

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
250	9600	5	0,5	-2	3	0,5	30	18	5	16,2	4

Решения заданий 13-19

Задание 13. Дано уравнение $2 \cdot 8^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos 2x}$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

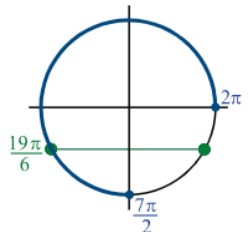
а) Преобразуем уравнение

$$2^{1+3\sin x} = 2^{-\cos 2x} \Leftrightarrow 1 + 3\sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 + 3\sin x - 2\sin^2 x$$

откуда $\sin x = 2$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$. Первый вариант невозможен.

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни на указанном промежутке с помощью тригонометрической окружности. $x = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\left\{\frac{19\pi}{6}\right\}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

Задание 14. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Точки M и T - середины ребер AD и $A_1 B_1$ соответственно.

а) Докажите, что $A_1 C_1 \perp MT$.

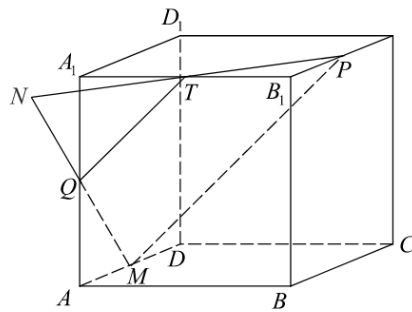
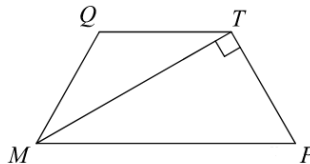
б) Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до прямой MT .

Решение.

а) Проекция точки M на плоскость $A_1B_1C_1$ это середина ребра A_1D_1 . Поэтому проекция прямой MT на плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна прямой B_1D_1 по теореме о средней линии. Значит, она перпендикулярна прямой A_1C_1 , а тогда, по теореме о трех перпендикулярах, и прямая MT перпендикулярна прямой A_1C_1 .

б) Пусть P — середина ребра B_1C_1 , а Q — середина ребра AA_1 . Заметим, что $PMQT$ — трапеция, так как $QT \parallel B_1A \parallel PM$.

Получаем:



$$TQ = QM = PT = \frac{1}{2}B_1A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}AB = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2.$$

Заметим, что $MP = 4$. Продлим прямые MQ и PT и обозначим точку их пересечения N . В треугольнике MNP $QT \parallel MP$, $QT = \frac{1}{2}MP$ значит, QT является средней линией, и T - середина NP . Треугольник MNP - правильный. MT - медиана и высота. Значит, PT - перпендикуляр к MT и искомое расстояние равно $PT = 2$.

Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Приведено обоснованное верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Выполнен только пункт а) или выполнен пункт б) при отсутствии обоснования пункта а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

*Критерии распространяются и на случай использования координатного метода.

Задание 15. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} > 2.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение.

Найдем ограничения на x .

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-\sqrt{4(x-1)} \geq 0, \\ x^2-4x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ \sqrt{4(x-1)} \leq x, \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ 4x-4 \leq x^2, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2-4x+4 \geq 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 2) \cup (2; +\infty).$$

Поскольку обе части заданного неравенства неотрицательны, мы вправе возвести их в квадрат. Получим:

$$\frac{x-\sqrt{4x-4}+2\sqrt{x^2-4x+4}+x+\sqrt{4x-4}}{x^2-4x+4} > 4 \Leftrightarrow \frac{2x+2\sqrt{(x-2)^2}}{(x-2)^2} > 4 \Leftrightarrow \frac{x+|x-2|}{(x-2)^2} - 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+|x-2|-2 \cdot (x^2-4x+4) > 0 \Leftrightarrow x+|x-2|-2x^2+8x-8 > 0 \Leftrightarrow 2x^2-9x-|x-2|+8 < 0.$$

Если $1 \leq x < 2$, то $x-2 < 0$, $|x-2| = 2-x$,

$$2x^2-9x-2+x+8 < 0 \Leftrightarrow 2x^2-8x+6 < 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

С учетом условия $1 \leq x < 2$ получим часть решений заданного неравенства: $(1; 2)$.

Если $x > 2$, то $x > 2$, $|x-2| = x-2$,

$$2x^2-9x-2+x+8 < 0 \Leftrightarrow 2x^2-8x+6 < 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

С учетом условия $1 \leq x < 2$ получим часть решений заданного неравенства: $(1; 2)$.

Если $x > 2$, то $x > 2$, $|x-2| = x-2$,

$$2x^2-9x-x+2+8 < 0 \Leftrightarrow 2x^2-10x+10 < 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{25-20}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2} < x \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Докажем, что $2 > \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Действительно, $2 > \frac{5-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 4 > 5-\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5} > 1$ (неравенство очевидное).

Таким образом, другой частью решений исходного неравенства является множество $\left(2; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ответ: $(1; 2) \cup \left(2; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Задание 16. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

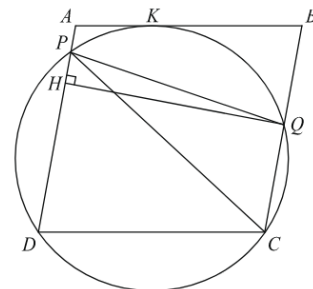
б) Найдите длину отрезка DQ , если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.

Решение.

а) Четырёхугольник $CDPQ$ вписан в окружность и его стороны PD и CQ параллельны, следовательно, $CDPQ$ — либо прямоугольник, либо равнобедренная трапеция, откуда $PQ = CD$, но $CD = AB$, значит, и четырёхугольник $ABQP$ — также прямоугольник или равнобедренная трапеция и, следовательно, около него можно описать окружность, что и требовалось доказать.

б) Поскольку AK — касательная к данной окружности, а AD — секущая, имеем: $AK^2 = AD \cdot AP = ba$. Аналогично находим $BK^2 = bc$, откуда $AB = \sqrt{ba} + \sqrt{bc}$, и тогда $CD = PQ = \sqrt{ba} + \sqrt{bc}$.

Пусть QH — высота равнобедренной трапеции $CDPQ$. Тогда:



$$\begin{aligned} DQ^2 &= DH^2 + QH^2 = DH^2 + PQ^2 - PH^2 = PQ^2 + (DH - PH)(DH + PH) = PQ^2 + CQ \cdot DP = \\ &= (\sqrt{ba} + \sqrt{bc})^2 + (b - c)(b - a) = ba + bc + 2b\sqrt{ac} + b^2 - ba - bc + ca = \\ &= b^2 + 2b\sqrt{ac} + ca = (b + \sqrt{ac})^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $DQ = b + \sqrt{ac}$.

Ответ: $DQ = b + \sqrt{ac}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17. Иван Васильевич по случаю рождения сына открыл 1 апреля 2000 года счёт в банке, на который он ежегодно вносит 1000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 10% на сумму, находящуюся на счёте. Через 6 лет у Ивана Васильевича родилась дочь, и 1 апреля 2006 года он открыл в другом банке счёт, на который ежегодно вносит по 2100 рублей, а банк начисляет 21% в год. В каком году после очередного пополнения суммы вкладов сравнялись, если деньги со счетов не снимались?

Решение.

Запишем размер счета в первом банке на каждый год. Сначала это 1000, затем

$$1000 \cdot 1,1 + 1000 = 1000(1,1 + 1),$$

затем

$$1000(1,1 + 1) \cdot 1,1 + 1000 = 1000(1,1^2 + 1,1 + 1)$$

и так далее. После n лет будет

$$1000(1,1^n + 1,1^{n-1} + \dots + 1,1 + 1) = 1000 \cdot \frac{1,1^{n+1} - 1}{1,1 - 1} = 10000(1,1^{n+1} - 1).$$

Аналогично во втором банке по прошествии m лет будет $10000(1,21^{m+1} - 1)$. Значит,

$$10000(1,21^{m+1} - 1) = 10000(1,1^{n+1} - 1),$$

откуда $2(m+1) = n+1$, $m = n - m - 1 = 6 - 1 = 5$ (так как второй вклад открыли на 6 лет позже, $n - m = 1$). Значит, это случится в $2006 + 5 = 2011$ году.

Ответ: 2011.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше.	0
Максимальный балл	3

Задание 18. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a - 1) \cdot 4^x + (2a - 3) \cdot 6^x = (3a - 4) \cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от	2

вычислительной	
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение.

Поделим уравнение на 4^x и сделаем замену $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Получим уравнение

$$(3a - 4)t^2 - (2a - 3)t - (a - 1) = 0.$$

При $a = \frac{4}{3}$ уравнение примет вид

$$\frac{1}{3}t - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow t = 1,$$

следовательно, $x = 0$ — единственный корень.

При прочих a это квадратное уравнение. Оно должно иметь единственный положительный корень (каждому положительному t соответствует единственное x , а неположительному — ни одного). Вычислим его дискриминант:

$$D = (2a - 3)^2 + 4(a - 1)(3a - 4) = 16a^2 - 40a + 25 = (4a - 5)^2.$$

Значит, его корни будут

$$t = \frac{2a - 3 \pm (4a - 5)}{6a - 8} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{1 - a}{3a - 4}. \end{cases}$$

Первый корень точно подходит. Значит, второй либо тоже равен единице (тогда $D = 0$, то есть $4a - 5 = 0$, $a = \frac{5}{4}$) либо неположителен (что бывает при $a \in (-\infty; 1] \cup \left(\frac{4}{3}; \infty\right)$).

Окончательно подходят: $a \in (-\infty; 1] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 1] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right)$.

Задание 19. а) Приведите пример такого натурального числа n , что числа n^2 и $(n + 24)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 100.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте а свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел m , для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n , таких, что n^2 и $(n + m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 100?

Решение.

- а) Например годится $38^2 = 1444$, поскольку $62^2 = 3844$.
 б) Для этого нужно, чтобы

$$(n + 24)^2 - n^2 = 576 + 48n$$

делилось на 100. На 4 оно точно делится, а для делимости на 25 нужно, чтобы

$$576 + 48n - 550 - 50n = 26 - 2n = 2(13 - n)$$

делилось на 25. Это возможно в том и только том случае, когда n дает остаток 13 при делении на 25. Таких чисел среди любых 25 чисел подряд ровно одно, поэтому среди всех 900 трехзначных чисел их ровно 36.

- в) Нужно, чтобы

$$(n + m)^2 - n^2 = m(2n + m)$$

делилось на 100 ровно для 36 чисел. Разберем случаи, чему может быть равен наибольший общий делитель m и 100.

Если 1, то второй множитель должен быть кратен 100, при этом остатки от деления на 100 повторяются группой по 50 (то есть для $n = 1, 51, 101, \dots$ остатки одинаковые, но до этого повторений не будет). Значит, нужных нам случаев среди 900 трехзначных чисел либо 0, либо 18.

Если 2, то второй множитель должен быть кратен 50, при этом остатки от деления его на 50 повторяются группой по 25. Значит, нужных нам случаев среди 900 трехзначных чисел либо 0, либо 36. На самом деле поскольку m четно, то подходящее n точно есть, поэтому их 36. Итак, подходят все четные числа, не кратные 4 или 5.

Если 4, то второй множитель должен быть кратен 25, при этом остатки от деления его на 25 повторяются группой по 25. Значит, нужных нам случаев среди 900 трехзначных чисел либо 0, либо 36. На самом деле их всегда 36, потому что среди чисел 2, 4, 6, ... 24, 26, 28, ... 50 попадают все возможные остатки от деления на 25. Поэтому иногда делимость на 25 будет.

Если 5 или больше, то второй множитель должен делиться на какое-то конкретное число, не превосходящее 20. Остатки от деления на такое число закливаются не более чем за 20 чисел, поэтому будет либо ни одного подходящего остатка, либо сразу минимум $\frac{900}{20} = 45$.

Итак, годятся четные числа, не кратные 5. В каждом десятке таких 4, Значит, всего их $4 \times 9 = 36$.

Ответ: а) 38; б) 36; в) 36.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Приведено верное обоснованное решение.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов ИЛИ выполнен один из пунктов (см. критерий на 1 балл) и приведено обоснованное верное решение пункта в).	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов ИЛИ приведено обоснованное верное решение пункта в).	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное доказательство в п. а); — обоснованный ответ в п. б); — решение в п. в) содержит логические пробелы, вычислительные ошибки или описки.	1
Приведено обоснованное верное решение пункта в).	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Перевод набранных первичных баллов в стобалльную и в пятибалльную системы

Первичный	Тестовый
0	0
1	5
2	9
3	14
4	18
5	23
6	27
7	33
8	39
9	45
10	50
11	56
12	62
13	68
14	70
15	72
16	74
17	76
18	78
19	80
20	82
21	84
22	86
23	88
24	90
25	92
26	94
27	96
28	98
29	99
30	100
31	100
32	100

Тестовый	Оценка
0-26	2
27-46	3
47-64	4
65-100	5