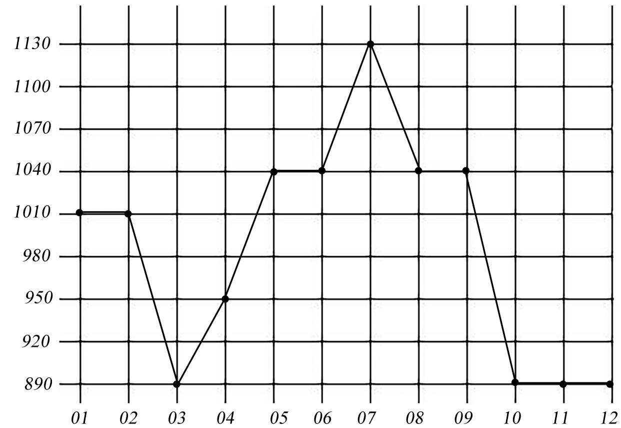
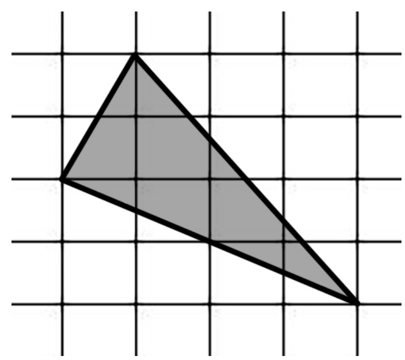
Задача 1. Семья из трех человек тратит в среднем 20 кубометров горячей и холодной воды в месяц. Во время самоизоляции было принято решение вымыть балкон, на что было потрачено 2,5 кубометра сверх среднемесячного потребления. На сколько процентов увеличилось потребление?
Ответ: 12,5



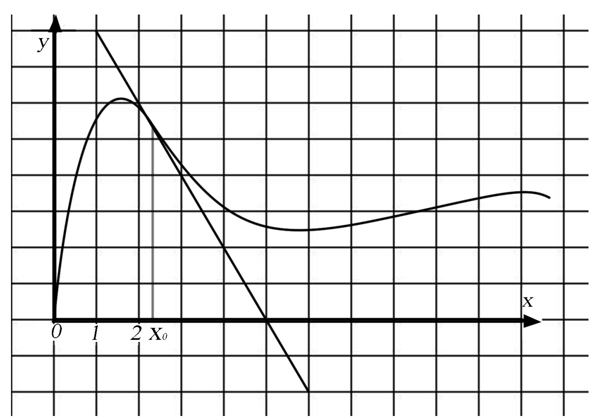
Задача 2. На рисунке жирными точками показана средняя цена на рыбу в г. Москва за 2019 год. По горизонтали указаны месяцы; по вертикали — средняя цена за соответствующий месяц, в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько месяцев в году средняя цена на рыбу превышала 1000 рублей.
Ответ: 7



Задача 3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.
Ответ: 5

Задача 4. Таня собирает браслет из 7 черных бусинок и 2 белых. Найдите вероятность того, что в собранном браслете две белые бусинки не окажутся рядом.
Ответ: 0,75

Задача 5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} = 32$.
Ответ: 0,5



Задача 6. Прямоугольный треугольник с катетами, равными 12 и 5, вписан в окружность. Найдите радиус этой окружности.
Ответ: 5

Задача 7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.
Ответ: -2

Задача 8. Периметр правильной треугольной призмы, все ребра которой равны, равен $18\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.
Ответ: 18

Задача 9. Для описания длины волн в спектрах излучения серии Бальмера используют частный случай формулы Ридберга:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где λ — длина волны, $R \approx 11 \cdot 10^4$ см$^{-1}$ — постоянная Ридберга, n — главное квантовое число исходного уровня — натуральное число, большее или равное 3. Найдите главное квантовое число, если $\lambda = 484{,}85$ нм.
Ответ: 4

Задача 10. Найдите значение выражения $0{,}25 \log_{1/25} 125$.

Ответ: $-0{,}375$

Задача 11. Первую половину пути автомобиль проехал со средней скоростью $v_1 = 18$ км/ч, а вторую — со средней скоростью $v_2 = 72$ км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля на всем пути.
Ответ: 28,8 км/ч

Задача 12. Найдите точку максимума функции $\dfrac{x}{(x+\frac{1}{8})^2}$ на отрезке $[0;3]$.

Ответ: 0,125

Задача 13. а) Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi/2; 4\pi]$.

Решение.

а) Поскольку $1 + \frac{\sin 2x}{2} > 0$, из уравнения имеем $\sin x + \cos x > 0$. Возведём уравнение в квадрат, получим

$$1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x + \frac{\sin^2 2x}{4}.$$

Поскольку $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, упрощая, получаем $\sin 2x = 0$. Значит, $x = \pi/2 + \pi k$ или $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Однако при нечётных k имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -1 + 0 < 0 \quad \text{и} \quad \sin(\pi k) + \cos(\pi k) = 0 - 1 < 0.$$

Таким образом, подходят только $x = \pi/2 + 2\pi k$ и $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pi/2 + 2\pi k$, $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Из корней уравнения в отрезке $[\pi/2; 4\pi]$ лежат только $\pi/2$, $5\pi/2$ и 4π.
Ответ: $\pi/2$, $5\pi/2$ и 4π.

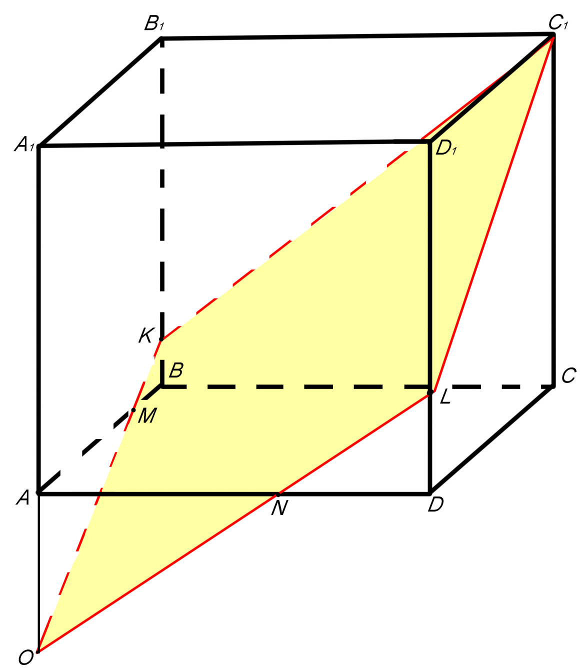
Задача 14. На сторонах BB_1 и DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра 4 взяты точки K и L такие, что $BK = DL = 1$. Плоскость C_1KL пересекает прямую A_1A в точке O.

а) Найдите AO.

б) Найдите площадь четырёхугольника C_1LOK.

Решение.

а) Построим сечение плоскостью C_1KL. Эта плоскость пересекает плоскость A_1D_1D по прямой, параллельной C_1K. Пусть это прямая LN, где N — точка на стороне AD. Аналогично, отметим точку M на AB такую, что $KM \parallel C_1L$. Треугольники DNL и B_1C_1K образованы тремя парами параллельных прямых, значит, они подобны. Тогда $ND = B_1C_1 \cdot LD/B_1K = 4/3$. Аналогично, треугольники C_1D_1L и MBK подобны, и $BM = 4/3$. Тогда $NA = MA = 8/3$. Пусть прямая LN пересекает AA_1 в точке O_1. Тогда треугольники LDN и O_1AN подобны по двум углам и $AO_1 = AN \cdot LD/ND = 2$. Аналогично, если мы продлим KM до пересечения с A_1A в точке O_2, получим $AO_2 = 2$. Значит, точки O_1 и O_2 совпадают с O, причем OKC_1L — параллелограмм.
Ответ: $AO = 2$.



б) По теореме Пифагора для треугольников C_1D_1L и C_1B_1K имеем $C_1K = C_1L = 5$. Поскольку $KLDB$ — параллелограмм, имеем

$$KL = BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 4\sqrt{2}.$$

Тогда высота в треугольнике C_1KL, опущенная из C_1, равна $\sqrt{C_1K^2 - (KL/2)^2} = \sqrt{17}$, а искомая площадь равна $\sqrt{17} \cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{34}$.
Ответ: $4\sqrt{34}$

Задача 15. Решите неравенство

$$\log_{x+3}(4^x-1)<\log_{x+3}(2^x+1)+\log_{x+3}(2^{x+1}-3).$$

Решение. Выпишем ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ 4^x-1>0 \\ 2^x+1>0 \\ 2^{x+1}-3>0 \\ x+3\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x>\log_2 3-1\in(0;1).$$

Так как $4^x-1=(2^x+1)(2^x-1)$, неравенство эквивалентно

$$\log_{x+3}(2^x+1)+\log_{x+3}(2^x-1)<\log_{x+3}(2^x+1)+\log_{x+3}(2^{x+1}-3).$$

Упрощая, получаем

$$\log_{x+3}(2^x-1)<\log_{x+3}(2^{x+1}-3).$$

Отсюда следует, что

$$(x+3-1)(2^{x+1}-3-2^x+1)>0.$$

Последнее неравенство эквивалентно

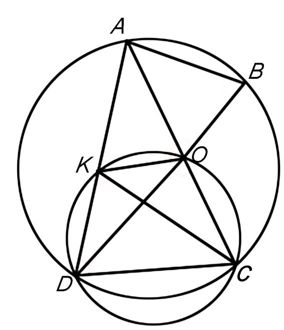
$$(x+2)(x-1)>0.$$

С учетом ОДЗ получаем
Ответ: $x\in(1;+\infty)$.

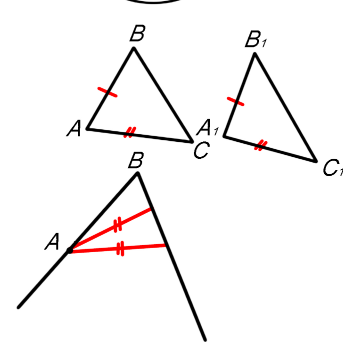
Задача 16. В остроугольном треугольнике ACD $AD=7, AC=6$. Точка K на стороне AD выбрана так, что $AK=5$. Описанная окружность треугольника KCD пересекает отрезок AC в точке O. Прямая DO пересекает описанную окружность треугольника ACD в точке B. Оказалось, что $AK=AB$.

а) Докажите, что треугольники AKO и ABO равны.
б) Докажите, что $KC=CD$.
в) Найдите KC.

Решение.



а) Четырехугольник $KOCD$ вписанный, поэтому $\angle DCA=\angle OKA$. Четырехугольник $ABCD$ также вписаннный, поэтому $\angle DCA = \angle DBA$. Рассмотрим треугольники AKO и ABO. У них есть пара равных сторон и равный угол, но не между этими сторонами. Покажем, что треугольники всё равно равны.
Лемма. Пусть два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle B = \angle B_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$. Тогда либо треугольники равны, либо $\angle C+\angle C_1=180°$.



Доказательство. Действительно, приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы точки A, A_1 и B, B_1 совпали соответственно, а точка C_1 лежала в той же полуплоскости, что и C, относительно прямой AB. Поскольку $\angle B=\angle B_1$, точка C_1 попадет на прямую BC. Если она совпала с C, то треугольники равны. Если нет, то треугольник ACC_1 равнобедренный. Значит, $\angle ACB+\angle AC_1B = 180°$. □
Применим лемму. Так как точки K и D различны, имеем $\angle AOK + \angle AOB \neq 180°$. По доказанной лемме треугольники AKO и ABO равны.

б) Так как четырёхугольник $KOCD$ вписанный, имеем $\angle ADC = \angle KOA$ и $\angle KOA = \angle AOB = \angle DOC = \angle DKC$. Значит, треугольник KCD равнобедренный. Отсюда $KC = DC$.

в) Рассмотрим треугольники DOC и ADC. Они подобны по двум углам, отсюда $CD^2 = CO \cdot AC$. Рассмотрим треугольники AOK и ADC. Они также подобны по двум углам, поэтому $AO = AD \cdot AK/AC = 35/6$. Тогда $KC = CD = \sqrt{(AC - AO) \cdot AC} = 1$.
Ответ: $KC = 1$.

Задача 17. Гражданин Ш. имеет начальный капитал 1000 у.е.. Он может вложить свой капитал в акции или облигации на 4 года. Если гражданин Ш. вкладывается в облигации, его капитал каждый год растет на ρ процентов. Если же гражданин Ш. купит акции, его капитал каждый год либо будет расти на u процентов, либо уменьшаться на d процентов (равновероятно). Гражданин Ш. решил посчитать, что ему выгоднее купить. Он вычислил, каким будет его капитал через 4 года при вложении в облигации и сколько в среднем он получит от покупки акций. Получив конечные суммы, гражданин Ш. выбрал вариант с бо́льшим доходом. Какой вариант выбрал гражданин Ш., если $\rho = 5\%$, $u = 30\%$, $d = 10\%$? Ответ поясните.

Решение. Пусть $a = \frac{100\%+\rho}{100\%} = 1{,}05$, $b = \frac{100\%+u}{100\%} = 1{,}3$, $c = \frac{100\%-d}{100\%} = 0{,}9$. Тогда, купив облигации, через четыре года гражданин Ш. будет иметь капитал в $1000a^4 = 1000 \cdot 1{,}05^4$ у.е., а купив акции — в $1000b^k c^{4-k}$ у.е., где k — число лет, в течение которых стоимость акций увеличивалась.

Найдём средний капитал гражданина Ш. через 4 года при покупке акций. В качестве исходов будем рассматривать последовательности из четырёх лет, в течение которых акции либо росли, либо падали в цене. Если $k = 4$ или $k = 0$, то акции все четыре года либо только росли, либо только падали. Исходов, которых соответствуют этим значениям k, по одному. При $k = 3$ был ровно один год, когда стоимость акции уменьшилась на d процентов. Таких исходов возможно четыре. Аналогично четыре исхода при $k = 1$. Если $k = 2$, два года акции росли и два падали. Этому значению k соответствует шесть исходов.

$$1000\frac{(b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4)}{1 + 4 + 6 + 4 + 1} = 1000\frac{(b + c)^4}{16} = 1000 \cdot 1{,}1^4.$$

Таким образом, средний доход от покупки акций больше, чем от покупки облигаций.
Ответ: гражданин Ш. выбрал покупку акций.

Задача 18. Найдите все значения параметра a, при котором система

$$\begin{cases} a((x-1)^2 + (y+1)^2 - 2) = -4y \\ y = x(x-2) \end{cases}$$

имеет ровно 3 решения.

Решение. Будем решать графически. Рассмотрим два случая.

При $a = 0$ первое уравнение имеет вид $y = 0$. Прямая, задаваемая этим уравнением, пересекается с параболой $y = x(x-2)$ в двух точках.

При $a \neq 0$, преобразуя первое уравнение системы, получим

$$0 = \big((x-1)^2 + (y+1)^2 - 2\big) + \frac{4y}{a} = (x-1)^2 + \left(y + \frac{a+2}{a}\right)^2 - 1 - \left(\frac{a+2}{a}\right)^2.$$

Это уравнение задаёт окружность. Заметим, что эта окружность и парабола $y = x(x-2)$ проходят через точки $(0,0)$ и $(2,0)$. Заметим также, что окружность и парабола симметричны относительно прямой $x = 1$. Тогда, если они пересекаются в некоторой точке, они пересекаются и в точке, симметричной ей относительно прямой $x = 1$. Из условия следует, что парабола и окружность должны пересечься в трёх точках, поэтому одно из решений системы необходимо лежит на прямой $x = 1$. Из второго уравнения следует, что тогда $y = -1$. Подставляя эти значения в систему, найдём $a = -2$.

При $a = -2$ первое уравнение системы имеет вид $(x-1)^2+y^2 = 1$, и окружность, задаваемая этим уравнением, пересекает параболу $y = x(x-2)$ в точках $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,0)$.

Задача 19. На столе лежат 23 карточки. Алиса записывает на каждой карточке по одному натуральному числу, не большему 100, не повторяясь. После чего Богдан записывает числа Алисы с другой стороны карточек в произвольном порядке (на каждой карточке будет записано по одному числу с двух сторон). Затем числа на одной карточке складываются и такие суммы перемножаются. Может ли Алиса подобрать 23 числа так, чтобы вне зависимости от действий Богдана полученное произведение

а) делилось на 2^{46}?
б) делилось на 2^{47}?
в) Смогут ли Алиса и Богдан, действуя сообща, получить нечётное произведение?

Решение.

а) Достаточно записать на карточках числа, кратные 4. Например: $4, 8, 12, 16, 20, \ldots, 92$. Тогда, что бы не делал Богдан, числа с обеих сторон каждой карточки будут кратны 4, а значит, произведение сумм на всех карточках делится на $4^{23} = 2^{46}$.
Ответ: Может.

б) Пусть Алиса запишет числа, делящиеся на 4, от 4 до 88 включительно и 96. Как и в прошлый раз, сумма чисел на сторонах каждой карточки будет делиться на 4. Заметим, что среди записанных чисел двенадцать делятся на 8. Эти двенадцать чисел будут выписаны с двух сторон суммарно 24 раза, поэтому среди 23 карточек найдется хотя бы одна, на которой с обеих сторон будет выписано число, кратное 8, а, значит, сумма чисел на этой карточке будет кратна и 8. Таким образом, полученное произведение делится на $8 \cdot 4^{22} = 2^{47}$.
Ответ: Может.

в) Предположим противное: пусть у Алисы есть набор чисел, а Богдан умеет записывать его с обратных сторон карт так, что полученное произведение получается нечётным. Тогда сумма чисел на двух сторонах каждой карточки нечётна, а значит, на них написано чётное и нечётное число. Поэтому среди 46 чисел, написанных с двух сторон, ровно 23 четных и 23 нечетных. Пусть Алиса записала k нечётных чисел, тогда нечётных чисел с двух сторон всех карт будет записано $2k = 23$. Противоречие. Значит, Алиса и Богдан так договориться не смогут.
Ответ: Не смогут.