**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016 – 2017 учебном году**

**Задания**

**11 класс**

**1.** Сколько корней имеет квадратное уравнение , если , а числа *a* и *c* различны?

**2.** Про углы треугольника *ABC* известно, что и. Найдите величину угла *С*.

**3.** Решите уравнение: .

**4.** Верно ли, что графики функций и имеет ровно одну общую точку?

**5.** Из точки, не лежащей в плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и три наклонные, проекции которых на данную плоскость равны a, b и c, как представлено на рисунке 1. Найдите длину перпендикуляра, если наклонные образуют с плоскостью углы, сумма которых равна 90°.

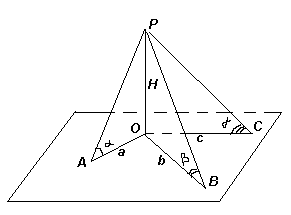


Рис. 1. Чертеж к задаче №5

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016-2017 учебном году**

**Решения**

**11 класс**

**1. Ответ:** 2 корня

**Первый способ решения**. . Так как числа *a* и *c* различны, то D>0, т.е. уравнение имеет два корня.

**Второй способ решения**. или . Пусть . Тогда , а . В первом случае уравнение имеет корни и , во втором случае имеет корни и . Корни совпадать не могут, так как .

*Критерий проверки:*

|  |  |
| --- | --- |
| 5 баллов | Верное обоснованное решение |
| 2 балла | Не использовано условие |
| 0 баллов | Приведен только ответ |

**2. Ответ:** 90°

**Первый способ решения.** Возведем каждое из данных равенств в квадрат, тогда и . Сложим полученные равенства и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и формулой синуса суммы: . Следовательно, *A+B=90°*, тогда *С=180°-(А+В)=90°.*

**Второй способ решения.** Почленно сложим исходные равенства:

. Так как , то последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда . Следовательно, *А+45°=90°* и *В+45°=90°*, то есть *А=В=45°*. Значит, *С=90°*.

**Третий способ решения.** Почленно перемножим исходные равенства и используем формулы двойного аргумента и косинуса разности: . Так как и , то последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда . Следовательно, *A=B=45°*, то есть *C=90.*

В каждом из приведенных способов решения на заключительном этапе необходимо убедиться, что полученные значения удовлетворяют каждому из данных неравенств, что соответствует действительности.

*Критерий проверки:*

|  |  |
| --- | --- |
| 5 баллов | Полное обоснованное решение |
| 4 балла | Приведены верные рассуждения и получен верный ответ, но использованы следствия из данных равенств и при этом не сделана проверка |
| 2 балла | Приведен только верный ответ или верный ответ, полученный рассмотрением частных случаев |
| 0 баллов | Задача решена неверно |

**3. Ответ:**

**Первый способ решения.** Пусть , . Тогда . Мы получили, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел равно их среднему квадратичному. Значит, . Этот же результат можно получить и явно: . Таким образом, , откуда

**Первый способ решения.** Пусть . Тогда . Рассмотрим график функции . Полученное равенство означает, что . Если , то точка с координатами является серединой отрезка с концами в точках (*y;f(y)*) и (z*;f(z)*), то есть лежит ниже графика, представленного на рисунке 1. Следовательно, *y=z*, значит, , откуда .

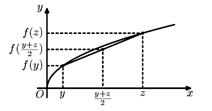


Рисунок 1.

*Критерий проверки:*

|  |  |
| --- | --- |
| 5 баллов | Приведено обоснованное решение |
| 0 баллов | Приведен только верный ответ |

**4. Ответ:** нет, не верно.

**Решение**. Пусть . Заметим, что *f(x)* непрерывна (разность двух непрерывных функций) и *f(0)= 1>0, f(2)= -4<0? f(10)=1024-1000>0*. Таким образом, *f(x)* имеет нули на интервалах (0;2) и (2;10). Следовательно, графики данных функций имеют не менее двух общих точек.

*Критерий проверки:*

|  |  |
| --- | --- |
| 5 баллов | Приведено обоснованное решение |
| 3 балла | Приведено верное решение и верный ответ, но отсутствует ссылка на непрерывность функций |
| 0 баллов | Приведен только верный ответ |

**5. Ответ: .**

**Решение.** Пусть PO – перпендикуляр к данной плоскости; РА, РВ и РС – данные наклонные (см. рисунок). Тогда ОА = а; ОВ = b; OC = c. Введем также обозначения: РО = H; ∠PAO = α; ∠PBO = β; ∠PCO = γ. По условию α + β + γ = 90°.

Из прямоугольных треугольников РОА, РОВ и РОС получим: ; ; .

Кроме того, . Подставив значение тангенсов, получим уравнение: . Его решение: .

*Критерий проверки:*

|  |  |
| --- | --- |
| 5 баллов | Приведено обоснованное решение, получен верный ответ |
| 3 балла | Уравнение составлено верно, но при его решении допущена вычислительная ошибка, не повлиявшая на размерность ответа и на его симметричность относительно переменных a, b и c |
| 1 балл | уравнение составлено верно, но оно не решено или в его решении есть ошибки, которые привели несимметричному ответу или ответу другой размерности |
| 0 баллов | Приведен только верный ответ |