МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М., Галеева А.Э.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 3

Тригонометрия

- **Тригонометрические формулы**
- **Преобразование тригонометрических выражений**
- **Тригонометрические уравнения**
- **Тригонометрические неравенства**

Издание четвертое, дополненное

Москва 2018

ББК 22.1 я 729
УДК 373.3

Учебно-методическое пособие

Галеев Э.М., Галеева А.Э.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений). Тригонометрия. Изд. 4-е, дополненное. Издательство "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова". 2018. - 72 с.

В пособии рассматриваются тригонометрические задачи: преобразование тригонометрических выражений, уравнения, неравенства, тригонометрические системы. Предпринята попытка систематизации типов встречающихся задач и методов их решений. Схема решений уравнений определенного вида подобрана таким образом, чтобы решение было наиболее простым. Некоторые решения каждого типа задач по этим схемам приведены в разделе "Ответы, указания, решения" в конце пособия.

Предназначено для абитуриентов МГУ, выпускников школ при подготовке к ЕГЭ, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Богатый С. А.

ISBN

Оглавление

Предисловие

В начале пособия приведены различные тригонометрические формулы. Пособие состоит из трех параграфов: тригонометрические преобразования, уравнения, неравенства. Параграфы делятся на пункты по типам задач. Производится систематизация типов встречающихся задач и методов их решений. Схема решений уравнений определенного вида подобрана таким образом, чтобы решение было наиболее простым. Такая систематизация помогает определить, к какому типу относится данная задача и оптимальную схему ее решения. Это помогает более легкому усвоению материала, лучшему запоминанию.

Предполагается, что читатель знаком со школьной программой и собирается углубить уже имеющиеся у него знания и научиться правильным подходам и схемам решений уравнений и неравенств.

При работе с пособием рекомендуется вначале прочитать имеющуюся краткую теоретическую часть. Перед решением задачи вначале следует разобраться к какому виду относится или к какому виду сводится имеющаяся задача, а затем воспользоваться схемой решения задач этого вида. Даже, если Вам ясно, как решать задачу, необходимо подумать, а наиболее ли простое решение Вы выбрали, нет ли другого более легкого решения.

Имеющиеся задачи распределены на две части. Одна часть предполагает решение задач на занятии под руководством преподавателя. Другая часть — для самостоятельного решения дома. Домашние задачи предназначены для закрепления материала, пройденного на занятии с преподавателем. Как правило, задачи подобные домашним уже решены на занятии.

Часть первых задач встречающихся типов приведена с подробными решениями в разделе “Ответы, указания, решения” в конце пособия. Рекомендуется прочитать решение, приведенное в книге. Понять, почему автор предпочел именно такое решение, а не другое. При решении подобных задач надо научиться использовать предложенный способ и форму записи решения. Для аналогичных задач решения не приводятся, а даются только ответы. В некоторых задачах специально ответы не приводятся. Это так называемые “тестовые” задачи. С помощью тестовых задач преподаватель легко может проверить, подгоняет ли ученик свои ответы к задачам или нет. Кроме того в тестовых задачах, имеются определенные тонкости, которые надо заметить. И преподаватель проверяет, усвоил ли ученик их. Задачи, являющиеся в своем пункте по сравнению с остальными существенно более сложными, отмечены звездочкой.

В пособии содержатся задачи и простые, и сложные. Основная масса задач взята из вступительных экзаменов и ДВИ (дополнительного внутреннего испытания) в МГУ и филиалы МГУ. Указывается факультет, год, номер задачи и общее количество задач. Для выездных экзаменов указывается город, в котором эта задача давалась. Часть задач взята из пособий по элементарной математике, приведенных в списке литературы (некоторые из них при этом изменены), или составлена автором.

Пособие предназначено для подготовке к дополнительному внутреннему экзамену по математике, в первую очередь, в МГУ, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов. В то же время знания приведенных приемов решения задач окажутся полезными и для любого школьника.

Галеев Э. М., Галеева А.Э.

Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Функции суммы и разности углов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\qquad \begin{pmatrix}\cos\alpha\neq 0\\ \cos\beta\neq 0\end{pmatrix},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\ \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}\ \begin{pmatrix}\sin\alpha\neq 0\\ \sin\beta\neq 0\end{pmatrix}.$$

Функции двойного и половинного угла

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Преобразование суммы функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \ \cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\qquad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\qquad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разложение произведения в сумму или разность

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big),$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\Big),$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\Big).$$

Дополнительные тригонометрические формулы:

Некоторые полезные формулы

$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2k\pi, \\ x = -y + 2l\pi, \end{array} \right.$ $\quad \sin x = \sin y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2k\pi, \\ x = \pi - y + 2l\pi, \end{array} \right.$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + k\pi, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, \end{cases}$ $\quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + k\pi, \\ x \neq l\pi, \end{cases}$

$\sin x = \cos y \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos y.$

Формулы приведения

$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha,$ $\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$ $\quad \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,$ $\quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$ $\quad \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha,$

$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha,$ $\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$ $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$ $\quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$ $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$

$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$ $\quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$ $\quad \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha,$

$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$ $\quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha.$

Введение дополнительного угла

При преобразовании выражения вида $a\sin x + b\cos x$ удобно воспользоваться введением дополнительного угла. Пусть числа a и b одновременно не равны нулю. Тогда

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Введем угол φ такой, что $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Такой угол φ существует для любых a и b и таких углов бесконечное множество. Нам достаточно взять один из них, например, $\varphi = \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ при $a > 0$; $\varphi = \arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ при $b > 0$. Тогда по формуле синуса суммы двух углов

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

Формулы универсальной тригонометрической подстановки

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \neq \pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

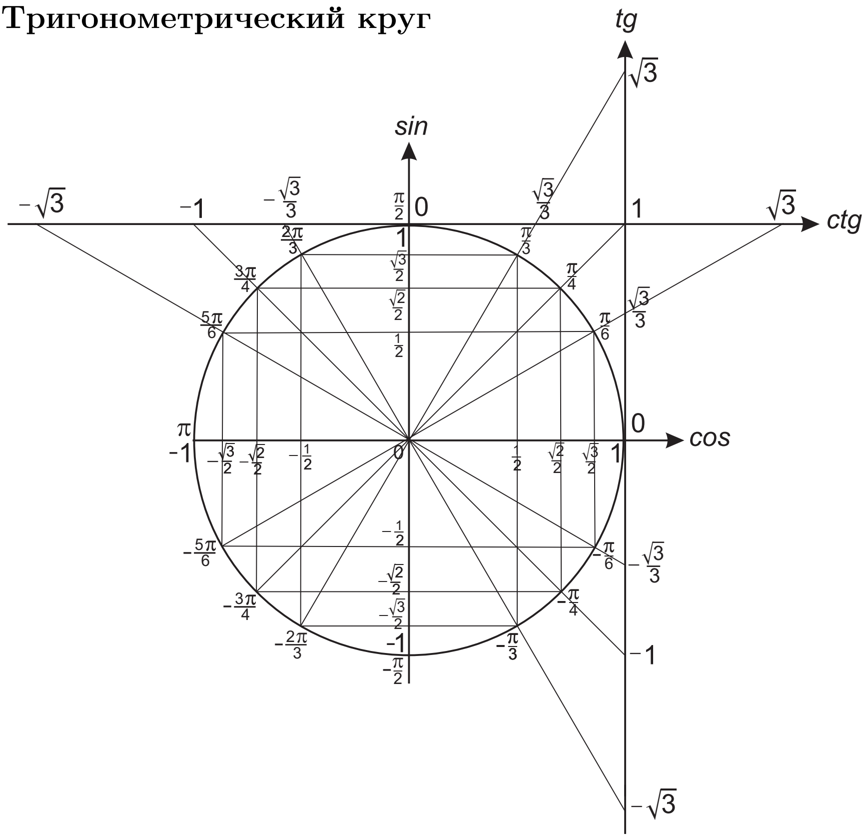
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Формулы тройного угла

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$$

Тригонометрический круг



Таблицы простейших значений тригонометрических функций

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\nexists$

α	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\nexists$

$\nexists$ — знак означает "не существует"

Решение простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \cos x = 1 \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi,$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi, \end{array} \right. \qquad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi, \end{array} \right. \qquad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \end{array} \right. \qquad \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \end{array} \right. \qquad \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi, \end{array} \right. \qquad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, \end{array} \right. \qquad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \cos x = -1 \quad \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,$$

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2k\pi, \\ x = \pi - \arcsin a + 2l\pi, \end{array} \right.$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi,$$

при $|a| \leq 1$.

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = 1 \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

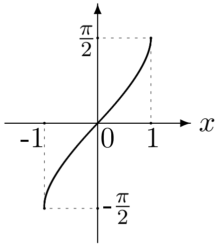
$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = -1 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = a \quad \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + k\pi.$$

Обратные тригонометрические функции



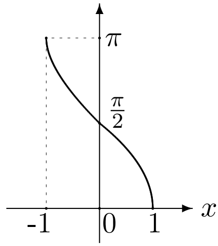
ОДЗ: $-1 \leq x \leq 1$,

область изменения:

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}$,

монотонно возрастает,

нечётная.



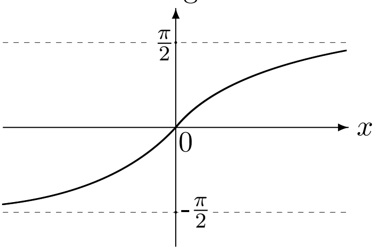
ОДЗ: $-1 \leq x \leq 1$,

область изменения:

$0 \leq \arccos x \leq \pi$,

монотонно убывает,

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.



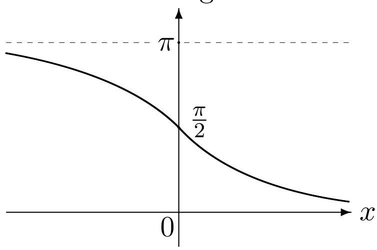
ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$,

область изменения:

$-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$,

монотонно возрастает,

нечётная.



ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$,

область изменения:

$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$,

монотонно убывает,

$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

11 Преобразование тригонометрических выражений

11.1 Доказать тождества

11.1. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$

11.2. $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4\cos\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha}{2}.$

11.3. $\dfrac{\sin^2 4\alpha}{2\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = 2\sin\alpha\sin 2\alpha.$

11.4. $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha = \cos 2\alpha - 2\cos^2\alpha.$

11.5. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right).$

11.6. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$

11.7. $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha.$

11.8. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha} - \dfrac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha} = 0.$

11.9. $\sin^2\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right)\left(1 - \dfrac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right) = \sin 2\alpha.$

11.10. $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \dfrac{1}{2}.$

11.11. $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta = 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha + \beta).$

11.12. Преобразуйте в произведение

$$\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin 3\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}.$$

11.13. Преобразуйте в произведение $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta - \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$

11.14. $1-\cos(2x-\pi)-\cos(4x+\pi)+\cos(6x-2\pi) = 4\cos x\cos 2x\cos 3x.$

11.15. $\dfrac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(3\pi-4\alpha)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+6\alpha\right)}{4\sin(5\pi-3\alpha)\cos(\alpha-2\pi)} = \cos 2\alpha.$

11.16. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin^3\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)} = \sin^2 x.$

11.17. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2},$
если $\alpha+\beta+\gamma=\pi.$

11.18. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 1,$
если $\alpha+\beta+\gamma=\pi.$

11.19. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$

11.20. $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}+\dfrac{1}{\sin 4\alpha}+\dfrac{1}{\sin 8\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{\sin 2^n\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2^n\alpha.$

Домашнее задание

11.21. $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha.$

11.22. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha = 4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha.$

11.23. $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha = 4\sin 3\alpha\cos^2\alpha.$

11.24. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta) = \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta).$

11.25. $\dfrac{1}{2}(\cos t+\sqrt{3}\sin t) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-t\right).$

11.26. $\cos^6\alpha-\sin^6\alpha = \dfrac{1}{4}(3+\cos^2 2\alpha)\cos 2\alpha.$

11.27. $\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)} = -1.$

11.28. $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\cos(\pi-\alpha)=1.$

11.29. $4\cos^2\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos(2\alpha-\pi)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-6\alpha\right)=32\sin^4\alpha\cos^2\alpha.$

11.30. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}=\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1.$

11.31. $\dfrac{1+\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha.$

11.32. $\dfrac{\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x}=\operatorname{tg} 3x.$

11.33. $\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha-1}=\cos 2\alpha.$

11.34. $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$

11.35. $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha.$

11.36. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$

11.37. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1.$

11.38. $1-\sin 4\alpha+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-2\alpha\right)\cos 4\alpha=0.$

11.39. Преобразуйте в произведение

$\sin(5\alpha+\beta)+\sin(3\alpha+\beta)+\sin 2\alpha.$

11.40. Преобразуйте в произведение

$\dfrac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha+\dfrac{\cos 2\alpha\sin 3\alpha}{\cos 60^\circ}-\sin 5\alpha.$

11.41. $\operatorname{tg} 3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg} 3\alpha+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg} 2\alpha.$

11.42. $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)$.

11.43. Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.44. $\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\ \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\ \operatorname{ctg}\alpha = 1$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.45. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\ \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\ \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.46. $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\cos(n+1)\alpha \cdot \sin n\alpha}{2\sin\alpha}$.

11.47. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

11.48. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2007, 5(10)) Чему равно пятое (в порядке возрастания) из натуральных чисел n, удовлетворяющих неравенству $\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n < 0$?

11.49. $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)\alpha \cdot \sin n\alpha}{2\sin\alpha}$.

11.50. $\cos^3\alpha + \cos^3 2\alpha + \ldots + \cos^3 n\alpha =$
$$= \frac{3\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{3n\alpha}{2}\cos\frac{3(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

11.51. $\sin^3\alpha + \sin^3 2\alpha + \ldots + \sin^3 n\alpha =$
$$= \frac{3\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\frac{3n\alpha}{2}\sin\frac{3(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

11.52. $\cos^4\alpha + \cos^4 2\alpha + \ldots + \cos^4 n\alpha =$
$$= \frac{3n}{8} + \frac{\sin n\alpha\cos\,(n+1)\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{\sin 2n\alpha\cos\ 2(n+1)\alpha}{8\sin 2\alpha}.$$

11.53. $\sin^4\alpha + \sin^4 2\alpha + \ldots + \sin^4 n\alpha =$
$$= \frac{\sin 2n\alpha\cos 2(n+1)\alpha}{8\sin 2\alpha} - \frac{\sin n\alpha\cos\,(n+1)\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{3n}{8}.$$

11.54.* $\dfrac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha}+\dfrac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha}=$
$=\dfrac{\operatorname{tg} n\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}.$

11.2 Доказать равенства

11.55. $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}.$

11.56. $\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{1}{8}.$

11.57. $\cos\dfrac{\pi}{11}\cos\dfrac{2\pi}{11}\cos\dfrac{3\pi}{11}\cos\dfrac{4\pi}{11}\cos\dfrac{5\pi}{11}=\dfrac{1}{2^5}.$

11.58.*(Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2008, 8(10)) Вычислить $\log_2(\sin 1^\circ\cdot\sin 3^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 89^\circ)$.

11.59.* $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}.$

11.60. $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{1}{2}.$

11.61. $\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=0.$

11.62. $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}.$

11.63. $\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{5\pi}{9}+\cos\dfrac{7\pi}{9}=0.$

11.64. $\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{4\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\dfrac{2n\pi}{2n+1}=-\dfrac{1}{2}.$

11.65. $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{8\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{8\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}.$

11.66. $\sin\dfrac{3\pi}{10}\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{4}.$

11.67. $\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}.$

11.68. $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{\sqrt{9}}{16}$.

11.69.** [1] $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

11.70. $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

11.71.** $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

11.72.** $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

11.73. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}=5$.

11.74.** $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n+1}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{2n+1}\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}^2\frac{n\pi}{2n+1}=2n+1$.

Домашнее задание

11.75. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

11.76. $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2^4}$.

11.77. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$.

11.78. $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}=\frac{1}{2^5}$.

11.79. $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0$.

11.80. $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

11.81. $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

[1] Задачи с двумя звездочками приведены как имеющие место формулы, а не для решения при подготовке к вступительному экзамену.

11.82. $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=0.$

11.83. $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=0.$

11.84. $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}.$

11.85. $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{3}{4}.$

11.86. $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}.$

11.87. $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}.$

11.88. $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$

11.89. $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{2\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{4}.$

11.90. $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{4\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}}{2^4}.$

11.91. $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{2\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{4}.$

11.92. $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$

11.93. $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{2\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{4\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}}{2^4}.$

11.94.

$$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ\sin 60^\circ\sin 70^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{2^8}.$$

11.95. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7}=7.$

11.96. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{9}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{9}\operatorname{tg}^2\frac{4\pi}{9}=3.$

11.97. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{9}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{9}\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{9}\operatorname{tg}^2\frac{4\pi}{9}=9.$

11.98. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n}=1.$

11.3 Вычислить

11.99. $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}.$

11.100. $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ.$

11.101. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2007”, 1(10))
Вычислить $(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta)$, если $\sin(\alpha+\beta)=0{,}8$ и $\cos(\alpha-\beta)=0{,}3$.

11.102. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов и высшая школа современных социальных наук, 2008, 3(7))
Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и $-\frac{3\pi}{2}<\alpha<0$.

11.103. (МГУ, почвоведения, 1998, 2(6))
Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ и $\pi<\alpha<2\pi$. Установите без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше: $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$ или $\frac{2}{7}$.

11.104. (МГУ, геологический, экономический, ..., 2010, 3(6))
Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)<0$.

11.105. (МГУ, экономический, 1992, 1(6))
Вычислить $\log_{\frac{9}{5}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|+\log_{\frac{9}{5}}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)\right|$,
если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

11.106. $\sin 15^\circ$.

11.107.* $\sin 18^\circ$.

11.108. $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$.

11.109. $\arcsin(\sin 5)$.

11.110.* (МГУ, мех-мат, 1999, устный)

$$\operatorname{arctg} 8 + \operatorname{arctg}\frac{19}{22} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right).$$

Домашнее задание

11.111. $\sin^4\dfrac{\pi}{8} + \cos^4\dfrac{3\pi}{8} + \sin^4\dfrac{5\pi}{8} + \cos^4\dfrac{7\pi}{8}$.

11.112. $\sin^4\dfrac{\pi}{16} + \sin^4\dfrac{3\pi}{16} + \sin^4\dfrac{5\pi}{16} + \sin^4\dfrac{7\pi}{16}$.

11.113. $\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 195^\circ$.

11.114. $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 310^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ) \times (\cos 320^\circ - \cos 380^\circ)$.

11.115. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

$$8\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ.$$

11.116. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

$$\frac{20\sin 80^\circ \sin 65^\circ \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}.$$

11.117. (МГУ, почвоведения, 2002, 2(7))

$$\cos\frac{5\pi}{8}.$$

11.118. (МГУ, почвоведения, май 2004, 1(6))

$$\sin 255^\circ.$$

11.119. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 1(10))
Упростите и затем вычислите при $\alpha = 180^\circ$ значение выражения

$$\cos^2\left(135^\circ - \frac{\alpha}{8}\right) - \cos^2\left(495^\circ + \frac{\alpha}{8}\right).$$

11.120. (МГУ, почвоведения, май 1996, 1(6))
Найдите $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, если известно, что $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, а $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

11.121. (МГУ, почвоведения, 2000, 3(7))
Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, а $\sin 4\alpha > 0$.

11.122. (МГУ, почвоведения, 2002, 2(7))
Вычислить $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\sin\alpha = 2\cos\alpha$.

11.123. (МГУ, почвоведения, 2006, 1(7))
Найти $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

11.124. (МГУ, социологический, 2008, 2(7))
Найти $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$, при $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

11.125.* $\sin 42^\circ$.

11.126. $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$.

11.127. $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\right)$.

11.128. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3\right)$.

11.129. $\sin(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$.

11.130. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Найдите все натуральные n, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg}\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right) \le \frac{2\pi}{n}.$$

11.131. $\arccos(\cos 10)$.

11.132. $\arccos(\sin 4)$.

12 Тригонометрические уравнения

12.1 Простейшие тригонометрические уравнения

12.1. (МГУ, 2011, 2(8))
$(\cos x - \sin x)^2 = 1.$

12.2. (МГУ, 2012, 4(8))
$\cos 3x = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$

12.3. (МГУ, 2017, 3(8))
$\sin 7x + \sin 6x = \sin x.$

12.4. $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}.$

12.5. $\sin 3x - \sin 11x = 0.$

12.6. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 4(8))
$\sin^2 11x = \cos^2 17x.$

12.7. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

12.8. $\sin 2x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{1}{8}.$

Домашнее задание

12.9. $\sin x \operatorname{tg} x \cos x \operatorname{ctg} x = 0.$ **“Тест”**

12.10. $\operatorname{ctg}^2 x = 3.$

12.11. $\cos^2 3x - \sin^2 3x = 1.$

12.12. $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x.$

12.13. $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1.$

12.14. (МГУ, ИСАА, 1998, 1(7))
$\sin^2 x + \sin^2 6x = 1.$

12.15. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right).$

12.2 Сведение к одному аргументу и одной функции

Тригонометрические уравнения часто сводятся к нахождению корней алгебраического уравнения и последующего решения простейших тригонометрических уравнений. При сведении к алгебраическому уравнению вначале необходимо свести к тригонометрическому уравнению с одинаковым аргументом, а затем, не изменяя аргумента, свести к алгебраическому уравнению относительно одной функции синус, косинус, тангенс или котангенс.

12.16. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$

12.17. $\cos\dfrac{x}{3} = 2\cos\dfrac{x}{6} - 1.$

12.18. $2\sin^2 x - 3 = -6\cos^2 x.$

12.19. (МГУ, геологический, 1966, 3(4))
$4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x.$

12.20. $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{15}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{2}.$

12.21. $\cos^{10} x + \sin^{10} x = \dfrac{29}{64}.$

12.22. $\cos 2x = 2\,\mathrm{tg}^2\, x - \cos^2 x.$

12.23. (МГУ, мех-мат, 2008, 2(6))

Игорь решал тригонометрическое уравнение и получил ответ

$$(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ в конце учебника выглядел иначе:

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \ \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k,\ \ n, k \in \mathbb{Z}.$$

Правильный ли ответ получил Игорь? Привести пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

12.24. (МГУ, мех-мат, 2010, 3(6))

Найдите наименьшее из положительных значений функции

$$\frac{4}{3\cos^2 x + 2\sin x - 1}.$$

Домашнее задание

12.25. $3\sin^2 x + 7\cos x - 3 = 0.$

12.26. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 1(7))
$\cos 2x + 3\sin x + 1 = 0.$

12.27. (МГУ, географический, май 1999, 1(6))
$3\cos 4x + 5\sin 2x = -1.$

12.28. $\cos x - \cos\dfrac{x}{2} = 2.$

12.29. $\sin\dfrac{x}{4} + \cos\dfrac{x}{2} = 1.$

12.30. (МГУ, ФББ, 2009, 4(9))
$8\cos^2(5x) - 4\cos^2(10x) = 1.$

12.31. $\cos^2 2x - 5\cos^2 x = -1.$

12.32. (МГУ, биолого-почвенный, 1968, 2(5))
$\cos 4x + 2\cos^2 x = 1.$

12.33. $17\sin\dfrac{3x}{2} - \sqrt{17}\cos 3x = 0.$

12.34. $\sin 2x = \cos^4\dfrac{x}{2} - \sin^4\dfrac{x}{2}.$

12.35. (МГУ, биологический, 1984, 2(5))
$2\cos 2x + \cos^2\dfrac{x}{2} - 10\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) + \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}\cos x.$

12.36. $3 = \dfrac{3}{\sin^2 5x} + \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,5x.$

12.37. (МГУ, психологический, 2003, 2(5))
$\sin 3x \sin x = -\dfrac{1}{8}.$

12.38. (МГУ, филологический, 1974, 3(5))
$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$

12.39. $\cos^8 x - \sin^8 x = \cos^2 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x.$

12.40. $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{41}{128}.$

12.3 Использование формул приведения

12.41. (Филиал МГУ в г. Баку, 2016, 4(8))

$$\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)+2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=3-3\sin x.$$

12.42. (Филиал МГУ в г. Баку, 2014, 3(8))

$$8\cos^4\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)+11\cos 2x+1=0.$$

12.43. $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3\sin(\pi-x)+\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=1.$

Домашнее задание

12.44. $5+2\cos 2x-4\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0.$

12.45. $\sin\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right).$

12.46. $\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right)=\sin(4x-5\pi).$

12.47. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 5(8))

$$5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)-1.$$

12.4 Однородные уравнения

Уравнения вида

$$a_n\sin^n x+a_{n-1}\sin^{n-1}x\cos x+\ldots+a_1\sin x\cos^{n-1}x+a_0\cos^n x=0$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа и сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ в каждом слагаемом равна n, называются *однородными относительно* $\sin x$, $\cos x$. Такое уравнение при $\cos x\neq 0$ эквивалентно уравнению

$$a_n\mathrm{tg}^n x+a_{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}x+\ldots+a_1\,\mathrm{tg}\,x+a_0=0,$$

которое получается из исходного делением обеих частей уравнения на $\cos^n x$.

Некоторые тригонометрические уравнения сводятся к однородным с помощью представления $1=\sin^2 x+\cos^2 x$.

12.48. $\sin x - 2\cos x = 0.$

12.49. $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0.$

12.50. $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 2.$

12.51. $2\sin^3 x - 3\sin x = 2\cos^3 x + \cos x.$

Домашнее задание

12.52. $\sin 2x - \cos 2x = 0.$

12.53. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0.$

12.54. $3\sin x\cos x + \cos^2 x = 2.$

12.55. $2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

12.56. (МГУ, 2016, 3(8))
$2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x.$

12.57. (МГУ, почвоведения, 1979, 3(5))
$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1.$

12.58. $\sin^2 x(\operatorname{tg} x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3.$

12.59. (МГУ, психологический, 2006, 3(6))
$\log_2(3|\sin x| - |\cos x|) + \log_2|\cos x| = 0.$

12.60. (МГУ, мех-мат, 2007, 3(6))
$3\cos x|3\sin x + \cos x| = \sin x|\cos x - 3\sin x|.$

12.5 Введение дополнительного угла

Для решения некоторых задач надо проводить преобразования методом введения дополнительного угла. Метод описан в разделе тригонометрических формул.

12.61. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$

12.62. $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$.

12.63. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}\,(\sin 6x + \cos 8x)$.

12.64. (МГУ, психологический, 1996, 3(5))
Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x + 8 - \sqrt{3}}}.$$

12.65.* (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 7(10))

$$2 + \cos x = \sqrt{3}\left|\sin\frac{3x}{4}\right|\sin x.$$

Домашнее задание

12.66. (МГУ, Высшая школа гос. аудита, 2008, 2(9))
$\cos x - \sin x = 1$.

12.67. (МГУ, экономический, 1984, 2(6))
$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$.

12.68. (МГУ, биологический, 2005, 2(6))
$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

12.69. $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2}$.

12.70. $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2}\sin 15x$.

12.71. $\sin 11x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x + \dfrac{1}{2}\cos 7x = 0$.

12.72. $3\sin x + 4\cos x = 5$.

12.73. $2 + \cos\dfrac{3x}{2} + \sqrt{3}\sin\dfrac{3x}{2} = 4\sin^2\dfrac{x}{4}$.

12.74. (МГУ, геологический, 1979, 3(6))
Найти все значения c, при которых уравнение
$4\sin x + 9\cos x = c$ имеет решение.

12.75. (МГУ, филологический, 1994, 4(6))

$$\frac{2}{\pi}\sin x + \cos 19\pi = \cos x.$$

12.76. $5\sin 2x + 6\cos 3x = 5\sqrt{3}\,\sin\left(2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) - 8\sin 3x.$

12.77.* (МГУ, геологический, 1981, 6(6))

Показать, что функция $y = \sin^2 x - 12\sin x\cos x + 3\cos^2 x - 2\sqrt[3]{66}$ может принимать неотрицательные значения.

12.6 Симметрические уравнения

Тригонометрический многочлен называется *симметрическим*, если при замене синуса и косинуса одного аргумента местами, многочлен не меняется. Симметрический многочлен может быть сведен к многочлену относительно $\sin x + \cos x$ и $\sin x\cos x$.

Симметрические уравнения решаются с помощью следующей замены $\sin x + \cos x = t$. Тогда из тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ следует, что $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x\cos x = 1$, откуда $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$. В итоге получается алгебраическое уравнение относительно новой переменной t.

12.78. $\sin x + \cos x - \sin x\cos x = 1.$

12.79. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$

Домашнее задание

12.80. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \sin 2x - 4(\cos x + \sin x).$$

12.81. $\sin^3 x + \cos^3 x + 1 = 3\sin x\cos x.$

12.82. (МГУ, физический, 1967, 3(5))

$$5\,(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}\,(2 + \sin 2x).$$

12.7 Кососимметрические уравнения

Кососимметрический многочлен может быть сведен к многочлену относительно $\sin x - \cos x$ и $\sin x \cos x$.

Кососимметрические уравнения решаются с помощью замены $\sin x - \cos x = t$. Тогда из тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ следует, что $(\sin x - \cos x)^2 + 2\sin x \cos x = 1$, откуда $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$. В итоге получается алгебраическое уравнение относительно новой переменной t.

12.83. $\sin x - \cos x + \sin x \cos x = 1.$

Домашнее задание

12.84. $\sin x \cos x - 6(\sin x - \cos x) - 6 = 0.$

12.85. $3\sin x \cos x + \sin x = 1 + \cos x.$

12.86. (МГУ, географический, 2006, 3(6))
$$2\sin x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

12.8 Универсальная тригонометрическая подстановка

12.87. (МГУ, филологический, 2005, 5(7))
$$2 + \sin x = 3\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

12.88. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2006, 2(10))
$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} x.$$
“Тест”

Домашнее задание

12.89. $\sin 2x + \operatorname{ctg} x = 2.$

12.90. (МГУ, биологический, 1973, 2(5))
$$2\cos 2x - 1 = (2\cos 2x + 1)\operatorname{tg} x.$$

12.91. (МГУ, химический, 1966, 4(4))

$$3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x.$$

12.92. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Для всех значений параметра $a \in (0;\,1)$ решите уравнение

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x = 1.$$

12.93.* $(\cos x - \sin x)\left(2\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos x}\right) + 2 = 0.$

12.9 Разложение на множители

12.94. (Филиал МГУ в г. Баку, 2015, 3(8))

$$5\cos 2x = 11\cos x - 11\sin x.$$

12.95. (Филиал МГУ в г. Астана, 2017, 4(8))

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

12.96. (МГУ, физический, 1998, 1(8))

$$\cos 4x - \sin 3x\cos x + \cos 2x = 0.$$

12.97. $\sin 2x + \sin 6x = 3\cos^2 2x.$

12.98. (МГУ, химический, 1979, 1(5))

$$\sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{6}\sin x.$$

12.99. (МГУ, физический, 1970, 1(5))

$$\frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 2x) - 1 = 2\sin 2x - 2\sin x - \sin x\sin 2x.$$

12.100. (МГУ, психологический, 2001, 3(5))

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0.$$

12.101. $\sin^2(2+3x)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right) = \cos^2(2-5x)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-6x\right).$

12.102.* (МГУ, психологический, 2006, 6(6))

$$9\cos 2x + 9\cos 6x = 36\cos x\cos 3x + 140\sqrt{3}\sin x\sin 2x - 162.$$

Домашнее задание

12.103. $\sin 3x - 4\sin x\cos 2x = 0.$

12.104. (МГУ, почвоведения, 1993, 2(5))
$\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0.$

12.105. $\sin x + \sin 3x + 4\cos^3 x = 0.$

12.106. $3\sqrt{3}\sin 2x = 10\sin x - 4\sin^3 x.$

12.107. $2\cos x\cos 2x - (1 - 2\sqrt{2}\,)\sin 2x = 2(1 - \sqrt{2}\,)\cos x.$

12.108. (МГУ, химический, 1979, 1(5))
$\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x.$

12.109. (МГУ, химический, ФНМ, 2006, 3(6))
$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6}\cos x.$

12.110. (МГУ, почвоведения, 1973, 3(5))
$$(\cos x - \sin x)\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \sin x = 2\cos^2 x.$$

12.111. (МГУ, психологический, 1991, 2(5))
$(\cos x - 1)(2\sin x - \cos 2x - 2) = 2\sin^2 x.$

12.112. (МГУ, психологический, 2001, 3(5))
$3\cos^2 x + 2\cos x - \sin x - 2\sin 2x - 1 = 0.$

12.113.* $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right).$

12.10 Отбор корней

В некоторых тригонометрических уравнениях необходимо кроме нахождения корней провести их отбор. Например, необходимо выбрать корни из заданного промежутка, или корни должны удовлетворять ОДЗ уравнения.

12.10.1 Учет ОДЗ

12.114. (МГУ, хим, географ, биолог, психолог, ФББ, ФФМ, ФНМ, физико-химический, 2008, 1(7))
$$\frac{\cos 2x}{1-\sqrt{2}\sin x}=0.$$

12.115. (МГУ, географический, 2004, 2(6))
$$\frac{\sin 3x}{\sin x+\sin 2x}=0.$$

12.116. $\sin 3x\cdot\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0.$

12.117. (МГУ, экономический, 1983, 2(6))
$$\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}5x.$$

12.118. (МГУ, геологический, экономический, 1982, 4(6))
$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x}=1.$$

12.119. (МГУ, 2013, 4(8))
$$\frac{\sin 5x}{\sin x}-\frac{\cos 5x}{\cos x}=\frac{\sin x}{\sin 5x}-\frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

Домашнее задание

12.120. $\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=0.$

12.121. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 3(7))
$$\frac{\sin 3x}{1+2\cos 2x}=0.$$

12.122. (МГУ, геологический, 2007, 2(8))
$$\frac{\cos 2x+\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}\cos x.$$

12.123. (МГУ, географический, 2004, 2(6))
$$\frac{\sin 4x}{\cos x-\cos 3x}=0.$$

12.124. (МГУ, мех-мат, 1980, 2(5))
$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = 1+\sin x.$$ **"Тест"**

12.125. (МГУ, ВМиК, 1983, 2(6))
$$\frac{1+2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1.$$

12.126. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 11x.$

12.127. (МГУ, экономический, 1983, 2(6))
$$\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} 3x.$$

12.128. (МГУ, почвоведения, май 1996, 4(6))
$$(1-\cos 8x)\operatorname{tg} x = 6\sin^2 4x \operatorname{ctg} x.$$

12.129. (МГУ, химический, 2001, 3(7))
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x.$$

12.130. (МГУ, геологический, экономический, 1982, 4(6))
$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x} = -1.$$

12.131. (МГУ, ВМиК, 1978, 2(5))
$$\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(\sin 4x\cos 5x - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\times$$
$$\times\left(\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin 5x\cos 4x\right).$$

12.10.2 Выбор корней из промежутка

12.132. (МГУ, филологический, март 2003, 2(6))
Сколько корней имеет уравнение $\sin 5\pi x + \cos 2\pi x = 0$ на отрезке $[-2;\ 0]$? **"Тест"**

12.133. Найдите все корни уравнения $\cos x\cos\frac{\pi}{5} + \sin x\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4}\right]$.

12.134. (МГУ, почвоведения, май 2002, 4(7))
Найдите все значения x из интервала $(0;\,2\pi)$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $\sin x$ и $\cos(x+\pi)$ равно $\frac{1}{2}$.

12.135. (МГУ, ИСАА, 2003, 4(6))
Найти корни уравнения $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1=2(\sqrt{2}+1)\operatorname{ctg}x$, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{4};\,\dfrac{7\pi}{4}\right]$. **"Тест"**

12.136. (МГУ, мех-мат, март 2004, 1(6))
Найти сумму тангенсов всех $x\in(-\pi;\,\pi)$ таких, что

$$4\sin 2x+9\cos 2x=3.$$

12.137. (МГУ, мех-мат, март 2000, 3(6))
Найдите все корни уравнения $\cos x\sin\dfrac{x}{4}+\dfrac{9}{10}\sin x+2\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{4}-\dfrac{9}{20}=0$, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};\,-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Домашнее задание

12.138. Найти корни уравнения $3\cos 2x-5\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, принадлежащие отрезку $[\pi;\,2\pi]$.

12.139. (МГУ, ИСАА, 2001, 2(7))
Найти все решения уравнения $5\sin^2 2x+8\cos^3 x=8\cos x$, удовлетворяющие условиям $\dfrac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi$.

12.140. Найдите все корни уравнения
$\sin x\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

12.141. (МГУ, ВМиК, 2007, 1(6))
Найдите все решения уравнения

$$2\sin\left(x+\frac{7\pi}{25}\right)\cdot\sin\left(3x+\frac{18\pi}{25}\right)=\cos 4x+2^{\cos\frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{10};\,\dfrac{4\pi}{5}\right]$.

12.142. (МГУ, геологический, 2006, 6(8))
Найдите корни уравнения $\dfrac{\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 3x)}{\cos 2x - \sin 3x} = 1$, расположенные в интервале $(1;\ 2)$.

12.143. (МГУ, тест, мех-мат, 1995, 4(8))
Найти корни уравнения $\sin 2x + 1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, лежащие в интервале $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

12.144. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 4(8))
Найти все решения уравнения $6\cos\dfrac{15\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{x}{2} - \cos x = 3$, принадлежащие отрезку $[-2;\ 10{,}99]$.

12.145. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 5(7))
Найти все значения $x \in \left[\dfrac{2\pi}{3};\ 3\pi\right]$, удовлетворяющие уравнению $1 + \cos 2x = 4\sin x$.

12.146. Найдите все решения уравнения
$\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$, удовлетворяющие условию $0{,}4\pi < x < \frac{6\pi}{7}$.

12.147. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 4(8))
Найти корни уравнения $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos 2x}{\cos\left(x - \frac{7\pi}{3}\right)} = 0$, расположенные на промежутке $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

12.148. (МГУ, психологический, 2004, 3(5))
Решить уравнение $\sqrt{5}\cos x\,\mathrm{ctg}\,x - \sqrt{15}\cos x - \sqrt{15}\,\mathrm{ctg}\,x = 0$ и найти сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ \pi]$. **"Тест"**

12.10.3 Уравнения с модулем

12.149. (МГУ, почвоведения, 1977, 3(5))
$$|\cos x| = \cos x - 2\sin x.$$

12.150. (МГУ, мех-мат, 2006, 4(6))

$$|1-2\sin x+\cos x|+2\sin x+1=\cos 2x.$$

12.151. (МГУ, “Ломоносов-2011”, заочный тур, 5(10))
Найти все решения уравнения $|\sin 2x-\cos x|=\big||\sin 2x|-|\cos x|\big|$ на интервале $(-2\pi;\ 2\pi]$.

12.152. (МГУ, “Ломоносов-2009”, 6(9))
Сколько решений на отрезке $[0;\ \pi]$ имеет уравнение

$$5\sin x+4=|5\cos x+2|?$$

12.153.* (МГУ, “Ломоносов-2007”, 9(10))
Найти все значения $x\in(0;\ \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x|+|\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x|=\operatorname{tg} 3x.$$

12.154.* Найдите все решения уравнения $|\cos(2x-3)|=\sin x$, удовлетворяющие условию $|x|\le 2\pi$.

Домашнее задание

12.155. (МГУ, биологический, 1982, 2(5))

$$4|\sin x|+2\cos 2x=3.$$

12.156. (МГУ, почвоведения, 1977, 3(5))

$$|\operatorname{tg} x|=\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos x}.$$

12.157. (МГУ, почвоведения, 1977, 3(5))

$$|\operatorname{ctg} x|=\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}.$$

12.158. (МГУ, почвоведения, май 2004, 4(6))

$$|\cos x-2\sin x|+\cos x=0.$$

12.159. (МГУ, экономический, 2008, 2(7))

$$\frac{|\sin x|}{\operatorname{tg} x}=\cos 3x.$$

12.160. (МГУ, экономический, 1995, 2(6))

$$2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right) = 0.$$

12.161. (МГУ, мех-мат, 1990, 2(6))

$2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^{x|\sin x|}$. **“Тест”**

12.162. (МГУ, факультет Гос. управления, 2007, 2(7))

$$\left|\left|\sin x - \frac{1}{4}\right| - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{3}\left(\sin x + \frac{1}{4}\right).$$

12.163.* На отрезке $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $|\cos x| + \sin(2x+3) = 0$. **“Тест”**

12.10.4 Иррациональные уравнения

12.164. (МГУ, почвоведения, 1982, 2(5))

$$\sqrt{3 + 4\cos 2x} = \sqrt{2\cos x}.$$

12.165. (МГУ, мехмат, 1982, 3(5))

$$\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0.$$

12.166. (МГУ, мех-мат, март 1999, 4(6))

$$\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0.$$

12.167.* $\cos x\sqrt{\sin\frac{3x}{4}} = 0.$

12.168.* (МГУ, географический, май 2000, 6(6))

$$\sqrt{\cos 2x + 2\sin^2 x + \sin x + 1} - \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x + 1}} - 1 = 0.$$

Домашнее задание

12.169. (МГУ, психологический, 1987, 4(6))
$$\sqrt{\frac{3}{4}-\cos x}=\sqrt{\frac{3}{4}-\cos 3x}.$$

12.170. (МГУ, почвоведения, 2004, 5(7))
Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $0 \le x < \pi$ и являющиеся решениями уравнения $\sqrt{\operatorname{tg} 3x}=\sqrt{-\operatorname{tg} x}$.

12.171. (МГУ, почвоведения, 1996, 4(6))
Найти все решения уравнения $\sqrt{x+\sin x}=\sqrt{x-\sin 2x}$, удовлетворяющие неравенству $-2\pi < x < 2\pi$. **"Тест"**

12.172. (МГУ, геологический, 2005, 4(8))
Найти наименьший корень уравнения
$$\sqrt{\cos 2x+x-11}=\sqrt{x-15-5\cos x}.$$

12.173. (МГУ, химический, 1994, 3(5))
$$\sqrt{\sin 2x}=\sqrt{\cos x-\sin x-1}.$$

12.174. (МГУ, мех-мат, 1982, 3(5))
$$\sqrt{2\cos x\sin 2x}=\sqrt{5\sin x+4\sin 2x}.$$

12.175. (МГУ, экономический, 1979, 1(5))
$$\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2.$$

12.176. (МГУ, экономический, 1979, 1(5))
$$\sqrt{37-48\operatorname{ctg} x}=8\operatorname{ctg} x-5.$$

12.177. (МГУ, психологический, 2005, 3(6))
$$\sqrt{2\cos^2 x-\sqrt{3}}+\sqrt{2}\sin x=0.$$

12.178. (МГУ, ВМиК, 2003, 2(6))
$$\sqrt{\sin x\cdot\sin 3x}=\cos x.$$

12.179. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2005, 3(7))
$$\sqrt{6\operatorname{ctg} x - 8} = \frac{1}{\sin x}.$$

12.180. (МГУ, ВМиК, 2005, 2(6))
$$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15}\cdot\sin x.$$

12.181. (МГУ, ВМиК, апрель 1999, 3(6))
$$\sqrt{\frac{1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x\cos x.$$

12.182. (МГУ, географический, 1972, 5(5))
$$2\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2-2\cos 2x} = 3\sin 2x.$$

12.183. $$\sqrt{\frac{1-4\cos^2 3x}{8\cos(2x-\frac{2\pi}{3})}} = \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$$

12.184. (МГУ, ФНМ, апрель 2004, 5(6))
$$\sqrt{\sin x + 2\cos 2x} - \sqrt{2}\cos 2x = 0.$$

12.185. (МГУ, психологический, 1979, 1(5))
$$\sqrt{9-6\sqrt{2}-(12-8\sqrt{2})\cos x} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos x + 1.$$

12.186. (МГУ, экономический, 1987, 1(6))
$$(2\sin x - 1)\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = 0.$$
"Тест"

12.187. (МГУ, мех-мат, 1997, 1(6))
$$(\sqrt{3}\,\sin x + \cos x - \sqrt{2})\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0.$$

12.188. (МГУ, мех-мат, 1995, 3(6))
$$\sqrt{\sin 3x}\cdot\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

12.189. (МГУ, ВМиК, апрель 1996, 3(6))
$$\sqrt{12\sin x - \frac{9}{2}\cos 2x + \frac{17}{2}} = \frac{9}{8} + 4\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x.$$

12.190. (МГУ, ВМиК, 1993, 2(6))
На отрезке $0 \le x \le \pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}$.

12.191.* $\sin x \sqrt{\cos \dfrac{3x}{4}} = 0.$

12.192.* (МГУ, ВМиК, Олимпиада "Абитуриент-2005", 6(6))
$$12\cos 2x + 8|\sin x|\sqrt{3 + |\sin x| - 3\cos 2x} = 11.$$

12.10.5 Показательные и логарифмические уравнения

12.193. (МГУ, химический, 1989, 3(5))
$$\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2(\cos x) = 0.$$ **"Тест"**

12.194. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2005", 4(10))
$$\log_4(4\sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x).$$

12.195. (МГУ, ВМиК, 1990, 3(6))
$$3 \cdot 64^{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0.$$

12.196.* (МГУ, ВМиК, апрель 1995, 3(6))
Найти все корни уравнения $2^{\cos x} + 5 \cdot 2^{-\cos x} = 2\sqrt{6}$, удовлетворяющие неравенствам $\frac{\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{3}$.

12.197. (МГУ, ИСАА, 2008, 5(8))
Найти корни уравнения $\cos\dfrac{4\pi}{x} + \sin\dfrac{8\pi}{x} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{x}\right)$, удовлетворяющие неравенству $\log_{x+2}(x^2 - 2x + 4) \le 1$.

Домашнее задание

12.198. (МГУ, социологический, 2001, 2(6))
$$\log_{\sin x}(3\sin x - \cos 2x) = 0.$$

12.199. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 3(8))
$$\log_{(-2\cos x)}(3\sin x - \cos 2x) = 0.$$

12.200. $\log_{\cos x}\sin x + \log_{\sin x}\cos x = 2.$

12.201. (МГУ, химический, 1989, 3(5))

$$\log_2(3\cos x - \sin x) + \log_2(\sin x) = 0.$$ **“Тест”**

12.202. (МГУ, мех-мат, 1978, 2(5))

Найти все решения уравнения $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{4};\, 1\right]$. **“Тест”**

12.203. (МГУ, химический, заочный тур, 2000, 3(12))

$$\log_{|\sin x|}(x^2 - 14x + 73) \geq \frac{2}{\log_5|\sin x|}.$$

12.204. (МГУ, экономический, 1994, 3(5))

$$\log_3((x+10)\cos x) = \log_3\left(\frac{x+10}{\cos x}\right).$$

12.205. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, ФФМ, ФБиБ, географический, психологический, 2007, 6(8))

$$\log_{\cos x}(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2\sin^2 x + 5\sin 2x = 0.$$

12.206. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 4(8))

$$\log_{|\cos\frac{x}{2}|}\left|1 - 2\cos\frac{\pi}{6}\right| = \log_{\cos|\frac{x}{2}|}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$$

12.207. (МГУ, геологический, 1995, 5(8))

$$\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x + 3\pi) - \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\log_2(4 - x^2) = 0.$$ **“Тест”**

12.208. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2006, 3(7))

$$\log_{\frac{6-|x-3|}{9-\pi}}(1 - \sin 2x - 2\sin x) = \log_{\frac{6-|x-3|}{9-\pi}}(-\cos x).$$

12.209. (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 2(6))

$$\log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\sin 2x - 2\sin x + 1) = \log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\cos x).$$ **“Тест”**

12.10.6 Дополнительные условия

12.210. Найдите все корни уравнения $1-5\sin x+2\cos^2 x=0$, удовлетворяющие условию $\cos x \geq 0$.

12.211. $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{2\pi}{3}+\sin x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

12.212. (МГУ, геологический, 1982, 4(6))

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\cos x\right)=-\frac{1}{2}.$$

12.213. Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}^2 x=3\sin x$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{ctg} x\leq 0$.

12.214. (МГУ, химический, 1977, 5(5))
Найти корни уравнения
$$\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{9x}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{8}-\frac{3x}{2}\right),$$
удовлетворяющие неравенству $\sin\dfrac{3x}{2}<0$.

Домашнее задание

12.215. Найдите все корни уравнения $2\cos 2x-4\cos x=1$, удовлетворяющие условию $\sin x\geq 0$.

12.216. (МГУ, экономический, 2007, 2(7))
Найдите все решения уравнения $\cos 3x=\sin x$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам: $\sin x\geq 0,\ \cos x\leq 0$.

12.217. (МГУ, экономический, 1985, 3(5))
Найти все корни уравнения $(1+\operatorname{tg}^2 x)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x<0$.

12.218. (МГУ, геологический, 1982, 4(6))

$$\sin\left(\frac{11\pi}{8}\cos x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

12.219. (МГУ, экономический, 1989, 4(6))
Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x)=\sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$. **"Тест"**

12.220. (МГУ, мех-мат, март 1998, 2(6))
Найдите все решения уравнения $2\cos\dfrac{x}{3}+2(\sqrt{5}-1)\sin\dfrac{x}{6}=2-\sqrt{5}$, удовлетворяющие условию $\cos\dfrac{3x}{4}<0$.

12.221. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 3(7))
Найдите все значения x из интервала $(8;\ 12)$, для которых справедливо равенство $2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\sin x=\sqrt{6-6\cos\frac{14\pi}{5}}$.

12.222. (МГУ, химический, 1977, 5(5))

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

удовлетворяющие условию $\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)<0$. **"Тест"**

12.11 Исследование области изменения функций

12.223. (МГУ, почвоведения, май 2001, 3(6))

$$x^2-\cos 2x^2+1=0.$$

12.224. (МГУ, 2014, 4(8))

$$\cos^2 x-\cos x\,\sin^2\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{1}{4}=0.$$

12.225. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 2(10))
Решите неравенство $\sin x\cdot\sin 1755x\cdot\sin 2011x\geq 1$.

12.226. (МГУ, ВМиК, 2010, 3(6))

$$\operatorname{tg}^2(5x+\sin^2 y)+\left|\frac{5x+\cos 2y}{3}+\frac{3}{5x+\cos 2y}\right|=4\cos^2\frac{7\pi}{4}.$$

12.227. (МГУ, психологический, 1993, 3(5))
Найти все решения уравнения $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)+\sin 3x=\cos 3x-\sqrt{2}$ на отрезке $[-2\pi;\ 2\pi]$.

12.228. $\sin^7 x + \cos^{12} x = 1.$

12.229. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3.$

12.230.* $\cos x \cdot \sin 7x + \sin x = \dfrac{3}{2}.$

12.231. (ФМШ, 1996, 4(6))
$\sin x \cdot \cos 4x = 1.$

12.232. (ФМШ, 1990, 3(6))
$x^2 - 2x\sin(xy) + 1 = 0.$

12.233.* $\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$

12.234. (МГУ, химический, 1991, 4(5))
$4\cos^4 x = \cos 2x + 2\cos^2 x \cos 8x.$

12.235. (МГУ, психологический, 2002, 5(6))
$\cos 6x - 3\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 5 = 0.$

12.236. $\sin^6 x \cdot \cos^8 x = \dfrac{1}{50}.$

12.237.* $\lg(\sin x - 0{,}6) + \lg(\cos x - 0{,}7) + 1 = 0.$

Домашнее задание

12.238. $\sin x + \sin 9x = 2.$

12.239. (МГУ, 2014, 4(8))
$$\sin^2 x + \sqrt{2}|\sin x|\cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0.$$

12.240. (МГУ, почвоведения, май 2001, 3(6))
$$\frac{1}{\cos^2 z} = 1 - z^2.$$

12.241. (МГУ, ИСАА, 1993, 5(6))
$$\sin^2 x + 3x^2\cos x + 3x^2 = 0.$$

12.242. (МГУ, химический, 2003, 2(6))
$$\cos^2 8x + \sin^2 x = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 8x.$$

12.243. (МГУ, физический, 1969, 2(5))
$$\cos^2 x + \cos\frac{x}{2}\cdot\cos^2 x - \cos\frac{x}{2} - 1 = 2\left(\sin\frac{x}{4} - \cos x\right)^2.$$

12.244. $\sin^6 x + \cos^{13} x = 1.$

12.245. $\sin x + \cos 3x + \sin 5x = -3.$

12.246.* $3\sin x + 4\cos 3x\cos x + 2\sin 5x = 7.$

12.247. $\sin x\cdot\cos 6x = 1.$

12.248. $\sin x\cdot\cos 7x = 1.$

12.249. $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x(\sin y + \cos y) + 2 = 0.$

12.250. $1 + \cos 2x\cos 3x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x.$

12.251. $4\cos^2 x - 4\cos^2 3x\cos x + \cos^2 3x = 0.$

12.252. $5\cos^5 x - 3\sin^3 x = 5.$

12.253. (МГУ, психологический, 2002, 5(6))
$$\cos 6x - 5\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 7 = 0.$$

12.254.* $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x.$

12.255. $\sin(\cos 3x) = 0{,}95.$

12.256.* (МГУ, ВМиК, апрель 2004, устный)
$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\ \operatorname{ctg}^2 x\ \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$$

12.257.* $\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \dfrac{1}{2}\sin y.$

12.258. $\sin^n x + \dfrac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \dfrac{1}{\sin^m x}$, m, n — натуральные нечетные числа.

12.12 Разные задачи

12.259. (МГУ, тест, мех-мат, 1998, 5(9)) **“Тест”**

Укажите, между какими корнями уравнения
$2\operatorname{tg}\alpha\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha+5)=3(3\operatorname{tg}^2\alpha+1)$ заключено число $-\frac{21}{2}$.

12.260. (МГУ, почвоведения, 2006, 5(7))

Найти наименьшее положительное число α, при котором синус α градусов равен синусу α радиан.

12.261. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi,\ \ 0\le\alpha,\beta,\gamma$, то из условия $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ следует, что один из углов α,β,γ равен $\frac{\pi}{2}$.

12.262. Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению: $8\cos x\cos y\cos(x+y)+1=0$.

12.263. (МГУ, мех-мат, 1965)

Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению: $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\dfrac{3}{2}$.

12.264. Доказать, что если число α иррационально, то функция $\cos\alpha x+\cos x$ не является периодической.

Домашнее задание

12.265. (МГУ, географический, май 2003, 1(6))

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{2}-4x\right)+\operatorname{tg}x=\sqrt{3}\left(1-\frac{\operatorname{tg}4x}{\operatorname{ctg}x}\right).$$

12.266. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2006”, 2006, 3(10))

$$\cos\left(x^2+x\right)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

12.267. (МГУ, тест, мех-мат, 1998, 5(9)) **“Тест”**

Укажите, между какими корнями уравнения
$3\operatorname{tg}\alpha\cdot(\operatorname{tg}\alpha-2)^2=(2\operatorname{tg}\alpha-1)^2-7\operatorname{tg}\alpha+5$ заключено число $-\frac{31}{3}$.

12.268. Найти ближайший к 10 корень уравнения
$$\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 18\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right).$$

12.269. Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению: $\cos(x-y)-2\sin x+2\sin y=3$.

12.270. $8\sin x\sin y\cos(x+y)=1$.

12.271. $\sin x+\sin y+\cos(x+y)=\dfrac{3}{2}$.

12.272. $\cos x+\cos y+\cos(x+y)+\dfrac{3}{2}=0$.

12.273.* $\sin x+\sin y+\sin(x+y)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

12.274.* Доказать непериодичность функции $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

12.275. (МГУ, экономический, 2000, 7(7))
Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\dfrac{1}{6};\,6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве условиям
$$\frac{1}{\cos^2 f(x)-0{,}5}-12\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{10}{x}\quad \text{и}\quad 0\le f(x)\le\frac{\pi}{4}.$$
Решите неравенство $f(x)\le\dfrac{\pi}{8}$.

12.13 Тригонометрическая замена в алгебраических уравнениях

12.276.* (МГУ, химический, заочный тур, 2000, 5(12))
$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}.$$

12.277.* (МГУ, геологический, 1981, 6(6))
$$|x+\sqrt{1-x^2}|=\sqrt{2}(2x^2-1).$$

12.278.* (МГУ, биологический, 1985, 5(5))
Сколько корней на отрезке [0; 1] имеет уравнение
$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1.$$

Домашнее задание

12.279.* (МГУ, эконом., менеджмент, апрель 2003, 4(5))
$$\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{1-\tfrac{x^2}{9}}+\tfrac{2}{9}x^2-\tfrac{\sqrt{2}}{3}x-1=0.$$

12.280. (МГУ, геологический, 1981, 6(6))
$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1.$$

12.281.* $|2x-\sqrt{1-4x^2}|=\sqrt{2}(8x^2-1).$

12.282.* $1+x^3=(x^2+3x-1)\sqrt{1-x^2}.$

12.283.* (МГУ, биологический, 1985, 5(5))
Сколько корней на отрезке [0; 1] имеет уравнение
$$8x(1-2x^2)(3x-4x^3)=1.$$

12.14 Обратные тригонометрические функции

12.284. $2\arcsin x=\arccos x.$

12.285. $2\arccos x=\arccos(x-1).$

12.286. $\sin(5\operatorname{arctg}3x)=1.$

12.287. (МГУ, географический, 2001, 5(6))
$$4\arcsin(2^x-7)-\arccos(5^x-124)=\frac{6\pi}{x}.$$

12.288. (МГУ, тест, мех-мат, 1997, 4(10))
$$\sqrt{4x^2+4x+3}\cdot\operatorname{arctg}(2x+1)+\sqrt{x^2-4x+6}\cdot\operatorname{arctg}(2-x)=0.$$

12.289.* (МГУ, тест, мех-мат, 2004, 7(10))
Найти количество корней уравнения
$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{13\pi^2+12x\pi-12x^2}\right)=\arcsin\left(\sin\sqrt{\tfrac{13}{4}\pi^2+3x\pi-3x^2}\right).$$

Домашнее задание

12.290. $2\operatorname{arcctg}x=\operatorname{arctg}x.$

12.291. $2\arccos x=\arcsin x.$

12.292. $2\arccos\dfrac{1}{x}=\arccos\dfrac{1-x}{x}.$

12.293. $\arcsin\dfrac{x}{2}-\arcsin x+\dfrac{\pi}{3}=0.$

12.294. (МГУ, почвоведения, 2005, 2(6))
$\sin(\sqrt{3}\arcsin x)=1.$

12.295. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2005, 4(7))
$$\begin{cases}\arccos\dfrac{x+y}{4}=\arccos\dfrac{5xy}{24},\\ x^2+y^2=13.\end{cases}$$

12.296. (МГУ, географический, 2001, 5(6))
$$2\arcsin(3^x-8)-3\arccos(11^x-120)=\frac{2\pi}{x}.$$

12.297. (МГУ, биологический, ФББ, ФФМ, 2006, 4(6))
$$9^{\arcsin(2x+1)}+\log_3(2\arcsin(2x+1))-3^{\arccos(6x+3)}+\log_{\frac{1}{3}}\arccos(6x+3)=0.$$

12.298. (МГУ, географический, 2006, 6(6))
Найти все значения параметра c, при каждом из которых число решений уравнения $2x\arcsin(\sin x)=c\cdot 3^{\log_3 x}+3$ конечно.

12.299.* (МГУ, социологический, 2008, 7(7))
Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых уравнение $\arcsin(ax)=3\arccos x+\dfrac{\pi}{6}$ имеет хотя бы одно решение.

12.300.* (МГУ, ФНМ, май 2000, 6(6))
$x^2=\arcsin(\sin x)+10x.$

12.15 Тригонометрические системы

12.301. $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

12.302. $\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ **“Тест”**

12.303. (МГУ, ВМиК, 1973, 1(5))

$$\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

12.304. (МГУ, ВМиК, Олимпиада “Абитуриент-2005”, 2(6))

$$\begin{cases} \sin 2(x + y) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

12.305. (МГУ, мех-мат, 1981, 2(5))

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

12.306.* $\begin{cases} \sin(y - 3x) = 2\sin^3 x, \\ \cos(y - 3x) = 2\cos^3 x. \end{cases}$

Домашнее задание

12.307. (МГУ, факультет Гос. управления, 2005, 4(7))

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

12.308. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

12.309. (МГУ, географический, 2005, 1(6))

$$\begin{cases} 12\sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6\sin x + \cos y = -2. \end{cases}$$

12.310. $\begin{cases} \sqrt{\cos x} \cdot \sin 2y = 0, \\ \sin 2x + \cos y = 0{,}5. \end{cases}$

12.311. (МГУ, географический, 1987, 4(5))

Найти все решения системы $\begin{cases} \sin(2x + y) = 0, \\ \cos(x + y) = 1, \end{cases}$

удовлетворяющие условиям $-\pi \leq x \leq \pi$, $-2\pi \leq y \leq -\pi$.

12.312. (МГУ, психологический, 1999, 3(6))

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

12.313. (МГУ, филологический, 1977, 2(5))

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

12.314. (МГУ, филологический, 2000, 4(6))

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

12.315. (МГУ, мех-мат, 1993, 3(6))

$$\begin{cases} (\sin y - \cos x + 1)\left(\operatorname{tg}^2(x + \frac{\pi}{6}) + \operatorname{tg}^2(y + \frac{2\pi}{3})\right) = 0, \\ (\cos x + \sin y)(2 + \sin 2y + \cos y) = 0. \end{cases}$$

12.316. $\begin{cases} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \\ x - y = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$

12.317. (МГУ, физический, 1967, 3(5))

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x - y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

12.318. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x + y), \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$

13 Тригонометрические неравенства

13.1 Тригонометрический круг

Решение тригонометрических неравенств удобно проводить с использованием тригонометрического круга, отмечая на нем дугами решения неравенств. При выписывании ответа надо правильно указывать концы промежутков. При решении неравенств с обратными тригонометрическими функциями можно воспользоваться графиками обратных тригонометрических функций.

13.1. $\cos x > \frac{1}{2}$.

13.2. $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13.3. $\cos x < \frac{1}{2}$.

13.4. $\cos x < \frac{1}{4}$. **"Тест"**

13.5. $\sin x > -\frac{1}{2}$.

13.6. $\sin x < \frac{1}{3}$.

13.7. $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$.

13.8. $\operatorname{ctg} x \geq -3$.

13.9. $\cos x < \cos 6$.

13.10. $\arccos x < \arccos \frac{1}{3}$.

13.11. $\operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{3}$.

13.12. $\sin(\cos x) > 0$.

13.13. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$.

13.14. $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 0$.

13.15. (МГУ, физический, 1966, 1(5))
$2\cos 2x + \sin 2x \geq \operatorname{tg} x.$

13.16. $\sqrt{3\sin x + 1} > 4\sin x + 1.$ **“Тест”**

13.17. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2008, 3(6))
$\sqrt{1+\sin 2x} + |\cos x| \leq \sin x.$

13.18. (МГУ, мех-мат, 2005, 4(6))
$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4} - \cos\frac{x-5}{4}} \geq 0.$$

13.19.* (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2006”, 10(10))
$4(1-\operatorname{tg} x)^{2004} + (1+\operatorname{tg} x)^{2006} \geq 2^{2006}.$

Домашнее задание

13.20. $\cos x > \dfrac{1}{4}.$

13.21. $\cos x < -\dfrac{1}{2}.$

13.22. $\sin x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

13.23. $\sin x > -\dfrac{1}{3}.$

13.24. $\operatorname{tg} x \geq 2.$

13.25. $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}.$

13.26. $\arcsin x \leq 5.$

13.27. $\operatorname{arcctg} x > 2.$

13.28. $4(\arccos x)^2 > 1.$ **“Тест”**

13.29. $\sin x^2 < \dfrac{1}{2}.$

13.30. $4\sin x < 3\cos x.$

13.31. (МГУ, экономический, 1971, 3(5))
$11\sin x + \cos 2x - 6 \geq 0.$

13.32. $20\sin^2 x + 9\cos x < 21.$

13.33. $\sin x \geq \cos 2x.$ **"Тест"**

13.34. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x - 1 \geq 0.$

13.35. (МГУ, биолого-почвенный, 1971, 4(5))
$2\cos 8x \geq 3 + 4\sin 4x.$

13.36. (МГУ, биолого-почвенный, 1970, 5(5))
$2\sin^2 2x + 3\cos 2x < 0.$

13.37. (МГУ, химический, 1992, 2(5))
$\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}.$

13.38. (МГУ, ВМиК, 1971, 2(5))
Найти все решения неравенства $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$, удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

13.39. (МГУ, ВМиК, 2000, 1(6))
$$\sin x \sin |x| \geq -\frac{1}{2}.$$

13.40. (МГУ, ВМиК, 2008, 3(6))
$\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x.$

13.41. (МГУ, ИСАА, 1994, 4(6))
$2\sin x - 1 \leq \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}.$

13.42. $\sqrt{3 - 4\cos^2 x} > 2\sin x + 1.$

13.43. (МГУ, мех-мат, 1966, 2(5))
$5 + 2\cos 2x \leq 3|2\sin x - 1|.$ **"Тест"**

13.44. (МГУ, мех-мат, 1968, 3(6))
$2\operatorname{tg} 2x \leq 3\operatorname{tg} x.$ **"Тест"**

13.45. (МГУ, почвоведения, 2001, 5(6))
$2\log_\pi(\sin x)\log_\pi(\sin 2x) - \log_\pi^2(\sin 2x) \leq \log_\pi^2(\sin x).$

13.46. (МГУ, ВМиК, Олимпиада “Абитуриент-2006”, 4(6))
Найдите все решения неравенства $\operatorname{tg} x > \dfrac{9 - 3\cos 2x}{3\sin 2x - 2}$, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{2}$.

13.47. (МГУ, тест, мех-мат, 1996, 6(8))
$$\frac{\sqrt[6]{x^3 - 6x^2 + 9x}}{\cos x - \sin x} \geq 0.$$ **“Тест”**

13.48. $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \dfrac{3}{8}$.

13.49. (МГУ, ВМиК, 1995, 4(6))
$$\log_{\cos x} \cos^2 x \geq \log_{\cos x - \frac{1}{2}} \left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \frac{51}{4} \right).$$

13.50. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Постройте график функции
$$f(x) = \sqrt{2\cos x + 2\sqrt{2\cos x - 1}} + \sqrt{2\cos x - 2\sqrt{2\cos x - 1}}.$$

13.2 Метод интервалов на тригонометрическом круге

13.51. $\sin 2x > \cos x$.

13.52. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x \leq 0$. **“Тест”**

13.53. (МГУ, мех-мат, 1971, 2(5))
Найти все x из отрезка $0 \leq x \leq \pi$, удовлетворяющие неравенству
$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2} \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Домашнее задание

13.54. (МГУ, геологический, 1970, 3(5))
Найти все значения x, удовлетворяющие неравенствам
$\sin 5x + \sin x > 0$, $0 < x < 2\pi$.

13.55. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

13.56. (МГУ, 2015, 3(8))
$$\cos x + \sqrt{2} \cos 2x - \sin x \geq 0.$$

13.57. (МГУ, химический, 1972, 5(5))
$$(\cos x - \cos 5x)(2\sin x + 3\cos x + 4) > 0.$$

13.58. $2\sin x \sin 2x \sin 3x < \sin 4x$.

13.3 Доказательство неравенств

В задачах №№ 13.59 – 13.65 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Доказать неравенства:

13.59. $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \dfrac{1}{8}$.

13.60. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma \ge -\dfrac{3}{2}$.

13.61.* $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Домашнее задание

13.62. $\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{1}{8}$.

13.63. $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\beta}{2}+\sin\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{3}{2}$.

13.64. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \dfrac{3}{2}$.

13.65.* $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

13.66. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2008, 4(6))
Какое наибольшее значение может принимать выражение
$\cos x+\cos y+\cos z$ при условии $\sin x+\sin y+\sin z \ge \sqrt{5}$?

13.4 Обратные тригонометрические функции

13.67. $\operatorname{arctg} x > \operatorname{arcctg} x$.

13.68. (МГУ, мех-мат, тест, 2003, 5(10))
$\arccos(4x-4) > \arccos(-x)$.

13.69. $\arcsin(\sin x) < \arccos(\cos x)$.

13.70. $\arccos\dfrac{x}{\sqrt{10}} \ge \operatorname{arctg} 3x$.

Домашнее задание

13.71. $\arcsin x > \arccos x$.

13.72. $\operatorname{arctg} x < \operatorname{arcctg} x - \dfrac{\pi}{6}$.

13.73. $\arcsin x < \arcsin(1-x)$.

13.74. $\arccos x > \arccos x^2$.

13.75. (МГУ, хим, географ, биолог, психолог,... 2008, 3(7))
$\arccos 3x \le \arccos\sqrt{6-15x}$.

13.76. $\operatorname{tg}^2(\arcsin x) \ge 1$.

13.77. $1 - \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4} + \arccos(x + |\sin y|) \le 0$.

13.78. (МГУ, ВМиК, апрель 2003, 6(6))
$\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) \ge 3x - 18$.

13.5 Оценки тригонометрических функций

Доказать неравенства:

13.79. $\sin x \le x$ при $0 \le x$.

13.80. $x \le \operatorname{tg} x$ при $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

13.81. $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

13.82. $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$ для любых x.

Домашнее задание

13.83. (МГУ, ВМиК, апрель 2003, устный)
α, β, γ — углы остроугольного треугольника. Доказать, что
$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2$.

13.84. $\cos x + x\sin x > 1$ при $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

13.85. $\sin x \ge x - \dfrac{x^3}{4}$ при $0 \le x < \pi$.

13.86. $\cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{16}$ при $0 \le x < \pi$.

Ответы, указания, решения

11.48. 31.

11.55. *Доказательство.* Умножим и разделим левую часть равенства на $4\sin\dfrac{\pi}{5}$. По формуле $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ заменим вначале $2\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}$ на $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, а затем $2\sin\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}$ на $\sin\dfrac{4\pi}{5}$:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} =$$

$\left(\text{по формуле } \sin\alpha = \sin(\pi-\alpha) \text{ заменим } \sin\dfrac{4\pi}{5} \text{ на } \sin\left(\pi-\dfrac{4\pi}{5}\right)\right)$

$$= \frac{\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{4}.$$

11.58. $-44{,}5$. **11.99.** 2. **11.100.** 4. **11.101.** $-0{,}5$.
11.102. $-\dfrac{31}{17}$. **11.103.** $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$. **11.104.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$.
11.105. -1. **11.106.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. **11.107.** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

11.108. *Решение.* Обозначим $\alpha = \arcsin\dfrac{1}{3}$. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$. Надо найти $\cos\alpha$. По формуле

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(перед корнем берем знак “+”, поскольку в промежутке $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ косинус неотрицателен).

11.109. $5-2\pi$. **11.110.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **11.111.** $\dfrac{3}{2}$. **11.112.** $\dfrac{3}{2}$. **11.113.** $2\sqrt{3}$.
11.114. 1. **11.115.** 1. **11.116.** 5. **11.117.** $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
11.118. $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. **11.119.** $-\sin\dfrac{\alpha}{4}$; $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **11.120.** $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$.
11.121. $\dfrac{24}{7}$. **11.122.** $\dfrac{2}{11}$. **11.123.** $\dfrac{7+24\sqrt{3}}{50}$. **11.124.** 2.

11.125. $\frac{1}{8}\Big(\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\Big)$. **11.126.** $\frac{\sqrt{15}}{8}$.

11.127. $\sqrt{\frac{3}{8}}$. **11.128.** $\sqrt{10}-3$. **11.129.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **11.130.** 1; 2.

11.131. $4\pi-10$. **11.132.** $4-\frac{\pi}{2}$.

12.1. $\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.2.** $k\pi$, $-\frac{\pi}{6}+k\pi$, $-\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.3. $\frac{k\pi}{3}$, $\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.4.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.5. $\frac{\pi k}{4}$, $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi k}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.6.** $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{56}+\frac{k\pi}{28}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.7. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.8.** $\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.10. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.11.** $\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.12. $k\pi$, $\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.13.** $\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.14. $\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$; $\frac{\pi}{14}+\frac{k\pi}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.15.** $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.16. $\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.17.** $12k\pi$, $3\pi+6k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.18. $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **12.19.** $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **12.20.** $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

12.21. *Указание.* Используя формулы половинных углов, перейдем к уравнению относительно $\cos 2x$:

$$\Big(\frac{1+\cos 2x}{2}\Big)^5+\Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^5=\frac{29}{64}.$$

После возведения в пятую степень слагаемые с нечетными степенями уничтожаются и получается биквадратное относительно $\cos 2x$ уравнение.

Ответ. $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.22. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.23.** а) Да; б) например, $(\sin 3x-1)\Big(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=0$. **12.24.** $\frac{12}{7}$. **12.25.** $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.26. $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.27. $-\dfrac{\pi}{12}+k\pi;\ -\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.28.** $2\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.29. $4k\pi,\ \dfrac{2\pi}{3}+8k\pi,\ \dfrac{10\pi}{3}+8k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.30.** $\pm\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.31. $\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.32.** $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.33. $\dfrac{2(-1)^k}{3}\arcsin\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}+\dfrac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.34. $\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.35. $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.36.** $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5};\ -\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.37. $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1-\sqrt{11}}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.38. $\dfrac{(-1)^k\arcsin(\sqrt{3}-1)+k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.39. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **12.40.** $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.41. $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.42.** $\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.43. $(-1)^{k+1}\arcsin\dfrac{1}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.44.** $\pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.45. $k\pi,\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **12.46.** $\dfrac{k\pi}{2},\ \pm\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.47. $-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \arcsin\dfrac{3}{5}-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}-\arcsin\dfrac{3}{5}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.48. $\operatorname{arctg}2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.49. *Решение.* Если в уравнении $3\sin^2 x-5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$ функция $\cos x=0$, то из уравнения следует, что и $\sin x=0$. Но одновременно косинус и синус одного аргумента в ноль не могут обращаться. Следовательно, $\cos x\neq 0$. Разделим на $\cos^2 x$ обе части исходного уравнения. Получим

$$3\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg}x+2=0 \iff \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=1,\\ \operatorname{tg}x=\dfrac{2}{3},\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ x=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+k\pi.\end{array}\right.$$

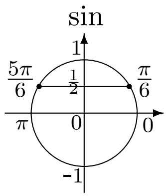
Ответ. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.50. $\operatorname{arctg}2+k\pi;\ \operatorname{arctg}3+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.51. $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.52.** $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$
12.53. $\operatorname{arctg}2+k\pi;\ \operatorname{arctg}3+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.54. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.55.** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.56. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ \operatorname{arctg}5+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.57.** $\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
12.58. $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.59.** $\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \pm\operatorname{arctg}2+k\pi;$
$k\in\mathbb{Z}.$ **12.60.** $\operatorname{arctg}\dfrac{5+\sqrt{34}}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.61. *Решение.* Решаем тригонометрическое уравнение с помощью введения дополнительного угла. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Введем угол φ такой, что $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Нетрудно видеть, что в качестве такого угла годится угол $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Получим

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\iff\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{1}{2}$$
$$\iff\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{1}{2}\iff\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$



$$\iff\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\\[2mm] x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\\[2mm] x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.62. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.63.** $\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{7},\ k\in\mathbb{Z}.$
12.64. $x\in\mathbb{R}.$ **12.65.** $\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **12.66.** $2k\pi;-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}.$
12.67. $k\pi;\ \dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.68.** $-\dfrac{\pi}{12}+2k\pi;\ -\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.69. $-\frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3},\ \frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.70. $\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5};\ \frac{3\pi}{100}+\frac{2k\pi}{25},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.71. $-\frac{\pi}{108}+\frac{k\pi}{9};\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$ **12.72.** $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

12.73. $\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ -\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.74.** $[-\sqrt{97};\ \sqrt{97}\,].$

12.75. $\pi+2k\pi,\ 2\arcsin\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.76. $\frac{\pi}{15}-\frac{1}{5}\arcsin\frac{3}{5}+\frac{2k\pi}{5};\ \frac{2\pi}{3}-\arcsin\frac{3}{5}+2l\pi,\ k,l\in\mathbb{Z}.$

12.78. $2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}.$

12.79. $2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}.$ **12.80.** $f_{\min}=1-4\sqrt{2};\ f_{\max}=1+4\sqrt{2}.$

12.81. $-\pi+2k\pi;\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.82.** $\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.83. $\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.84.** $2k\pi;\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.85. $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \pi+2k\pi,\ \frac{5\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+2k\pi,\ \frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.86.** $\frac{\pi}{4}+k\pi;\ \pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.87.** $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.89. $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.90.** $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \operatorname{arctg}(2\pm\sqrt{3})+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.91. $k\pi;\ \pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+k\pi;\ \pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.92.** 2.

12.93. $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.94.** $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.95.** $k\pi,\ \frac{\pi}{12}+2k\pi,\ -\frac{7\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.96.** $\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\operatorname{arctg}2+k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.97. $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.98. $k\pi;\ -\frac{\pi}{12}+2k\pi;\ -\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.99. $k\pi;\ \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.100.** $2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi;\ 2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+2k\pi;\ 2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.101. $\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8},\ \frac{\pi}{4}-2+k\pi,\ \frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.102. $\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$**12.103.** $k\pi;\ \pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.104. $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.105.** $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ -\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
12.106. $k\pi, \pm\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **12.107.** $\frac{\pi}{2}+k\pi, (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
12.108. $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ \frac{13\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
12.109. $-\frac{11\pi}{24}+k\pi;\ -\frac{7\pi}{24}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
12.110. $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.111.** $2k\pi;\ -\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
12.112. $-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+2k\pi;\ -\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ $+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.113.** $\frac{17\pi}{6}+4k\pi;\ \frac{\pi}{6}+\frac{8k\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{18}+\frac{8k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.
12.114. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.115.** $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
12.116. $k\pi;\ \frac{2\pi}{3}+k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.117.** $x=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.
12.118. $\frac{\pi}{10}+\frac{2l\pi}{5},\ l\neq 5n+1,\ l,n\in\mathbb{Z}$.
12.119. $\frac{k\pi}{8},\ \frac{n\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}\setminus 4\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}\setminus 3\mathbb{Z}$.
12.120. $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.121.** $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
12.122. $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.123.** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.
12.125. $\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.126.** $\frac{k\pi}{10},\ k\neq 5+10l,\ k,l\in\mathbb{Z}$.
12.127. $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.128.** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ \pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
12.129. $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.130.** $-\frac{\pi}{10}+\frac{2l\pi}{5},\ l\neq 5n-1,\ l,n\in\mathbb{Z}$.
12.131. $\frac{\pi}{12}+\frac{l\pi}{6};\ \frac{k\pi}{3},\ k\neq 3(2m+1),\ k,l,m\in\mathbb{Z}$.
12.133. $\frac{\pi}{30},\ \frac{11\pi}{30},\ \frac{61\pi}{30}$. **12.134.** $\frac{\pi}{6},\ \frac{4\pi}{3}$. **12.136.** $\frac{4}{3}$.
12.137. $-\frac{23\pi}{6},\ -\frac{19\pi}{6},\ -\frac{11\pi}{6},\ -4\arccos\left(-\frac{9}{10}\right)$. **12.138.** $\frac{5\pi}{3}$.
12.139. $\frac{3\pi}{2};\ 2\pi-\arccos\frac{2}{5};\ 2\pi$. **12.140.** $-\frac{29\pi}{42},\ -\frac{\pi}{42},\ \frac{55\pi}{42}$.
12.141. $-\frac{19\pi}{200};\ \frac{131\pi}{200}$. **12.142.** $\frac{11\pi}{30}$. **12.143.** $\frac{3\pi}{4};\ \pi$. **12.144.** $\pm\frac{\pi}{2}$.
12.145. $\pi-\alpha;\ 2\pi+\alpha;\ 3\pi-\alpha$, где $\alpha=\arcsin(\sqrt{2}-1)$.

12.146. $\dfrac{35\pi}{84},\ \dfrac{53\pi}{84},\ \dfrac{59\pi}{84}.$ **12.147.** $\dfrac{7\pi}{2}.$

12.149. $2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.150.** $\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.151. $(-2\pi;\ -\pi]\bigcup\Big\{-\dfrac{\pi}{2}\Big\}\bigcup[\,0;\ \pi]\bigcup\Big\{\dfrac{3\pi}{2}\Big\}\bigcup\{2\pi\}.$

12.152. 1. **12.153.** $x\in\Big(0;\ \dfrac{\pi}{6}\Big)\bigcup\Big\{\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi\Big\}.$

12.154. $3-\dfrac{\pi}{2},\ 3-\dfrac{5\pi}{2},\ 1-\dfrac{\pi}{6},\ 1+\dfrac{\pi}{6},\ 1+\dfrac{\pi}{2},\ 1-\dfrac{13\pi}{6},\ 1-\dfrac{11\pi}{6},\ 1-\dfrac{3\pi}{2}.$

12.155. $\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.156.** $-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.157. $\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.158.** $-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi;\ \pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.159. $-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi;\ -\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.160.** $-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.162. $(-1)^{k+1}\arcsin\dfrac{1}{4}+k\pi,\ (-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.164. $\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.165.** $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.166. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.167. $\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n=8k, 8k+3, 8k+5, 8k+6;\ \dfrac{4k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.168. $(-1)^k\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.169. $\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.170.** $0;\ \dfrac{3\pi}{4}.$ **12.172.** $5\pi.$

12.173. $2k\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.174.** $\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.175. $\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.176.** $\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.177. $-\dfrac{\pi}{12}+2k\pi,-\dfrac{11\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.178.** $\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.179. $\operatorname{arcctg}3+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.180.** $\pi+\operatorname{arcctg}2+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.181. $-\dfrac{\pi}{36}+k\pi,\ \dfrac{23\pi}{36}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.182. $k\pi;\ -\arccos\dfrac{-3+\sqrt{2}}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.183.** $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.184. $k\pi;\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ (-1)^k\arcsin\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.185. $\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.187.** $\dfrac{\pi}{12}+2k\pi;\ k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.188. $k\pi;\ \dfrac{2\pi}{3}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{12}+2k\pi;\ \dfrac{19\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.189. $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.190.** $\left[0;\ \dfrac{\pi}{3}\right].$

12.191. $8k\pi,\ 8k\pi+3\pi,\ 8k\pi+5\pi,\ \dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{4k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.192. $\pm\arcsin\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.194.** $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.195. $\dfrac{(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.196.** $2\pi\pm\arccos\log_2(\sqrt{6}-1).$

12.197. $-\dfrac{8}{5};\ -\dfrac{24}{23};\ \dfrac{8}{7};\ \dfrac{24}{17}.$ **12.198.** $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.199. $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.200.** $\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.203. $[6;\ 2\pi)\bigcup\left(2\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{2};\ 8\right].$

12.204. $2k\pi;\ \pi+2l\pi,\ k,l\in\mathbb{Z},\ k\geq -1,\ l\leq -3.$

12.205. $\operatorname{arctg}5+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.206. $(-\pi+4k\pi;\ 4k\pi)\cup(4k\pi;\ \pi+4k\pi),\ k\in\mathbb{Z}.$

12.208. $\dfrac{5\pi}{6};\ \dfrac{17\pi}{6}.$ **12.210.** $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.211. $(-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$

12.212. $\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{9}\right)+2k\pi,\ \pm\arccos\left(-\dfrac{5}{9}\right)+2k\pi,\ \pm\arccos\dfrac{7}{9}$ $+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.213.** $\pi-\arcsin\dfrac{-1+\sqrt{37}}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.214. $\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{4k\pi}{3};\ \dfrac{13\pi}{12}+\dfrac{4k\pi}{3};\ -\dfrac{7\pi}{18}+\dfrac{4k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.215. $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.216.** $\dfrac{5\pi}{8}+2k\pi;\ \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.217. $-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.218.** $\pm\arccos\dfrac{2}{11}+2k\pi,\ \pm\arccos\dfrac{6}{11}$ $+2k\pi,\ \pm\arccos\left(-\dfrac{10}{11}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.220. $-\pi+24k\pi,\ 7\pi+24k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.221.** $\dfrac{13\pi}{5}.$ **12.223.** $0.$

12.224. $\dfrac{7\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.225.** $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.226. $\begin{cases}x=\frac{2\pi+2}{15},\\ y=\pm\arcsin\sqrt{\frac{\pi-2}{3}}+\pi k,\end{cases}\ \begin{cases}x=\frac{-2\pi-4}{15},\\ y=\pm\arcsin\sqrt{\frac{4-\pi}{3}}+\pi k,\end{cases}\ k\in\mathbb{Z}.$

12.227. $-\dfrac{\pi}{12}$; $\dfrac{23\pi}{12}$. **12.228.** $k\pi$; $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.229. $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.230.** $\emptyset$. **12.231.** $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.232. $\left(1;\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$; $\left(-1;\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.233. $k\pi$; $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.234.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.235. $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.236.** $\emptyset$. **12.237.** $\emptyset$. **12.238.** $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.239. $\dfrac{9\pi}{4}+4k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.240.** 0. **12.241.** 0, $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.242. $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.243.** $2\pi+8k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.244. $2k\pi$; $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.245.** $\emptyset$. **12.246.** $\emptyset$.
12.247. $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.248.** $\emptyset$.
12.249. $\left(-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+l\pi, \dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)$; $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}+l\pi, -\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k,l\in\mathbb{Z}$. **12.250.** $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.251. $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.252.** $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.253. $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.254.** $\emptyset$. **12.255.** $\emptyset$.
12.256. $\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, -\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$.
12.257. $\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$.
12.258. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.260.** $\dfrac{\pi}{1+\frac{\pi}{180}}$.
12.262. $\left(\dfrac{\pi}{3}+m\pi, \dfrac{\pi}{3}+n\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{3}+m\pi, -\dfrac{\pi}{3}+n\pi\right)$, $m,n\in\mathbb{Z}$.
12.263. $\left(\dfrac{\pi}{3}+2m\pi, \dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2m\pi, -\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)$, $m,n\in\mathbb{Z}$.
12.265. $\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{k\pi}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.266.** $\pm\sqrt{2k\pi}$; $-1\pm\sqrt{1+2k\pi}$, $k=0,1,2,\ldots$
12.268. 3π. **12.269.** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2m\pi, \dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)$, $m,n\in\mathbb{Z}$.
12.270. $\left(\dfrac{\pi}{6}+m\pi, \dfrac{\pi}{6}+n\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{6}+m\pi, -\dfrac{\pi}{6}+n\pi\right)$, $m,n\in\mathbb{Z}$.
12.271. $\left(\dfrac{\pi}{6}+2m\pi, \dfrac{\pi}{6}+2n\pi\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{6}+2m\pi, \dfrac{5\pi}{6}+2n\pi\right)$, $m,n\in\mathbb{Z}$.
12.272. $\left(\dfrac{2\pi}{3}+m\pi, \dfrac{2\pi}{3}+n\pi\right)$; $\left(-\dfrac{2\pi}{3}+m\pi, -\dfrac{2\pi}{3}+n\pi\right)$, $m,n\in\mathbb{Z}$.

12.273. $\left(\frac{\pi}{3}+2m\pi,\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)$, $m,n\in\mathbb{Z}$. **12.275.** $[3\sqrt{2};\,6]$.
12.276. $\cos\frac{3\pi}{10}$. **12.277.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **12.278.** 4.
12.279. $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$. **12.280.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.
12.281. $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$. **12.282.** -1. **12.283.** 3. **12.284.** $\frac{1}{2}$.
12.285. 0; $\frac{1}{2}$. **12.286.** $-\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}$; $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$. **12.287.** 3. **12.288.** -3.
12.289. 9. **12.290.** $\sqrt{3}$. **12.291.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.292.** 2. **12.293.** 1.
12.294. $\sin\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.
12.295. $\left(\frac{-13-\sqrt{481}}{10},\ \frac{-13+\sqrt{481}}{10}\right)$; $\left(\frac{-13+\sqrt{481}}{10},\ \frac{-13-\sqrt{481}}{10}\right)$.
12.296. 2. **12.297.** $\frac{-7+\sqrt{17}}{8}$. **12.298.** $c\in(-\infty;\,-\pi)\cup[\pi;\,+\infty)$.
12.299. $\min a=\frac{1}{2}$; $\max a=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}$. **12.300.** 0; $\frac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$.
12.301. $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}+l\pi,\ \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-l\pi\right)$, $k,l\in\mathbb{Z}$.
12.303. $\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi,\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+k\pi\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}+2n\pi,\ (-1)^{k}\frac{\pi}{3}+k\pi\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$. **12.304.** $\left(x_k,\ \frac{\pi}{4}+k\pi-x_k\right)$; $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq-2,-1,0,1$, где $x_k=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)^2-36}$.
12.305. $\left((-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$.
12.306. $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\pi+2m\pi\right)$, $k,m\in\mathbb{Z}$. **12.307.** $1+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.308. $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}+l\pi,\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}-l\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}+l\pi,\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-l\pi\right)$, $k,l\in\mathbb{Z}$. **12.309.** $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,2l\pi\right)$, $k,l\in\mathbb{Z}$.
12.310. $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\pm\frac{\pi}{3}+2l\pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{12}+2k\pi,2l\pi\right)$; $\left(-\frac{5\pi}{12}+2k\pi,2l\pi\right)$; $\left(\frac{\pi}{12}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+l\pi\right)$; $\left(\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+l\pi\right)$, $k,l\in\mathbb{Z}$.
12.311. $(-\pi,-\pi)$; $(0,-2\pi)$; $(\pi,-\pi)$.

12.312. $\left(\pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,(-1)^l\dfrac{\pi}{4}+l\pi\right)$, $\left(\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,(-1)^l\dfrac{\pi}{3}+l\pi\right)$, $k,l\in\mathbb{Z}$.

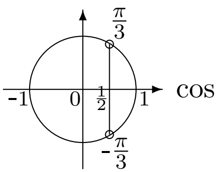
12.313. $\left(\dfrac{\pi}{24}+k\pi,\dfrac{5\pi}{24}-k\pi\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{24}+k\pi,\dfrac{\pi}{24}-k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.314. $\left(n\pi,\dfrac{\pi}{4}-n\pi\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi,-k\pi\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$.

12.315. $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2n\pi,-\dfrac{5\pi}{6}+2m\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi,-\dfrac{2\pi}{3}+2m\pi\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{6}+2n\pi,\dfrac{\pi}{3}+2m\pi\right)$, $n,m\in\mathbb{Z}$. **12.316.** $\left(\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.317. $\left(\dfrac{\pi}{12}\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2-3\sqrt{3}}{6}+k\pi,\dfrac{5\pi}{12}\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2-3\sqrt{3}}{6}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.318.** $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$.

13.1. *Решение.* Решение неравенства будем проводить, используя тригонометрический круг и ось косинусов. Отметим на оси косинусов точку $\frac{1}{2}$ и восстановим перпендикуляр к оси до пересечения с тригонометрическим кругом. Отметим на тригонометрическом круге точки пересечения и дугу, которая является решением неравенства. Выпишем ответ, добавляя период косинуса 2π.



$$-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3},$$

$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\ \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.2. $\left(-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.3. $\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\ \dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.5. $\left(-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.6. $\left(\pi-\arcsin\dfrac{1}{3}+2k\pi;\ \arcsin\dfrac{1}{3}+2\pi+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.7. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{3}+k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.8.** $(k\pi;\ \mathrm{arcctg}(-3)+k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.9. $(2\pi-6+2k\pi;\ 6+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.10.** $\left(\dfrac{1}{3};\ 1\right]$.

13.11. $(-\sqrt{3};\ +\infty)$. **13.12.** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.13. $\left(-\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.14. $\left(-\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi;\ -\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.15. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ -\operatorname{arctg}2+k\pi\right]\bigcup\left[-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+k\pi\right],\ k\in\mathbb{Z}.$

13.17. $\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right],\ k\in\mathbb{Z}.$ **13.18.** $[1;\ 2)\cup(2;\ \sqrt{5}].$

13.19. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ -\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]\bigcup\left[\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.20. $\left(-\arccos\dfrac{1}{4}+2k\pi;\ \arccos\dfrac{1}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$

13.21. $\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.22. $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi;\ \dfrac{9\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.23. $\left(-\arcsin\dfrac{1}{3}+2k\pi;\ \pi+\arcsin\dfrac{1}{3}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.24. $\left[\operatorname{arctg}2+k\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.25. $\left[\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ \pi+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$ **13.26.** $[-1;\ 1].$ **13.27.** $(-\infty;\ \operatorname{ctg}2).$

13.29. $\left(-\sqrt{\dfrac{\pi}{6}};\ \sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\right)\bigcup\left(-\sqrt{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi};\ -\sqrt{-\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi}\right)\bigcup$
$\left(\sqrt{-\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi};\ \sqrt{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi}\right),\ k=1,2,\ldots.$

13.30. $\left(2k\pi-\pi+\arcsin\dfrac{3}{5};\ \arcsin\dfrac{3}{5}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.31. $\left[\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right],\ k\in\mathbb{Z}.$

13.32. $\left(\arccos\dfrac{1}{5}+2k\pi;\ 2\pi-\arccos\dfrac{1}{5}+2k\pi\right)\bigcup$
$\left(-\arccos\dfrac{1}{4}+2k\pi;\ \arccos\dfrac{1}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.34. $\left(k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]\bigcup\left\{\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right\},\ k\in\mathbb{Z}.$

13.35. $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}.$ **13.36.** $\left(\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ \dfrac{2\pi}{3}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.37. $\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

13.38. $\left(-\dfrac{7\pi}{12},-\dfrac{\pi}{2}\right]\bigcup\left[0,\dfrac{\pi}{12}\right).$

13.39. $\left[-\dfrac{\pi}{4}; +\infty\right) \bigcup \left[-\dfrac{\pi}{4}+k\pi; \dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]$, $k=-1,-2\ldots$.

13.40. $\left[2k\pi; \dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.41.** $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.42. $\left(\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi; \dfrac{11\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.45. $\left(2\pi k; \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.46.** $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

13.48. $\left(-\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.49.** $[-13;-4\pi)\bigcup$ $\left(-4\pi;-\dfrac{11\pi}{3}\right)\bigcup\left(-\dfrac{7\pi}{3}; -2\pi\right)\bigcup\left(-2\pi; -\dfrac{5\pi}{3}\right)\bigcup\left(-\dfrac{\pi}{3}; -1\right]$.

13.50. $f(x)=2$ при $x\in$ ОДЗ $=\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.51. $\left(\dfrac{\pi}{6}+2k\pi; \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi; \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.53. $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{4}\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{6}; \pi\right]$.

13.54. $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)\bigcup\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right)\bigcup\left(\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{4\pi}{3}\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{3}; \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

13.55. $\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi; \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi; \dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\right)\bigcup$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi; \dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.56. $\left[-\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi; \dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right]\bigcup\left[\dfrac{11\pi}{12}+2k\pi; \dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.57. $\left(2k\pi; \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)\bigcup\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi; \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\bigcup$ $\left(\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi; \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi; 2\pi+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.58. $\left(k\pi; \dfrac{\pi}{6}+k\pi\right)\bigcup\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi; \dfrac{5\pi}{6}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.66. 2. **13.67.** $(1; +\infty)$. **13.68.** $\left[\dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}\right)$.

13.69. $\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi; 2\pi+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.70.** $[-\sqrt{10}; 1]$. **13.71.** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$.

13.72. $\left(-\infty; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **13.73.** $\left[0; \dfrac{1}{2}\right)$. **13.74.** $[-1; 0)$. **13.75.** $\dfrac{1}{3}$.

13.76. $\left(-1; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\bigcup\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$. **13.77.** $(1, k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.78. $\left(-\infty; \dfrac{4\pi+18}{5}\right]\bigcup[8\pi-18; 18-3\pi]$.

Литература

[1] Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во "Наука", 1987.

[2] Задачник по элементарной математике для программируемого обучения. Алгебра 1–3. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2001.

[3] Моденов В. П. Пособие по математике. Часть I. М.: Изд-во МГУ, 1977.

[4] Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во "Экзамен", 1998.

[5] Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие. /Под редакцией Сканави М. И., М.: Изд-во "Высшая школа", 1980.

[6] Ципкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. М.: Изд-во "Наука", 1989.

[7] Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену. М.: Изд-во Рольф: Айрис пресс, 1999.

[8] Якушева Е. В., Попов А. В., Якушев А. Г. Математика. Все для экзамена. М.: Изд-во "Экономика", 2000.