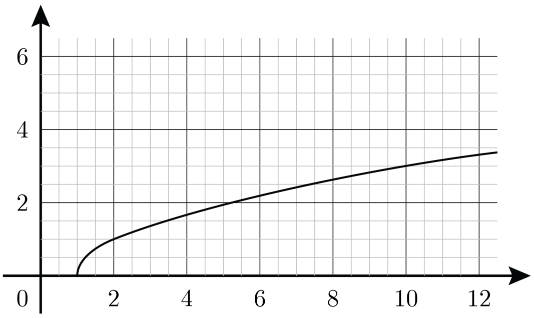
ЕГЭ по математике

Часть 1

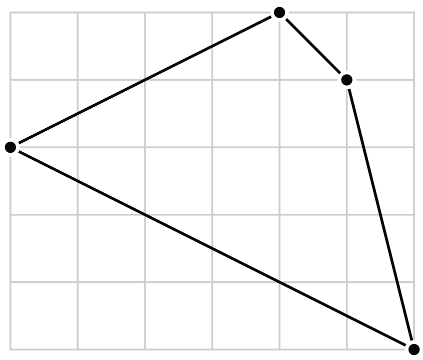
Задача 1. Школьник Петя может покупать единоразовый билет на автобус каждый день за 50 рублей, а может купить один безлимитный проездной на 30 дней за 2100 рублей. Сколько сэкономит Петя, купив проездной, если на автобусе он перемещается два раза в день?
Решение. На автобусе Петя путешествует дважды в день, поэтому в день он тратит 100 рублей в случае покупки единоразовых билетов. Следовательно, за 30 дней он потратит 3000 рублей на поездки. Поэтому при покупке безлимитного проездного он будет экономить $3000 - 2100 = 900$.
Ответ: 900 рублей.

Задача 2. На графике приведена зависимость высоты побега в сантиметрах некоторого растения от количества дней со дня посадки. На сколько сантиметров подросло растение со второго дня по 10-й день после посадки?



Решение. На второй день высота побега была равна 1 см, а на десятый день — 3 см. Изменение в росте побега за эти дни 2 см.
Ответ: 2 см.

Задача 3. Найдите площадь многоугольника на клеточной бумаге с размером клетки 1 см на 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение. Вычтем из площади S_1 всего прямоугольника площадь S_2 вне многоугольника:

$$S_1 = 5 \cdot 6 = 30,$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(2 \cdot 4 + 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6) + 1 = 16{,}5,$$

$$S_1 - S_2 = 30 - 16{,}5 = 13{,}5.$$

Ответ: 13,5.

Задача 4. На экзамене по математическому анализу студент Павел может получить оценку «хор» или «отл»с вероятностью 0,6. Кроме того, с вероятностью 0,1 он не сдаст экзамен, то есть получит оценку «неуд». С какой вероятностью Павел получит оценку «уд»? (считайте, что за экзамен можно получить только одну из четырех оценок, объявленных выше)
Решение. Общая вероятность равна 1. В силу независимости и полноты событий получения оценок «неуд», «уд», «хор» и «отл» можем заключить, что вероятность получить «уд» будет равна общей вероятности за вычетом вероятности получить все оставшиеся оценки

$$P = 1 - 0{,}1 - 0{,}6 = 0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

Задача 5. Найдите корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2x - 43}{5x}} = 3.$$

Решение. Поскольку правая часть уравнения положительна, то, возведя его в квадрат, получим равносильное уравнение:

$$\frac{2x-43}{5x}=9,$$

откуда

$$2x-43=45x,\ x\neq 0.$$

Окончательно $x=-1$.
Ответ: $x=-1$.

Задача 6. Четырехугольник $ABCD$ с площадью $S=80$ вписан в окружность. Известно, что сторона AB параллельна стороне CD, причем $AB=4$, а $CD=28$. Найдите, чему равна сторона BC.
Решение. Поскольку $AB \parallel CD$ и эти стороны не равны, этот четырехугольник — трапеция. Поскольку трапеция $ABCD$ вписанная, то она равнобедренная и $BC=DA$. Обозначим через h высоту трапеции и положим $BC=x$. По теореме Пифагора имеем

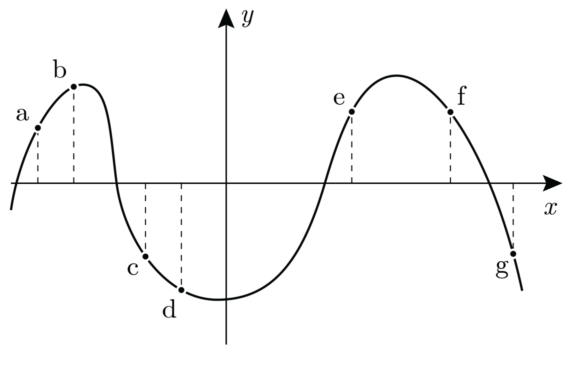
$$h=\sqrt{BC^2-\frac{1}{4}(CD-AB)^2}=\sqrt{x^2-144}.$$

По формуле площади трапеции

$$S=\frac{AB+CD}{2}\cdot h=16\cdot\sqrt{x^2-144}=80.$$

Решая это уравнение, получаем $x=13$.
Ответ: $x=13$.

Задача 7. На рисунке изображен график $y=f'(x)$. В скольки выделенных точках функция $f(x)$ возрастает?



Решение. Достаточно подсчитать количество точек, в которых функция на графике принимает отрицательное значение.
Ответ: 3.

Задача 8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ три попарно перпендикулярные стороны равны 2, 4, 4. Найдите AC_1.
Решение. По теореме Пифагора получаем $AC_1=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6$.
Ответ: 6.

Задача 9. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{8^2}}{\log_3 81}$.

Решение. $\dfrac{\sqrt[3]{8^2}}{\log_3 81}=\dfrac{\sqrt[3]{2^6}}{\log_3 3^4}=\frac{2^2}{4}=1$.
Ответ: 1.

Задача 10. Мальчик бросил камень массой $m=0{,}8$ кг с начальной скоростью $v_0=8$ м/с с возвышения в море. Известно, что в процессе полета скорость камня менялась по закону $v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$, где $g=10$ м/с^2 — ускорение свободного падения, t — время, прошедшее с начала полета. Вычислите кинетическую энергию $E=mv^2/2$ в кг $\cdot$ м^2/с^2 через 0,6 с после начала полета.
Решение. Найдём скорость камня через 0,6 с:

$$v=\sqrt{8^2+10^2\cdot 0{,}6^2}\ \text{м/с}=10\ \text{м/с}.$$

Подставим полученную скорость в выражение для кинетической энергии:

$$E = \frac{0{,}8 \cdot 10^2}{2}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = 40\ \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2.$$

Ответ: 40 кг $\cdot$ м^2/с^2.

Задача 11. Главный корпус МФТИ имеет два входа. Известно, что через первый вход в это здание за один час заходит 20 студентов. Если открыты оба входа, то за 1 час 15 минут в главный корпус заходит 100 студентов. Сколько студентов в час заходит в здание через второй вход?
Решение. За час через главный вход заходит 20 студентов, поэтому за 1 час и 15 минут через него же зайдет 25 студентов. Следовательно, через второй вход за это же время зайдет $100 - 25 = 75$ студентов. Это означает, что за минуту через второй вход в Главный корпус МФТИ заходит 60 человек.
Ответ: 60.

Задача 12. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 7}{x^2 + 2x + 2}$.
Решение. Наибольшее значение этой функции можно найти без вычисления производной, записав её в виде

$$y = 2 + \frac{3}{(x+1)^2 + 1}.$$

Достаточно минимизировать знаменатель полученной дроби. Его наименьшее значение достигается при $x = -1$. Окончательно получаем

$$y_{\max} = 2 + \frac{3}{0+1} = 5.$$

Ответ: 5.

Часть 2

Задача 13. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x - 1}{(\sin 2x - 1)^2} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0, \pi]$.

Решение.

а) Выпишем область допустимых значений:

$$\sin 2x \neq 1,\ \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Преобразовуем уравнение:

$$2\cos x \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\cos^2 x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos 2x = 0,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая ОДЗ, окончательно получаем

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 3\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Легко видеть, что в отрезок попадает только один корень уравнения $x = 3\pi/4$.
Ответ: $x = 3\pi/4$.

Задача 14. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник, $\angle BAC = 90°$. Известно, что сторона $BA = 3$, $BC = 5$ и что если SH есть перпендикуляр, опущенный из точки S на плоскость (ABC), то $\operatorname{tg}\angle HBA = 1/2$.

а) Пусть α — плоскость, содержащая точки B, S и H. В каком отношении эта плоскость делит отрезок AC?

б) Пусть $BS = 5$, а угол $\angle SBC = 60°$. Найдите площадь $\triangle SAC$.

Решение.

а) Продолжим BH до пересечения с AC. Обозначим точку пересечения K. Заметим, что из теоремы Пифагора $AC = 4$. Из условия следует, что $AK = AB\operatorname{tg}\angle HBA = 3/2$. Следовательно, $KC = 5/2$. Получаем
$$\frac{AK}{KC} = \frac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}.$$
Ответ: $AK : KC = 3 : 5$.

б) Из выражения выше получаем, что
$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}.$$
Следовательно, BK — биссектриса по признаку биссектрисы (**Замечание:** можно было и с помощью тригонометрии показать, что $\angle ABC = 2 \cdot \angle HBA$, откуда следует, что BK — биссектриса). Тогда получаем $\angle SBA = \angle SBC = 60°$. По теореме косинусов находим SA и SC: $SA = \sqrt{19}$, $SC = 5$. По формуле Герона находим искомую площадь треугольника: $S = 3\sqrt{31}/2$.
Ответ: $3\sqrt{31}/2$.

Задача 15. Решите неравенство
$$6 \cdot 4^{\frac{\sin 2x}{\cos x}} < 4^{\sin x} + 1.$$

Решение. Выпишем ОДЗ:
$$\cos x \neq 0 \quad \iff \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$
Преобразуем неравенство:
$$6 \cdot 4^{2\sin x} < 4^{\sin x} + 1.$$
Сделаем замену $t = 4^{\sin x}$, тогда
$$6t^2 < t + 1 \quad \iff \quad (2t-1)(3t+1) < 0.$$
С помощью метода интервалов получаем $t \in (-1/3, 1/2)$. Совершая обратную замену, получаем
$$4^{\sin x} \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \quad \iff \quad \sin x < -\frac{1}{2}.$$
Решая неравенство, имеем
$$x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$
Вспоминая про ОДЗ, убираем неподходящие точки.
Ответ: $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Задача 16. В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC с основанием AC продолжение высоты BH за точку H пересекает описанную окружность в точке E.

а) Докажите, что $BE > AC$.

б) Точка F выбрана на отрезке BE так, чтобы $EF = AC$. Пусть отношение площадей четырехугольников $AFCB$ и $AFCE$ равно $1 : 4$ и пусть $AC = 2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение.

а) Очевидно, что BE — диаметр окружности. Отрезок AC как хорда окружности не превосходит BE. Если бы равенство имело место, то $\triangle ABC$ оказался бы прямоугольным, что противоречит условию.

б) Для площадей четырёхугольников $ABCF$ и $AECF$ имеем $S_{ABCF} = AC \cdot BF/2$, а $S_{AECF} = AC \cdot FE/2$. Поэтому $BF : FE = 1 : 4$. Тогда $BE = \dfrac{5}{4}AC$. Из теоремы о произведении отрезков хорд $BH \cdot HE = 2$. Обозначим $BH = h$, тогда $h(BE - h) = 2$. Решая квадратное уравнение, находим $h = 2\sqrt{2}$ или $h = 1/\sqrt{2}$. Очевидно, найденные два корня соответствуют длинам BH и HE. Так как треугольник ABC остроугольный, отрезок $BH > HE$. Значит, $BH = 2\sqrt{2}$. Искомая площадь равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{AC^2}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 17. Ваня и Петя положили в банк под $r\%$ годовых 10 000 рублей и 8000 рублей соответственно. Через год, серьезно подумав и решив «догнать» Ваню по деньгам на вкладе, Петя добавил еще 1740 рублей. Однако еще через год оказалось, что у него все еще на 560 рублей меньше, чем у Вани. Чему равно r?

Решение. Обозначим $m = 1 + \dfrac{r}{100}$. Условие можно переписать в виде

$$10m^2 = (8m + 1{,}74m)m + 0{,}56.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно m, находим $m = 1{,}12$, откуда $r = 12\%$.
Ответ: $r = 12\%$.

Задача 18. Найдите значение a параметра, при которых у следующей системы ровно 2 решения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ (x-5)^2 + (y-5)^2 = a^2, \\ x + y = \frac{3}{5}a. \end{cases}$$

Решение. Раскроем скобки во втором уравнении и воспользуемся первым уравнением, получим

$$-10(x + y) + 55 = a^2.$$

Подставим в полученное уравнение $x + y$ из третьего уравнения системы, тогда

$$a^2 + 6a - 55 = 0.$$

Корни этого уравнения $a = 5$ и $a = -11$. Итак, система имеет решение лишь при $a = 5$ или $a = -11$.

Система задаёт множество точек (x,y) на плоскости, координаты которых удовлетворяют каждому уравнению. Заметим, что первое уравнение задает окружность, второе — окружность с радиусом, зависящим от параметра. Из геометрических соображений можно найти значения параметра a, когда эти две окружности пересекаются:

$$a \in \left[-\sqrt{5} - 5\sqrt{2}, \sqrt{5} - 5\sqrt{2}\right] \cup \left[5\sqrt{2} - \sqrt{5}, \sqrt{5} + 5\sqrt{2}\right].$$

Следовательно, $a > -11$, и подходит только только $a = 5$. Остаётся проверить, что при этом значении параметра требуемое выполнено. Действительно, при $a = 5$ подходят только две точки: (1,2) и (2,1).
Ответ: $a = 5$.

Задача 19. В игру «Сиракузская пятерочка» играют два человека. В начале игры на доске написано натуральное число x. Игроки поочередно могут либо увеличить число в три раза и прибавить единицу, либо уменьшить его вдвое (только в случае, если число четное). Проигрывает тот игрок, который получил число, кратное 5.

а) Докажите, что независимо от ходов каждого игрока, если изначальное число $x = 18$, то исход игры предрешен, то есть всегда одинаков.
б) Докажите, что аналогичное утверждение можно сказать про игру, в которой $x = 5k + 4$, где k — некоторое целое число.

Решение.

а) Если первый игрок увеличит число в 3 раза и прибавит единицу, то получим 55, то есть он тогда проиграет. Следовательно, первый игрок обязательно должен будет разделить число на 2 и получит 9. Второму игроку не остается ничего, кроме как увеличить число в 3 раза и прибавить 1. Получится 28. Аналогичными рассуждениями первый игрок обязательно уменьшит число в два раза ($28 : 2 = 14$). И в этот момент второй игрок должен увеличить число в три раза и добавить единицу ($14 \cdot 3 + 1 = 43$), поскольку получится нечетное число, и тогда первый игрок обязан будет поступить так же. Однако он получит

$$43 \cdot 3 + 1 = 130 \vdots 5.$$

То есть второй игрок выигрывает.

б) Рассмотрим три подмножества целых чисел, которые дают остаток $0, 3, 4$ при делении на 5. Заметим, что если число $5k + 4, k \in \mathbb{Z}$ увеличить в три раза и прибавить единицу, то мы получим число вида $5m+3, m \in \mathbb{Z}$. Аналогично из числа, дающего остаток 3 при делении на 5, этой операцией мы получим число, делящееся на 5, то есть так игрок не может действовать. Однако другой операцией он будет получать из числа вида $5m + 3, m \in \mathbb{Z}$ число вида $5t + 4, t \in \mathbb{Z}$. Следовательно, стратегия для первого игрока выглядит просто: он должен всегда увеличивать число в три раза и прибавлять единицу. Тогда в какой-то момент второй игрок не сможет делить на два, так как получившееся число будет нечетным. Покажем, почему через какое-то количество операций после очередного хода первого игрока мы обязательно получим нечетное число. Для этого обозначим первоначальное число x_0. Допустим, что перед вторым ходом первого игрока будет число x_1. Между этими числами есть связь, которую можно в общем виде представить следующим образом:

$$x_n = \frac{3x_{n-1} + 1}{2} = x_{n-1} + \frac{x_{n-1} + 1}{2},$$

где x_n, x_{n-1} — это числа перед n-м и $(n-1)$-м соответственно ходами первого игрока. Замечаем, что количество единиц в младших разрядах до первого нуля есть так называемый полуинвариант: если представить число n в виде

$$x_{n-1} = m \cdot 2^{k+1} + 2^k - 1, m \in \mathbb{N}_0,$$

то наш полуинвариант этого числа равен k, а у x_n этот полуинвариант будет равен $k-1$. Покажем это

$$x_n = x_{n-1} + \frac{x_{n-1}+1}{2} = m \cdot 2^{k+1} + 2^k - 1 + (2^k + 2^{k-1}) =$$
$$= (2m+2) \cdot 2^k + 2^{k-1} - 1, 2m+2 \in \mathbb{N}_0.$$

Следовательно, каждый раз полуинвариант уменьшается, а поэтому в какой-то момент станет равен нулю, что означает, что x_s будет четным. Но тогда $3x_s+1$ будет нечетным числом и второму игроку не остается ничего, кроме как увеличить и это число в 3 раза и прибавить единицу. Но он тогда проигрывает.