

Материалы для проведения
муниципального этапа
ХЛIII МОСКОВСКОЙ
ОБЛАСТНОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
2016–2017 учебный год

10 декабря 2016 г.

Долгопрудный, 2016

Сборник содержит материалы для проведения II (муниципального) этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили члены региональной Методической комиссии по математике в Московской области к.ф.-м.н. Н.Х. Агаханов и к.ф.-м.н. О.К. Подлипский (Московский физико-технический институт (государственный университет)). Авторы задач Н.Х. Агаханов и О.К. Подлипский.

Рецензенты: к.ф.-м.н. И.И. Богданов, к.ф.-м.н. Б.В. Трушин.

Компьютерный макет подготовил И.И. Богданов.

Уважаемые коллеги!

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, при проверке работ оценивается:

- правильное решение в 7 баллов;
- решение с недочетами — в 5–6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — в 4 балла;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — в 2–3 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — в 1 балл.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Работа выполняется в течение 4 часов, учащимися 5 и 6 классов — 3 часов.

Вопросы по организации проведения олимпиады, ее содержанию и оценке работ участников можно задать 10 декабря 2016 г. с 9.30 до 18.30 по телефону (495) 408–76–66.

Согласно действующему Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, победителями муниципального этапа являются участники, набравшие наибольшее количество баллов. Важно отметить, что победителями и призерами олимпиады в каждой параллели (5–11 классов) могут стать несколько участников — возможно, набравших разное количество баллов.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое

утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний. . . »).

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4–5 баллов, второй шаг — в 2–3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 5 и 6 классов, не умеют четко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 5–7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Желаем успешной работы!

В 2016–2017 учебном году III (региональный) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (Московская областная математическая олимпиада) будет проведен 30 января (1 тур) и 31 января (2 тур) 2017 г. для учащихся 9–11 классов. Одновременно для учащихся 8 класса будет проведен региональный этап олимпиады Эйлера. Согласно Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, участниками регионального этапа являются:

- победители и призеры регионального этапа олимпиады предыдущего года;
- участники муниципального этапа олимпиады текущего года, набравшие необходимое для участия в региональном этапе количество баллов.

В соответствии с приказом Министерства образования Московской области оба тура региональной олимпиады пройдут на базе МФТИ в г. Долгопрудном и г. Жуковском. Муниципальное образование при сдаче заявки на участие выбирает место проведения (из двух) самостоятельно.

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

5 класс

- 5.1. Если в комнату войдет мама, то суммарный возраст находящихся в комнате увеличится в 4 раза, а если вместо нее войдет папа — суммарный возраст увеличится в 5 раз. Во сколько раз увеличится суммарный возраст, если в комнату войдут папа с мамой?

Ответ. В 8 раз.

Решение. Если суммарный возраст находящихся в комнате — 1 часть, то возраст мамы — 3 части, а папы — 4 части. Значит, возраст всех вместе будет 8 частей.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Верный ответ, полученный «на примере» — 5 баллов.

- 5.2. За столом сидят 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). У них спросили, кого среди них больше. Пятеро сказали: «Рыцарей», трое сказали: «Лжецов», а двое сказали: «Поровну». Сколько рыцарей могло быть среди сидящих за столом?

Ответ. 3.

Решение. Если бы за столом сидели только лжецы, то никто из них не мог бы сказать, что лжецов за столом больше. Значит, за столом есть хотя бы один рыцарь. Заметим, что все рыцари должны были ответить одинаково, а лжецы так же отвечать не могли.

Те пятеро, кто сказали, что за столом больше рыцарей, не могут быть рыцарями, так как в этом случае рыцарей было бы поровну, и они бы солгали. Также те двое, кто сказали, что рыцарей и лжецов за столом поровну, не могут быть рыцарями, так как в этом случае рыцарей было бы двое, а не половина. Значит, рыцари — это трое сказавших, что за столом больше лжецов. Итак, есть за столом сидят 3 рыцаря (и 7 лжецов), и они могут сказать набор фраз, приведенный в условии.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что пятеро — не рыцари — 3 балла.

Доказано, что двое — не рыцари — еще 2 балла.

Показано только, что если за столом сидят 3 рыцаря и 7 лжецов, то они могут сказать такие фразы, как в условии — 4 балла.

- 5.3. Можно ли в квадрате 5×5 покрасить 8 клеток так, чтобы у каждой покрашенной клетки было ровно 3 непокрашенных соседних клетки? Клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона.

Ответ. Можно.

Решение. Два возможных примера покраски показаны на рис. 1.

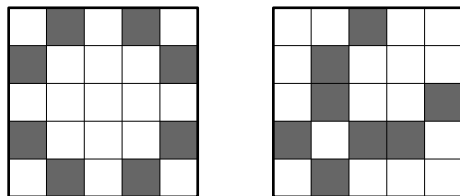


Рис. 1

Замечание. Существуют и другие способы покраски. Для полного решения достаточно привести *один* верный пример.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Любой правильный пример покраски — 7 баллов.

- 5.4. Петя задумал четырехзначное число, а затем для каждой двух цифр задуманного числа записал их сумму. В итоге он получил 6 чисел. Могла ли сумма этих шести чисел равняться 71?

Ответ. Не могла.

Решение. Пусть a , b , c и d — цифры данного числа. Тогда полученные числа есть $a + b$, $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$ и $c + d$. Их сумма равна $3(a + b + c + d)$. Это число должно делиться на 3, а 71 на 3 не делится.

- 5.5. В первенстве России по футболу участвуют 18 команд. За победу в матче дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В первом круге каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Оказалось, что все они при этом набрали разное

число очков. Могла ли команда, занявшая в первом круге второе место, набрать 49 очков?

Ответ. Не могла.

Решение. Максимальное количество очков, которое могла набрать одна команда, равно 51 (по 3 очка в 17 играх). Если бы команда, занявшая второе место, набрала 49 очков, это означало бы, что команда, занявшая первое место, набрала бы не меньше 50 очков. Но набрать ровно 50 очков в 17 играх невозможно (одна ничья уменьшает набранную сумму очков сразу на 2.). Значит, команда, занявшая первое место, должна была набрать 51 очко. Но это означает, что она выиграла у второй команды, и та не могла набрать больше, чем 48 очков.

6 класс

- 6.1. Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 11 баранок также стоят дороже 100 рублей. Правда ли, что 1 калач и 3 баранки стоят дороже 50 рублей?

Ответ. Правда.

Решение. Если купить 3 калача и 1 баранку, а потом еще 1 калач и 11 баранок, то всего получится 4 калача и 12 баранок. За них суммарно будет уплачено больше $100 + 100 = 200$ рублей. Но четверть от 4 калачей и 12 баранок — как раз 1 калач и 3 баранки. Значит, они будут стоить больше $200 : 4 = 50$ рублей.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

- 6.2. У Олега есть семь прямоугольников размерами 1×1 , 1×2 , 1×3 , 1×4 , 1×5 , 1×6 и 1×7 . Помогите ему сложить из них два прямоугольника одинаковой площади, но разного периметра.

Решение. Один из примеров приведен на рис. 2. Полученные прямоугольники имеют площадь 14 и периметры 18 и 30.

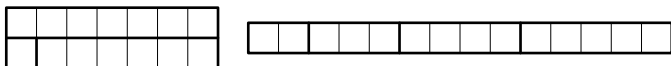


Рис. 2

Замечание. Существуют и другие способы.

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

- 6.3. Вася, Петя, Миша и Толя вскладчину купили радиоуправляемый самолет, причем каждый из них заплатил целое число рублей. У ребят спросили, сколько они потратили денег.

Вася сказал: «Я заплатил ровно четверть цены самолета.»

Петя сказал: «Я заплатил на 35 рублей больше Миши.»

Толя сказал: «Я заплатил на 50 рублей меньше Васи.»

Докажите, что кто-то из ребят ошибся в подсчетах.

Решение. Предположим, что никто из ребят не ошибся.

Так как Вася заплатил четверть цены самолета, то цена самолета делится на 4. Значит, цена является четным числом.

Так как Петя заплатил на 35 рублей больше Миши, то Петя с Мишей вместе заплатили нечетное число рублей.

Так как Толя заплатил на 50 рублей меньше Васи, то Толя с Васей вместе заплатили четное число рублей.

Но тогда все ребята вместе заплатили нечетное число рублей, а цена самолета четная. Получили противоречие.

Комментарий. «Доказательство», основанное «на примере» — 1 балл.

- 6.4. Существует ли набор из 4 гирь такой, что с их помощью можно взвесить на чашечных весах любое целое количество килограммов от 10 до 24? Гири можно ставить на обе чашки весов.

Ответ. Существует.

Решение. Рассмотрим набор из гирь массами 1 кг, 2 кг, 4 кг и 17 кг. В таблице ниже показано, как взвесить любой груз от 10 кг до 24 кг. Груз кладется на левую чашку весов.

| Груз | Гири на левой чашке | Гири на правой чашке |
|------|---------------------|----------------------|
| 10 | $1 + 2 + 4$ | 17 |
| 11 | $2 + 4$ | 17 |
| 12 | $4 + 1$ | 17 |
| 13 | 4 | 17 |
| 14 | $1 + 2$ | 17 |
| 15 | 2 | 17 |
| 16 | 1 | 17 |
| 17 | нет | 17 |
| 18 | нет | $17 + 1$ |
| 19 | нет | $17 + 2$ |
| 20 | нет | $17 + 1 + 2$ |
| 21 | нет | $17 + 4$ |
| 22 | нет | $17 + 4 + 1$ |
| 23 | нет | $17 + 4 + 2$ |
| 24 | нет | $17 + 4 + 2 + 1$ |

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Приведен любой верный пример набора гирь, но не обосновано, что этот набор подходит — 5 баллов.

- 6.5. За круглым столом сидят 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду), причем известно, что среди них есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь. Какое наибольшее количество из сидящих за столом может сказать: «Один из моих соседей лжец, а другой — рыцарь»?

Ответ. 9.

Решение. Предположим, что все сидящие за столом смогли сказать такую фразу. Тогда рядом с лжецом должны сидеть либо два лжеца, либо два рыцаря. Но если рядом с каким-то лжецом будут сидеть два лжеца, то с его соседом-лжецом также рядом должны сидеть два лжеца. Продолжая рассуждать аналогично, получим, что все сидящие за столом лжецы; по условию это невозможно. Значит, рядом с каждым лжецом должны сидеть два рыцаря. А рядом с каждым рыцарем должен сидеть один лжец и один рыцарь.

Таким образом, рассадка за столом восстанавливается однозначно: $\dots - Л - Р - Р - Л - Р - Р - \dots$. Но тогда число сидящих за столом должно делиться на 3, а 10 на 3 не делится. Поэтому все 10 человек не могли сказать требуемую фразу.

Покажем, что 9 из 10 сидящих за столом могли сказать требуемую фразу. Это могло произойти, если люди за столом сидят следующим образом: $-Л - Р - Р - Л - Р - \underline{Р} - Р - Л - Р - Р -$. Среди них только подчеркнутый рыцарь не мог сказать требуемую фразу.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что все 10 требуемую фразу сказать не могут — 4 балла.

В рассуждениях упущен случай, когда все сидящие за столом лжецы — снимаются 2 балла.

Приведен пример, в котором 9 сидящих говорят требуемую фразу — 3 балла.

7 класс

- 7.1. На доске написаны две дроби, сумма которых равна 1. Из числителя и знаменателя первой дроби вычли одно и то же число и полученную дробь записали вместо первой. Оказалось, что сумма написанных дробей стала равняться $\frac{5}{6}$. Покажите, как такое могло получиться.

Решение. Из условия следует, что первая дробь уменьшилась на $\frac{1}{6}$. Но это как раз разность дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Значит, в качестве первой дроби можно взять $\frac{2}{3}$, а второй $\frac{1}{3}$. Затем из числителя и знаменателя первой дроби нужно вычесть по 1.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Приведен пример всех трех дробей — 7 баллов.

- 7.2. У Олега есть семь прямоугольников размером 1×1 , 1×2 , 1×3 , 1×4 , 1×5 , 1×6 и 1×7 . Помогите ему сложить из них два прямоугольника одинакового периметра, но разной площади.

Решение. Один из примеров приведен на рис. 3. Полученные прямоугольники имеют периметр 22 и площади 18 и 10.

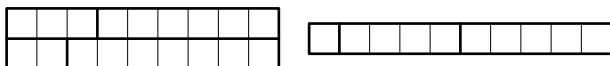


Рис. 3

Замечание. Существуют и другие способы.

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

- 7.3. Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 13 баранок также стоят дороже 100 рублей. Верно ли, что 1 калач и 4 баранки стоят дороже 50 рублей?

Ответ. Верно.

Решение. Если купить 3 калача и 1 баранку, а потом еще 1 калач и 13 баранок, то всего получится 4 калача и 14 баранок. За них суммарно будет заплачено больше $100 + 100 = 200$ рублей. Но четверть от 4 калачей и 14 баранок — это 1 калач и 3,5 баранки; они будут стоить больше $200 : 4 = 50$ рублей. Поэтому 1 калач и 4 баранки тем более стоят дороже 50 рублей.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

- 7.4. Четырехзначное число N , не все цифры которого одинаковы, умножили на каждую из его цифр. Могло ли в результате получиться натуральное число, которое делится на 1111?

Ответ. Не могло.

Решение. Разложим число 1111 на простые множители: $1111 = 11 \cdot 101$. Поскольку цифры не могут делиться ни на 11, ни на 101, на них будет делиться само исходное четырехзначное число. Значит, оно будет делиться и на их произведение, то есть на число 1111. Значит, оно имеет вид \overline{AAAA} . А по условию у числа не все цифры должны быть одинаковы.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Показано, что число делится на 11 и на 101 — 3 балла.

- 7.5. В пустую комнату по очереди зашли 10 человек — лжецов и рыцарей. Каждый из них, заходя в комнату, подсчитывал количество лжецов и рыцарей в комнате, включая себя, записывал на листке некоторое утверждение и клал листок на стол. Известно, что все утверждения рыцарей были правильными, лжецов — неправильными, а в результате на столе оказалось 10 листков бумаги, на которых было написано:

«Сейчас в комнате 1 лжец.»

«Сейчас в комнате 2 лжеца.»

«Сейчас в комнате 3 лжеца.»

⋮

«Сейчас в комнате 10 лжецов.»

Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

Ответ. 5.

Решение. Заметим, что в комнату не могли зайти 2 рыцаря подряд. Действительно, если бы такое произошло, они должны были написать на своих листках одинаковые утверждения. А все утверждения различны. Из этого следует, что в комнату могло войти не более 5 рыцарей, иначе какие-нибудь двое вошли бы подряд.

Покажем, что в комнату могло войти ровно 5 рыцарей. Пусть сначала в комнату войдет лжец, потом войдет рыцарь,

потом — лжец и так далее. При этом рыцари напишут на своих листках, что в момент их прихода находятся 1, 2, 3, 4 и 5 лжецов соответственно. А лжецы могут на своих листках написать про 6, 7, 8, 9 и 10 лжецов, что будет неправдой, так как в комнате всегда не более 5 лжецов.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Замечено только, что 2 рыцаря не могут зайти в комнату подряд — 2 балла.

Доказано, что рыцарей не больше 5 — 4 балла.

Приведен пример с 5 рыцарями (включая утверждения лжецов) — 3 балла.

8 класс

- 8.1. Найдите какое-нибудь натуральное число N такое, что если к нему прибавить его наибольший делитель, отличный от N , то получится 2016.

Ответ. 1344.

Решение. Если N — четное число, то его наибольший делитель (отличный от N) есть $\frac{N}{2}$, а их сумма — $\frac{3N}{2}$, откуда $\frac{3N}{2} = 2016$ и $N = 1344$.

Замечание. Приведённый пример — единственный (однако в решении этого доказывать не надо).

Комментарий. Указано верное число, но не проверено, что оно подходит — 5 баллов.

- 8.2. Самый быстрый бегун в классе бежит на 0,1 м/с быстрее второго, на 0,2 м/с быстрее третьего и на 0,3 м/с быстрее четвертого. Для эстафеты 2×400 м составили две команды. В первую взяли самого быстрого и самого медленного из этих четырех, во вторую — оставшихся двух школьников. Какая команда быстрее пробежит эстафету? (Каждый бегун бежит дистанцию с постоянной скоростью.)

Ответ. Вторая.

Решение. Если v м/с — скорость самого медленного бегуна, то скорости остальных будут равны $v + 0,1$ м/с, $v + 0,2$ м/с, $v + 0,3$ м/с. Первая команда пробежит эстафету за $\frac{400}{v} + \frac{400}{v + 0,3} = \frac{400(2v + 0,3)}{v(v + 0,3)}$ секунд, а вторая — за $\frac{400}{v + 0,1} + \frac{400}{v + 0,2} = \frac{400(2v + 0,3)}{(v + 0,1)(v + 0,2)}$ секунд. Числители дробей равны, поэтому меньше та из них, у которой знаменатель больше. Но $(v + 0,1)(v + 0,2) = v^2 + 0,3v + 0,02$ больше, чем $v(v + 0,3) = v^2 + 0,3v$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

- 8.3. Сумма двух дробей равна 1. Из числителей и знаменателей этих дробей вычли одно и то же число. Может ли сумма полученных дробей равняться $\frac{1}{2016}$?

Ответ. Может.

Решение. Например, можно взять две одинаковых дроби дроби $\frac{4031}{8062}$ и $\frac{4031}{8062}$ с суммой 1. Уменьшив их числители и знаменатели на 4030, получим дроби $\frac{1}{4032}$ и $\frac{1}{4032}$ с суммой $\frac{1}{2016}$.

Также в качестве примера можно взять дроби $\frac{2015}{4031}$ и $\frac{2016}{4031}$ с суммой 1. Уменьшив их числители и знаменатели на 2015, получим дроби $\frac{0}{2016}$ и $\frac{1}{2016}$ с суммой $\frac{1}{2016}$.

Замечание. Существуют и другие способы — в частности, с использованием отрицательных чисел.

Комментарий. Ответ «Может» без обоснования — 0 баллов.

Любой верный пример — 7 баллов.

- 8.4. Пусть $ABCD$ и $DEFG$ — параллелограммы такие, что точка D лежит на отрезке AG , точка E — на отрезке DC , и при этом $AB = DG = 2AD = 2DE$. Пусть M — середина отрезка DG . Докажите, что CG — биссектриса угла MCF .

Первое решение. Из условия следует, что $CE = DM = CD/2$ и $EF = DG$. Кроме того, $\angle CEF = \angle CDM$ как соответственные при параллельных прямых EF и DG . Значит, треугольники CEF и MDC равны по первому признаку, откуда $CM = CF$. Тогда по третьему признаку равны треугольники FCG и MCG , откуда и следует утверждение задачи.

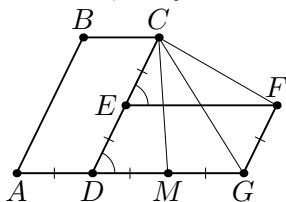


Рис. 4

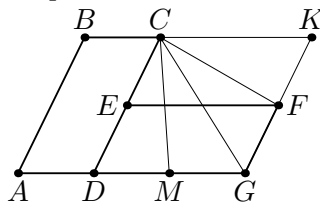


Рис. 5

Второе решение. Продлим отрезки GF и BC до пересечения в точке K . Тогда в параллелограмме $CDGK$ имеем $CD = GD$, то есть он — ромб. При этом, так как $GF = CD/2$, точки M и F — середины сторон этого ромба. Значит, углы

MCG и FCG симметричны относительно диагонали CG и поэтому равны.

- 8.5. Имеется таблица 100×100 , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 10 000, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. Пусть A — количество строк, в каждой из которых сумма чисел делится на 10 000, а B — количество столбцов, в каждом из которых сумма чисел делится на 10 000. Первый игрок выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

Ответ. Второй.

Решение. Положим $n = 100$. Опишем стратегию второго игрока. Пусть он разобьет на пары все числа от 1 до $n^2 - 1$, кроме $\frac{n^2}{2}$, взяв в пару к числу k число $n^2 - k$. Оставшиеся числа $\frac{n^2}{2}$ и n^2 он также объединит в пару. Назовем эту пару *большой*. Заметим, что суммы чисел во всех парах, кроме большой, равны n^2 , а сумма чисел большой пары равна $\frac{3n^2}{2}$. Из этого, в частности, следует, что сумма всех чисел в таблице не делится на n^2 .

Теперь, если первый игрок ставит какое-то число в любую клетку таблицы, то второй игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно средней горизонтали (горизонтальной оси симметрии таблицы). Несложно заметить, что второй игрок всегда сможет сделать такой ответный ход. Действуя таким образом, он добьется того, что в каждом из столбцов, где не стоит большая пара, сумма чисел будет делиться на n^2 . То есть он добьется того, что $B = n - 1$. Осталось заметить, что $A \neq n$, так как в этом случае сумма чисел в каждой строке делилась бы на n^2 , а, значит, и сумма всех чисел во всей таблице делилась бы на n^2 , что невозможно. Поэтому $A \leq n - 1 = B$, и второй игрок выигрывает.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Замечено, что сумма чисел в таблице не делится на n^2 — 2 балла.

Разбор других значений n (т.е. стороны квадрата) — 0 баллов.

9 класс

- 9.1. Докажите, что при любых a и b хотя бы одно из уравнений $x^2 - 2ax + ab = 0$ и $x^2 - 2bx + ab = 0$ имеет решение.

Решение. Пусть оба уравнения не имеют решений. Это означает, что их дискриминанты отрицательны. Записав их, получим: $4(a^2 - ab) < 0$ и $4(b^2 - ab) < 0$. Сложив эти неравенства, получаем, что $4(a - b)^2 < 0$ — противоречие.

Комментарий. Неэквивалентные преобразования неравенств (деление на число неизвестного знака с сохранением знака неравенства, вычитание неравенств одного знака и т. п.) — не более 3 баллов за задачу.

- 9.2. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел была простым числом?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что числа получилось расставить требуемым образом. Заметим, что сумма любых трех чисел от 1 до 100 больше 2, поэтому если какая-то сумма трех чисел равна простому числу, то это простое число нечетное. Пусть по кругу подряд стоят числа a, b, c, d . Тогда числа $a + b + c$ и $b + c + d$ — простые нечетные. Но тогда их разность, равная $a - d$, будет четной как разность двух нечетных чисел. Отсюда следует, что числа a и d имеют одинаковую четность. Таким образом, любые два числа, стоящие через два, имеют одинаковую четность.

Занумеруем числа по кругу. Тогда числа с номерами 1, 4, 7, ..., 100 будут иметь одинаковую четность. Но число с номером 3 должно иметь такую же четность, что и число с номером 100. Аналогично, такую же четность будут иметь числа с номерами 6, 9, 12, ..., 99, 2, 5, ..., 98. Таким образом, все числа получились одной четности. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что любые два числа, стоящие через два, имеют одинаковую четность — 3 балла.

- 9.3. Четырех школьников, которые бегают с разной скоростью, разбили на две команды по два человека, и в первую включили са-

мого быстрого из них. Вначале команды соревновались в том, бегуны какой команды раньше встретятся, если на дистанции в 400 м они побегут навстречу друг другу. Оказалось, что командам потребовалось одинаковое время. А какая команда быстрее пробежит эстафету 2×400 м? (В эстафете каждый спортсмен пробегает 400 метров. Считается, что скорость бегунов во время забегов постоянна.)

Ответ. Вторая.

Решение. Если $a < b < c < d$ — скорости бегунов, то из первого условия следует, что $a + d = b + c$ (суммарные скорости команд одинаковы). Первая команда на то, чтобы пробежать эстафету, затратит $\frac{400}{a} + \frac{400}{d} = \frac{400(a+d)}{ad}$, а вторая — $\frac{400}{b} + \frac{400}{c} = \frac{400(b+c)}{bc}$ секунд. Числители дробей равны, поэтому меньше та из них, у которой знаменатель больше.

Итак, нам нужно сравнить числа ad и bc , когда $a + d = b + c$. Приведем один из способов сравнения. Если x — среднее арифметическое чисел a и d , то $a = x - \alpha$, $d = x + \alpha$, $b = x - \beta$, $c = x + \beta$, где $\beta < \alpha$. Поэтому $ad = x^2 - \alpha^2$, $bc = x^2 - \beta^2$, то есть $ad < bc$. Значит, вторая команда пробежит эстафету быстрее.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

- 9.4. В остром угле с вершиной S проведены трисектрисы: два луча, выходящих из точки S и делящих данный угол на три равные части. Из точки A , лежащей на одной стороне угла, опущены перпендикуляры AB и AC на эти трисектрисы. Докажите, что прямая BC перпендикулярна второй стороне угла.

Решение. Пусть P — точка пересечения прямой BC со второй стороной угла. Тогда требуется доказать, что $\angle SPB$ — прямой. Это равносильно тому, что $\angle PBS + \angle BSP = 90^\circ$. Точки A, B, C, S лежат на одной окружности с диаметром AS , поэтому $\angle CBS = \angle CAS$. Кроме того, из условия следует, что $\angle BSP = \angle ASC = \frac{2}{3} \angle ASP$. Значит,

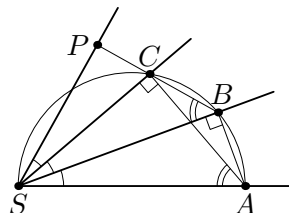


Рис. 6

$\angle PBS + \angle BSP = \angle CAS + \angle ASC = 90^\circ$. Утверждение доказано.

Комментарий. Замечено, что точки A, B, C, S лежат на одной окружности с диаметром AS — 2 балла.

- 9.5. Имеется таблица 101×101 , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 101^2 , если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. Пусть A — количество строк, в которых сумма чисел делится на 101^2 , а B — количество столбцов, в которых сумма чисел делится на 101^2 . Первый игрок выигрывает, если $A \geq B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

Ответ. Первый.

Решение. Положим $n = 101$. Опишем стратегию первого игрока. Пусть он разобьет на пары все числа от 1 до $n^2 - 1$, взяв в пару к числу k число $n^2 - k$. Заметим, что суммы чисел во всех парах равны n^2 .

Пусть первым ходом первый игрок поставит число n^2 в центральную клетку таблицы. Назовем строку и столбец, содержащие эту клетку, *центральными*.

Теперь, если второй игрок ставит какое-то число в любую клетку таблицы не в центральной строке, то первый игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно центральной строки. Если же второй игрок ставит какое-то число в клетку таблицы в центральной строке, то первый игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно центральной клетки таблицы. Несложно заметить, что первый игрок всегда сможет сделать такой ответный ход.

Действуя таким образом, он добьется того, что в каждом из столбцов стоят пары чисел с суммой n^2 и одно число из центральной строки. Во всех клетках центральной строки, кроме центральной, стоят натуральные числа, меньшие n^2 . Поэтому

сумма чисел в каждом столбце, кроме центрального, не будет делиться на n^2 ; сумма же чисел в центральном столбце будет делиться на n^2 . Поэтому $B = 1$. Осталось заметить, что в центральной строке стоят пары чисел с суммой n^2 и число n^2 . Поэтому сумма чисел в ней делится на n^2 . Значит, $A \geq 1 = B$, и первый игрок выиграет.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Разбор других значений n (т.е. стороны квадрата) — 0 баллов.

10 класс

- 10.1. Ненулевые числа a , b и c таковы, что числа $a(b - c)$, $b(c - a)$, $c(a - b)$, записанные в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда и числа $a(b^3 - c^3)$, $b(c^3 - a^3)$, $c(a^3 - b^3)$ также образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Числа образуют арифметическую прогрессию, поэтому $2b(c - a) = a(b - c) + c(a - b)$, откуда $3b(c - a) = 0$. Поскольку $b \neq 0$, получаем $c - a = 0$. Подставив в выражения $a(b^3 - c^3)$, $b(c^3 - a^3)$, $c(a^3 - b^3)$ число a вместо c , получаем тройку $a(b^3 - a^3)$, 0 , $a(a^3 - b^3)$. Сумма крайних чисел равна нулю, то есть удвоенному среднему числу. Значит, они образуют арифметическую прогрессию.

Комментарий. Доказано, что $a = c - 5$ баллов.

- 10.2. Вася задумал 4 различных натуральных числа. После этого он выписал на доску 6 чисел — все попарные суммы задуманных чисел. Какое наибольшее количество выписанных чисел могли оказаться простыми?

Ответ. 4.

Решение. Заметим, что сумма двух различных натуральных чисел больше 2, поэтому если какая-то сумма двух чисел равна простому числу, то это простое число нечетное. Поэтому количество простых чисел, написанных на доске, не превосходит количества нечетных чисел, записанных на доске. Если все 4 задуманных Васей числа четны (или все 4 нечетны), то на доску будут выписаны только четные числа. Если Вася задумал 1 четное число и 3 нечетных (или 1 нечетное число и 3 четных), то на доску будут выписаны 3 четных числа и 3 нечетных. Наконец, если Вася задумал 2 четных числа и 2 нечетных, то на доску будут выписаны 2 четных числа и 4 нечетных. Таким образом, на доску будет выписано не более 4 нечетных чисел. То есть простых чисел не больше 4.

Ровно 4 простых числа могли быть выписаны, например, если Вася задумал числа 1, 2, 3, 4. Тогда простыми числами,

выписанными на доску, будут $1 + 2 = 3$, $1 + 4 = 5$, $3 + 2 = 5$ и $3 + 4 = 7$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что может быть выписано не более 4 простых чисел — 4 балла.

Приведен пример, в котором выписано 4 простых числа — 2 балла.

- 10.3. Рассматриваются прямоугольные треугольники, у которых вершина прямого угла находится в начале координат, а две другие вершины — на ветвях параболы $y = x^2$. Докажите, что для каждого такого треугольника произведение расстояний от вершин острых углов до оси Oy равно 1.

Решение. Пусть $O(0; 0)$, $A(a; a^2)$, $B(b; b^2)$, где $b < 0 < a$ — координаты вершин данного треугольника. Он — прямоугольный, поэтому скалярное произведение векторов \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{OB} равно нулю. Имеем $\overrightarrow{OA} = (a; a^2)$, $\overrightarrow{OB} = (b; b^2)$, поэтому $ab + a^2b^2 = 0$. Отсюда, с учетом того, что $ab \neq 0$, получаем $ab = -1$. Но a и $|b|$ как раз и есть расстояния от вершин острых углов до оси Oy .

- 10.4. В треугольник ABC вписана окружность ω . На стороне AB выбраны точки A_1 , C_2 и B_3 , на стороне BC — точки B_1 , A_2 и C_3 , на стороне CA — точки C_1 , B_2 и A_3 так, что отрезки A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 касаются окружности ω , а четырехугольники $AA_1A_2A_3$, $BB_1B_2B_3$ и $CC_1C_2C_3$ — параллелограммы. Докажите, что сумма площадей треугольников ABA_3 , BCB_3 и CAC_3 равна площади треугольника ABC .

Решение. Поскольку $AA_1A_2A_3$ — параллелограмм, имеем $A_1A_2 \parallel AC$, то есть треугольники ABC и A_1BA_2 подобны. Пусть h_b — длина высоты треугольника ABC , проведенной из вершины B . Тогда высота треугольника BA_2A_1 , проведенная из вершины B , имеет длину $h_b - 2r$, где r — радиус окружности ω . Из подобия получаем, что $A_1A_2 : AC = (h_b - 2r) : h_b$. Поэтому, с учетом равенства

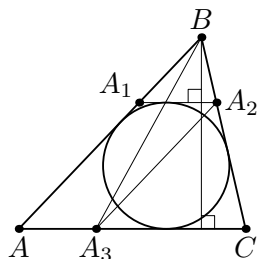


Рис. 7

$AA_3 = A_1A_2$, получаем: $S(ABA_3) = \frac{1}{2} h_b \cdot \frac{h_b - 2r}{h_b} \cdot AC$, то есть $S(ABA_3) = S - \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot AC = S - r \cdot AC$, где S — площадь треугольника ABC . Записав аналогичные равенства, мы получим: $S(ABA_3) + S(BCB_3) + S(CAC_3) = 3S - r(AB + BC + CA) = = 3S - 2S = S$.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что окружность ω является вневписанной для треугольника A_1BA_2 , поэтому коэффициент подобия треугольников A_1BA_2 и ABC равен $\frac{r}{r_b}$, где r_b — радиус вневписанной окружности треугольника ABC , касающейся стороны AC . Отсюда $S(ABA_3) = \frac{AA_3}{AC} S = = \frac{r}{r_b} S$. Значит, сумма площадей данных трёх треугольников равно $\frac{r}{r_a} S + \frac{r}{r_b} S + \frac{r}{r_c} S = S$ (последнее равенство следует из того, что $S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$).

- 10.5. Имеется таблица 100×100 , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 10 000, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. После этого подсчитываются суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов. Пусть A — наибольшая из сумм чисел в строках, а B — наибольшая из сумм чисел в столбцах. Первый игрок выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

Ответ. Второй.

Решение. Положим $n = 100$. Опишем стратегию второго игрока. Пусть он разобьет на пары все числа от 1 до n^2 , взяв в пару к числу k число $n^2 + 1 - k$. Заметим, что суммы чисел во всех парах равны $n^2 + 1$. Теперь, если первый игрок ставит какое-то число в любую клетку таблицы, то второй игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно средней вертикали (вертикальной оси симметрии таблицы). Несложно заметить, что второй игрок всегда сможет сделать такой ответный ход.

Действуя таким образом, он добьется того, что в каждой из строк сумма чисел будет равна $\frac{n}{2}(n^2 + 1)$. То есть он добьется того, что $A = \frac{n}{2}(n^2 + 1)$. Осталось заметить, что сумма чисел во всей таблице равна $\frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$. Поэтому в каком-то столбце сумма чисел будет не меньше $\frac{n}{2}(n^2 + 1)$ (иначе сумма чисел во всей таблице будет меньше $\frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$). Значит, $B \geq \frac{n}{2}(n^2 + 1) = A$, и второй игрок выиграет.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Разбор других значений n (т.е. стороны квадрата) — 0 баллов.

11 класс

- 11.1. Докажите, что при любых α и β хотя бы одно из уравнений $x^2 - 2x \sin \alpha + \sin^2 \beta = 0$ и $x^2 - 2x \cos \alpha + \cos^2 \beta = 0$ имеет решение.

Решение. Предположим, что оба уравнения не имеют решений. Это означает, что их дискриминанты отрицательны, то есть $4(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) < 0$ и $4(\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta) < 0$, откуда $\sin^2 \alpha < \sin^2 \beta$ и $\cos^2 \alpha < \cos^2 \beta$. Сложив эти неравенства, получаем $1 < 1$. Противоречие.

- 11.2. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих чисел была простым числом?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что числа получилось расставить требуемым образом. Заметим, что сумма любых пяти чисел от 1 до 100 больше 2, поэтому если какая-то сумма пяти чисел равна простому числу, то это простое число нечетное. Пусть по кругу подряд стоят числа a, b, c, d, e, f . Тогда числа $a + b + c + d + e$ и $b + c + d + e + f$ — простые нечетные. Но тогда их разность, равная $a - f$ будет четной как разность двух нечетных чисел. Отсюда следует, что числа a и f имеют одинаковую четность. Таким образом, любые два числа, стоящие через четыре, имеют одинаковую четность.

Занумеруем числа по кругу. Тогда числа с номерами 1, 6, 11, ..., 96 будут иметь одинаковую четность. Аналогично, числа в каждой из групп: с номерами 2, 7, 12, ..., 97, с номерами 3, 8, 13, ..., 98, с номерами 4, 9, 14, ..., 99 и с номерами 5, 10, 15, ..., 100 будут иметь одинаковую четность. Таким образом, мы получили 5 групп по 20 чисел, в каждой из которых числа имеют одинаковую четность. Значит, по кругу стоит $20k$ четных и $20m$ нечетных чисел. Но среди чисел от 1 до 100 ровно 50 четных и 50 нечетных. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что любые два числа, стоящие через четыре, имеют одинаковую четность — 3 балла.

- 11.3. Обозначим через O вершину параболы $y = ax^2$. Назовем пря-

мую, пересекающую параболу в двух точках A и B , *особой*, если угол AOB — прямой. Докажите, что все особые прямые проходят через одну точку.

Решение. Пусть $y = kx + b$ — уравнение особой прямой, проходящей через точки A и B , которые имеют координаты $A(x_1; ax_1^2)$, $B(x_2; ax_2^2)$. Тогда, во-первых, x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 = kx + b$, и по теореме Виета их произведение равно $-b/a$. Во-вторых, из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{OA} = (x_1; ax_1^2)$ и $\overrightarrow{OB} = (x_2; ax_2^2)$ следует равенство нулю их скалярного произведения, то есть $x_1x_2 + a^2x_1^2x_2^2 = 0$, откуда с учетом условия $x_1x_2 \neq 0$ получаем $a^2x_1x_2 = -1$. Но, как было показано выше, $x_1x_2 = -b/a$. Значит, $ab = 1$. Это означает, что $b = \frac{1}{a}$, то есть все особые прямые $y = kx + b$ проходят через точку $K\left(0; \frac{1}{a}\right)$.

- 11.4. Дана треугольная пирамида $SABC$. На ребрах SA , SB и SC выбраны точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно так, что отрезки BA_1 и CA_1 — биссектрисы треугольников BSA и CSA соответственно; отрезки AB_1 и CB_1 — биссектрисы треугольников ASB и CSB соответственно; а отрезки AC_1 и BC_1 — биссектрисы треугольников ASC и BSC соответственно. Пусть SH — высота пирамиды. Докажите, что если $BC > CA > AB$, то $BC \cdot HA < CA \cdot HB < AB \cdot HC$.

Решение. Пусть ребра пирамиды есть $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, а также $SA = a_1$, $SB = b_1$, $SC = c_1$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BS}{BA} = \frac{SA_1}{AA_1} = \frac{CS}{CA}$. Значит, $BS \cdot CA = CS \cdot BA$, то есть $b \cdot b_1 = c \cdot c_1$. Аналогично получаем, что $b \cdot b_1 = c \cdot c_1 = a \cdot a_1$. Пусть $SH = h$. Возводя доказываемое неравенство в квадрат, получаем, что нам нужно доказать неравенство $a^2(a_1^2 - h^2) < b^2(b_1^2 - h^2) < c^2(c_1^2 - h^2)$, если $a > b > c$. Но это неравенство сразу следует из того, что $a^2a_1^2 = b^2b_1^2 = c^2c_1^2$.

- 11.5. Имеется таблица 111×111 , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 111^2 , если такого числа еще нет в таблице. Игроки

записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. После этого подсчитываются суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов. Пусть A — наибольшая из сумм чисел в строках, а B — наибольшая из сумм чисел в столбцах. Первый игрок выигрывает, если $A \geq B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

Ответ. Первый.

Решение. Положим $n = 111$. Опишем стратегию первого игрока. Пусть он разобьет на пары все числа от 1 до $n^2 - 1$, взяв в пару к числу k число $n^2 - k$. Заметим, что суммы чисел во всех парах равны n^2 .

Первым ходом первый игрок поставит число n^2 в центральную клетку таблицы. Назовем строку и столбец, содержащие эту клетку, *центральными*. Теперь, если второй игрок ставит какое-то число в клетку таблицы не в центральной строке, то первый игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно центральной строки. Если же второй игрок ставит какое-то число в клетку таблицы в центральной строке, то первый игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно центральной клетки таблицы. Несложно заметить, что первый игрок всегда сможет сделать такой ответный ход.

Действуя таким образом, он добьется того, что в каждом из столбцов стоят пары чисел с суммой n^2 и одно число из центральной строки. Во всех клетках центральной строки, кроме центральной, стоят натуральные числа, меньшие n^2 . Поэтому сумма чисел в центральном столбце будет равна $\frac{n-1}{2} n^2 + n^2$, а в каждом столбце, кроме центрального, сумма будет меньше, чем в центральном. Поэтому $B = \frac{n-1}{2} n^2 + n^2$. Осталось заметить, что сумма чисел в центральной строке будет равна $\frac{n-1}{2} n^2 + n^2$. Значит, $A \geq \frac{n-1}{2} n^2 + n^2 = B$, и первый игрок выигрывает.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Разбор других значений n (т.е. стороны квадрата) — 0 баллов.