**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016-2017 учебном году**

**Задания**

**10 класс**

1. Решите уравнение:

**2.** Найти все числа x, принадлежащие отрезку [0;1], и удовлетворяющие уравнению

sin4(cos43x)+cos4(cos43x)=1.

**3.** Докажите, что уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

**4.** Назовем натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.

**5.** На сторонах *АС* и *ВС* треугольника *АВС* выбраны точки *M* и *N* соответственно так, что *MN||AB*. На стороне *АС* отмечена точка *К* так, что *СК=АМ*. Отрезки *AN* и *BK* пересекаются в точке *F*. Докажите, что площади треугольника *ABF* и четырехугольника *KFNC* равны.

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016-2017 учебном году**

**Решения**

**10 класс**

1. **Ответ**: x= - 1

**Решение**.

Так как в левой части данного уравнения 1008 слагаемых, то , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно 1. Следовательно, x=-1.

*Критерий проверки:*

|  |  |
| --- | --- |
| 5 баллов | Приведено полное обоснованное решение |
| 0 баллов | Приведен только ответ |

**2. Ответ.** x=π/6

**Решение.** Сравнивая данное уравнение с основным тригонометрическим тождеством, заключаем, что оно может иметь решения лишь при условии cos43x=πn/2, где n*~~C~~***N**, но, учитывая область значений функции cos(x), получаем, что n=0.

*Критерий проверки:*

|  |  |
| --- | --- |
| 5 баллов | Приведено полное обоснованное решение |
| 0 баллов | Приведен только ответ |

**3. Решение**. Перепишем уравнение в виде и разложим на множители его правую часть: . Полученное равенство, в частности, выполняется, если

Решая эту систему, получим и . При любом четном натуральном значении указанные n и m принимают натуральные значения, а тройка (l;n;m) является решением уравнения.

Выпишем найденные решения в явном виде: , где t – любое натуральное число, большее единицы. Понятно, что таких троек чисел бесконечно много. Так как исходное уравнение является следствием записанной системы уравнений, то множество решений уравнения включает в себя все найденные решения.

*Учащиеся могут сразу любую тройку решений уравнения, порождающую бесконечную серию решений, и не обязаны объяснять, каким образом она получена.*

*Критерий проверки:*

|  |  |
| --- | --- |
| 5 баллов | Приведено полное обоснованное решение |
| 4 балла | Предъявлена верная тройка решений, порождающая бесконечную серию, и доказано, что она действительно является решением данного уравнения |
| 2 балла | Предъявлена верная тройка решений, порождающая бесконечную серию, но отсутствует обоснование того, что эта тройка действительно является решением |
| 0 баллов | Задача не решена |

**4. Решение**. Любой почти квадрат можно записать в виде

*. В числителе и знаменателе последней дроби, очевидно, также стоят почти квадраты.*

*Критерий проверки:*

|  |  |
| --- | --- |
| 5 баллов | Приведено полное обоснованное доказательства |
| 0 баллов | Задача не доказана |

**5. Решение**. Пусть . Тогда (рисунок 1)

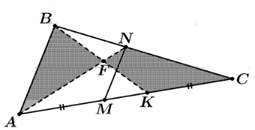


Рисунок 1

Следовательно, . Вычтем из обеих частей этого равенства площадь их общей части треугольника BFN, тогда , то есть , что и требовалось доказать.

В приведенном решении никак не использовался порядок расположения точек M и K на отрезке АС, поэтому не требуется отдельно рассматривать случай когда точка К лежит между точками A и М.

*Критерий проверки:*

|  |  |
| --- | --- |
| 5 баллов | Приведено полное обоснованное решение |
| 2 баллов | Равенство площадей доказано для какого-либо нетривиального частного случая |
| 0 баллов | Задача не решена |