей 556, б. **557**. Указание. Воспользоваться равенствами $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$ и задачей 556, в.

558. Указание. а) Воспользоваться равенствами $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$; б) воспользоваться задачей 456; в) воспользоваться задачами 558, а, б. **559**. Указание. Воспользоваться теоремой Лейбница, теоремой о медиане и задачей 536.

ГЛАВА XII

560. Указание. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — данный многоугольник, K и T — точки касания вписанной окружности с центром O и сторон A_1A_2 и A_3A_4 соответственно; сначала доказать, что $\Delta A_1KO = \Delta A_3TO$. **561**. Указание. Сначала доказать, что диагонали, соединяющие концы двух смежных сторон, равны, а затем воспользоваться пятым признаком равенства треугольников (п. 28). **562**. Указание. Найти углы треугольников, отсекаемых от данного пятиугольника указанными диагоналями. **563**. Указание. Воспользоваться задачей 562. **564**. Указание. Пусть $A_1A_2\ldots A_6$ — данный шестиугольник, $M_1, M_2, \ldots$ — середины сторон $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$, O — центр шестиугольника; доказать, что если, например, указанная точка лежит внутри треугольника A_1OM_1 или на его границе, то расстояния от нее до каждой из вершин A_3, A_4 и A_5 больше или равно 1. **565**. Указание. Найти углы полученного двенадцатиугольника и сравнить его стороны со сторонами данного шестиугольника. **566**. Указание. Сначала доказать, что сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон равна высоте этого треугольника. **567**. Указание. Сначала доказать, что основания указанных перпендикуляров лежат на окружности с диаметром OM, а точки пересечения данных диаметров с этой окружностью, отличные от O, делят ее на n дуг, каждая из которых равна $\dfrac{360^\circ}{n}$. **568**. Указание. Пусть точка M — середина отрезка A_1A_4; доказать, что треугольник AA_1M — равнобедренный, и, пользуясь этим, установить, что точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ACM. **569**. Указание. а) Разрезать шестиугольник по диагонали на две равные трапеции, а затем каждую из них — на четыре подобных ей равных трапеций; б) разрезать шестиугольник на три равных ромба, а затем каждый из них — на две равные трапеции. **570**. Указание. Соединить центр шестиугольника с серединами трех несмежных сторон. **571**. Указание. Учесть, что плиток, имеющих общую вершину, должно быть не менее трех. **572**. а) Да; б) да. Указание. а) Рассмотреть пятиугольник, составленный из квадрата и равностороннего треугольника; б) сначала доказать, что, любую часть плоскости можно полностью покрыть копиями правильного шестиугольника, а затем воспользоваться задачей 570. **573**. Указание. Сначала построить какой-нибудь правильный пятиугольник. **574**. $2\pi R(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1)$. Указание. Сначала найти радиус окружности, проходящей через центры данных окружностей. **575**. Указание.

Выразить радиус вписанной в фигуру $ABCD$ окружности через радиус дуги ABC. **576**. Указание. Пусть r — радиус вписанной окружности, R — радиус сектора и проведенной дуги; сначала доказать, что стороны треугольника, вершинами которого являются центры двух окружностей радиуса R и окружности радиуса r, равны R, $R-r$ и $R+r$, а высота, проведенная к стороне длины R, равна $\sqrt{(R-r)^2-r^2}$. **577**. $(1+\frac{P}{pR})180°$, $(1-\frac{P}{pR})180°$. Указание. Соединить вершины криволинейных треугольников отрезками и воспользоваться теоремой об угле между касательной и хордой. **578**. Указание. Воспользоваться задачей 2 п. 156. **579**. $2\sqrt{\frac{\pi S}{4\pi^2-1}}$. Указание. Воспользоваться формулами длины окружности и площади круга. **580**. $(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})R^2$. Указание. Воспользоваться формулой площади сектора. **581**. $\frac{a^2}{4}(6\sqrt{3}-6-\pi)$. Указание. Воспользоваться формулами площади круга и площади сектора. **582**. $(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$. Указание. Воспользоваться формулой площади сектора. **583**. $\pi\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$. Указание. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры данных окружностей, A, B и C — точки их касания; сначала доказать, что окружность, вписанная в треугольник $O_1O_2O_3$, касается его сторон в точках A, B и C. **584**. Указание. а) Воспользоваться тем, что точка пересечения стороны BC и окружности с диаметром AB (а также точка пересечения стороны BC и окружности с диаметром AC) является основанием высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A; б) воспользоваться задачей 584, а. **585**. $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi-3}$. Указание. Сначала доказать, что один из углов треугольника равен 30°. **586**. Указание. Сначала доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 являются серединами сторон треугольника ABC, а площадь криволинейного треугольника $A_1B_1C_1$ равна площади параллелограмма $A_1B_1C_1B$. **587**. Указание. Пусть O — центр данного круга; сначала доказать, что площадь сектора DMN равна площади сектора OPQ. **588**. Указание. Сначала построить окружность, ограничивающую круг площади, равной сумме площадей двух данных кругов.

ГЛАВА XIII

589. Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. **590**. Указание. а) Воспользоваться методом доказательства от противного; б) воспользоваться задачей 590, а; в) пользуясь результатом задачи 590, б, доказать, что рассматриваемое движение представляет собой результат последовательного выполнения двух осевых симметрий с осями, проходящими через данную неподвижную точку; г) воспользоваться результатами задач 590 а, б, в и идеей решения задачи 590, в. **591**. Указание. Рассмотреть центральную симметрию относительно середины одной из указанных диагоналей. **592**. Указание. Рассмотреть центральную симметрию относительно точки пересечения диагоналей одного из параллелограммов. **593**. Указание. Рассмотреть центральную симметрию относительно центра окружности. **594**. Указание. Рассмотреть дуги, симметричные дугам описанной окружности относительно сторон треугольника. **595**. а) Пусть N_1 — точка, симметричная N относительно прямой DA, N_2 — точка, симметричная N_1 относительно прямой CD, N_3 — точка, симметричная N_2 относительно прямой BC, N_4 — точка, симметричная N_3 относительно прямой AB; шар следует направить в точку N_4; б) не всегда. **596**. Указание. а) Построить квадрат со стороной pq и разбить его на равные прямоугольники со сторонами p и q; б) воспользоваться методом доказательства от противного. **597**. Параллельно диагонали стола. **598**. $2d$. Указание. Воспользоваться задачей 597. **599**. Указание. Рассмотреть параллельный перенос стороны AD на вектор $\overrightarrow{AM}$, а стороны BC — на вектор $\overrightarrow{BM}$. **600**. Указание. Рассмотреть треугольник A_1B_1N, полученный из треугольника ABM параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{MN}$, и воспользоваться тем, что в трапецию A_1B_1CD можно вписать окружность. **601**. Указание. Воспользоваться тем, что точки L_A и L_B получаются из точки K_C поворотом (последовательным выполнением двух осевых симметрий) вокруг центра вписанной окружности на один и тот же угол, но в разных направлениях. **602**. Указание. Формулировки и доказательства утверждений 1^0-3^0 переносятся практически без изменений. **603**. Указание. Рассмотреть поворот на $60°$ вокруг вершины B. **604**. Указание. Рассмотреть поворот на $90°$ вокруг центра квадрата. **605**. Указание. Рассмотреть поворот на $60°$ вокруг точки L, при котором точка B переходит в точку M, а точка N — в A. **606**. Указание. Рассмотреть поворот на $90°$ вокруг вершины A, при котором вершина B переходит в вершину D. **607**. Указание. а) Рассмотреть поворот на $90°$ вокруг вершины A, при котором точка A_1 переходит в B, а точка C — в A_2; б) воспользоваться теоремой Вариньона. **608**. Указание. Пользуясь результатом задачи 607, б, доказать, что один из указанных отрезков переходит в другой при повороте на $90°$ вокруг середины диагонали четырехугольника. **609**. Указание. Рассмотреть поворот на $90°$ вокруг вершины C, при котором точка A переходит в точку B, а точка A_1 — в точку B_1. **610**. Указание. Рассмотреть поворот на $90°$ вокруг центра вписанного квадрата. **611**. Указание. Рассмотреть поворот на $60°$ вокруг вершины A, при котором вершина F переходит в центр шестиугольника. **612**. Дуга окружности величиной в $60°$. Указание. Рассмотреть поворот на $60°$ вокруг вершины A, при котором точка B переходит в C. **613**. Два. Указание. Рассмотреть симметрию с центром в точке A. **614**. Указание. Рассмотреть симметрию с центром в точке M. **615**. Указание. Рассмотреть симметрию с центром в произвольной точке внутренней окружности. **616**. Указание. а) Рассмотреть симметрию с центром в данной точке; б) доказать, что прямая, построенная в задаче 616, а) — искомая. **617**. Указание. Воспользоваться задачей 616. **618**. Указание. Воспользоваться задачей 616. **619**. Указание. Рассмотреть симметрии относительно данных прямых. **620**. Указание. Рассмотреть симметрию относительно данной прямой. **621**. Указание. Рассмотреть симметрию относительно прямой, содержащей биссектрису угла при основании. **622**. Указание. Рассмотреть симметрию относительно прямой, содержащей биссектрису третьего угла. **623**. Указание. Рассмотреть точку, симметричную общей вершине двух данных сторон относительно серединного перпендикуляра к третьей стороне. **624**. Указание. Пусть ABC — искомый треугольник с данной стороной AB, $\angle A > \angle B$; рассмотреть точку C_1, симметричную вершине C относительно серединного перпендикуляра к стороне AB, затем точку B_1, симметричную вершине B относительно прямой CC_1, и выразить угол ACB_1 через данный угол. **625**. Указание. Пусть для определенности $AD > AB$; построить точку, симметричную вершине B относительно прямой AC. **626**. Указание. Пусть O — центр вписанной окружности; рассмотреть симметрию относительно прямой AO. **627**. Указание. Пусть AB — данный отрезок; рассмотреть данную окружность и ту, которая получается из нее параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$. **628**. Указание. Пусть AB — данный отрезок; рассмотреть данный треугольник и те два, которые получаются из него параллельным переносом на векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$. **629**. Указание. Перенести точку A на вектор $\overrightarrow{EF}$. **630**. Указание. Использовать параллельный перенос сторон четырехугольника. **631**. Указание. Пусть $ABCD$ — искомый параллелограмм; использовать параллельный перенос диагонали BD на вектор $\overrightarrow{BC}$. **632**. Указание. Рассмотреть поворот прямой a вокруг точки P на 60°. **633**. Указание. Рассмотреть поворот вокруг точки P на 45°. **634**. Указание. Принять какую-нибудь точку данных прямых за вершину искомого треугольника и рассмотреть поворот вокруг этой точки на 60°. **635**. Указание. Построить образ одной из окружностей при повороте вокруг данной точки на 90° и найти точки его пересечения с другой окружностью. **636**. Указание. Рассмотреть поворот вокруг вершины квадрата на 60°. **637**. Указание. Пусть O — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1; рассмотреть центральное подобие с центром O и коэффициентом $\frac{OA}{OA_1}$, взятым со знаком «$+$» или «$-$» в зависимости от того, лежат ли точки A и A_1 по одну или по разные стороны от точки O. **638**. $2S$. Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром в данной точке и воспользоваться теоремой Вариньона. **639**. $\frac{2}{9}S$. Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром в точке пересечения диагоналей данного четырехугольника и коэффициентом $\frac{3}{2}$ и воспользоваться теоремой Вариньона. **640**. Указание. а) Рассмотреть центральное подобие с центром A, переводящее точку C в C_2, и центральное подобие с центром B, переводящее точку C в C_1; б) воспользоваться задачей 640, а и теоремой Чевы. **641**. Указание. а) Доказать, что в результате последовательного выполнения поворота на $45°$ вокруг вершины A и центрального подобия с центром A и коэффициентом $\sqrt{2}$ отрезок O_BO_C переходит в тот же отрезок, что и AO_A в результате последовательного выполнения поворота на $45°$ вокруг вершины B и центрального подобия с центром B и коэффициентом $\sqrt{2}$; б) воспользоваться задачей 641, а). **642**. Указание. Пусть O — центр указанной окружности, K — точка ее касания с описанной окружностью; пользуясь тем, что четырехугольники $ABKC$ и $AMON$ центрально-подобны, рассмотреть центральное подобие с центром A, при котором точка K переходит в середину основания BC. **643**. Указание. Пусть d — прямая, содержащая диаметр третьей окружности, перпендикулярный линии центров первых двух, M_1 и C_1 — точки, симметричные M и C относительно d; воспользоваться тем, что вся фигура симметрична относительно d, а окружности, описанные около треугольников BC_1D и BM_1M, центрально-подобны с центром B. **644**. Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. **645**. Указание. а) Воспользоваться тем, что угол $A_1A_2A_3$ — прямой; б) воспользоваться тем, что точки B_2 и C_2 лежат на окружности с диаметром BC; в) воспользоваться тем, что отрезок A_3B_2 — медиана прямоугольного треугольника AB_2H. **646**. Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром H и коэффициентом 2. **647**. Указание. Воспользоваться задачей 645 (а и б). **648**. Указание. Воспользоваться задачами 645, а и 647. **649**. Указание. а) Пользуясь задачами 645, а и 647, доказать, что отрезки OA и A_1A_3 равны и параллельны; б) воспользоваться задачей 649, а. **650**. Указание. Доказать, что отрезки B_3C_1 и A_1O равны и параллельны. **651**. Указание. Рассмотреть треугольник $A_1A_2A_3$. **652**. Указание. Пользуясь задачей 649, б, доказать, что отрезки OO_1 и AH равны и параллельны. **653**. Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром G и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. **654**. Указание. Воспользоваться задачей 645, б. **655**. Указание. Пусть P — точка пересечения прямой MH и окружности, описанной около треугольника ABC; воспользоваться равенствами $MH \cdot HN = AH \cdot HA_2$ и $MH \cdot HP = AH \cdot 2HA_2$. **656**. Указание. Рассмотрев центральное подобие с центром C_1 и коэффициентом $\frac{1}{3}$, воспользоваться задачей 5 п. 163 и теоремой Наполеона. **657**. Воспользоваться тем, что в результате последовательного выполнения центрального подобия с центром O и коэффициентом $-\frac{1}{3}$ и центрального подобия с центром C_1 и коэффициентом 3 точка M переходит в C, а значит, точка C — в M. **658**. Указание. Воспользоваться задачей п. 167. **659**. Указание. Воспользоваться теоремой о прямой Симсона. **660**. Для точки, диаметрально противоположной точке C. **661**. Указание. Воспользоваться идеями решения задачи и доказательства теоремы п. 167. **662**. Указание. Воспользоваться задачей 661. **663**. Указание. Воспользоваться задачей 662. **664**. Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром B. **665**. Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром A. **666**. Указание. Воспользоваться результатом задачи 665. **667**. Указание. Сначала построить какую-нибудь окружность, касающуюся двух данных прямых. **668**. Указание. Провести прямую $a \parallel AB$ и построить две равные окружности, касающиеся друг друга и прямой a; затем провести касательные A_1C_1 и B_1C_1 к этим окружностям, параллельные прямым AC и BC (A_1 и B_1 — точки пересечения этих касательных и прямой a) и воспользоваться задачей 637. **669**. Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром в произвольной точке большей окружности и коэффициентом $\frac{1}{3}$. **670**. Указание. Воспользоваться определением инверсии. **671**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром в одной из данных точек. **672**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром в точке пересечения биссектрисы угла A с прямой, соединяющей указанные точки касания, при которой эти точки переходят одна в другую. **673**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром в одной из точек касания. **674**. Указание. Воспользоваться тем, что при инверсии с центром M указанная окружность переходит в центрально-подобную ей с центром M окружность. **675**. $180° - \alpha - \beta$. Указание. Рассмотреть инверсию с центром в общей точке трех окружностей. **676**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром A. **677**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром M. **678**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром M. **679**. Указание. Рассмотреть результат последовательного выполнения центрального подобия с центром M и коэффициентом 2 и инверсии с центром M, а затем воспользоваться теоремой о прямой Симсона. **680**. Указание. Рассмотреть результат последовательного выполнения инверсии с центром в точке пересечения проведенных прямых и центрального подобия с центром в этой же точке и коэффициентом $\frac{1}{2}$, а затем воспользоваться теоремой о прямой Симсона. **681**. Указание. Сначала доказать, что одна из окружностей с центром в точке пересечения линии центров и радикальной оси данных окружностей ортогональна к этим окружностям, а затем рассмотреть инверсию с центром в точке пересечения этой окружности и линии центров данных. **682**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром M. **683**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром M. **684**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром в одной из вершин четырехугольника, а затем воспользоваться задачей 670 и теоремой косинусов. **685**. Указание. На окружности, описанной около треугольника ABC, отметить такую точку D, что $\angle BAD = \angle BAC$, и воспользоваться теоремой Птолемея. **686**. p. Указание. Применить к четырехугольникам $ACDE$, $CEAB$ и $ACEF$ теорему Птолемея. **687**. Указание. К четырехугольнику $ABCD$ применить теорему Птолемея и учесть, что $CD = DB \geqslant \frac{1}{2}BC$. **688**. Указание. а) К четырехугольнику $ABCP$ применить теорему Птолемея; б) воспользоваться задачей 688, а и теоремой Пифагора; в) воспользоваться задачами 688, а, б. **689**. Указание. К четырехугольнику $APQR$ применить теорему Птолемея. **690**. Указание. Рассмотреть инверсию относительно вписанной окружности. **691**. Указание. Рассмотреть инверсию относительно вневписанной окружности. **692**. Указание. Рассмотреть инверсию относительно вписанной окружности и воспользоваться теоремой Вариньона. **693**. Указание. Воспользоваться формулой Эйлера. **694**. Указание. Воспользоваться двумя формулами площади треугольника и задачей 693. **695**. Указание. Пусть O и P — центры окружностей радиусов R и r; через произвольную точку окружности радиуса R и точку P провести хорду AD, отметить на этой окружности точки B и C так, чтобы $DB = DC = DP$, и воспользоваться формулой Эйлера применительно к треугольнику ABC. **696**. Указание. Воспользоваться задачами 601, 637 и 693. **697**. Указание. Пусть O_1 — центр вписанной в треугольник ABC окружности, A_1 — точка пересечения биссектрисы угла A с описанной около него окружностью; а) применить к четырехугольнику ABA_1C теорему Птолемея и воспользоваться задачей 4 п. 113; б) воспользоваться формулой Эйлера и задачей 697, а; в) рассмотреть треугольники A_1CD и AEO_1, где D — середина BC, E — точка касания вписанной окружности и стороны AB, и воспользоваться задачей 3 п. 113; г) воспользоваться задачами 697, а, б, и учесть, что радиус вписанной окружности в три раза меньше одной из высот треугольника. **698**. Указание. Воспользоваться задачей 681. **699**. Указание. Построить окружность, проходящую через точки A и B и ортогональную к данной. **700**. Штурманы кораблей должны как можно чаще вычерчивать на карте соответствующую окружность Аполлония и держать курс на ту точку этой окружности, которая находится в море и наиболее удалена от преследуемого корабля. **701**. Указание. Штурманам следует построить на карте две окружности Аполлония. **702**. Указание. Построить две окружности, одна из которых — окружность Аполлония, а другая проходит через точки, соответствующие начальному положению кораблей, и точку пересечения их начальных курсов; одна из точек пересечения этих окружностей — искомая. **703**. Указание. Построить точки, в которые переходят смежные с центром инверсии вершины квадрата, и воспользоваться основными свойствами инверсии. **704**. Указание. Построить точку, в которую переходит противоположная центру инверсии вершина квадрата, и воспользоваться основными свойствами инверсии. **705**. Указание. Построить точки, в которые переходят середины сторон треугольника, и воспользоваться первым основным свойством инверсии. **706**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром M радиуса AB. **707**. Указание. Рассмотреть инверсию с центром M радиуса AB. **708**. Указание. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — искомый четырехугольник, B_1, B_2, B_3, B_4 — данные точки; рассмотреть четыре инверсии с центрами B_1, B_2, B_3, B_4, каждая из которых переводит данную окружность в себя, и найти ту прямую, проходящую через точку A_1, которая в результате последовательного выполнения этих инверсий переходит в прямую, а значит, в себя. **709**. Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 708, взяв в качестве четвертой инверсии инверсию относительно данной окружности.

Наш блокнот

Страница	Вопрос	Ответ (стр.)
8	Есть ли параллельные прямые?	28
34	Есть ли квадрат?	117
41	Верно ли, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке?	144, 145
41	Верно ли, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке?	77
41	Верно ли, что три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке?	142
49	Существует ли какое-нибудь соотношение между тремя углами треугольника?	132
60	Имеет ли место признак равенства треугольников по трем углам?	132, 133
64	Имеет ли место признак равенства треугольников по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины?	205
93	Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный отрезок на произвольное число n равных частей?	136
93	Как доказать теорему Морлея?	334
94	Всегда ли можно построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам, если сумма этих углов меньше 180°?	117
148	Как построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведенным из одной вершины?	206
148	Как доказать, что центр тяжести произвольного неравностороннего треугольника лежит на отрезке, соединяющем ортоцентр с центром описанной окружности, и делит этот отрезок в отношении $2:1$, считая от ортоцентра?	389
148	Как доказать, что в произвольном неравностороннем треугольнике девять точек: середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, — лежат на одной окружности?	389

256	Верно ли, что если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC, причем $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$, $\angle A_1B_1C = \angle C_1B_1A$ и $\angle A_1C_1B = \angle B_1C_1A$, то точки A_1, B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC?	278
265	Как доказать теорему Барбье?	360
357	Верно ли, что при неограниченном увеличении числа сторон правильных многоугольников, вписанных в данную окружность, их периметры стремятся к длине этой окружности?	366

Именной указатель

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

БУТУЗОВ Валентин Федорович
КАДОМЦЕВ Сергей Борисович
ПОЗНЯК Эдуард Генрихович
ШЕСТАКОВ Сергей Алексеевич
ЮДИНА Ирина Игоревна

ПЛАНИМЕТРИЯ

Редактор *Е.Н. Глебова*
Оригинал-макет: *А.М. Садовский*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 09.01.2017. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 30,5. Уч.-изд. л. 33,5. Тираж 500 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17 Б
E-mail: porsova@fml.ru, sale@fml.ru
Сайт: http://www.fml.ru
Интернет-магазин: http://www.fmllib.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства
в АО «ИПК «Чувашия»,
428019, г. Чебоксары, пр-т И. Яковлева, 13

ISBN 978-5-9221-1743-2

9 785922 117432