Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	9	11,25	0,91	-3	14	5	6	2	0,098	70	32

Решения заданий 13-19

Задание 13. а) Решите уравнение $2\cos 2x+\cos^2\frac{x}{2}-10\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}\cos x$.

б) Найдите все корни на промежутке $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

Решение.

а)

$$2\cos 2x+\cos^2\frac{x}{2}-10\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 2x+2\cos^2\frac{x}{2}-20\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)+7-\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x-4\sin^2 x+1+\cos x-20\sin x-\cos x+7=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-4\sin^2 x-4\sin^2 x+1-20\sin x+7=0 \Leftrightarrow 8\sin^2 x+20\sin x-12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+5\sin x-3=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4} \Leftrightarrow \sin x=\frac{-5\pm 7}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2},\\ \sin x=-3.\end{array}\right.$$

Уравнение $\sin x=-3$ корней не имеет.

$$\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) Выборка корней. Из серии $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$:

$$\frac{5\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}+2\pi n\le 4\pi \Leftrightarrow 15\le 1+12n\le 24 \Leftrightarrow 14\le 12n\le 23 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{6}\le n\le\frac{23}{12} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{6}\le n\le 1+\frac{11}{12}.$$

Последнее неравенство целых решений не имеет. Значит, в данной серии искомых корней нет.

Из серии $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$:

$$\frac{5\pi}{2}\le\frac{5\pi}{6}+2\pi n\le 4\pi \Leftrightarrow 15\le 5+12n\le 24 \Leftrightarrow 10\le 12n\le 19 \Leftrightarrow \frac{5}{6}\le n\le 1+\frac{7}{12} \Leftrightarrow n=1.$$

$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{17\pi}{6}.$$

Ответ: а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта и *а* пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

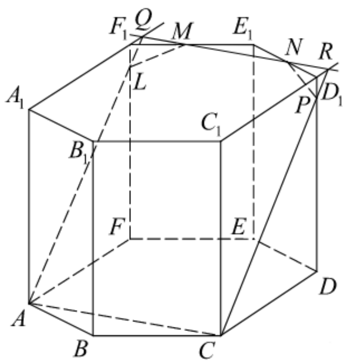
Задание 14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребро основания $AB = 2$, высота $AA_1 = 6$, точка M – середина F_1E_1, проведено сечение через точки A, C и M.

а) Докажите, что сечение проходит через середину ребра D_1E_1.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение.

а) Пусть сечение пересекает плоскость верхнего основания по отрезку MN Так как основания параллельны, то прямая $MN||AC||FD||F_1D_1$, при этом M — середина F_1E_1, значит, MN — средняя линия треугольника $F_1E_1D_1$, следовательно, N — середина E_1D_1.



б) Построим сечение. Пусть Q и R — точки пересечения сечения с прямыми A_1F_1 и C_1D_1, соответственно. Тогда они лежат на прямой MN. Пусть теперь L и P — точки пересечения прямых AQ и CR (то есть сечения) с ребрами FF_1 и DD_1, соответственно. Таким образом, сечение — шестиугольник $ALMNPC$ получаемый из прямоугольника $AQRC$ отрезанием от него двух равных прямоугольных треугольников LMQ и NPR.

Так как основания призмы правильные шестиугольники со стороной $AB = A_1F_1 = 2$, то $AC = 2\sqrt{3}$, а $QF_1 : AF_1 = QL : LA = 1 : 4$. Таким образом,

$$A_1Q = \frac{5}{4}A_1F_1 = \frac{5}{2},\ AQ = \sqrt{AA_1^2 + A_1Q^2} = \sqrt{36 + \frac{25}{4}} = \frac{13}{2},\ QL = \frac{1}{5}AQ = \frac{13}{10}.$$

Кроме того, $QM = NR = \frac{1}{4}AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда,

$$S_{ALMNPC} = S_{AQRC} - 2S_{LMQ} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{13}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{13}{10} = \frac{247}{20}\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{247}{20}\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Приведено обоснованное верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Выполнен только пункт а) или выполнен пункт б) при отсутствии обоснования пункта а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

*Критерии распространяются и на случай использования координатного метода.

Задание 15. Решите неравенство $\sqrt{9 - \frac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \frac{9}{x}}$.

Решение.

$$\sqrt{9-\frac{9}{x}}<x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}.$$

Если $x<0$, то левая часть неотрицательна, а левая отрицательна (если вообще определены).

Если $x\geq 0$, то $x\geq 3$ (иначе второй корень неопределен)

При $x\geq 3$ имеем $x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}>x-\sqrt{x}>0$, обе части определены и неотрицательны, можно возвести в квадрат.

$$9<x^2-2x\sqrt{x-\frac{9}{x}}+x$$

$x^2+x-9>2x\sqrt{x-\frac{9}{x}}$, обе части определены и неотрицательны (поскольку $x\geq 3$), можно возвести в квадрат.

$$(x^2+x-9)^2>4x(x^2-9)\Leftrightarrow(x^2-x-9)^2>0$$

Это верно всегда кроме как при $x^2-x-9=0$, то есть $x=\frac{1+\sqrt{37}}{2}>3$. Второй корень отрицательный, он неважен.

Ответ: $\left[3;\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2};\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**2**

Задание 16. Отрезок, соединяющий середины *M* и *N* оснований *BC* и *AD* соответственно трапеции *ABCD*, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

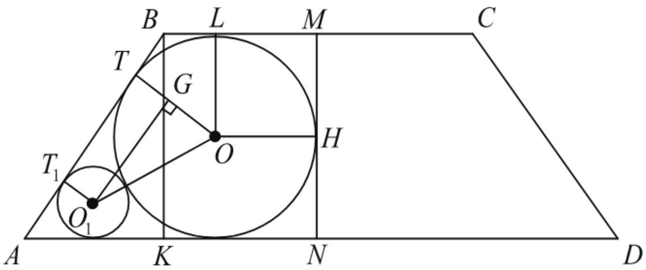
а) Докажите, что трапеция *ABCD* равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание *BC* исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны *AB*, основания *AN* трапеции *ABMN* и вписанной в неё окружности.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**3**

Решение.

а) Из описанности трапеций следует, что $BM + AN = AB + MN$ и $MC + ND = CD + MN$. Поскольку $BM = MC$ и $AN = ND$, получаем, что $AB = CD$.



б) Очевидно, при этих условиях отрезок MN является высотой трапеции и имеет длину 6. Пусть $AN = t$, тогда из описанности трапеции $BMNA$, следует, $AB + 6 = t + 4$, откуда $AB = t - 2$. Опуская высоту BK, получим $BK^2 + KA^2 = BA^2$, откуда $(t-4)^2 + 36 = (t-2)^2$. Решая это уравнение получаем $t = 12$ и $AB = 10$.

Обозначим O — центр окружности, вписанной в $BMNA$, центр второй окружности — O_1, их проекции на сторону AB за T и T_1 соответственно, радиус второй окружности обозначим r. Тогда TOO_1T_1 — трапеция, в которой $TO = 3$, $T_1O_1 = r$, $OO_1 = 3 + r$.

Опустим из O перпендикуляры OL и OH на BM и MN соответственно. Тогда $OLMH$ — квадрат со стороной 3, поэтому $BT = BL = 4 - 3 = 1$, а $AT = 9$. Из подобия треугольников ATO и AT_1O_1 находим, что $AT_1 = 3r$ и $TT_1 = 9 - 3r$.

Теперь, опустим перпендикуляр O_1G на OT. Тогда $OG = 3 - r$, $O_1G = T_1T = 9 - 3r$, получаем уравнение:

$$(9-3r)^2 + (3-r)^2 = (r+3)^2 \Leftrightarrow 9r^2 - 66r + 81 = 0 \Leftrightarrow 3r^2 - 22r + 27 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{11 \pm \sqrt{40}}{3}.$$

Из двух корней подходит только меньший, поскольку $r < 3$.

Ответ: $\dfrac{11 - 2\sqrt{10}}{3}$.

Задание 17. Семен Кузнецов планировал вложить все свои сбережения на сберегательный счет в банк «Навроде» под 500%, рассчитывая через год забрать A рублей. Однако крах банка «Навроде» изменил его планы, предотвратив необдуманный поступок. В результате часть денег г-н Кузнецов положил в банк «Первый Муниципальный», а остальные – в банку из-под макарон. Через год «Первый Муниципальный» повысил процент выплат в два с половиной раза, и г-н Кузнецов решил оставить вклад еще на год. В итоге размер суммы, полученной в «Первом Муниципальном», составил $\frac{1}{6}A$ рублей. Определите, какой процент за первый год начислил банк «Первый Муниципальный», если в банку из-под макарон Семен «вложил» $\frac{2}{27}A$ рублей.

Решение.

Предположим, что сбережения Кузнецова составляли x р.

Семен планировал через год получить в банке «Навроде», $6x = A$ (р).

Однако г-н Кузнецов $\frac{2}{27}A = \frac{2}{27} \cdot 6x = \frac{4}{9}x$ (р) своих сбережений «вложил» в банку из-под макарон, а остальные $\frac{5}{9}x$ рублей — в банк «Первый Муниципальный». Скажем, в этом банке процентные выплаты в первый год хранения денежных средств составили y %. Тогда во второй год эта процентная ставка стала $\frac{5}{2}y$ %. За 2 года хранения в банке «Первый Муниципальный» вклад Семена вырос до

$$\frac{5}{9}x\left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{2}\cdot\frac{y}{100}\right) = \frac{5}{9}x\left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{40}\right) \text{ (р)}.$$

А значение этого выражения равно $\frac{1}{6}\cdot 6x = x$.

Решим уравнение $\frac{5}{9}x\left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{40}\right) = x$ относительно y.

$$\frac{5}{9}x\left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{40}\right) = x \Leftrightarrow \left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{40}\right) = \frac{9}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{100+y}{100}\cdot\frac{40+y}{40} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \frac{100+y}{100}\cdot\frac{40+y}{8} = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (100+y)\cdot(40+y) = 7200 \Leftrightarrow 4000+40y+100y+y^2-7200 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2+140y-3200 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 20, \\ y = -160. \end{array}\right.$$

$y = -160$ не подходит по смыслу задачи.

Семену Кузнецову банк «Первый Муниципальный» за первый год хранения вклада начислил 20%
.

Ответ: 20%.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше.	0
Максимальный балл	**3**

Задание 18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

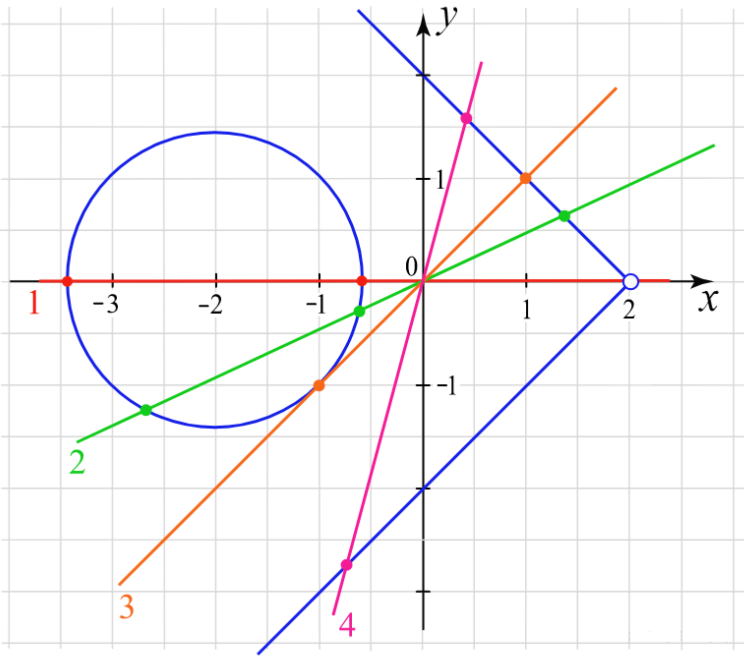
$$\begin{cases} \dfrac{(x+|y|-2)(x^2+4x+y^2+2)}{x-2} = 0, \\ y = \sqrt{a-5}\cdot x \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Решим первое уравнение системы: $\frac{(x+|y|-2)(x^2+4x+y^2+2)}{x-2}=0$. Получим $|y|=2-x$ или $(x+2)^2+y^2=2$ при условии $x\neq 2$.

Построим график данного уравнения (на рисунке изображён синим цветом).



Графиком функции $y=\sqrt{a-5}\cdot x$ является прямая с неотрицательным угловым коэффициентом, равным $\sqrt{a-5}$, определённая при $a\geq 5$, проходящая через начало координат.

Возможны четыре случая взаимного расположения данной прямой и графика первого уравнения системы.

1. Прямая $y=\sqrt{a-5}\cdot x$ при $a=5$ (красная прямая) пересекает окружность $(x+2)^2+y^2=2$ в двух точках и не имеет общих точек с графиком уравнения $|y|=2-x$ Таким образом, система имеет ровно два решения.

2. Прямая $y=\sqrt{a-5}\cdot x$ при $5<a<6$ (зелёная прямая) пересекает окружность $(x+2)^2+y^2=2$ в двух точках и график уравнения $|y|=2-x$ ещё в одной. В этом случае система имеет три решения.

3. Прямая $y=\sqrt{a-5}\cdot x$ при $a=6$ (оранжевая прямая) касается окружности $(x+2)^2+y^2=2$ Уравнение касательной имеет вид $y=x$. С графиком уравнения $|y|=2-x$ данная прямая имеет одну точку пересечения. Таким образом, система имеет ровно два решения.

4. Прямая $y=\sqrt{a-5}\cdot x$ при $a>6$ (малиновая прямая) не имеет общих точек с окружностью $(x+2)^2+y^2=2$. С графиком уравнения $|y|=2-x$ прямая имеет две точки пересечения. Таким образом, система имеет ровно два решения.

Исходная система будет иметь ровно два различных решения при $a=5$ или $a\geq 6$.

Ответ: $a=5$; $a\geq 6$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a = 6$.	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(6; +\infty)$, возможно, с исключением граничной точки $a = 6$ и исключением точки $a = 5$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности и прямых (аналитически или графически).	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 19. а) Можно ли в выражении $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}*\frac{1}{6}*\frac{1}{7}*\frac{1}{8}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки «+» и «−», чтобы модуль этого выражения стал меньше $\frac{1}{8}$?

б) Можно ли в выражении $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}*\frac{1}{6}*\frac{1}{7}*\frac{1}{8}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки «+» и «−», чтобы модуль этого выражения стал меньше $\frac{1}{500}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left|\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}*\frac{1}{6}*\frac{1}{7}*\frac{1}{8}\right|$, если разными способами заменять каждый из знаков $*$ знаками «+» и «−»?

Решение.

Приводя дроби к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{420\pm280\pm210\pm168\pm140\pm120\pm105}{840}.$$

а) Да, например:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{1}{20}-\frac{1}{56}<\frac{1}{8}.$$

б) До сокращения эта дробь имеет знаменатель 840. Если он сократится, то станет максимум 420 и дробь уже не будет меньше $\frac{1}{500}$ (если она не равна нулю).

Значит, нужно так расставить знаки в выражении

$$420\pm280\pm210\pm168\pm140\pm120\pm105,$$

чтобы получить число, равное 0 или ±1. Заметим, что

$$420\pm280\pm210\pm140\pm120\pm105$$

кратно 5 и после прибавления или вычитания 168 не может быть равно 0 или ±1.

в) Как следует из вышесказанного, остаток от деления числителя дроби на 5 будет равен 2 или 3. По аналогичным причинам

$$420\pm280\pm210\pm168\pm140\pm105$$

кратно 7 и после прибавления или вычитания 120 остаток от деления на 7 будет равен 1 или 6. Кроме того, сумма должна быть нечетна. Минимальное по модулю число, удовлетворяющее всем трем условиям, это 13.

Поскольку

$$420+280+210+168+140+120+105=1443,$$

нам нужно набрать несколькими из этих чисел сумму $\dfrac{1443-13}{2}=715$ и эти числа снабдить минусом. В них должно входить 120 (чтобы не было делимости на 7) и 105 (чтобы не было четности). Оставшиеся 490 легко набрать как $210+280$. Это дает пример

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\frac{13}{840}.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) $\dfrac{13}{840}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	**4**

Перевод набранных первичных баллов в стобалльную и в пятибалльную системы

Первичный	Тестовый
0	0
1	5
2	9
3	14
4	18
5	23
6	27
7	33
8	39
9	45
10	50
11	56
12	62
13	68
14	70
15	72
16	74
17	76
18	78
19	80
20	82
21	84
22	86
23	88
24	90
25	92
26	94
27	96
28	98
29	99
30	100
31	100
32	100

Тестовый	Оценка
0-26	2
27-46	3
47-64	4
65-100	5