

5 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 5.1. Если в комнату войдет мама, то суммарный возраст находящихся в комнате увеличится в 4 раза, а если вместо нее войдет папа — суммарный возраст увеличится в 5 раз. Во сколько раз увеличится суммарный возраст, если в комнату войдут папа с мамой?
- 5.2. За столом сидят 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). У них спросили, кого среди них больше. Пятеро сказали: «Рыцарей», трое сказали: «Лжецов», а двое сказали: «Поровну». Сколько рыцарей могло быть среди сидящих за столом?
- 5.3. Можно ли в квадрате 5×5 покрасить 8 клеток так, чтобы у каждой покрашенной клетки было ровно 3 непокрашенных соседних клетки? Клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона.
- 5.4. Петя задумал четырехзначное число, а затем для каждого из двух цифр задуманного числа записал их сумму. В итоге он получил 6 чисел. Могла ли сумма этих шести чисел равняться 71?
- 5.5. В первенстве России по футболу участвуют 18 команд. За победу в матче дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В первом круге каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Оказалось, что все они при этом набрали разное число очков. Могла ли команда, занявшая в первом круге второе место, набрать 49 очков?

6 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 6.1. Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 11 баранок также стоят дороже 100 рублей. Правда ли, что 1 калач и 3 баранки стоят дороже 50 рублей?
- 6.2. У Олега есть семь прямоугольников размерами 1×1 , 1×2 , 1×3 , 1×4 , 1×5 , 1×6 и 1×7 . Помогите ему сложить из них два прямоугольника одинаковой площади, но разного периметра.
- 6.3. Вася, Петя, Миша и Толя вскладчину купили радиоуправляемый самолет, причем каждый из них заплатил целое число рублей. У ребят спросили, сколько они потратили денег.

Вася сказал: «Я заплатил ровно четверть цены самолета.»

Петя сказал: «Я заплатил на 35 рублей больше Миши.»

Толя сказал: «Я заплатил на 50 рублей меньше Васи.»

Докажите, что кто-то из ребят ошибся в подсчетах.

- 6.4. Существует ли набор из 4 гирь такой, что с их помощью можно взвесить на чашечных весах любое целое количество килограммов от 10 до 24? Гири можно ставить на обе чашки весов.
- 6.5. За круглым столом сидят 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду), причем известно, что среди них есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь. Какое наибольшее количество из сидящих за столом может сказать: «Один из моих соседей лжец, а другой — рыцарь»?

7 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 7.1. На доске написаны две дроби, сумма которых равна 1. Из числителя и знаменателя первой дроби вычли одно и то же число и полученную дробь записали вместо первой. Оказалось, что сумма написанных дробей стала равняться $\frac{5}{6}$. Покажите, как такое могло получиться.

- 7.2. У Олега есть семь прямоугольников размером 1×1 , 1×2 , 1×3 , 1×4 , 1×5 , 1×6 и 1×7 . Помогите ему сложить из них два прямоугольника одинакового периметра, но разной площади.

- 7.3. Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 13 баранок также стоят дороже 100 рублей. Верно ли, что 1 калач и 4 баранки стоят дороже 50 рублей?

- 7.4. Четырехзначное число N , не все цифры которого одинаковы, умножили на каждую из его цифр. Могло ли в результате получиться натуральное число, которое делится на 1111?

- 7.5. В пустую комнату по очереди зашли 10 человек — лжецов и рыцарей. Каждый из них, заходя в комнату, подсчитывал количество лжецов и рыцарей в комнате, включая себя, записывал на листке некоторое утверждение и клал листок на стол. Известно, что все утверждения рыцарей были правильными, лжецов — неправильными, а в результате на столе оказалось 10 листков бумаги, на которых было написано:

«Сейчас в комнате 1 лжец.»

«Сейчас в комнате 2 лжеца.»

«Сейчас в комнате 3 лжеца.»

⋮

«Сейчас в комнате 10 лжецов.»

Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

8 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 8.1. Найдите какое-нибудь натуральное число N такое, что если к нему прибавить его наибольший делитель, отличный от N , то получится 2016.
- 8.2. Самый быстрый бегун в классе бежит на 0,1 м/с быстрее второго, на 0,2 м/с быстрее третьего и на 0,3 м/с быстрее четвертого. Для эстафеты 2×400 м составили две команды. В первую взяли самого быстрого и самого медленного из этих четырех, во вторую — оставшихся двух школьников. Какая команда быстрее пробежит эстафету? (Каждый бегун бежит дистанцию с постоянной скоростью.)
- 8.3. Сумма двух дробей равна 1. Из числителей и знаменателей этих дробей вычли одно и то же число. Может ли сумма полученных дробей равняться $\frac{1}{2016}$?
- 8.4. Пусть $ABCD$ и $DEFG$ — параллелограммы такие, что точка D лежит на отрезке AG , точка E — на отрезке DC , и при этом $AB = DG = 2AD = 2DE$. Пусть M — середина отрезка DG . Докажите, что CG — биссектриса угла MCF .
- 8.5. Имеется таблица 100×100 , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 10 000, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. Пусть A — количество строк, в каждой из которых сумма чисел делится на 10 000, а B — количество столбцов, в каждом из которых сумма чисел делится на 10 000. Первый игрок выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

9 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 9.1. Докажите, что при любых a и b хотя бы одно из уравнений $x^2 - 2ax + ab = 0$ и $x^2 - 2bx + ab = 0$ имеет решение.
- 9.2. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел была простым числом?
- 9.3. Четырех школьников, которые бегают с разной скоростью, разбили на две команды по два человека, и в первую включили самого быстрого из них. Вначале команды соревновались в том, бегуны какой команды раньше встретятся, если на дистанции в 400 м они побегут навстречу друг другу. Оказалось, что командам потребовалось одинаковое время. А какая команда быстрее пробежит эстафету 2×400 м? (В эстафете каждый спортсмен пробегает 400 метров. Считается, что скорость бегунов во время забегов постоянна.)
- 9.4. В остром угле с вершиной S проведены трисектрисы: два луча, выходящих из точки S и делящих данный угол на три равные части. Из точки A , лежащей на одной стороне угла, опущены перпендикуляры AB и AC на эти трисектрисы. Докажите, что прямая BC перпендикулярна второй стороне угла.
- 9.5. Имеется таблица 101×101 , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 101^2 , если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. Пусть A — количество строк, в которых сумма чисел делится на 101^2 , а B — количество столбцов, в которых сумма чисел делится на 101^2 . Первый игрок выигрывает, если $A \geq B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

10 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 10.1. Ненулевые числа a , b и c таковы, что числа $a(b - c)$, $b(c - a)$, $c(a - b)$, записанные в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда и числа $a(b^3 - c^3)$, $b(c^3 - a^3)$, $c(a^3 - b^3)$ также образуют арифметическую прогрессию.
- 10.2. Вася задумал 4 различных натуральных числа. После этого он выписал на доску 6 чисел — все попарные суммы задуманных чисел. Какое наибольшее количество выписанных чисел могли оказаться простыми?
- 10.3. Рассматриваются прямоугольные треугольники, у которых вершина прямого угла находится в начале координат, а две другие вершины — на ветвях параболы $y = x^2$. Докажите, что для каждого такого треугольника произведение расстояний от вершин острых углов до оси Oy равно 1.
- 10.4. В треугольник ABC вписана окружность ω . На стороне AB выбраны точки A_1 , C_2 и B_3 , на стороне BC — точки B_1 , A_2 и C_3 , на стороне CA — точки C_1 , B_2 и A_3 так, что отрезки A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 касаются окружности ω , а четырехугольники $AA_1A_2A_3$, $BB_1B_2B_3$ и $CC_1C_2C_3$ — параллелограммы. Докажите, что сумма площадей треугольников ABA_3 , BCB_3 и CAC_3 равна площади треугольника ABC .
- 10.5. Имеется таблица 100×100 , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 10 000, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. После этого подсчитываются суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов. Пусть A — наибольшая из сумм чисел в строках, а B — наибольшая из сумм чисел в столбцах. Первый игрок выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

11 класс

Задачи можно решать в любом порядке. Ответы в заданиях необходимо обосновывать.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

- 11.1. Докажите, что при любых α и β хотя бы одно из уравнений $x^2 - 2x \sin \alpha + \sin^2 \beta = 0$ и $x^2 - 2x \cos \alpha + \cos^2 \beta = 0$ имеет решение.
- 11.2. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих чисел была простым числом?
- 11.3. Обозначим через O вершину параболы $y = ax^2$. Назовем прямую, пересекающую параболу в двух точках A и B , *особой*, если угол AOB — прямой. Докажите, что все особые прямые проходят через одну точку.
- 11.4. Дана треугольная пирамида $SABC$. На ребрах SA , SB и SC выбраны точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно так, что отрезки BA_1 и CA_1 — биссектрисы треугольников BSA и CSA соответственно; отрезки AB_1 и CB_1 — биссектрисы треугольников ASB и CSB соответственно; а отрезки AC_1 и BC_1 — биссектрисы треугольников ASC и BSC соответственно. Пусть SH — высота пирамиды. Докажите, что если $BC > CA > AB$, то $BC \cdot HA < CA \cdot HB < AB \cdot HC$.
- 11.5. Имеется таблица 111×111 , все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 111^2 , если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. После этого подсчитываются суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов. Пусть A — наибольшая из сумм чисел в строках, а B — наибольшая из сумм чисел в столбцах. Первый игрок выигрывает, если $A \geq B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?