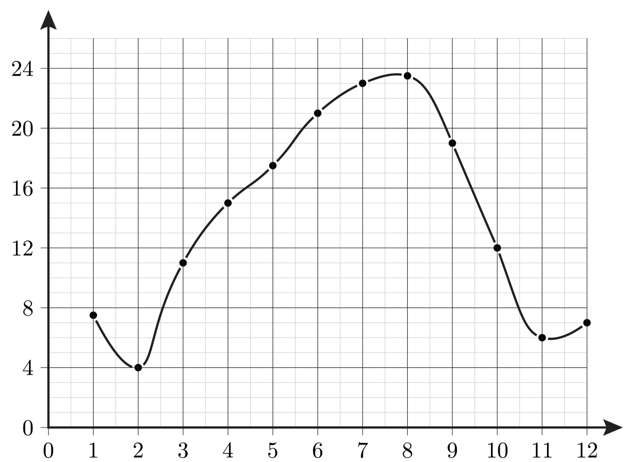
ЕГЭ по математике

Часть 1

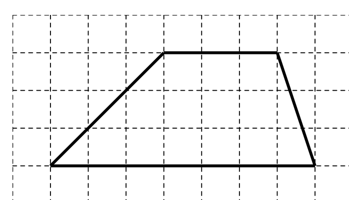
Задача 1. В среднем за день во время симпозиума расходуется 90 пакетиков чая. Симпозиум длится 4 дня. В пачке 50 пакетиков. Какого наименьшего количества пачек чая хватит на все дни симпозиума?
Ответ: 8.

Задача 2. На рисунке точками показана средняя температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1924 года. По горизонтали указаны номера месяцев; по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линией. Сколько месяцев средняя температура была больше 14 градусов Цельсия?



Ответ: 6.

Задача 3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.
Ответ: 6.

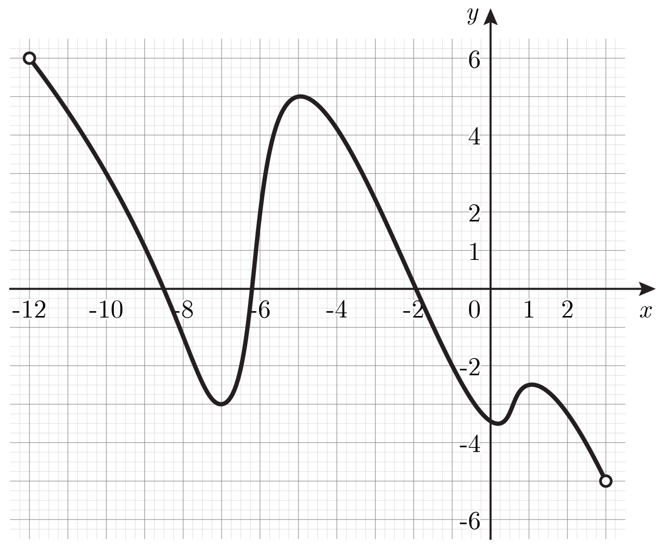


Задача 4. На тарелке 16 пирожков: 6 с картошкой, 6 с капустой, остальные с грибами. Аня наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с грибами.
Ответ: 0,25.

Задача 5. Найдите корень уравнения $\log_5(3x + 25) = 4$
Ответ: 200.

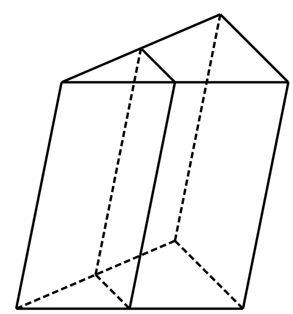
Задача 6. Точки M, N, K, расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как $2 : 4 : 6$. Найдите больший угол треугольника MNK. Ответ дайте в градусах.
Ответ: 90.

Задача 7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-12, 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -x - 7$ или совпадает с ней.



Ответ: 3.

Задача 8. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объём отсеченной треугольной призмы равен 12. Найдите объём первоначальной призмы.



Ответ: 48.

Задача 9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2^{1/3} \cdot 5^{3/7}\right)^{21}}{10^7}$

Ответ: 25.

Задача 10. Мотоцикл разгоняется на прямолинейном участке дороги с постоянным ускорением $a = 6000$ км/ч^2. Скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2al}$, где l — пройденный автомобилем путь в км. Найдите, сколько километров проедет мотоцикл к моменту, когда он разгонится до скорости 120 км/ч.

Ответ: 1,2.

Задача 11. Смешав 55-процентный и 92-процентный растворы кислоты и добавив 13 кг чистой воды, получили 51-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 13 кг воды добавили 13 кг 40-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 64-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 55-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 12.

Задача 12. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 6x + 6)e^{8-x}$.

Ответ: 2.

Часть 2

Задача 13. а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos x + \sqrt{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi{,}5\pi/2]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$2\sin x\cos x + \sqrt{3}\sin x - 2x\cos x - \sqrt{3} = 0.$$

Далее

$$2\cos x(\sin x - 1) + \sqrt{3}(\sin x - 1) = (\sin x - 1)\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$$

Отсюда $\sin x = 1$, тогда $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = -\sqrt{3}/2$, тогда $x = \pm 5\pi/6 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pi/2 + 2\pi k$, $x = \pm 5\pi/6 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

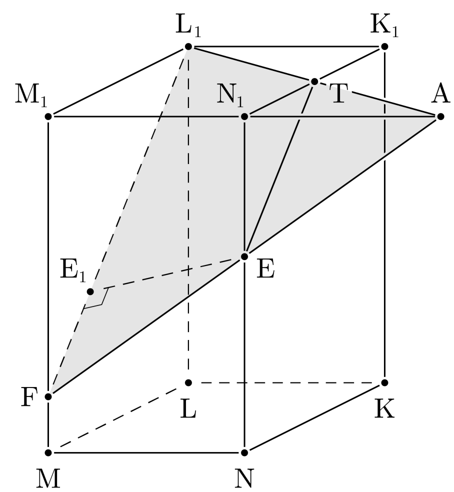
б) Данному отрезку принадлежат только корни $7\pi/6$ и $5\pi/2$.
Ответ: $7\pi/6$, $5\pi/2$.

Задача 14. В прямоугольном параллелепипеде $MNKLM_1N_1K_1L_1$ на ребре MM_1 взята точка F так, что $M_1F = 5FM$. Точка T — середина ребра N_1K_1. Известно, что $MN = 5\sqrt{3/2}$, $ML = 10{,}MM_1 = 12$.

а) Докажите, что плоскость FTL_1 делит ребро NN_1 в отношении $7:5$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью FTL_1.

в) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью FTM_1.



Решение.

а) Проведём отрезок FL_1 и в плоскости грани NN_1K_1K проведём через точку T прямую, параллельную FL_1. Эта прямая пересечёт ребро NN_1 в точке E. Точка E лежит в плоскости FTL_1. Треугольники FM_1L_1 и EN_1T подобны. Следовательно,

$$\frac{N_1E}{N_1T} = \frac{M_1F}{M_1L_1} = \frac{5MM_1}{6ML} = \frac{5\cdot 12}{6\cdot 10} = 1.$$

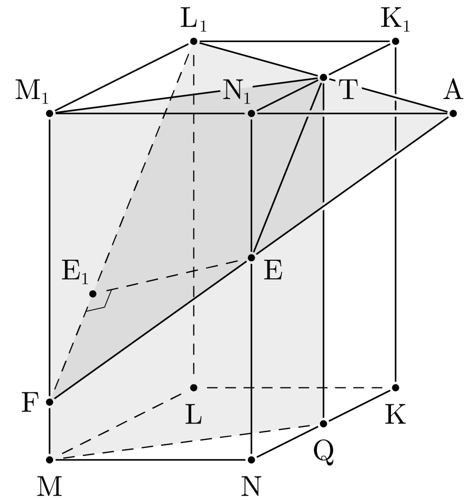
Таким образом $N_1E = N_1T = \dfrac{1}{2}N_1K_1$. Тогда $EN = 12 - 5 = 7$ и $NE : EN_1 = 7:5$.

б) Четырёхугольник FL_1TE — сечение параллелепипеда плоскостью FTL_1. Поскольку стороны ET и FL_1 параллельны, но не равны, четырёхугольник FL_1TE — трапеция. Продолжим боковые стороны FE и L_1T до пересечения в точке A. Точка T — середина N_1K_1, поэтому отрезок ET — средняя линия треугольника FL_1A. Из равенства треугольников M_1L_1A и M_1FA получаем $L_1A = FA$, откуда $L_1T = FE$. Значит, трапеция FL_1TE — равнобедренная.
Найдём стороны трапеции: $FL_1 = FM_1\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$, $ET = EN_1\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, $FE = L_1T = \sqrt{L_1K_1^2 + TK_1^2} = \sqrt{62{,}5}$.
Высота равнобедренной трапеции $EE_1 = \sqrt{FE^2 - FE_1^2} = \sqrt{62{,}5^2 - 2{,}5^2\cdot 2} = \sqrt{50}$.

Тогда

$$S_{FETL_1} = \sqrt{50}\frac{10\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{2} = 75.$$

Ответ: 75.



б) Прямоугольник M_1TQM — сечение параллелепипеда плоскостью FTM_1. По теореме Пифагора в треугольнике N_1TM_1:

$$TM_1 = \sqrt{\left(5\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2} = 5\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Далее $S_{MQTM_1} = 12 \cdot 5\sqrt{5/2} = 60\sqrt{5/2} = 30\sqrt{10}$.
Ответ: $60\sqrt{5/2}$.

Задача 15. Решите неравенство:

$$9\log_3(x^2+x-2) \leqslant 20 + \log_3\frac{(x-1)^9}{x+2}.$$

Решение. Найдём значения x, при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2+x-2>0 \\ \dfrac{(x-1)^9}{x+2} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+2)(x-1)>0 \\ \dfrac{(x-1)^9}{x+2} > 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>1 \end{array}\right.$$

Для таких x получаем:

$$9\log_3(x+2)(x-1) + \log_3\frac{x+2}{(x-1)^9} = \log_3\frac{(x+2)^9(x-1)^9(x+2)}{(x-1)^9} = \log_3(x+2)^{10}.$$

Тогда исходное неравенство примет вид

$$\log_3(x+2)^{10} \leqslant 20.$$

Учитывая, что неравенство определено на множестве $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$, имеем

$$5\log_3(x+2)^2 \leqslant 20 \iff (x+2)^2 \leqslant 3^4 \iff (x-7)(x+11) \leqslant 0 \iff x \in [-11,7].$$

Вспоминая ОДЗ, получаем $x \in [-11,-2)\cup(1,7]$.
Ответ: $[-11,-2)\cup(1,7]$.

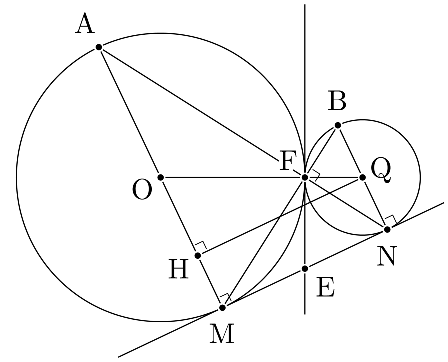
Задача 16. Касание двух окружностей происходит внешним образом в точке F. Центр первой окружности O, а второй Q. Радиусы окружностей 5 и 2 соответственно. Прямая MN касается обеих окружностей, первой в точке M, второй в N. Прямая NF пересекает первую окружность в точке A, прямая MF пересекает вторую окружность в точке B.

а) Докажите, что прямые MA и NM параллельны.

б) Найдите площадь треугольника MFN.

Решение.

а) Проведем общую касательную к окружностям через точку F. Обозначим точку пересечения этой касательной с прямой MN через E. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $ME = FE$ и $FE = NE$. В треугольнике MFN медиана равна половине стороны, к которой она проведена. Значит, треугольник MFN — прямоугольный. Угол MFA прямой, значит, он опирается на диаметр MA. Значит, $MA \perp MN$. Аналогично находим, что $NB \perp MN$. Тогда $MA \parallel NB$.



б) Треугольники MFA и NFB подобны, $MA : NB = AF : FN = 5 : 2 = 2{,}5$. Тогда $S_{MFA} = 6{,}25 S_{NFB}$. Треугольники MFA и MFN подобны, так как у них общая высота. Значит, $S_{MFA} : S_{MFN} = AF : FN = MA : NB$. Отсюда $S_{MFN} = 2{,}5 S_{NFB}$. Аналогично, $S_{BFA} = 2{,}5 S_{NFB}$. Площадь трапеции $MNBA$ равна $12{,}25 S_{NFB}$. Вычислим площадь трапеции $MNBA$. Проведём к MA перпендикуляр QH, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника QHO:

$$QH = \sqrt{OQ^2 - OH^2} = 2\sqrt{7^2 - 3^2} = 2\sqrt{10}$$

Тогда

$$S_{MNBA} = \frac{MA + NB}{2} \cdot MN = \frac{10 + 4}{2} \cdot 2\sqrt{10} = 14\sqrt{10}$$

Так как $S_{MNBA} = 12{,}25 S_{NFB}$, то $S_{NFB} = 8\sqrt{10}/7$ и $S_{MNF} = 20\sqrt{10}/7$.
Ответ: $20\sqrt{10}/7$

Задача 17. 25 августа 2019 года Павел взял в банке 3355000 рублей в кредит под 20% годовых. 25 августа каждого следующего года банк будет начислять проценты на оставшуюся сумму долга, затем Павел должен перевести в банк фиксированную сумму (также в рублях). Какой она должна быть, чтобы Павел выплатил долг за четыре года четырьмя равными платежами?
Решение. Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $x\%$. Тогда 25 августа каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01x$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - N$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - N = (Sb - N)b - N = Sb^2 - (1 + b)N.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)N = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1}N.$$

После четвертой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = Sb^4 - (1 + b + b^2 + b^3)N = Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1}N.$$

По условию четырьмя выплатами Павел должен погасить кредит полностью, поэтому

$$Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1}N = 0,$$

откуда

$$N = \frac{Sb^4(b-1)}{b^4-1}.$$

При $S = 3355000$ и $x = 20$ получаем $b = 6/5$ и

$$N = \frac{3355000 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5}}{\left(\frac{6}{5}\right)^4 - 1} = 1296000$$

Ответ: 1296000.

Задача 18. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 - |x^2 + 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = x^2 + 3x + 2 - |x^2 + 5x + 4|.$$

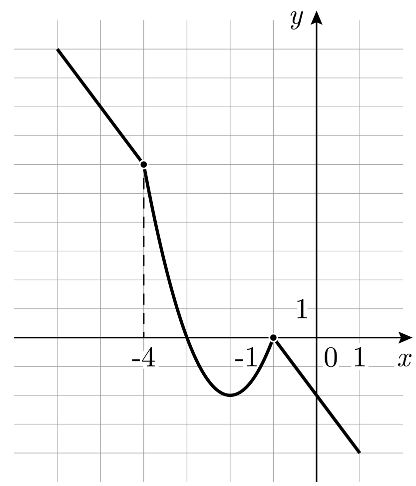


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трёх или более точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет более двух различных корней. Если $x \leqslant -4$ или $x \geqslant -1$, то $|x^2+5x+4| = x^2 + 5x + 4$ и $g(x) = -2x - 2$.

Если $-4 < x < -1$, то $|x^2 + 5x + 4| = -x^2 - 5x - 4$ и $g(x) = 2x^2 + 8x + 6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней, только если $g(-2) < a < g(-1)$, то есть при $-2 < a < 0$.

Ответ: $a \in (-2, 0)$

Задача 19. В коробке две упаковки книг: в первой упаковке книг меньше, чем во второй, но больше чем 46, а вместе книг меньше чем 111. Менеджеру необходимо поставить по несколько книг на полки так, что на каждой полке будет одинаковое число книг, больше 8, и при этом ни на какой полке не будет книг из двух разных упаковок.

а) Сколько книг в каждой упаковке? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли поставить книги из одной коробки заданным способом по 13 книг на одной полке?

в) Сколько в коробке может быть книг?

Решение. Пусть в первой упаковке k книг, во второй l книг. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 8, и при этом $47 \leqslant k < l$ и $k + l \leqslant 110$.

а) Например, 50 и 60 книг. Вместе 110, их можно поставить по 10 книг на полку так, что 5 полок будет заполнено книгами только из первой упаковки, а 6 полок только из второй.

б) Предположим, что общий делитель 13. Тогда, учитывая, что $47 \leqslant k < 55$, получаем, что $k = 52$. Наименьшее возможное значение l равно $52 + 13 = 65$, но вместе получается 117 книг, что противоречит условию.

в) Число $l - k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l, поэтому $l - k \geqslant 9$, $k - l \leqslant -9$, что вместе с условием $k + l \leqslant 110$ приводит к неравенству $2k \leqslant 110$, то есть $k \leqslant 50$. При этом $k + d \leqslant l \leqslant 110 - k$, где d — наименьший общий делитель, превосходящий 8.

- Если $k = 47$, то $d = 47$, $47 + 47 = 94 \leqslant 110 - 47 = 63$. Противоречие.
- Если $k = 48$, то $d = 12$, $l = 60$, а в упаковке 108 книг.
- Если $k = 49$, то $98 \leqslant l \leqslant 110 - 49 = 61$. Противоречие.
- Если $k = 50$, то $d = 10$, $l = 60$, а в упаковке 110 книг.