

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	12	0,028	0,125	4	-4	45	2	2	213000	-2

Решения заданий 13-19

Задание 13. а) Решите уравнение $2^{2+2\sin x} - 3 \cdot (\sqrt{2})^{1+2\sin x} + 1 = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{23\pi}{4}\right]$.

Решение.

а) Решим уравнение $2^{2+2\sin x} - 3 \cdot (\sqrt{2})^{1+2\sin x} + 1 = 0$

Сделаем замену, пусть $t = \sqrt{2}^{1+2\sin x}$, тогда

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = 1 \end{cases}$$

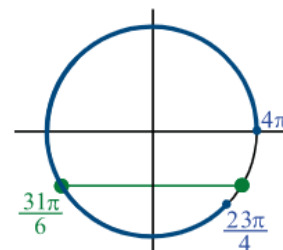
Вернёмся к исходной переменной

$$\begin{cases} \sqrt{2}^{1+2\sin x} = \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2}^{1+2\sin x} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\sin x = -2, \\ 1 + 2\sin x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{2}, \\ \sin x = -\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{23\pi}{4}\right]$ с помощью тригонометрической окружности.

Получим $\frac{31\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{31\pi}{6}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

Задание 14. Длина ребра куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равна 1.

а) Докажите, что точки B и C_1 равноудалены от плоскости ACD_1 .

б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .

Решение.

а) Прямые CD_1 и BA_1 параллельны. Аналогично $BC_1 \parallel AD_1$. Значит, по признаку параллельности плоскостей, $ACD_1 \parallel BC_1A_1$. Поэтому точки B и C_1 равноудалены от плоскости ACD_1 .

б) Плоскость ACD_1 проходит через точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость $A_1B_1C_1D_1$. Точка O_1 является точкой пересечения диагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Диагонали квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше стороны квадрата и делятся точкой пересечения пополам. Поэтому $OB = O_1D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отрезок OO_1 равен стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника OO_1D_1 по теореме Пифагора найдём OD_1 :

$$OD_1 = \sqrt{OO_1^2 + O_1D_1^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

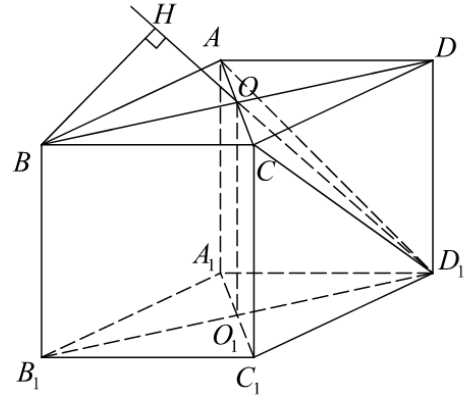
Найдём синус угла OD_1O_1 :

$$\sin \angle OD_1O_1 = \frac{OO_1}{OD_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Опустим перпендикуляр BH на плоскость ACD_1 , он попадёт на продолжение отрезка D_1O . Длина отрезка BH и будет являться расстоянием от точки B до плоскости ACD_1 . Рассмотрим четырёхугольник BB_1D_1D : $BB_1 \parallel DD_1$, $BB_1 = DD_1$ и $BB_1 \perp A_1B_1C_1D_1$, следовательно, BB_1D_1D — прямоугольник, откуда $BD \parallel B_1D_1$. Прямая HD_1 — секущая при параллельных прямых BD и B_1D_1 , поэтому углы HOB и OD_1O_1 равны. Из прямоугольного треугольника OBH найдём BH :

$$BH = OB \sin \angle BOH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Приведено обоснованное верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Выполнен только пункт а) или выполнен пункт б) при отсутствии обоснования пункта а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

*Критерии распространяются и на случай использования координатного метода.

Задание 15. Решите неравенство $\frac{2x^2}{x+3} + \frac{x+3}{x^2} \leq 3$.

Решение.

Пусть $\frac{x^2}{x+3} = t$, тогда: $2t + \frac{1}{t} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 3t + 1}{t} \leq 0$. Найдем корни числителя левой части последнего неравенства.

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{2t^2 - 3t + 1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-\frac{1}{2})}{t} \leq 0.$$

Неравенство решим методом интервалов.

Интервалы	$(-\infty; 0)$	$(0; \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}; 1)$	$(1; +\infty)$
Знак выражения	-	+	-	+

Итак, $t < 0$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Перейдем к переменной x . $\frac{x^2}{x+3} < 0 \Leftrightarrow x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ (*)

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{x+3} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+3} - 1 \leq 0, \\ \frac{x^2}{x+3} - \frac{1}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - x - 3}{x+3} \leq 0, \\ \frac{2x^2 - x - 3}{x+3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 3) \cdot (2x^2 - x - 3)}{(x+3)^2} \leq 0.$$

Найдем корни числителя левой части последнего неравенства:

$$x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{4}.$$

Далее имеем:

$$\frac{(x^2 - x - 3) \cdot (2x^2 - x - 3)}{(x+3)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cdot (x+1) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x+3)^2} \leq 0 (**)$$

Решим последнее неравенство методом интервалов.

Заметим, что $-3 < \frac{1-\sqrt{13}}{2} < -1 < \frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Интервалы	$(-\infty; -3)$	$\left(-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right)$	$\left(-1; \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$
Знак выражения	+	+	-	+	-	+

Решения неравенства (**): $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

Объединив решения неравенств (*) и (**) будем иметь: $(-\infty; -3) \cup \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right]$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; -1 \right] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Задание 16. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

Решение.

а) Пусть окружность, вписанная в квадрат, касается его стороны AB в точке M_1 , стороны AD — в точке N_1 , а прямой MN — в точке T . По свойству касательных $NN_1 = NT$, $MM_1 = MT$ и $AN_1 = AM_1$. Тогда

$$\begin{aligned} AM + MN + AN &= AM + MT + NT + AN = \\ &= (AM + MM_1) + (NN_1 + AN) = \\ &= \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD = AB. \end{aligned}$$

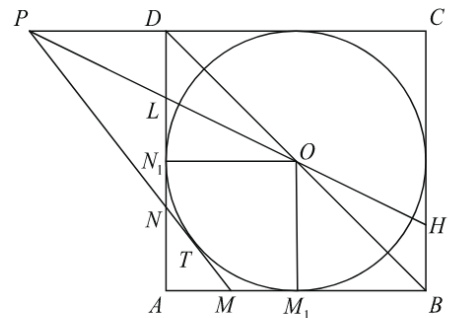
б) Положим $AB = 12a$, $TN = NN_1 = x$. Тогда

$$\begin{aligned} AM &= 3a, \\ AN &= AN_1 - NN_1 = 6a - x, \\ MN &= MT + TN = 3a + x. \end{aligned}$$

По теореме Пифагора $AM^2 + AN^2 = MN^2$, то есть

$$9a^2 + (6a - x)^2 = (3a + x)^2.$$

Отсюда находим, что $x = 2a$. Тогда $AN = 4a$ и $MN = 5a$. Пусть O — центр окружности, а прямая PO пересекает стороны AD и BC в точках L и H соответственно. Из равенства треугольников DOL и BOH следует, что $DL = BH$, поэтому $\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA}$. Окружность вписана в угол MPC , значит, PL — биссектриса треугольника DPN , который подобен треугольнику AMN . Используя свойство биссектрисы и подобие, находим:



$$\frac{DL}{LN} = \frac{PD}{PN} = \frac{AM}{MN} = \frac{3}{5},$$

откуда

$$DL = \frac{3}{8}DN.$$

учитывая, что $DN = DA - AN = 12a - 4a = 8a$, находим, что $DL = 3a$, $LA = 9a$.

$$\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: б) 1 : 3.

Приведем решение пункта б)

Часть б) можно решить проще, доказав, что $\triangle OHB = \triangle OMA$. Оттуда сразу следует, что $MA = HB$ при любом положении точки M . Действительно, $OB = OA$, $\angle OAM = \angle OBH = 45^\circ$, а $\angle MPC = \angle TOM_1$ — угол между касательными и соответствующими им радиусами. Далее, PH — биссектриса $\angle MPC$, OM — биссектриса $\angle TOM_1$. Следовательно, $\angle HPC = \angle MOM_1$, $\angle PHC = \angle OMM_1$, $\angle OHB = \angle OMA$, $\angle BOH = \angle AOM$. Треугольники OHB и OMA равны по второму признаку.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17. Курс доллара в течение двух месяцев увеличился на одно и то же число процентов ежемесячно, но не более, чем в 1,5 раза. За сумму, вырученную от продажи в начале первого месяца одного доллара, к концу второго месяца можно было купить на 9 центов меньше, чем в конце первого месяца. На сколько процентов уменьшился курс рубля за два месяца?

Решение.

Пусть в начале первого месяца курс доллара составлял x рублей, и он (курс доллара) каждый месяц увеличивался на y процентов. Тогда к концу первого месяца (к началу второго месяца) он составляет $x \cdot (1 + 0,01y)$ рублей, к концу второго месяца — $x \cdot (1 + 0,01y)^2$ рублей. Очевидно, что $(1 + 0,01y)^2 \leq 1,5$.

В начале первого месяца от продажи 1\$ можно было выручить x рублей. А это значит, что в конце первого месяца за x рублей можно было купить $\frac{1}{1 + 0,01y}$ \$, в конце второго месяца $\frac{1}{(1 + 0,01y)^2}$ \$. Разность этих двух выражений составляет 0,09 \$.

Решим уравнение $\frac{1}{1 + 0,01y} - \frac{1}{(1 + 0,01y)^2} = 0,09$. Пусть $1 + 0,01y = a$, тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = 0,09 &\Leftrightarrow \frac{a - 1}{a^2} = 0,09 \Leftrightarrow \frac{100a - 100}{a^2} = 9 \Leftrightarrow 9a^2 - 100a + 100 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 900}}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = \frac{50 \pm \sqrt{1600}}{9} \Leftrightarrow a = \frac{50 \pm 40}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10, \\ a = \frac{10}{9}. \end{cases} \end{aligned}$$

Однако, если $1 + 0,01y = 10$, то $0,01y = 9 \Leftrightarrow y = 900$ (ежемесячное увеличение курса доллара на 900% невозможно, так как в течение двух месяцев он увеличился не более, чем на 50 процентов).

Докажем, что $a = \frac{10}{9}$ удовлетворяет условию задачи, поскольку

$$1 + 0,01y = \frac{10}{9} \Leftrightarrow 0,01y = \frac{1}{9} \Leftrightarrow y = \frac{100}{9}; \left(1 + \frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{100}{81} = 1\frac{19}{81} < 1,5.$$

Таким образом, за 2 месяца курс доллара по отношению к 1 рублю вырос в $\frac{100}{81}$ раз. А это значит, что за это же время курс рубля по отношению к 1 \$ уменьшился во столько же раз.

Если в начале первого месяца за x рублей можно было купить 1 \$, то к концу второго месяца за x рублей стало возможным купить всего лишь 0,81 \$. То есть курс рубля упал на 0,19 \$. Эта разность составляет 19 %.

Подход 2.

Пусть курс доллара к концу первого месяца вырос в x раз. Тогда рост курса доллара к концу второго месяца составит x^2 раза.

За сумму, вырученную от продажи одного доллара к концу 1-го месяца, стало возможным купить $\frac{1}{2}$ \$, этот показатель к концу второго месяца составил $\frac{1}{x^2}$ \$

В соответствии с условием задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{9}{100} &\Leftrightarrow 100x - 100 = 9x^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 100x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 900}}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{1600}}{9} \Leftrightarrow x = \frac{50 \pm 40}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = \frac{10}{9}. \end{cases} \end{aligned}$$

Из полученного имеем:
$$\begin{cases} x^2 = 100 \\ x^2 = \frac{100}{81}. \end{cases}$$

Но $100 > 1,5$, тогда как $\frac{100}{81} < 1,5$. Значит, повышение курса доллара за 2 месяца составило в $\frac{100}{81}$ раз. А это значит, что снижение курса рубля по отношению к доллару составило также $\frac{100}{81}$ раз.

Если в начале первого месяца за y рублей можно было купить 1 \$, то к концу второго месяца за те же y рублей стало возможным купить всего $\frac{81}{100}$ \$. Следовательно, курс рубля упал на $\left(1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100}\right)$ у. е., т. е. курс рубля упал на 19%.

Ответ: на 19 %.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше.	0
Максимальный балл	3

Задание 18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + x - 2a}{x + a} - 1 \right| \leq 2$$

не имеет решений на интервале $(1; 2)$.

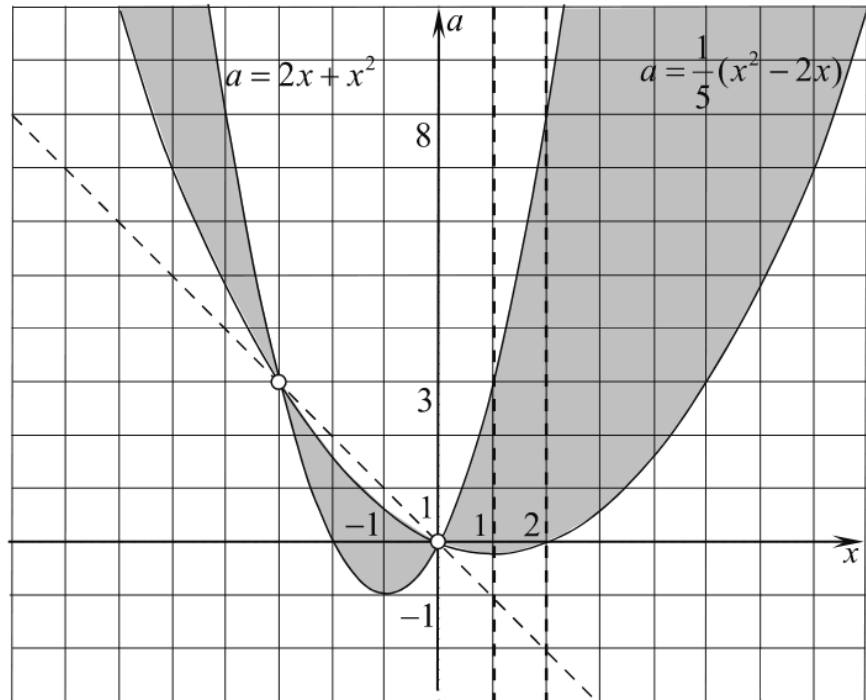
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$\left| \frac{x^2 + x - 2a}{x + a} - 1 \right| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 3a}{x + a} \right| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 3a| \leq 2|x + a|, \\ x \neq -a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3a)^2 - 4(x + a)^2 \leq 0, \\ x \neq -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2x - 5a)(x^2 + 2x - a) \leq 0, \\ x \neq -a. \end{cases}$$



Решим неравенство на интервале (1; 2):

$a \leq -\frac{1}{5}$: пустое множество

$-\frac{1}{5} < a < 0$: $(1; 1 + \sqrt{1 + 5a}]$

$0 \leq a \leq 3$: $(1; 2)$

$3 < a < 8$: $[-1 + \sqrt{1 + a}; 2)$

$a \geq 8$: пустое множество

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right]; [8; +\infty)$.

Задание 19. Из 26 последовательных нечетных чисел 1, 3, 5, ..., 51 выбрали 11 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A - шестое по величине среди этих чисел, а B - среднее арифметическое выбранных одиннадцати чисел.

а) Может ли $B - A$ равняться $\frac{3}{11}$?

б) Может ли $B - A$ равняться $\frac{4}{11}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение $B - A$.

Решение.

а) Если $A - \frac{S}{11} = \frac{3}{11}$, то $S - 3 = 11A$, где S — сумма чисел в множестве. Поскольку это сумма одиннадцати нечетных чисел, то S нечетно, поэтому $S - 3$ четно, а $11A$ — нечетно. Противоречие.

б) Здесь имеем аналогично $11A = S - 4$. Это возможно, например, для чисел 1, 3, 5, ..., 19, 25. Тогда $A = 11$ и $S = 125$.

в) Если последние числа — еще не максимально возможные — увеличим их до максимально возможных (от этого B увеличится). Если какие-то из наименьших чисел не максимально возможные (то есть $A - 2, A - 4, \dots$ — поступим аналогично. Итак, самый хороший пример обязательно выглядит так: $A - 10, A - 8, A - 6, A - 4, A - 2, A, 43, 45, 47, 49, 51$. Осталось выбрать наилучшее A . Имеем:

$$B - A = \frac{A - 10 + A - 8 + A - 6 + A - 4 + A - 2 + A + 43 + 45 + 47 + 49 + 51}{11} - A = \frac{205 - 5A}{11},$$

поэтому выгодно брать A поменьше. Значит, $A = 11$, меньшее число не может быть шестым по величине. Поэтому наибольшее значение будет $\frac{150}{11}$.

Ответ: а) нет; б) да; в) $\frac{150}{11}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснование в п. в того, что S может принимать все целые значения (отличные от -1 и 1); — обоснование в п. в того, что равенства $S = -1$ и $S = 1$ невозможны.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Перевод набранных первичных баллов в стобалльную и в пятибалльную системы

Первичный	Тестовый
0	0
1	5
2	9
3	14
4	18
5	23
6	27
7	33
8	39
9	45
10	50
11	56
12	62
13	68
14	70
15	72
16	74
17	76
18	78
19	80
20	82
21	84
22	86
23	88
24	90
25	92
26	94
27	96
28	98
29	99
30	100
31	100
32	100

Тестовый	Оценка
0-26	2
27-46	3
47-64	4
65-100	5